UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA

UNAN-MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDISCIPLINARIA

FAREM-CHONTALES

DOCTORADO EN MATEMÁTICA APLICADA

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Matemática Aplicada

Geogebra como herramienta de apoyo para el aprendizaje de algunos temas sobre triángulos en Geometría Euclidiana

Autor: **MS.c. Armando José Huete Fuentes**

Director de Tesis: **Ph.D. Antonio Parajón Guevara**

Febrero, 2018

CARTA AVAL

ANTONIO PARAJÓN GUEVARA, profesor titular del Departamento de Matemática de la Facultad de Educación e Idiomas de Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua.

CERTIFICA que la presente memoria de investigación:

Geogebra como herramienta de apoyo para el aprendizaje de algunos temas sobre triángulos en Geometría Euclidiana

Ha sido realizada bajo su dirección en el *PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICA APLICADA* por el Máster Armando José Huete Fuentes, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Matemática Aplicada.

Y para que así conste, en cumplimiento con la normativa vigente de posgrado, autoriza su presentación ante la Facultad Regional Multidisciplinaria de Chontales (FAREM-Chontales) para que pueda ser tramitada su lectura y Defensa pública.

Managua, Nicaragua, 12 de Febrero de 2018.

EL DIRECTOR DE LA TESIS

Antonio Parajón Guevara, MS.c – PH.D

Resumen

El presente trabajo es una integración del Software de Geometría Dinámica "Geogebra" en algunos tópicos referidos al estudio del triángulo. Consiste en el diseño de varias actividades para temas de bachillerato. El propósito es ofrecer al lector iniciar a integrar la tecnología en el estudio de la geometría, materiales que permitan al estudiante experimentar diferentes aspectos relacionados a la visualización y manipulación virtual de algunos objetos matemáticos.

La propuesta permite profundizar en temas sobre las rectas y puntos notables en un triángulo, de manera que los estudiantes no se queden con una visión extremadamente reducida de esta importante área de conocimiento. El material que se desarrolló se sustenta en aspectos esenciales de la visualización, la manipulación y la simulación.

Palabras claves: Triángulo, rectas notables en un triángulo, puntos notables en un triángulo, visualización, simulación, manipulación, geometría dinámica, Geogebra.

Dedicatoria

A Dios primeramente por la misericordia que ha tenido conmigo y mi familia.

A mis padres, Armando e Idalia, que siempre me inculcaron los valores de esfuerzo y sacrificio en los estudios, y me han conducido a ser el profesor que soy hoy en día.

A mis abuelos y hermanos, que siempre se han interesado por cómo me ha ido en los estudios y me han apoyado en los peores momentos.

Y por último, pero no menos importante, a mí esposa Yelsin. Por las importantes orientaciones que me ha dado y su apoyo personal.

Agradecimientos

A la UNAN-Managua, por darme la oportunidad de superarme profesionalmente para aportar a mi país, en el ámbito de la enseñanza de la Matemática Superior.

A mi director de tesis Ph.D A. Parajón. Sin su esfuerzo y orientación este proyecto hubiera sido imposible.

A todos mis compañeros de trabajo y profesores, que me han dado sus aportes sobre las cuestiones que les he planteado sobre el trabajo.

Índice

CAPÍTULO 1

Diagnóstico de la Investigación

1.1. Introducción

La Educación Matemática es un campo fértil de investigación, pues hay muchas posibilidades de estudio sobre cómo los estudiantes desarrollan sus conocimientos y habilidades en matemática.

Muchos de los problemas en Educación Matemática se refieren a la caracterización de significados institucionales y personales de los objetos matemáticos, desarrollo y aplicación de criterios de idoneidad didáctica de procesos de estudio matemático, diseño, desarrollo y evaluación del currículo, los métodos de enseñanza y aprendizaje en matemática, la formación Matemática y didáctica del profesor, la forma de aprender del estudiante.

Uno de los mayores problemas en matemática está relacionado con el aprendizaje de la Geometría, ya que añade nociones relacionadas con la representación gráfica de los objetos teóricos y estos resultan difíciles de aprehender en la mente de los estudiantes.

En la búsqueda por mejorar el aprendizaje en Geometría, países como México, Brasil, Uruguay, Paraguay, Argentina, Chile, Venezuela y España, han incorporado el uso de Software de Geometría Dinámica (SGD), tales como: Cabri-Géométre, Geometer's Sketchpad, The Geometry Inventor, Geogebra, etc. Los resultados al utilizarlos han sido positivos, al punto que el docente adquiere el papel de guía y asesor en el progreso de sus estudiantes, mientras ellos asumen el centro de este proceso.

En esa dirección, la Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI), en 1995, centró su tema de estudio en las “perspectivas sobre la enseñanza de la Geometría para el siglo XXI”. En el Documento de discusión para un estudio ICMI se destaca la necesidad de discutir sobre la identificación de los retos más importantes y las tendencias emergentes para el futuro; así como los impactos didácticos potenciales en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría a partir del aprovechamiento y la aplicación de nuevos métodos de enseñanza. Se destaca, además, el interés en el uso de materiales didácticos (manipulables y visuales) como un recurso importante para mejorar la calidad de la enseñanza de la geometría.[1]

El Software de Geometría Dinámica (SGD) proporciona un medio que sirve como campo de experimentación de las representaciones de los objetos geométricos, pero igual que cualquier otra herramienta, es necesario que el usuario (el estudiante) interiorice sus rasgos característicos, como es el carácter dinámico de las construcciones que se pueden realizar. Además, no ofrece directamente la posibilidad de construir demostraciones, pero si proporciona la opción de verificar las construcciones por medios diferentes a la deducción y que están más ligados a la experiencia.

Por lo mencionado anteriormente, esta tesis es una propuesta de integración de herramientas tecnológicas en Geometría Euclidiana. La propuesta consiste en una serie de recorridos didácticos para el profesor, estructurados con base en materiales diseñados para el aprendizaje de los alumnos. Se incorporan elementos de simulación, visualización y manipulación virtual.

Con este enfoque se busca optimizar y enriquecer el proceso de enseñanza, y ampliar la visión de los estudiantes en su aprendizaje. Basados en este fin, se planteó el diseño y desarrollo de un material didáctico, que le permita al alumno interactuar con conceptos, propiedades y construcciones básicas de Geometría Euclidiana.

Es necesario señalar que el uso del software no implica la eliminación del papel y lápiz, más bien se trata de lograr una simbiosis adecuada que permita usar lo mejor de la tecnología dependiendo de la tarea matemática por realizar.

En cuanto a la estructura de la tesis, esta consta de tres capítulos, conclusiones, perspectiva de futuro, bibliografía y anexos.

En el primer capítulo se presenta la introducción, el estado del arte, el planteamiento del problema, la justificación, las preguntas y objetivos que regirán la dirección del trabajo de investigación sobre la influencia del Geogebra como herramienta de apoyo para el

---

[1] Documento de discusión para un estudio ICMI. En http://www.xtec.es. 2002

aprendizaje de algunos temas de Geometría Euclidiana. Se describe las ideas teóricas que se consideran necesarias para abordar la propuesta didáctica. Se abordan algunas características sobre la enseñanza de la geometría y el uso de las TIC en el aula. Además se considera el Modelo de Van Hiele como fundamento teórico en la enseñanza de la geometría, esto debido a los niveles de conocimiento que plantea. Asimismo se justifica la propuesta con respecto a la visualización, la manipulación y la simulación.

En el segundo capítulo se exponen las actividades diseñadas, y en el tercero la simulación de ellas con la finalidad de mostrar justificaciones que las sustentan, la estructura y las relaciones que guardan, así como las respuestas esperadas a cada una de las tareas.

Posteriormente se presentan las conclusiones y referencias bibliográficas.

1.2. Estado del arte

Actualmente, han sido varios los investigadores que se han preocupado por muchos aspectos sobre el aprendizaje y la enseñanza de la Geometría. Gracias a los diferentes estudios que se han realizado en el campo de la Educación Matemática se conoce que en la enseñanza de la geometría ha primado el modelo tradicional.

Las ideas principales de algunas investigaciones son: la incorporación del Software de Geometría Dinámica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría (Larios, V. 2005; Flores, J. 2008; Avilés, A. 2014), la enseñanza de la Geometría basada en los niveles de razonamiento de Van Hiele (Jaime, A. 1993; Kerlegand 2008, Villiers, M. 1996), la experimentación en matemática, la demostración (Serres, 2002; Mora 2003). Las fundamentaciones teóricas de cada una de estas concepciones de enseñanza y, obviamente, de aprendizaje son muy amplias, y se nutren sustancialmente de diferentes disciplinas relacionadas con la pedagogía, la didáctica y las áreas afines a la matemática propiamente dicha.

A pesar de lo anterior, aún falta mucho por hacer en términos del diseño de materiales de apoyo para el profesor. Efectivamente, como señalan Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche (2001) con respecto a su estudio sobre más de 600 publicaciones sobre el uso de las TIC en la educación matemática, la mayoría de los trabajos se concentran en describir las posibilidades de un software más que en el diseño de actividades que contribuyan a la enseñanza-aprendizaje de la geometría.

Villers (1996) considera que en la enseñanza de la geometría ha primado el modelo tradicional, basado en métodos memorísticos, que ha generado un proceso de menor comprensión hacia sus contenidos causando que este tema y área parezca compleja y aburrida y no motive al estudiante a querer explorarla. En este sentido, Blanford[2] considera que es un método vicioso entregarle a los niños definiciones acabadas para que sean memorizadas, ya que ellos pueden construir esta definición en la medida en que sean estimulados con preguntas adecuadas, considerándose esto altamente educativo.

Por otro lado Freudenthal[3] plantea que en la enseñanza tradicional de la geometría no se le da la oportunidad al estudiante de organizar sus experiencias espaciales ya que se le ofrecen a los estudiantes temas con estructuras pre organizadas, y por el contrario una buena enseñanza de la geometría debe permitir que los estudiantes aprendan a conceptualizar y aprendan que es conceptualizar, aprender a definir y aprendan que es una definición, y que los estudiantes puedan comprender por qué cierto concepto o cierta definición es mejor que otra.

Larios (2005), a través de su trabajo “Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica”, destaca que el Software de Geometría Dinámica permite explorar situaciones geométricas que de otra manera podrían ser muy restrictivas y que solo están al alcance de aquellos que ya tienen un entrenamiento especial.

Kerlegand (2008) aplicó actividades didácticas que involucraban las fases del Modelo de Van Hiele para observar cómo el estudiante va construyendo las propiedades de la circunferencia involucradas en la investigación, concluyendo que la herramienta tecnológica empleada favorece el proceso de visualización de las nociones y favorece el razonamiento geométrico.

---

[2] BLANDFORD, Benchara 1908 (citado en Griffiths y Howson, 1974: 216-217):
[3] FREUDENTHAL, Hans (1973:417-418)

Por su parte Flores (2008) menciona que el uso de las TIC, específicamente del Software de Geometría Dinámica (SGD) favorece los procesos de: reconocimiento, clasificación, conjeturación, generalización, abstracción y demostración.

Debido a lo anterior, se hace indispensable diseñar recursos didácticos que mediante las TIC permitan a los estudiantes y profesores practicar con aspectos esenciales del conocimiento matemático, tales como la simulación, la manipulación y visualización. La intención es ofrecer al docente y estudiante materiales que le permitan trabajar en el estudio de diferentes temas de Geometría Euclidiana mediante el uso del Geogebra, con el fin de que ellos puedan profundizar algunos contenidos clásicos de la Geometría.

Nuestra perspectiva es que los estudiantes no se limiten a memorizar conceptos o propiedades, sino que adquieran una visión más amplia y una comprensión de los conceptos involucrados.

1.3. Planteamiento del problema

Al abordar una investigación acerca de Geometría, es importante resaltar que la geometría como rama de la matemática es la más próxima a la realidad que nos envuelve, por lo que debe considerarse como parte fundamental para la enseñanza en todos los niveles educativos.

Sin embargo, a nivel internacional muchas investigaciones señalan problemas en el estudio de la Geometría. Estos van desde la motivación de los estudiantes por aprender Geometría, hasta la formación de los futuros maestros de la escuela media. En este sentido, Nicaragua no es ajena a esta realidad, pues en la escuela secundaria el tratamiento de la Geometría se remite a ser un glosario de términos geométricos, cálculo de perímetro, área y volumen.

En Nicaragua, se privilegia el trazado de figuras geométricas a mano alzada, y no se usan recursos y materiales que faciliten la enseñanza de estos contenidos, tales como: hoja milimetrada, regla, escuadra, transportador, compás, Software de Geometría Dinámica, entre otros.

Lo mencionado anteriormente conlleva a una gran dificultad en la comprensión y apropiación de propiedades geométricas, pues el estudiante no experimenta ni realiza conjeturas.

En este sentido el Software de Geometría Dinámica proporciona un medio que sirve como campo de experimentación de las representaciones de los objetos geométricos, debido al carácter dinámico de las construcciones que se pueden realizar.

Por otra parte, en la mayoría de los textos utilizados en la escuela y la universidad el aprendizaje de la geometría está enmarcado en enfoques epistemológicos formalistas y en una metodología para su enseñanza de tipo algorítmico, con la cual no se induce al estudiante a que él pueda extraer regularidades y deducir propiedades geométricas, lo cual conlleva a la memorización de propiedades y formulación de relaciones estrictamente demostradas con especial sutileza y simbolismo impecable.

En este sentido, la escasez de materiales didácticos sobre contenidos de Geometría en la literatura nicaragüense, no favorece en nada el aprendizaje de la misma, y de esta manera no se ayuda al estudiante a desarrollar el razonamiento deductivo.

De acuerdo a la experiencia del autor, se han podido constatar una serie de deficiencias en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Euclidiana en nuestro país, dentro de los que podemos citar:

- Falta de preparación científico-metodológica de los docentes de educación media.
- Poco lo relacionado con la demostración.
- Los contenidos se desarrollan haciendo uso de métodos tradicionales y clásicos.
- Falta de literatura actual con adecuada mediación metodológica que permita el autoestudio de los estudiantes.
- Casi nula incorporación del uso de SGD en las aulas universitarias.
- Poca capacidad de reflexión, razonamiento y conjeturación de los estudiantes.
- Actitud negativa de los estudiantes y los docentes hacia el estudio de la geometría.

De aquí surge la necesidad de trabajar con materiales didácticos que contribuyan al desarrollo de la movilidad y flexibilidad de pensamiento, como el Software de Geometría Dinámica que permite al alumno representar de forma dinámica las propiedades de diferentes figuras geométricas.

Pachano, L. y Terán, M. (2008) plantean que la educación básica debe resaltar las grandes virtudes que ofrece la geometría, ya que brinda al estudiante la oportunidad para que se ubique en el espacio que lo rodea y así pueda observar, reconocer y describir las formas de las figuras de su entorno inmediato y, en consecuencia, establecer relaciones entre espacio y forma. Para lograr esto se necesitan materiales que sean mediadores en el aprendizaje de los alumnos y que motiven al estudiante a querer aprender.

Por tanto, es fundamental ofrecer un aprendizaje de la Geometría fundado en procesos de percepción, representación, justificación, construcción, visualización y designación de los entes geométricos en estudio, de forma que se permita al estudiante construir su conocimiento y ver la Geometría como una herramienta de descubrimiento para comprender nuestro mundo.

Todo lo antes planteado ilustra que existen dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría en Nicaragua, lo cual no se corresponde con las exigencias del mundo actual. Guiados por lo ya planteado y considerando la necesaria elevación de la calidad del aprendizaje de la Geometría, se plantea el siguiente **problema científico**:

¿Cómo contribuir a mejorar el aprendizaje de conceptos, construcciones y propiedades geométricas sobre triángulos, de modo que se ajuste a los enfoques actuales de dicho proceso en el área de Geometría?

1.4. Justificación

Los profundos cambios que actualmente se están dando en los métodos de enseñanza de la matemática a nivel internacional, reflejan la necesidad que como docentes debemos cambiar la forma tradicional de enseñanza de la misma, especialmente de la Geometría, por un enfoque dinámico que ayude a formar estudiantes con un pensamiento crítico, reflexivo y deductivo. Sin embargo, en la enseñanza de la Geometría en Nicaragua junto a la escasez de materiales con un adecuado tratamiento metodológico, continúa predominando el método tradicional en donde los principales recursos de trabajo del estudiante son el papel y el lápiz, dejando a un lado el trabajo con la computadora y materiales que ayuden al estudiante a construir sus conocimientos.

En este sentido la importancia de la presente investigación, radica en la pertinencia de un material que facilite la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en Nicaragua, al considerar, que la utilización del mismo como herramienta educativa brinde respuestas que ayuden al docente a mejorar su práctica docente y al estudiante a comprender los contenidos.

Esta investigación tiene relevancia a nivel teórico, práctico, social, tecnológico y metodológico, por las siguientes razones:

A nivel teórico, el tratamiento de las propiedades está basado en actividades de investigación y búsqueda de nuevas relaciones, que permitan plantear conjeturas, formular hipótesis, etc. Esto evita la simple memorización de contenidos, favorece la reorganización de los esquemas de conocimiento, permite el desarrollo del pensamiento lógico y la capacidad de resolución de problemas.

En cuanto a la relevancia práctica, la importancia se presenta en el establecimiento de actividades que permitirán el aprendizaje de la Geometría desde una perspectiva activa y desarrolladora, basada en la búsqueda, la experimentación, exploración y construcción de representaciones gráficas, dando a la Geometría un enfoque en donde se propicia el pensamiento activo mediante el planteamiento de conjeturas para resolver situaciones problemáticas, la formulación de hipótesis y la experimentación. Así mismo, se potencia el uso de medios y recursos didácticos, que favorecen el aprendizaje de las propiedades geométricas.

En la relevancia social, dará respuesta a los profundos cambios que en los últimos años se han venido generando en el ámbito socioeducativo; para ello, se aspira que el uso del Software de Geometría Dinámica tenga un impacto positivo en el proceso de aprendizaje de la Geometría en Nicaragua.

Con respecto a la relevancia tecnológica, se busca una adecuada incorporación de los recursos tecnológicos que favorecen positivamente el aprendizaje, en dependencia de la metodología empleada, entre las que resaltan: desarrollo de habilidades de razonamiento y participación en un ambiente de investigación.

Desde el punto de vista metodológico, el presente trabajo una vez finalizado brindará herramientas académicas que facilitarán la adquisición de conocimientos, en relación a propiedades geométricas.

1.5. Tema de investigación

Geogebra como herramienta de apoyo para el aprendizaje de algunos temas sobre triángulos en Geometría Euclidiana

1.6. Preguntas de investigación

Las **preguntas científicas** que admitieron el proceso investigativo son:

1. ¿Cuál es la utilidad de un Software de Geometría Dinámica como instrumento de exploración y razonamiento?

2. ¿Cómo estructurar una propuesta metodológica para mejorar el aprendizaje en temas de la Geometría del triángulo en Nicaragua?

1.7. Objetivos de investigación

1.7.1. Objetivo general

Diseñar un material didáctico de apoyo para la enseñanza-aprendizaje de temas referentes a la Geometría del triángulo.

1.7.2. Objetivos específicos

- Ofrecer al estudiante ambientes de aprendizaje que estimulen la reflexión, haciéndole partícipe y responsable de su propio aprendizaje.

- Contribuir a la preparación metodológica y científica de los profesores de matemática del nivel medio en la enseñanza de la Geometría de triángulos.

- Incorporar el Software de Geometría Dinámica Geogebra como instrumento de exploración y razonamiento en el estudio de la Geometría de triángulos.

1.8. Perspectiva Teórica

Se inicia esta sección describiendo los elementos teóricos que se consideran necesarios para abordar la propuesta didáctica, iniciando con lo relacionado a un ambiente de aprendizaje, el cual se propone al utilizar software geométrico en la enseñanza la Geometría Euclidiana. Además se abordan algunas características sobre la enseñanza de la geometría y el software de geometría dinámica “Geogebra”. Se considera el modelo de Van Hiele como fundamento teórico en la enseñanza de la geometría, esto debido a los niveles de conocimiento que plantea, ya que se espera que las actividades planteadas abarquen dichos niveles.

1.8.1. Algo de Historia

La geometría es una rama de la matemática que se ocupa de las propiedades del espacio como son: puntos, rectas, planos, polígonos, poliedros, curvas, etc. Sus orígenes se remontan a la solución de problemas concretos relativos a medidas. Es la justificación teórica de muchos instrumentos, por ejemplo, el compás.

Boyer (1968) afirma que los orígenes de la matemática, ya sea de la aritmética o de la geometría, serán necesariamente arriesgadas o conjeturales, ya que, en cualquier caso, los orígenes de esta materia son más antiguos que el arte de la escritura.

Herodoto sostenía que la Geometría se había originado en Egipto, porque creía que dicha materia había surgido allí a partir de la necesidad práctica de volver a trazar las lindes de las tierras después de la inundación anual del valle del río Nilo.

Aristóteles sostenía en cambio que el cultivo y desarrollo de la geometría en Egipto se había visto impulsada por la existencia de una amplia clase sacerdotal ociosa.

El interés del hombre prehistórico por los diseños y las relaciones espaciales puede haber surgido de su sentido estético, para disfrutar de la belleza de la forma, motivo que también anima frecuentemente al matemático actual. Nos gustaría pensar que por lo menos algunos geómetras primitivos realizaba su trabajo solo por el puro placer de hacer matemática y no como ayuda práctica para la medición, pero hay otras alternativas. Una de ellas es que la geometría, lo mismo que la numeración, tuviera su origen en ciertas prácticas rituales primitivas.

1.8.2. La Geometría Escolar

Los sistemas tradicionales de enseñanza en la educación no dan al estudiante las herramientas para indagar, analizar y discernir la información, que lo lleve a la verdadera toma de decisiones. Los conocimientos impartidos son más bien atomizados, memorísticos y no fomentan el desarrollo de la iniciativa, la creatividad, ni la capacidad para comunicarse efectivamente por distintas vías (Astorga y Aliendro, 2005, pág. 1).

Lo que la tradición llama “enseñanza de la geometría” remite, en la escuela primaria, a dos campos de conocimientos: por una parte, el de los conocimientos que el niño necesita para controlar sus relaciones habituales con el espacio, y por otra parte el de la geometría propiamente dicha (Astorga y Aliendro, pág. 1).

Las situaciones de geometría ponen en interacción a un sujeto “estudiante” con un medio que ya no es el espacio físico y sus objetos, sino un espacio conceptualizado que las “figuras” trazadas por este sujeto no hace más que representar la validez de sus declaraciones, y no es establecida empíricamente sino que se apoya en razonamiento que obedecen a las reglas del debate matemático.

1.8.2.1. La Geometría Euclidiana en Nicaragua

La necesidad de la enseñanza de la Geometría desde los primeros años de la escuela responde al papel que esta rama de la Matemática desempeña en la vida del ser humano. El conocimiento geométrico es indispensable porque nos permite ubicarnos en el espacio físico que nos rodea, calcular distancias, distinguir formas y sobre todo desarrollar un pensamiento lógico-deductivo. Por esta razón la Geometría forma parte no solo del currículo de preescolar y primaria, sino también en la escuela secundaria y la universidad.

De acuerdo al currículo actual la matemática de secundaria pretende que el alumno desarrolle un nivel de pensamiento que le permita expresar en lenguaje matemático situaciones del entorno, pero para ello el estudiante debe formular y validar conjeturas, comunicar e interpretar ideas, y aplicar procedimientos de solución. En este sentido, una de las competencias matemáticas a desarrollar tiene que ver con las justificaciones y validaciones.

Los objetivos principales de la geometría de secundaria son los siguientes:

- Realizar construcciones con regla y compás.
- Calcular área, perímetro y volumen de figuras geométricas.
- Distinguir en una proposición la hipótesis y la tesis.
- Aplicar el método deductivo en la demostración de propiedades sobre congruencia y semejanza de triángulos sencillas.
- Desarrollar habilidades y destrezas necesarias para el posterior estudio de la Trigonometría y la Geometría analítica.

En resumen, en el nivel de bachillerato se plantea que el alumno observe propiedades geométricas, lleve a cabo construcciones, proponga argumentos y justificaciones de los hechos observados y las construcciones realizadas, aplique propiedades y fórmulas en la solución de problemas del entorno.

En los últimos años las universidades públicas han trabajado con el Ministerio de Educación en capacitaciones a docentes a nivel nacional para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática en el nivel medio. En estas, muchos docentes expresan que el componente donde necesitan ser capacitados es en Geometría. Esto queda en evidencia en los estudiantes que ingresan a las universidades, pues el nivel de razonamiento deductivo y espacial es muy bajo.

Por otra parte, en los colegios el docente no cuenta con las herramientas necesarias para realizar construcciones geométricas, y se dedican a hacerlo a mano alzada. Tampoco se incentiva al estudiante a utilizar materiales para realizar construcciones de figuras geométricas como los cuerpos sólidos, que les permita deducir propiedades sobre estos.

Según asesores pedagógicos del MINED central los docentes dedican más tiempo a actividades relacionadas con el reconocimiento de figuras y problemas de cálculo de área perímetro, mientras que no se dedica tiempo a actividades como el reconocimiento y demostración de propiedades, y el trazado y construcción de figuras por la preparación científico-pedagógica que ellos poseen.

También expresan que la forma de trabajo más utilizada de los maestros en las aulas es la exposición y ejemplificación, es poco el tiempo dedicado al trabajo independiente, la discusión en equipos de trabajo y las preguntas de control.

Estos sugieren que en la universidad se debe dedicar más tiempo al estudio de la Geometría Euclidiana, que se enseñe a utilizar herramientas para las demostraciones con regla y compás, haciendo uso de la computadora, y que se ayude a los graduados a poder elaborar los materiales que necesitarán en el ejercicio de sus labores docentes.

En la carrera Licenciatura en Ciencias de la Educación con Mención en Matemática de la UNAN-Managua, la asignatura de Geometría Euclidiana está ubicada en el tercer semestre, tiene como antecedente Matemática General y Geometría Cartesiana como consecuente, sirviendo como prerrequisito a todas las otras asignaturas de la especialidad, en las que se pretende alcanzar mayores niveles de rigor matemático y didáctico. La diferencia que establece esta asignatura es que el estudiante iniciará, mediante ejercicios de una mediana axiomatización, la ruta hacia la familiarización con la deducción formal, tratando de establecer durante la carrera un orden lógico en la pluralidad de conceptos geométricos.

Los principales contenidos son: el campo ordenado de los números reales, constitución axiomática de la Geometría Plana, congruencia de triángulos, semejanza de triángulos, paralelismo entre rectas, área de regiones poligonales y el círculo, volúmenes de sólidos y construcciones con regla y compás. Consta de 225 horas (75 presenciales y 150 de estudio independiente).

Los objetivos de curso son:[4]

- Demostrar proposiciones geométricas derivadas de un cuerpo de axiomas que fundamentan la Geometría Euclidiana.

[4] Página 7 del Programa de Asignatura Geometría Euclidiana

- Aplicar el razonamiento en el análisis de las demostraciones de proposiciones geométricas.
- Modelar situaciones geométricas relacionadas con la realidad ambiental natural: artes, las letras y la tecnología.
- Comprobar relaciones geométricas con auxilio de instrumentos geométricos o software.

Los textos recomendados en la bibliografía son: Geometría elemental desde un punto de vista avanzado, Fundamentos de Geometría escolar y Estudio de las Geometrías.

1.8.2.2. Dificultades en la enseñanza–aprendizaje de la geometría. Posibles causas de la situación actual

Si analizamos la enseñanza-aprendizaje de la geometría en Nicaragua, nos encontramos como plantea Gamboa, R. y Ballesteros, E. (2010) "Actualmente los contenidos de la geometría son presentados a los estudiantes como un producto acabado de las matemáticas". Según los autores la enseñanza tradicional se ha enfatizado en la memorización de fórmulas, definiciones geométricas, teoremas y propiedades apoyados en construcciones mecanicistas y descontextualizadas.

Autores como Abrate, Delgado y Pachulu (2006), señalan que algunos docentes priorizan la enseñanza de las matemáticas en otras áreas desplazando los contenidos de la geometría hacia el final del curso. El manejo superficial de estos temas y en algunos casos su exclusión han provocado que el aprendizaje de la geometría se convierta en un tema difícil y poco atractivo para los estudiantes.

Barrantes (2004), señala en las últimas décadas que la enseñanza de la geometría se caracterizaba por:

- Una fuerte tendencia en la memorización de conceptos y propiedades que muchas veces se basan en conceptos previos.
- Resolución automática de problemas de carácter aritméticos.
- Exclusión de la intuición del conocimiento geométrico.

1.8.2.3. Algunas consideraciones didácticas a tener en cuenta para cambiar la situación actual

La primera consideración didáctica que debemos hacer es la necesidad de incorporar al trabajo de clase, una geometría dinámica como aboga Castelnuovo (1973) y abandonar la tradicional geometría estática. “El mencionado concepto de geometría dinámica fue introducido por Nick Jackiw y Steve Rasmussen (Goldenberg y Cuoco, 1988) y se aplica a los programas informáticos que permiten a los usuarios, después de haber hecho una construcción, mover ciertos elementos arrastrándolos libremente y observar cómo otros elementos responden dinámicamente al alterar las condiciones.

Por otra parte, es indudable que el estudiante desde niño presta especial atención a los motivos dinámicos lo cual es lógico teniendo en cuenta que la experiencia sensomotora se vincula al dibujo y al movimiento. Se trata pues de aprovechar aquí este atractivo que nos ofrecen las nuevas tecnologías, para enseñar un sin fin de contenidos geométricos.

Para Laborde y Capponi (1994), una figura no se refiere a un objeto sino a una infinidad de objetos. Lo que es invariante son las relaciones entre los objetos. La figura según estos autores consisten en un referente dado a todos sus dibujos y es el conjunto de parejas de dos términos, siendo el primero el referente y el segundo los dibujos que lo representan; se toma en el universo de todos los posibles dibujos del referente. Para ellos un dibujo geométrico no es necesariamente interpretado por un lector como un objeto geométrico. Las interpretaciones de un mismo objeto son múltiples, tanto por las interpretaciones del lector y sus conocimientos como por la naturaleza misma del dibujo, que por sí mismo no puede caracterizar un objeto geométrico.

Hay que basar la geometría en procesos de percepción, representación, construcción, reproducción y designación Castelnuovo, E. (1973). Estos procesos van a crear una mayor capacidad deductiva e inductiva en el razonamiento de los estudiantes algo tan necesario para la matemática.

Estos programas de ordenador permiten la puesta en evidencia de aspectos que tradicionalmente están abandonados de la enseñanza de la geometría. También permiten poner en evidencia aspectos invariantes de una figura observando numerosos dibujos con las mismas propiedades geométricas.

Estos medios tecnológicos han de tener repercusiones en la manera de enseñar las matemáticas y en la selección de contenidos.

1.8.3. Las construcciones Geométricas

Hasta ahora se ha estado haciendo geometría con regla y transportador. En efecto, los postulados nos dicen que se tiene una regla de longitud infinita, con marcas numéricas. Utilizamos esta "regla" para trazar rectas y medir distancias. Además, se tiene un transportador. Con este se puede medir ángulos, y también, marcar ángulos con una medida dada, a partir de un rayo.

Posiblemente, esta es la manera más fácil de hacer geometría. Sin embargo, hay otra manera, que consiste en hacer uso de regla y compás. En este caso, no hay una regla con marcas, sino una "regla de longitud infinita", de modo que aunque se puedan trazar rectas, no se puede medir distancias. También, se tiene un compás. Con este se puede dibujar circunferencias con centro en un punto cualquiera y pasando por otro punto arbitrario. No se puede medir ángulos. Este es el esquema desarrollado por los antiguos geómetras griegos, el cual es de gran interés para los matemáticos de hoy y conduce a algunos problemas curiosos cuando se trata de averiguar qué tipo de figuras se puede tratar con regla y compás.

No importa cómo se estudie la geometría, se tiene ciertos instrumentos reales para dibujar y una teoría matemática correspondiente. En todos los casos, la teoría matemática es exacta, pero los resultados que se obtienen con los instrumentos reales de dibujo son solamente aproximaciones.

En este trabajo el papel que juegan las construcciones geométricas realizadas en el entorno de geometría dinámica es fundamental, pues se convierten en los objetos de "experimentación" sobre la teoría, sin utilizar de manera directa el discurso, contribuyendo a superar uno de los obstáculos principales de la geometría, como es, la superación de las tensiones entre los procesos de visualización y su potencial pedagógico heurístico en la resolución de problemas y los procesos de justificación, y su potencial pedagógico para dar sentido a la organización deductiva del conocimiento matemático.

Para aprovechar ese potencial, no basta con proponer a los alumnos una construcción. Es necesario que la tarea de construcción sea un problema en cuya solución pongan en juego sus conocimientos previos y las posibilidades del software. El software se convierte en un socio cognitivo que acompaña al estudiante en sus indagaciones sobre los objetos matemáticos, se convierte en un inspirador de ideas sobre cómo manipular las representaciones de los objetos matemáticos en juego y contribuye a darles sentido.

1.8.4. El uso de la tecnología

Desde algún tiempo atrás, con el incremento de uso de nuevas tecnologías aplicadas a la educación, la enseñanza de la matemática está teniendo una transformación en la forma de abordar las metodologías de aprendizaje y la utilización de recursos gráficos e interactivos.

Los cambios que se están dando actualmente en el sistema educativo, nos conducen a buscar nuevas metodologías para la enseñanza de la geometría, "la visualización juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema" (Hitt, F. 2003, pág. 215), un problema que será resuelto haciendo uso de los cambios de representación.

Fuglestad (2004) citado por Gamboa, R. (2007) señala que el uso de herramientas computacionales da acceso a los estudiantes a varias formas de expresar sus ideas matemáticas y experimentar con ella (pág. 19).

Dentro de este contexto es fundamental la utilización de procesadores geométricos para la enseñanza de esta disciplina. Este tipo de aplicaciones permite abordar la geometría desde una forma dinámica e interactiva que ayuda a los estudiantes a visualizar contenidos matemáticos que son un poco más complicados de abordar con un dibujo estático.

Un software de Geometría Dinámica es un editor gráfico en el que un objeto geométrico se puede redibujar de manera continua, conservando intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en la construcción, así como todas las propiedades geométricas implícitas en ella. Así la naturaleza de las figuras que se hacen en un entorno de geometría dinámica es diferente a la de los dibujos que se hacen con papel y lápiz, (Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, 2004, pág. 19).

Existen diversos programas de geometría dinámica, con diferencias sustanciales de funcionalidad, calidad gráfica y precisión matemática. Entre estos programas están Cabri Géometre, Geometre Sketch Pad, y Geogebra. En este trabajo se utiliza Geogebra.

1.8.5. Geogebra

Una herramienta de mucha utilidad para enseñar geometría es Geogebra. En el año 2001 salió la primera versión del programa Geogebra, su creador y actual director del equipo es Markus Hohenwarter, trabajo que realizó como parte de su maestría en educación matemática y ciencias de la computación.

El Geogebra "es un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo." (Hohenwarter, 2001), donde la interactividad está mediada por el uso de las matemáticas de parte de profesores y estudiantes, ya que fue planeado para desarrollar actividades de enseñanza de cualquier conocimiento que implique el uso de ecuaciones, gráficas y análisis de datos, posibilitando la visualización gráfica, algebraica y de hoja de cálculo vinculadas dinámicamente.

Tal como su nombre lo dice, Geogebra es un programa que mezcla la geometría con el álgebra. En este sentido, para la parte geométrica se puede ubicar dentro de los programas dinámicos los cuales, en general, permiten realizar construcciones geométricas, con la ventaja de poder mover los puntos de la construcción y observar sus invariantes y características.

Sin embargo, Geogebra presenta características adicionales que los programas dinámicos de geometría por lo general no poseen y que lo hace especial, conforme se realizan las construcciones geométricas en una ventana se van mostrando las expresiones algebraicas que representan a las líneas, los segmentos, círculos y puntos de la construcción; también permite trabajar con las funciones al poderlas, graficar y manipular de una manera sencilla.

La pantalla principal muestra la zona de trabajo donde están los ejes de coordenadas y la ventana de la izquierda que es la ventana algebraica; arriba está el menú y la barra de herramientas y abajo está la línea de comando. (Ver figura 1)

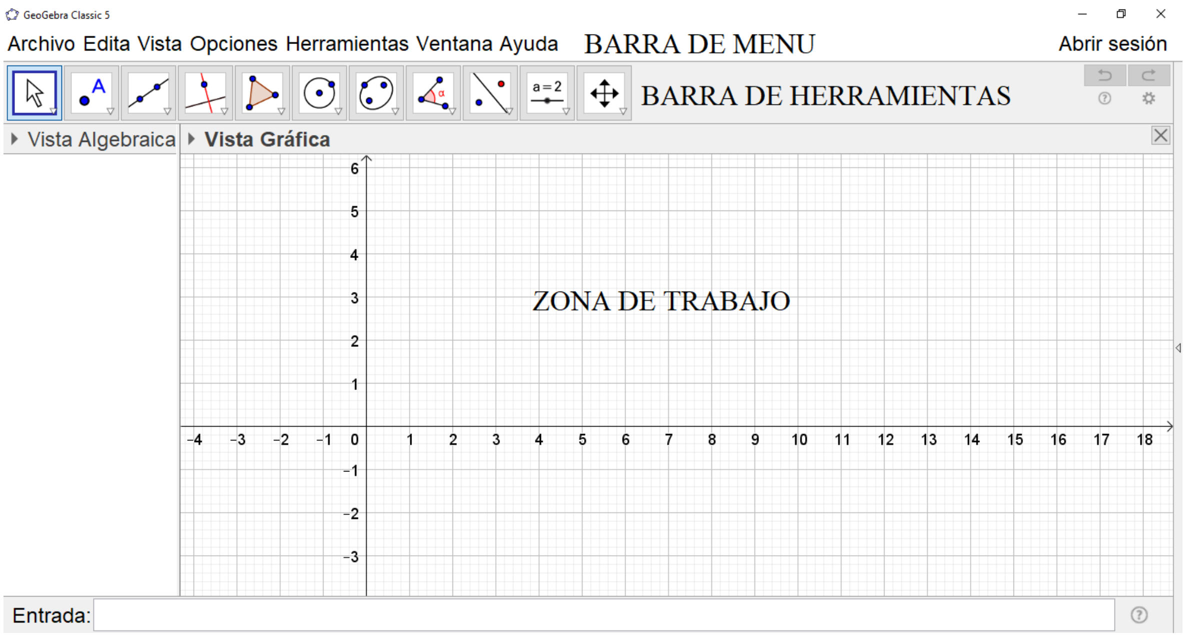


Figura 1: Ventana principal de Geogebra

La zona de trabajo es donde se realizan las construcciones geométricas, donde se colocan los puntos, se hacen las rectas, segmentos, rayos, círculos, etc. Cada vez que se hace una de estas construcciones se agrega un elemento nuevo a la ventana algebraica de una expresión que representa al objeto realizado. La línea de comandos es importante ya que todo lo que se puede realizar con el ratón en Geogebra también se puede llevar a cabo escribiendo cada paso allí.

Para utilizar Geogebra lo más común es utilizar la barra de herramientas, cada uno de los botones que aparecen allí poseen un pequeño triángulo al lado con el cual se despliega un menú de herramientas, otra forma de desplegar este menú es mantener el botón del ratón apretado y activar el ratón hacia abajo), los botones se agrupan según herramientas comunes. (Ver figura 2)

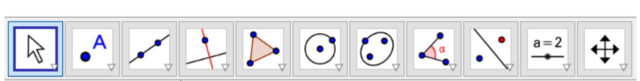


Figura 2: Barra de herramientas gráficas

Cuando en uno de estos botones se elige alguna herramienta de su menú emergente esta ya queda seleccionada en el botón por defecto, entonces para seleccionar esa herramienta en particular ya no es necesario volver a escogerla del menú emergente sino que sólo se debe seleccionar el botón que la contiene.

A continuación se muestran los distintos grupos que contiene cada botón en Geogebra 5 que es con el que trabajaremos. Las figuras que aparecen son las que salen al iniciar el programa, al escoger otra herramienta del menú emergente estas cambiarán.

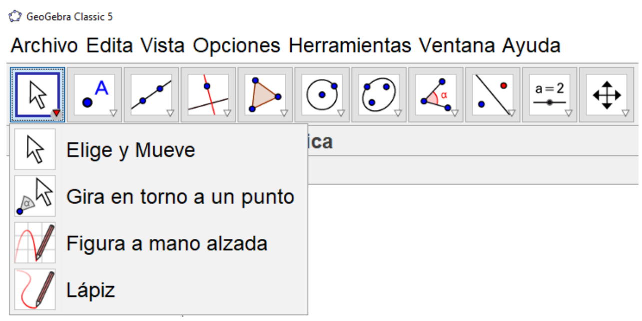


Figura 3: Herramientas de desplazamiento

En esta figura se encuentran las herramientas de flecha que permiten mover elementos, rotarlos, o realiza dibujos a mano alzada. (Ver figura 3)

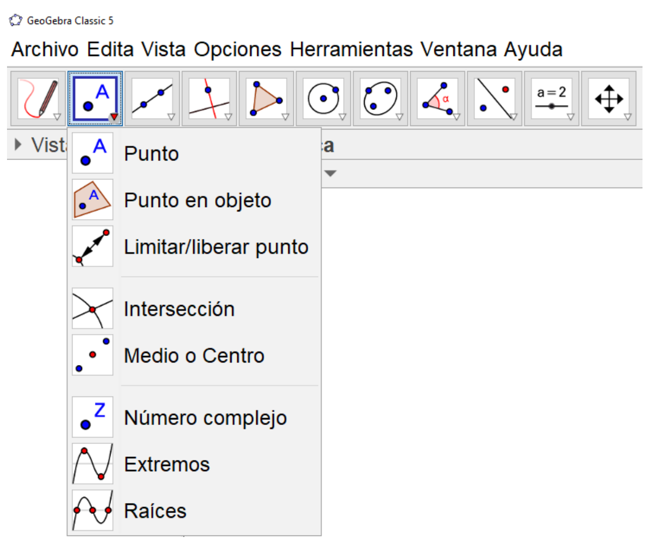


Figura 4: Herramientas de puntos

Aquí se construyen todo lo que tiene que ver con puntos: puntos libres, puntos de intersección y puntos medios. (Ver figura 4)

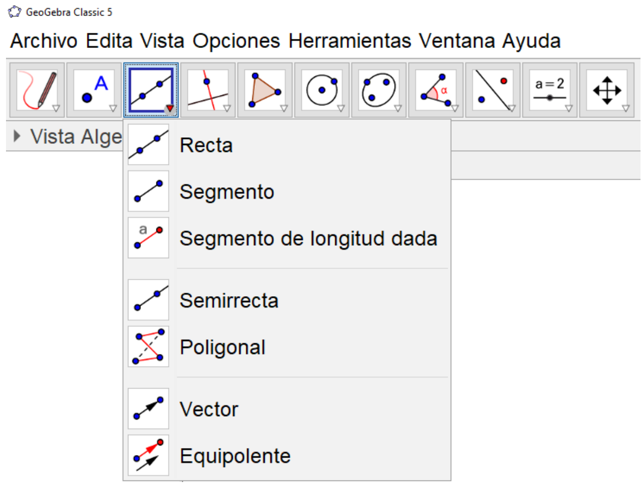


Figura 5: Herramientas de rectas

En este botón se encuentran todas las herramientas que construyen objetos rectos tales como: rectas, segmentos, rayos y vectores. (Ver figura 5)

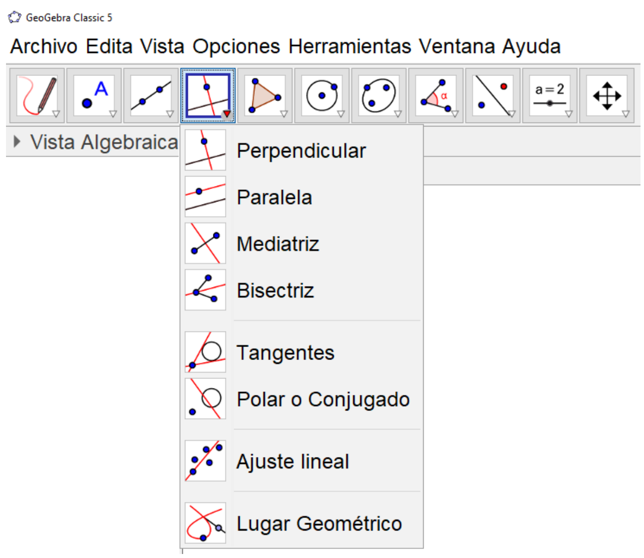


Figura 6: Herramientas de trazado especial

Esta figura contiene las construcciones básicas con regla y compás tales como: rectas paralelas, perpendiculares, mediatrices, bisectrices, rectas tangentes de un círculo, rectas polares, ajuste lineal y lugares geométricos. (Ver figura 6)

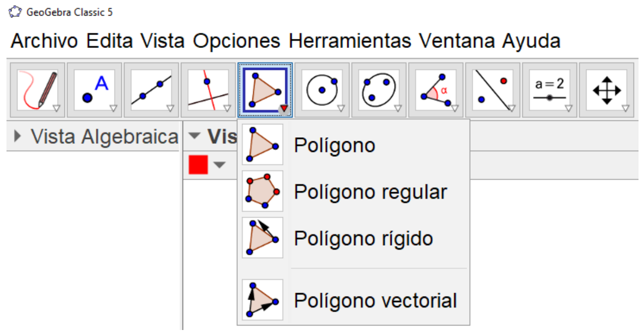


Figura 7: Herramientas de polígonos

Esta figura muestra la manera para realizar polígonos, tanto regulares como irregulares. (Ver figura 7).

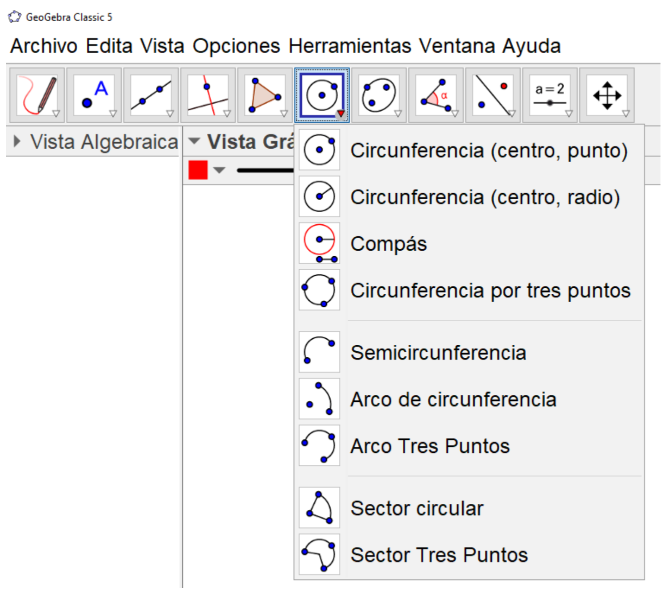


Figura 8: Herramientas de circunferencias y arcos

Este botón contiene las herramientas para construir todo lo relacionado con círculos tales como: circunferencias, semicircunferencias, arcos y sectores circulares. (Ver figura 8)

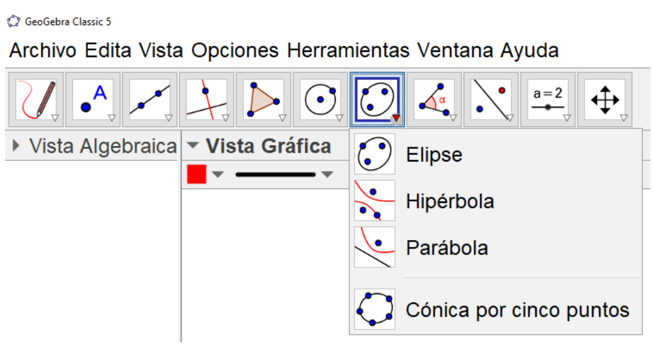


Figura 9: Herramientas de cónicas

Estas herramientas permiten construir las cónicas: elipses, hipérbolas y parábolas (Ver figura 9)

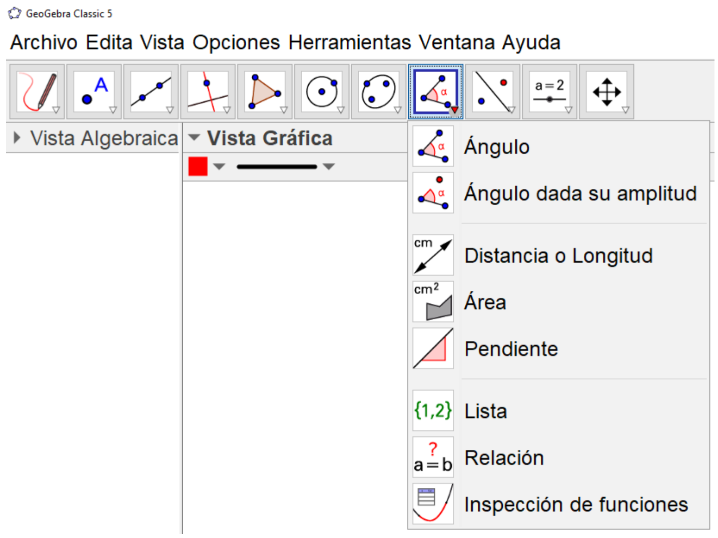


Figura 10: Herramientas de medición

Con estas herramientas se realizan las medidas de longitudes, ángulos, áreas y pendientes. (Ver figura 10)

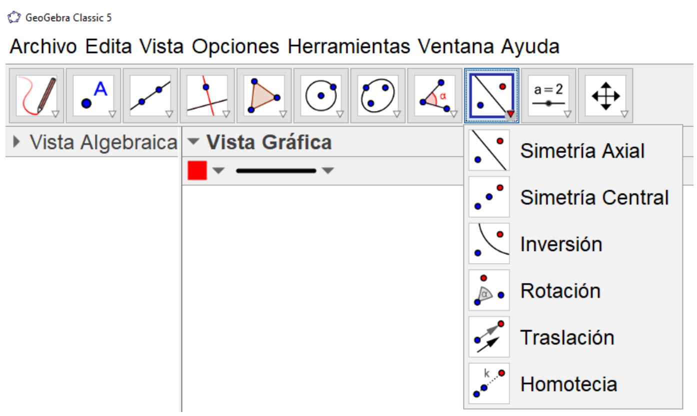


Figura 11: Herramientas de transformación

Las herramientas para realizar reflejos, traslaciones y rotaciones se encuentran aquí. (Ver figura 11)

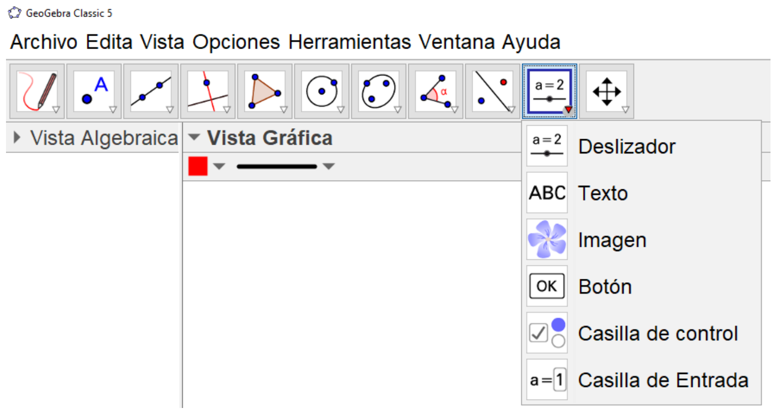


Figura 12: Herramientas de incorporación e interacción

En este botón se encuentran las herramientas que contienen los controles: deslizadores, casillas de control, imágenes y también las opciones de texto y para determinar si dos elementos cumplen alguna característica. (Ver figura 12)

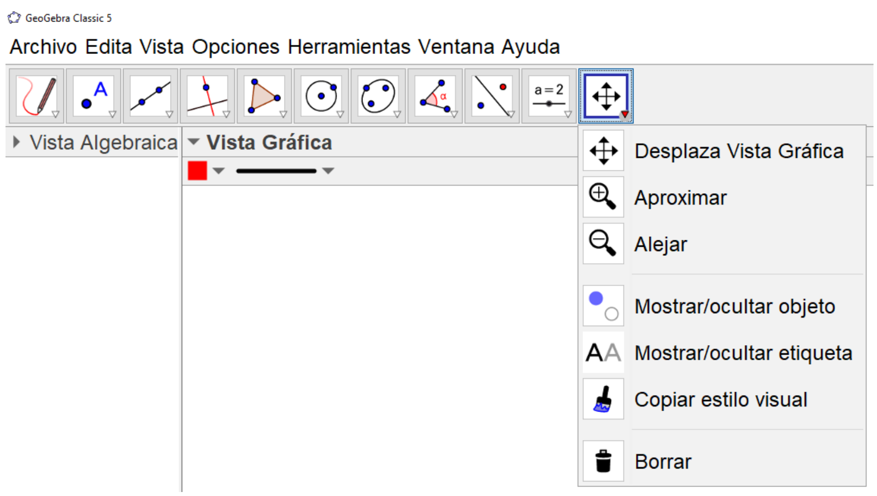


Figura 13: Herramientas generales

Por último, en esta opción se encuentran las opciones gráficas: ocultar y mostrar objetos, hacer zoom y desplazar la pantalla. (Ver figura 13)

Es importante iniciar familiarizándose con las herramientas para que poco a poco vaya apropiándose del programa hasta que se acostumbre. En algunas actividades se pedirá escribir en la línea de comandos expresiones con símbolos, estas se pueden agregar al escogerlos de los menús porque son extensibles y se encuentran ubicadas a la derecha de la línea de comandos. El primero es de símbolos, el segundo es de letras griegas y el tercero de funciones internas del software Geogebra.

1.8.6. Modelo de Van Hiele

El modelo de Van Hiele surgió de los trabajos doctorales de Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele, que fueron realizados simultáneamente en la Universidad de Utrecht (Crowley, 1987). De acuerdo a Jaime (1993), el Modelo de Van Hiele abarca dos aspectos:

- Descriptivo, mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar el progreso de estos.

- Instructivo, que marca unas pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico.

El núcleo central del Modelo de Van Hiele está constituido por la idea de que, a lo largo del proceso de aprendizaje de la Geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles de razonamiento, que son secuenciales, ordenados y tales que no se puede saltar ninguno. Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos geométricos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de interpretarlos, definirlos, clasificarlos, y hacer demostraciones.

El modelo consta de cinco niveles de comprensión que han sido denominados: "reconocimiento o visualización", "análisis", "clasificación o abstracción", "deducción" y "rigor"; los cuales describen las características del proceso de pensamiento (Burger y Shaughnessy, 1986).

Es necesario comentar que no hay unanimidad en cuanto a la numeración de los niveles, pues Burger y Shaughnessy (1986) hablan de los niveles 0 a 4, mientras que Guillen (2004) habla de los niveles del 1 al 5. Las características que diversos investigadores han atribuido a los niveles de razonamiento, y que han sido recuperadas por Jaime (1993), se describen a continuación:

Nivel 1 (Reconocimiento o visualización)

- Percepción global de las figuras: se suelen incluir atributos irrelevantes en las descripciones, especialmente referidos a la posición en el plano.

- Percepción individual de las figuras: cada figura es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase. No se generalizan las características de una figura a otras de su misma clase.

- Descripción de las figuras basada principalmente en su aspecto físico y posición en el espacio. Los reconocimientos, distinciones o clasificaciones se basan en semejanzas físicas globales.

- Frecuentemente hay descripciones por semejanza con otros objetos, no necesariamente matemáticos: "Se parece a…", "tiene forma de…".

- Uso de propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar, caracterizar figuras, con frecuentes referencias a prototipos visuales.

- Aprendizaje de un vocabulario básico para hablar de las figuras, describirlas, etc.

- No se suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas. Cuando sí se hace dicho reconocimiento, estos elementos o propiedades no tienen un papel central y, frecuentemente, reflejan contradicciones.

Nivel 2 (Análisis)

- Reconocimiento de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas. Se describen las partes que integran una figura y se enuncian sus propiedades. Se es capaz de analizar las propiedades matemáticas de las figuras.

- Deducción de propiedades mediante experimentación. Capacidad de generalización de dichas propiedades a todas las figuras de la misma familia.

- La definición de un concepto consiste en el recitado de una lista de propiedades, lo más exhaustiva posible, pero en la que puede haber omisiones de características necesarias.

- La demostración de una propiedad se realiza mediante su comprobación en uno o pocos casos.

Nivel 3 (Clasificación o abstracción)

- Sí se pueden relacionar propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras: se comprende la existencia de relaciones y se descubren, de manera experimental, nuevas relaciones.

- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos. Se definen correctamente conceptos y tipos de figuras. También se hacen referencias explícitas a las definiciones cuando se realizan razonamientos o demostraciones.

- La demostración de una propiedad ya no se basa en la comprobación de casos, pues hay una necesidad de justificar de manera general la veracidad de dicha propiedad, para lo cual se usan razonamientos deductivos informales.

- Capacidad para repetir una demostración realizada por el docente y adaptarla a otra situación análoga.

- Incapacidad para llevar a cabo una demostración formal completa, en la que haya que encadenar varias implicaciones, pues no se logra una visión global de las demostraciones y no se comprende su estructura.

Nivel 4 (Deducción formal)

- Se pueden reformular enunciados de problemas o teoremas, trasladándolos a un lenguaje más preciso. Realizar demostraciones mediante razonamientos deductivos formales.

- Capacidad para comprender la estructura axiomática de las matemáticas: Sentido de axiomas, definiciones, teoremas, etc.

- Aceptación de la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas o mediante diferentes formas de demostración.

Nivel 5 (Rigor)

- Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del usual (de la geometría euclídea).
- Capacidad para realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.
- Capacidad para establecer la consistencia de un sistema de axiomas.
- Capacidad para comparar sistemas axiomáticos diferentes y decidir sobre su equivalencia.
- Comprensión de la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas.

En relación al aspecto instructivo del modelo de Van Hiele, se tienen cinco fases de aprendizaje, cuya finalidad es organizar las actividades o tareas que el estudiante debe realizar, de tal manera que le permitan transitar de un nivel de razonamiento al siguiente.

Algunas de las características que menciona Jaime (1993) y componen a cada fase son las siguientes:

Fase 1 (Información)

En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en el mismo. Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

Fase 2 (Orientación dirigida)

Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes) para que éstos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicas de la red de conocimientos que deben formar. Los problemas propuestos han de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor tiene que seleccionar cuidadosamente estos problemas y actividades y debe orientar a sus alumnos hacia la solución cuando lo necesiten.

Fase 3 (Explicitación)

Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio.

Fase 4 (Orientación libre)

En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos.

El profesor debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades, que sean más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas.

Fase 5 (Integración)

Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración. Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino sólo la organización de los ya adquiridos.

1.9. Metodología

1.9.1. Perspectiva de la investigación

El diagnóstico se enmarca dentro del enfoque **naturalista** de investigación, pues es un método para intentar comprender la naturaleza de un fenómeno en estudio, sin mediciones numéricas, utilizando encuestas, entrevistas, descripciones, puntos de vista de investigadores, reconstrucción de los hechos y no tomando las hipótesis como algo necesario.

Hernández, R. Fernández, C. Baptista, P. (2014), afirman que "la investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalle y experiencias únicas. También aporta un punto de vista fresco natural y completo de los fenómenos, así como flexibilidad".

En consecuencia esta investigación se inscribe dentro de los enfoques cualitativo y aplicado, pues las características principales del trabajo son:

- Se explora la problemática de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Euclidiana.
- Consiste en un tratamiento meramente teórico y metodológico, fundamentado en conceptos y propiedades de Geometría y dirigido al diseño de situaciones de aprendizaje.
- Se construye un desarrollo investigativo mediante la exploración, participación y replanteamiento de aspectos metodológicos ya existentes.

El campo de acción es el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Euclidiana a partir de la representación y visualización gráfica de los objetos geométricos.

Hernández, R. Fernández, C. Baptista, P. (2014), afirman que "los estudios exploratorios se realizan cuando la revisión de la literatura reveló que tan sólo hay guías no investigadas e ideas vagamente relacionadas con el problema de estudio, o bien, si deseamos indagar sobre temas y áreas desde nuevas perspectivas."

Estos mismos autores plantean que “los estudios descriptivos describen tendencias de un grupo o población”.

De acuerdo a estos planteamientos, el nivel de profundidad que se desea alcanzar en esta investigación es exploratorio y descriptivo, por las siguientes razones:

- **Exploratoria**. Para reunir y sintetizar experiencias a partir de la revisión de la literatura sobre el estudio de la geometría, y los relatos de las personas en cuanto a la enseñanza de la geometría en Nicaragua.

- **Descriptiva**, ya que se estudian los aspectos más representativos del contexto de la enseñanza de la Geometría a nivel nacional e internacional. Esto se hace mediante la descripción de: el surgimiento de la geometría, tendencias actuales sobre el tratamiento de la Geometría, la ubicación curricular de la Geometría en la educación media y en la carrera de Matemática de la Facultad Educación e Idiomas en la UNAN-Managua, análisis de los resultados de los instrumentos aplicados y las características de la bibliografía referida a la Geometría.

1.9.2. Selección de los informantes

En la investigación cualitativa, se define la muestra intencionada, para seleccionar a los informantes ideales, que son los participantes que poseen conocimientos, habilidades, destrezas comunes y que están dispuestos a colaborar con el investigador.

Rodríguez y Gil (1996) dicen que “la investigación cualitativa se plantea, por un lado, qué observadores competentes y calificados puedan informar con objetividad, claridad y precisión acerca de sus propias percepciones de la realidad social, así como las experiencias de los demás”.

1.9.2.1. Selección de docentes

Para la selección de los docentes se hizo un muestreo intencionado, bajo el criterio de poseer basto conocimiento científico con más de cinco años como asesores pedagógicos de matemática del Ministerio de Educación a nivel nacional.

A los dos docentes seleccionados se les aplicó una encuesta (ver anexo 1), para conocer el acompañamiento y apoyo que brindan a los docentes de base y la forma de impartir los contenidos en la enseñanza media.

1.9.2.2. Selección de los estudiantes

La selección de los estudiantes se realizó bajo el criterio de ser estudiantes de Física-Matemática que ejercen la docencia, y proceden de varios departamentos del país. Participaron un total de 12 estudiantes, y se les realizó una entrevista (ver anexo 2) con el fin de recopilar información acerca de su dominio científico-metodológico en los contenidos de Geometría Euclidiana, y la relación entre el perfil de la carrera y los contenidos que imparten en educación media.

1.9.3. Métodos

Para el estudio científico del objeto de investigación, nos apoyamos en los siguientes métodos:

- Método histórico y lógico: Se utilizó para profundizar en los antecedentes y en las tendencias actuales de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, al puntualizar los enfoques actuales de dicho objeto.

- Análisis documental: En la obtención de información contenida en documentos rectores relacionados con la concepción del tratamiento de la geometría en los diferentes niveles educativos, lo que contribuye a la sistematización de enfoques.

- Inductivo-deductivo: En el estudio de las fuentes de información y así extraer regularidades para la estructuración de las actividades, ya que se pretende que estas induzcan a los estudiantes a deducir propiedades.

- Hipotético-deductivo, en la deducción de los fundamentos para la estructuración de las actividades y construcción de las propiedades geométricas.

1.9.4. Contenido de la propuesta

Este trabajo pretende ser un instrumento de orientación y guía para docentes y estudiantes de Geometría del bachillerato, o el curso de Geometría Euclidiana de la carrera de Matemática de la Facultad Educación e Idiomas en la UNAN-Managua. Surge como inquietud a partir de la detección de ciertas dificultades en la enseñanza-aprendizaje de construcciones geométricas por docentes y estudiantes de bachillerato, y estudiantes de la carrera de Matemática de Educación en la UNAN-Managua.

En su contenido se realizó la planificación de actividades, que apoyados con Geogebra, funcione como herramienta a docentes y estudiantes a acercarse al conocimiento geométrico específicamente en el estudio de los triángulos. En el diseño de las actividades se realizaron los pasos para realizar construcciones geométricas para verificar e inducir propiedades sobre triángulos.

Las actividades están diseñadas para que el aprendiz verifique su aprendizaje, contestando y construyendo los distintos cuestionamientos que se le plantean, dando así pie a la autoevaluación, teniendo la oportunidad de regresar a aquellos conceptos que no quedaron claros y poder repetir actividades de manera libre para su mejor comprensión.

Las actividades que se proponen promueven el desarrollo de habilidades de observación de propiedades, visualización de los objetos geométricos y razonamiento deductivo. Las dos primeras habilidades pueden permitir al lector llevar a cabo observaciones de propiedades o rasgos invariantes de una situación u objeto no solo en el ámbito de la Geometría, sino en la vida diaria. Respecto a la tercera, este tipo de razonamiento permite establecer relaciones causa-efecto en los fenómenos del entorno.

Los conocimientos geométricos involucrados en la propuesta son los siguientes:

Rectas notables del triángulo (mediana, bisectrices, alturas y mediatrices) y las relaciones entre ellas, puntos notables del triángulo (baricentro, incentro, ortocentro y circuncentro) y las relaciones entre ellos, circunferencias inscritas y cincunscrita, triángulos medial y relación entre este y el triángulo original. Triángulos isósceles y equiláteros.

Este trabajo pretende ser una herramienta orientadora, pues aprender Geometría incluye sistematizar esos conocimientos y habilidades, y ser capaces de aplicarlos en otro tipo de situaciones, problemas tanto de la Matemática como la ciencia en general.

El desarrollo de la estrategia se fundamenta en actividades con una perspectiva activa y desarrolladora, basada en la búsqueda, la experimentación, exploración y construcción de representaciones gráficas, dando a la Geometría un enfoque en donde se propicia el pensamiento activo mediante el planteamiento de conjeturas para resolver situaciones problemáticas, la formulación de hipótesis y la experimentación. El tipo de actividad que el docente organice para llevar a cabo el proceso docente educativo es decisivo en la formación del estudiante (Reyes, 1999).

De acuerdo con el modelo de Van Hiele, si el aprendiz es guiado por experiencias instruccionales adecuadas, avanza a través de los niveles, empezando con el nivel de reconocimiento de figuras, nivel 1, progresando al descubrimiento de las propiedades geométricas y hacia el razonamiento informal de esas figuras niveles 2 y 3, culminando con un estudio riguroso de la geometría axiomática niveles 4 y 5 (Guerra, 2010).

1.9.5. Estructura de las actividades

Las actividades propuestas en este trabajo tienen como finalidad la validación o justificación de propiedades. Así pues, la estructura general de las actividades es:

1. **Planteamiento de una situación**. Esto se hace mediante una serie de pasos indicados previamente.
2. **Construcción de la situación**. Con ayuda del software se realiza la construcción la figura.
3. **Exploración de la situación**. Esta exploración se realiza con el fin de realizar conjeturas. Se describen las acciones realizadas.
4. **Explicitación de lo observado**. Se escriben las propiedades observadas en la exploración con el software.
5. **Justificación de propiedades**. En algunas actividades se les pide a los estudiantes que justifiquen lo que hayan observado.

6. **Conclusión**. En la última parte la mayoría de las actividades se proporciona una breve conclusión de las propiedades que se pretenden estudiar.

Es importante señalar que en ocasiones las etapas de exploración, explicitación de propiedades y justificación se repiten en una sola actividad debido a la intencionalidad de cada de una de ellas. Generalmente esto ocurre cuando se propone la exploración de varias propiedades relacionadas en una misma actividad o exploración de una propiedad que no resulta evidente y que necesita de un proceso progresivo de acercamiento.

Este trabajo se basa en dos aspectos esenciales: la visualización y la simulación.

1.9.6. Visualización

La matemática está llena de conceptos abstractos, objetos matemáticos, símbolos, etc. En este sentido la imagen cobra un valor importante, ya que permite que el estudiante se acerque a los conceptos, sacándolos de lo abstracto mediante su visualización, además de ser buena opción de comunicación.

Según Cantoral y Montiel (2001) “se entiende por visualización la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico”.

De acuerdo con Duval (1998), en geometría la visualización cubre tanto la aprehensión perceptiva, discursiva y operativa de una figura como una representación del espacio. Y porque no requiere conocimiento matemático, la visualización juega un rol heurístico básico y a través de la aprehensión operativa, puede proporcionar algo parecido a la evidencia convincente.

Siguiendo una idea de Laborde (1994), las computadoras posibilitan enormemente la visualización, particularmente a través de los aspectos de movimiento. Teniendo en mente esto, se trata de que los alumnos visualicen los objetos geométricos en dos niveles distintos: un punto de vista estático y uno dinámico en el que cambian.

1.9.7. Simulación

Levy (1997), señala que la simulación constituye una nueva modalidad del conocimiento que es propia de la cibercultura, en donde la simulación ocupa un lugar central

Levy subraya que se trata de una tecnología intelectual que potencia la imaginación individual, permite a los grupos compartir, negociar y precisar modelos mentales comunes, independientemente de la complejidad de los modelos.

Hoy la simulación tiene un peso cada vez mayor en las actividades de investigación científica, de enseñanza y aprendizaje. Su interés principal no radica en sustituir la experiencia ni en tomar el lugar de la realidad, sino en que permite formular y explorar rápidamente un gran número de hipótesis.

Harris (2000) menciona que el uso del software, permite a los estudiantes reforzar y fortalecer la comprensión de conceptos básicos e importantes como por ejemplo en Geometría. Es por ello que este trabajo consiste en establecer un nuevo esquema (prácticas de laboratorio), que permita optimizar y enriquecer el proceso de enseñanza y ampliar el espectro de aprendizaje de los estudiantes, sin afectar la calidad de los temas que deben aprenderse en un curso tradicional.

CAPÍTULO 2

Propuesta Didáctica

2.1. Actividades con medianas

En esta sección se presenta el primer grupo de actividades que corresponden a la construcción y estudio de las medianas.

2.1.1. Actividad 1. Las medianas

Esta actividad está orientada a la construcción de las medianas de un triángulo y su concurrencia, observando, proponiendo y justificando propiedades relacionadas con estas y el baricentro.

La actividad se inicia con la construcción de las medianas, y después se observa la concurrencia de las mismas.

1. Abra un nuevo archivo de Geogebra.
2. Oculte los ejes de coordenadas.
3. Construya un triángulo ABC. Luego, oculte las etiquetas de los lados.
4. Construya los puntos medios de sus lados en este orden: primero de $\overline{BC}$, segundo de $\overline{AC}$ y tercero de $\overline{AB}$.
5. Construya los segmentos que van un vértice al punto medio del lado opuesto, es decir $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$. Estos tres segmentos se llaman **medianas del triángulo**.
   a) ¿Pasa algo especial con las medianas? Si es así, ¿qué es?

      ____

   b) Si mueve los vértices del triángulo varias veces, ¿las medianas siempre se cortan en un solo punto?

      ____

   c) ¿Qué pude conjeturar sobre las medianas de un triángulo?

      ____

6. Construya el punto de intersección de las medianas (G). Este punto de intersección se llama **baricentro**.
   d) ¿El baricentro siempre queda dentro del triángulo?

____

____

El **baricentro** se llama centro de gravedad del triángulo.

2.1.2. Actividad 2. División de medianas por el baricentro

Esta actividad está pensada para estudiar una de las propiedades de las medianas y el baricentro en términos de que este último divide a aquellas en una razón dada que es $1:2$, buscando la manera de obtener información suficiente como para que los estudiantes formulen una justificación de tal situación. Se inicia retomando la construcción de la actividad anterior, y la observación de las medidas de los segmentos en que queda dividida una cualquiera de las medianas.

1. En la construcción anterior, observe que el baricentro divide a cada una de las medianas en dos segmentos. Luego, oculte las medianas.
2. Construya los segmentos $\overline{GA}$ y $\overline{GD}$, $\overline{GB}$ y $\overline{GE}$, y $\overline{GC}$ y $\overline{GF}$.
3. Utilice las opciones de calculadora del programa y calcule: $GD:GA$, $GE:GB$, y $GF:GA$.
   a) ¿Cuál es el valor obtenido?

   ____
4. Mueva cualquiera de los vértices del triángulo ABC, y calcule nuevamente $GD:GA$, $GE:GB$, y $GF:GA$. Realice esto repetidas veces.
   b) ¿Varía el valor obtenido en cada caso? ¿Cuál es el valor obtenido?

   ____

   c) ¿Qué conclusión puede obtener?

   ____

   ____

2.1.3. Actividad 3. El triángulo medial

En esta actividad se tiene la intención de que los alumnos estudien las propiedades del triángulo medial y sus relaciones geométricas con el triángulo original.

La actividad inicia con la construcción de un triángulo, sus medianas y el baricentro. En la primera parte se construye el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los segmentos que tienen como extremos el baricentro y cada uno de los vértices. Posteriormente se hace una exploración de las medidas y las propiedades que tiene dicho triángulo, así como la relación con el triángulo original.

1. Abra un nuevo archivo de Geogebra, y oculte los ejes de coordenados.
2. Construya el triángulo ABC, sus medianas y su baricentro, sabiendo que D es punto medio de $\overline{BC}$, E punto medio de $\overline{AC}$ y F punto medio de $\overline{AB}$. (Oculte las etiquetas de los segmentos)
3. Construya los puntos medios de los segmentos que se forman entre el baricentro y los vértices del triángulo. Realice la construcción en el siguiente orden: primero el punto medio (H) de $\overline{AG}$, segundo el punto medio (I) de $\overline{BG}$, y tercero el punto medio (J) de $\overline{CG}$.
   a) Sin utilizar la opción de medir, conteste: ¿Qué otro segmento en el triángulo medirá lo mismo que $\overline{BI}$? ¿Por qué?

   ____

   ____

   ____

4. Oculte las medianas, los puntos medios de los lados del triángulo ABC, y el baricentro.
5. Construya el triángulo HIJ, y oculte las etiquetas de sus lados.
6. Mueva los vértices del triángulo ABC, observe lo que ocurre con los triángulos y conteste:
   b) ¿Qué relación guardan $\overline{AC}$ y $\overline{HJ}$, $\overline{AB}$ y $\overline{HI}$, $\overline{BC}$ y $\overline{IJ}$?

   ____

7. Seleccione $\overline{AC}$ y en la ***Vista Algebraica*** observe su medida. Haga lo mismo con $\overline{HJ}$.
   c) ¿Cuál es el valor de $HJ:AC$?

   ____

   d) ¿Cuál es el valor de $HI:AB$ y $IJ:BC$?

   ____

   e) ¿Cómo son los triángulos ABC y HIJ? ¿Por qué?

   ____

   ____

   f) ¿Qué relación guardan los perímetros de estos triángulos? ¿Por qué?

g) Mueva los vértices del triángulo ABC, y observe en la ***Vista Algebraica*** las áreas de los triángulos para responder ¿Cuál es la relación que guardan sus áreas?

h) Si mueve los vértices del triángulo ABC, ¿cuál es la razón entre el área del triángulo HIJ y el área del triángulo ABC?

i) ¿Qué puedes concluir sobre lo obtenido hasta este momento?

8. Haga visibles nuevamente los puntos medios de los lados del triángulo ABC, y construya el triángulo DEF ocultando las etiquetas de sus lados. A este triángulo se le llama **triángulo medial** porque sus vértices son los puntos medios del triángulo original.

9. Mueva los vértices del triángulo ABC, y responda:

j) ¿Qué relación guardan $\overline{AC}$ y $\overline{FD}$, $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$, $\overline{BC}$ y $\overline{FE}$?

k) ¿Cuál es el valor de $FD{:}AC$, $ED{:}AB$ y $FE{:}BC$?

l) ¿Cómo son los triángulos ABC y DEF? ¿Por qué?

m) ¿Qué puede concluir sobre el triángulo original y el medial?

n) Observe en la ***Vista Algebraica*** las medidas de los lados de los triángulos DEF y HIJ. ¿Cómo son estos triángulos? ¿Por qué?

2.2. Actividades con mediatrices

Las actividades de las mediatrices exploran este objeto como lugar geométrico, su concurrencia en el triángulo y el papel que tiene en términos del punto equidistante a los vértices.

2.2.1. Actividad 4. La mediatriz de un segmento

En esta primera actividad con mediatrices se explora la propiedad de estas como lugar geométrico de puntos que equidistan a dos puntos fijos que son los extremos del segmento del cual se obtiene la mediatriz.

1. Abra un nuevo archivo de Geogebra, y construya un segmento $\overline{AB}$ de longitud 4.
2. Construya un deslizador $d = 7$.
3. Construya una circunferencia de centro A y radio d.
4. Construya una circunferencia de centro B y radio d.
5. Construya los puntos de intersección (C y D) de las dos circunferencias.
6. Oculte las circunferencias.
7. Construya los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$.
8. Observe en la ***Vista Algebraica*** las medidas de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$.
   a) ¿Cómo son las medidas de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$? ¿y las de $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$?

   ____

   Eso quiere decir que **$\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ son equidistantes a los extremos del segmento**.

   b) ¿Serán estos los únicos puntos equidistantes a los extremos del segmento?

   ____

9. Active el rastro de los puntos C y D, y luego mueva el deslizador.
   c) ¿Cómo son las medidas de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$? ¿y las de $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$?

   ____

   d) ¿Qué figura forman los puntos que equidistan de los extremos del segmento?

   ____

10. Borre el rastro dejado por los puntos. Oculte $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$.

Luego, construya la recta que pasa por C y D.

e) La recta que construyó, ¿en dónde corta a $\overline{AB}$?, ¿qué tipo de ángulos forma con $\overline{AB}$?

____

Se llama **mediatriz** de un segmento a la recta que es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio. Vista como lugar geométrico, la mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento.

2.2.2. Actividad 5. Circunferencia circunscrita en un triángulo y circuncentro

La actividad pretende explotar la propiedad vista en la actividad anterior para que los alumnos obtengan el punto equidistante a tres puntos dados no colineales que son los vértices de un triángulo. Se espera que las justificaciones de los estudiantes hagan referencia a la propiedad de equidistancia de los puntos de la mediatriz.

Se inicia construyendo un triángulo y planteándoles a los alumnos la situación de encontrar un punto que se encuentre equidistante a los tres vértices, pidiéndoles además que propongan un procedimiento y lo justifiquen.

1. En un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes coordenados y construya un triángulo ABC.

   a) ¿Cómo podría hallar el punto que se encuentra a la misma distancia de los tres vértices? Proponga un procedimiento y justifíquelo.

   ____

   ____

   ____

   ____

2. Construya la mediatriz de cada lado del triángulo.

   b) ¿Se cortan las tres mediatrices en un único punto?

   ____

3. Construya el punto de intersección (D) de estas rectas, y luego ocúltelas.
4. Construya los segmentos $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ y $\overline{DC}$.

   c) ¿Equidista D de los vértices del triángulo?

____

5. Mueva los vértices del triángulo original.
    d) ¿Se mantiene equidistante el punto D?

    ____

    ____

El punto del cual equidistan los vértices de un triángulo se llama **circuncentro**. El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices.

6) Trace la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo.
    e) ¿Por qué puede ser trazada esta circunferencia?

    ____

    ____

La circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo es la **circunferencia circunscrita** del triángulo.

2.3. Actividades con bisectrices

Las actividades con bisectrices están agrupadas giran en torno a la idea de la construcción de una circunferencia que sea tangente a tres segmentos (o rectas) que no están sobre una misma recta, es decir, la obtención del punto equidistante a tres segmentos (o rectas). Tomando en cuenta estas ideas se exploran las propiedades de la bisectriz como lugar geométrico y su relación con la circunferencia y sus rectas tangentes.

2.3.1. Actividad 6. La bisectriz de un ángulo

Esta actividad está orientada a estudiar la bisectriz como lugar geométrico de puntos equidistantes a dos rectas no paralelas (o semirrectas con el mismo origen). Esto se utilizará más adelante para determinar el punto equidistante a tres rectas no paralelas o los lados de un triángulo, y así hallar la circunferencia inscrita de este.

1. Abra un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes y dibuje un punto A.
2. Construya dos semirrectas con origen A, pero que no estén en la misma recta. Oculte sus etiquetas.

3. Cree un deslizador $r = 5$.
4. Construya una circunferencia de centro A y radio r.
5. Construya los interceptos D y E de la circunferencia con las semirrectas. Luego, oculte la circunferencia.
6. Dibuje las rectas perpendiculares a las semirrectas en los puntos D y E.
7. Construya el punto de intersección F de las rectas trazadas en el paso anterior. Oculte las rectas, y luego construya los segmentos $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$.
   a) ¿Cómo son las medidas de $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$?

   ____

   b) ¿De quienes equidista el punto F?

   ____

8. Active el ***Rastro*** al punto F, y luego mueva el deslizador.
   c) ¿Qué figura forma el rastro?

   ____

   d) ¿Cómo son las medidas de $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$?

   ____

   e) ¿Corta el dibujo formado por el rastro al ángulo BAC? ¿En qué punto?

   ____

   f) ¿Equidista el punto F de los lados del ángulo BAC?

   ____

9. Borre el rastro y construya la semirrecta con origen A y que pasa por F.
10. Oculte el deslizador, $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$. Construya los ángulos BAF y FAC.
   g) ¿Cómo son las medidas de los ángulos BAF y FAC?

   ____

   h) ¿Qué hace la semirrecta al ángulo BAC?

   ____

Se llama **bisectriz** de un ángulo a la semirrecta que divide al ángulo en dos ángulos de igual medida. Vista como lugar geométrico la bisectriz de un ángulo es el conjunto de puntos que equidista de sus lados.

2.3.2. Actividad 7. Circunferencia inscrita en un triángulo e incentro

La actividad pretende explotar lo estudiado en la actividad anterior para que los alumnos obtengan el punto equidistante a los lados de un triángulo. Se espera que las justificaciones de los estudiantes hagan referencia a la propiedad de equidistancia de los puntos de la bisectriz.

Se inicia construyendo un triángulo y planteándoles a los alumnos la situación de encontrar un punto que se encuentre equidistante a los lados del triángulo, pidiéndoles además que propongan un procedimiento y lo justifiquen.

La **distancia de un punto a una recta** es la longitud del segmento que es perpendicular a la recta, y cuyos extremos son el punto dado y un punto sobre la recta.

1. En un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes coordenados y construya un triángulo ABC.
   a) ¿Cómo podría hallar el punto que se encuentra a la misma distancia de los tres lados de un triángulo? Proponga un procedimiento y justifíquelo.

   ____

   ____

   ____

   ____

2. Construya la bisectriz de cada ángulo del triángulo.
   b) ¿Se cortan las tres bisectrices en un único punto?

   ____

3. Construya el punto de intersección (D) de estas rectas, y oculte cada bisectriz.
4. Construya las rectas perpendiculares a los lados del triángulo que pasan por el punto D.
5. Construya el punto en el que cada lado es cortado perpendicularmente en dicho punto. Oculte las perpendiculares.
6. Construya los segmentos que van de D a los puntos construidos en el paso anterior.
   c) ¿Equidista D de los lados del triángulo?

   ____

7. Mueva los vértices del triángulo original.

d) ¿Se mantiene equidistante el punto D?

____

____

El punto que equidista de los lados de un triángulo se llama **incentro**. El incentro es el punto de intersección de las bisectrices.

7) Trace la circunferencia que pasa por los puntos E, F y G.

   e) ¿Por qué puede ser trazada esta circunferencia?

____

____

La circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo es la **circunferencia inscrita** del triángulo.

2.3.3. Actividad 8. Teorema de la bisectriz

En esta actividad el estudiante deducirá que en un triángulo, la razón entre dos lados es igual a la razón de las partes en las que queda dividido el tercer lado por la bisectriz de ángulo interno opuesto.

1. En un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes coordenados y construya un triángulo ABC.
2. Construya la bisectriz del ángulo A.
3. Construya el punto D en donde la bisectriz corta a $\overline{BC}$.
4. Construya $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$.
5. Calcule $\frac{BA}{AC}$ y $\frac{BD}{DC}$.
   a) ¿Cómo son esas razones?

____

6. Mueva cualquiera de los vértices del triángulo ABC?
   b) ¿Continúan siendo iguales estas razones?

____

c) ¿Qué conclusión puede establecer?

____

____

2.4. Actividades con alturas

En la actividad que se propone a continuación se construyen las alturas de un triángulo y se estudia el ortocentro de un triángulo. Se llama **altura de un triángulo** a la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto o su prolongación.

2.4.1. Actividad 9. El ortocentro

1. En un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes coordenados y construya un triángulo ABC.
2. Construya las alturas del triángulo y los puntos (o punto) donde se interceptan.
   a) ¿En cuántos puntos se cortan?

   ____
3. Mueva los vértices del triángulo.
   b) ¿Siempre se cortan en un punto?

   ____

Las alturas de un triángulo siempre se cortan en un punto, el cual se llama **ortocentro**.

2.4.2. Actividad 10. El triángulo órtico

En esta actividad se estudia el triángulo órtico y el hecho de que las bisectrices del triángulo órtico son las alturas del triángulo original.

1. En un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes coordenados y construya un triángulo ABC acutángulo.
2. Construya las alturas.
3. Construya los puntos donde las rectas cortan perpendicularmente a los lados del triángulo original.
4. Construya el triángulo cuyos vértices son los puntos donde las rectas cortan perpendicularmente a los lados del triángulo original.

El triángulo cuyos vértices son los puntos donde las rectas cortan perpendicularmente a los lados del triángulo original se llama **triángulo órtico**.

5. Construya las bisectrices de los ángulos del triángulo órtico.
   a) ¿Con quienes coinciden?

   ____

6. Mueva los vértices del triángulo ABC.
   b) ¿Coinciden siempre las bisectrices del triángulo órtico con las alturas del triángulo original?

   ____

   c) ¿Qué puede concluir sobre las bisectrices del triángulo órtico?

   ____

2.5. Actividades sobre la relación entre los puntos notables de un triángulo

Estas actividades están estructuradas de tal manera que el estudiante conozca algunas relaciones entre los puntos notables de un triángulo.

2.5.1. Actividad 11. La recta de Euler

En esta actividad el estudiante aprenderá que los puntos notables en un triángulo no equilátero están en una misma recta.

1. En un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes coordenados y construya un triángulo ABC que no sea equilátero.
2. Construya las medianas y el baricentro. Oculte las medianas y los puntos medios de los lados del triángulo.
3. Construya las mediatrices y el circuncentro. Oculte las mediatrices.
4. Construya las bisectrices y el incentro. Oculte las bisectrices.
5. Construya las alturas y el ortocentro. Oculte las alturas.
6. Construya la recta que pasa por el baricentro y el circuncentro.
   a) ¿Qué se puede decir del baricentro, circuncentro, incentro y ortocentro?

   ____

7. Mueva los vértices del triángulo ABC.

b) ¿Siempre están alineados los cuatro puntos notables?

____

c) ¿Qué puede concluir?

____

La recta en la cual están los cuatro puntos notables se conoce como **recta de Euler**.

8. Mueva los vértices del triángulo hasta lograr que el incentro esté en la recta Euler.
   d) ¿En qué tipo de triángulos los cuatro puntos notables de un triángulo están en la recta de Euler?

____

2.5.2. Actividad 12. Relación entre la distancia del baricentro al ortocentro y la distancia del baricentro al circuncentro.

En esta actividad el estudiante aprenderá que la distancia del baricentro al ortocentro es el doble de la distancia del baricentro al circuncentro.

1. Abra el archivo de la construcción anterior, oculte la recta de Euler y el incentro.
2. Construya los segmentos cuyos extremos son el baricentro y el ortocentro, y el baricentro y el circuncentro.
   a) ¿Qué relación guardan las medidas de los segmentos dibujados en el paso anterior?

____

3. Mueva los vértices del triángulo.
   b) ¿Se mantiene la relación entre los segmentos?

____

   c) ¿Qué puede concluir sobre la distancia del baricentro al ortocentro y la distancia del baricentro al circuncentro?

____

2.6. Actividades sobre rectas notables en un triángulo isósceles y en un equilátero

En estas actividades se estudian las propiedades de las rectas notables para los casos en que el triángulo sea isósceles o equilátero.

2.6.1. Actividad 13. Rectas notables en un triángulo isósceles

Esta actividad pretende mostrar que la altura y la mediatriz correspondiente a la base de un triángulo isósceles, y la bisectriz del ángulo opuesto a la base son iguales.

1. Abra un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes y dibuje un segmento de extremos A y B. Oculte la etiqueta de este segmento.
2. Trace la mediatriz de este segmento. Oculte su etiqueta.
3. Ubique un punto C que esté en la mediatriz, pero que no pertenezca a $\overline{AB}$.
4. Oculte la mediatriz.
5. Dibuje el triángulo cuyos vértices son A, B, y C.
   a) ¿Qué tipo de triángulo es? ¿Por qué?

   ____

   ____

6. Dibuje la bisectriz del ángulo C.
7. Ubique el punto de intersección D de la bisectriz con $\overline{AB}$.
8. Dibuje los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$.
   b) ¿Es D el punto medio de $\overline{AB}$? ¿Por qué?

   ____

   ____

9. Si mueve cualquiera de los extremos de $\overline{AB}$,
   c) ¿es ΔABC isósceles? ¿Continúa siendo D el punto medio de $\overline{AB}$?

   ____

   ____

   d) ¿Qué puede concluir sobre el punto en donde la bisectriz del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles corta a la misma?

   ____

   ____

e) Dibuje el ángulo CDA.
   ¿Qué relación guardan la bisectriz y $\overline{AB}$? ¿Por qué?

f) Si mueve cualquiera de los extremos de $\overline{AB}$, ¿continúan siendo perpendiculares?

g) ¿Qué puede concluir sobre la bisectriz del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles?

h) ¿Son iguales la mediatriz y la bisectriz del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles? ¿Por qué?

i) ¿Son iguales la altura correspondiente a la base y la bisectriz del ángulo opuesto a esta? ¿Por qué?

j) ¿Qué se puede concluir sobre la altura y mediatriz correspondiente a la base de un triángulo isósceles, y la bisectriz del ángulo opuesto a la base?

2.6.2. Actividad 14. Rectas notables en un triángulo equilátero

En esta actividad se muestra que las rectas notables en un triángulo equilátero coinciden, y por este motivo los cuatro puntos notables son un solo punto.

1. Abra un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes y dibuje un segmento de extremos A y B. Oculte la etiqueta de este segmento.
2. Construya una circunferencia de centro A y radio AB.

3. Construya una circunferencia de centro B y radio BA.
4. Construya el punto de intersección C de las circunferencias, y luego ocúltelas.
5. Construya el triángulo ABC.
   a) ¿Por qué son iguales AB, BC y AC?

   ____

   ____

   b) ¿Qué tipo de triángulo es?

   ____

   ____

6. Construya las mediatrices y el circuncentro.
7. Construya las bisectrices y el incentro.
8. Construya las alturas y el ortocentro.
   c) ¿Por qué las medianas están contenidas en las mediatrices?

   ____

   ____

   d) ¿Qué ocurre con las rectas notables?

   ____

   ____

   e) ¿Qué ocurre con el baricentro, el circuncentro, incentro y ortocentro?

   ____

   f) ¿Qué conclusión puede establecer?

   ____

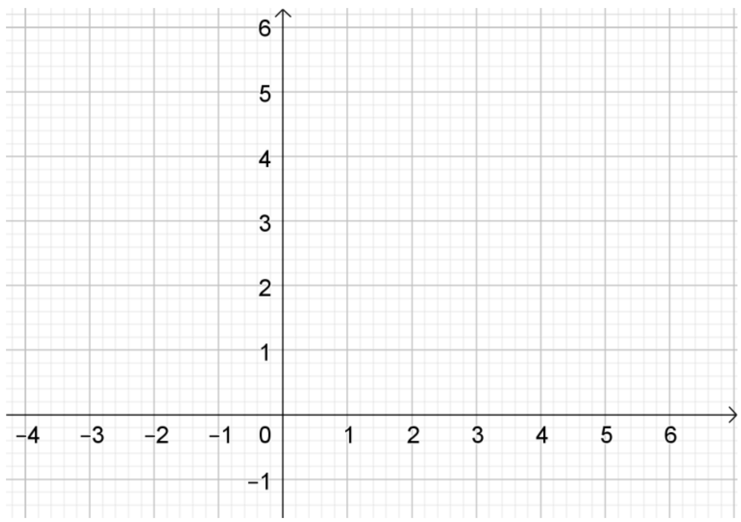
CAPÍTULO 3

Simulación

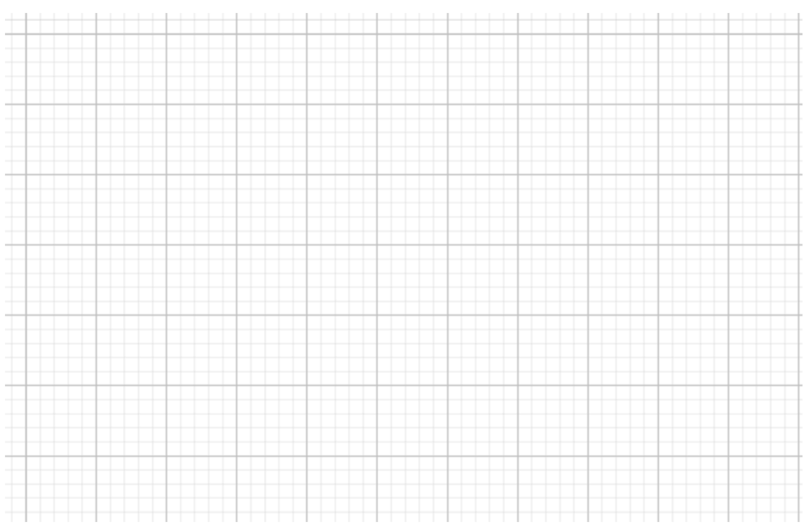
3.1. Simulación de actividades con medianas

3.1.1. Simulación de actividad 1. Las medianas

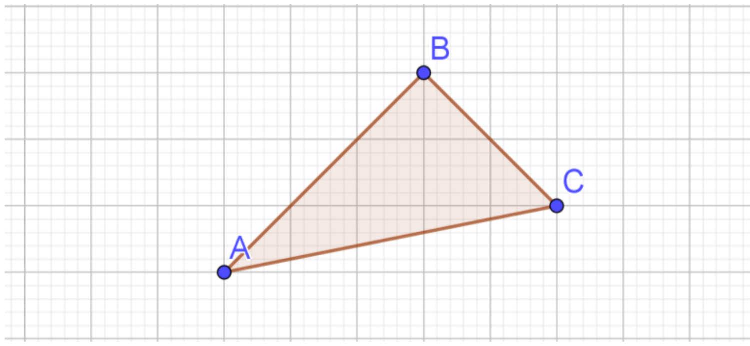
1. Al abrir un archivo de Geogebra, la zona de trabajo es:



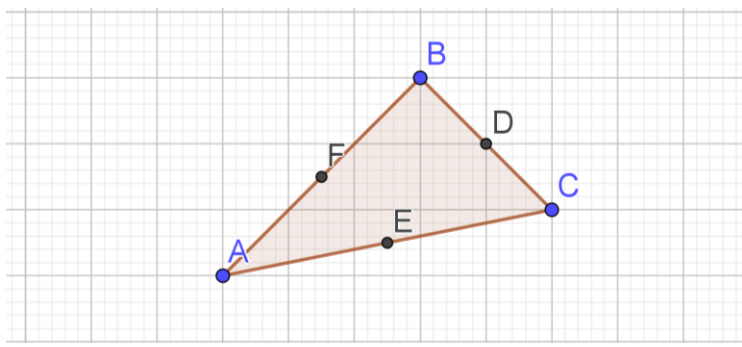
2. Los ejes coordenados se ocultan dando clic en *vista gráfica*, y luego en *ocultar ejes*. Así queda la siguiente zona de trabajo:



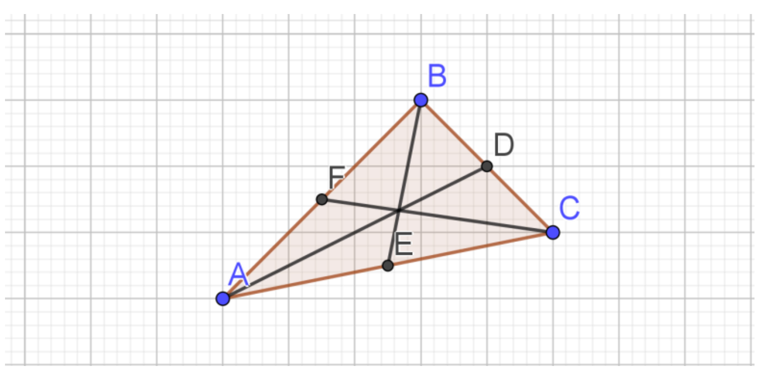
3. Seleccione en las ***herramientas de polígonos***, la herramienta ***Polígono***, y luego en la zona de trabajo marque tres puntos distintos para construir el triángulo solicitado. De clic derecho sobre cada lado y luego de clic izquierdo sobre ***Etiqueta visible***.



4. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Medio o Centro***, y marque los extremos de $\overline{BC}$, los extremos de $\overline{AC}$, y los extremos de $\overline{AB}$. Con esto obtendrá una figura similar a la siguiente:



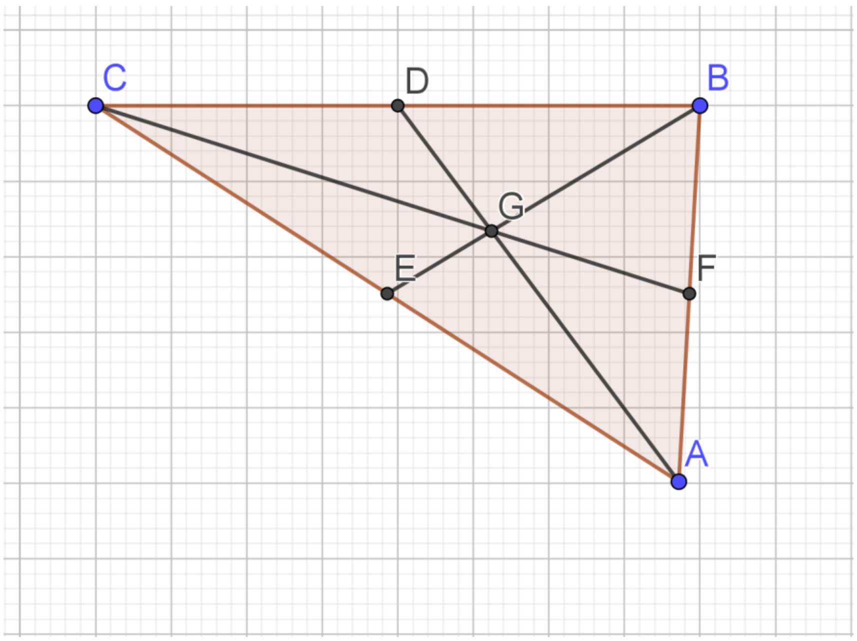
5. Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento***, y marque los puntos A y D, B y E, C y F. Luego, quite las etiquetas de los segmentos trazados. Se obtiene la figura:

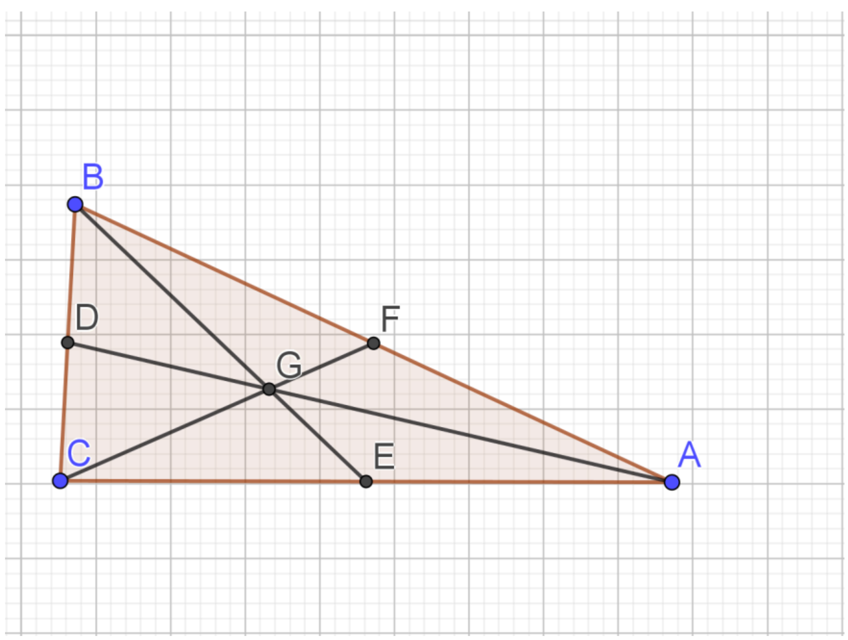


a) ¿Pasa algo especial con las medianas? Si es así, ¿qué es?

Si. Se cortan en un solo punto.

b) Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***. Luego marque cualquiera de los vértices del triángulo y mueva el cursor. Algunos movimientos son:





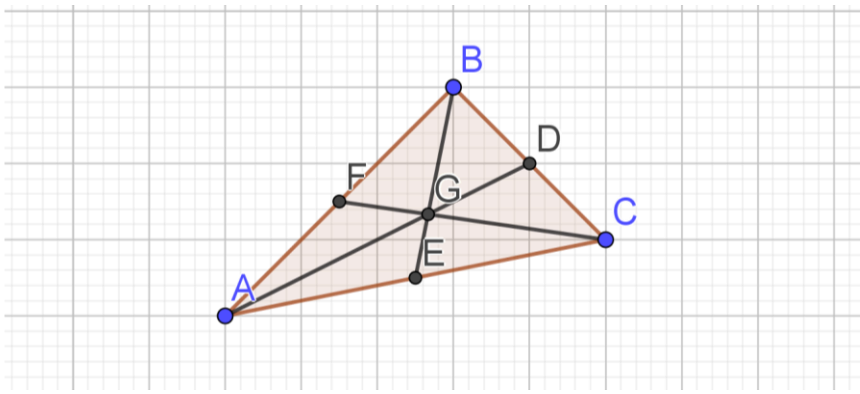
¿Las medianas siempre se cortan en un solo punto?

Si.

c) ¿Qué puede concluir sobre las medianas de un triángulo?

Las medianas de un triángulo se cortan en exactamente un solo punto.

6. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***, y luego marque el punto donde se cortan las medianas.

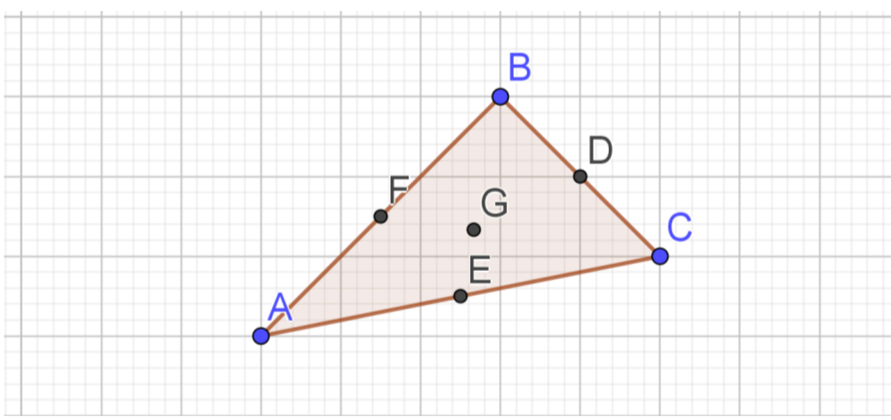


d) ¿El baricentro siempre queda en el interior del triángulo?

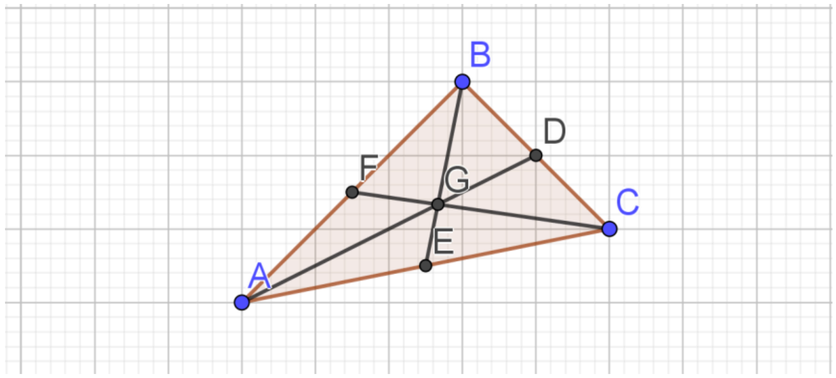
El baricentro siempre queda en el interior del triángulo, porque como las medianas, al ir de un vértice al punto medio del lado opuesto, están en el interior del triángulo.

3.1.2. Simulación de actividad 2. División de medianas por el baricentro

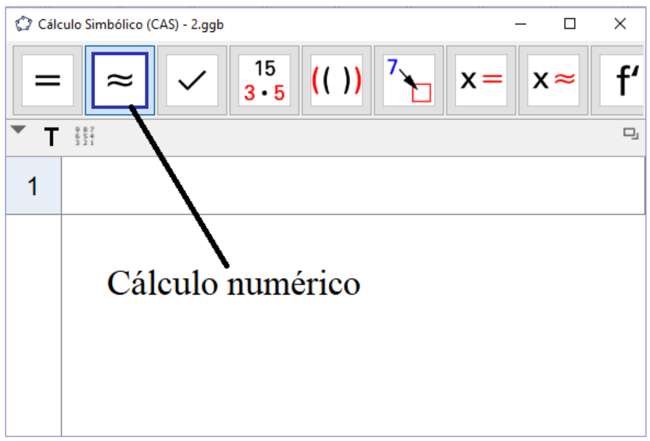
1. Oculte las medianas en la construcción de la actividad anterior, seleccionando ***Vista gráfica*** y luego ***ocultar ejes***.



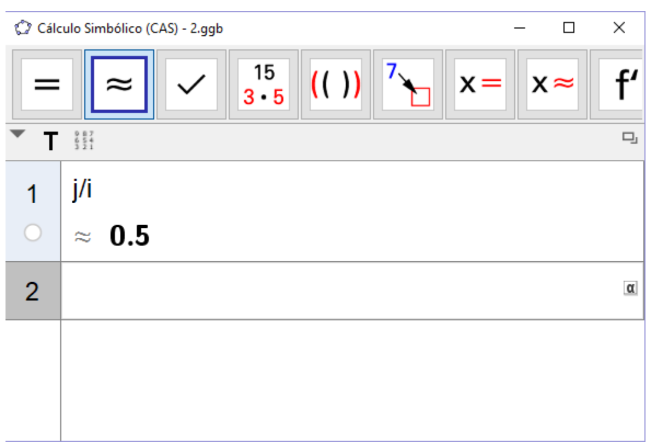
2. Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento***, y luego marque los puntos G y A, G y D, G y B, G y E, G y C, G y F. Oculte las etiquetas de los segmentos que acaba de construir dando clic derecho sobre ellos y luego dando clic izquierdo en ***Etiqueta Visible***.



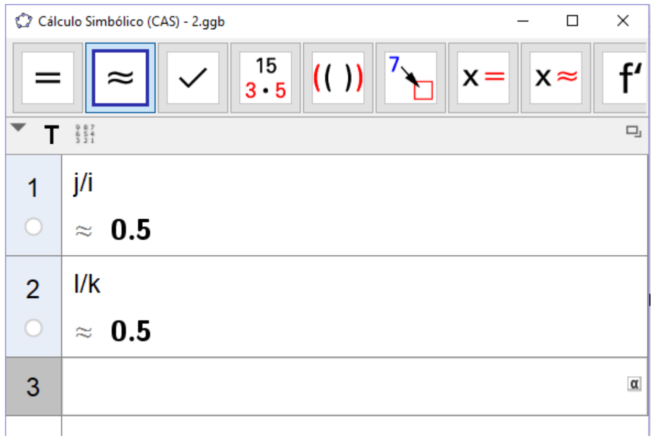
3. En el Menú Vista seleccione Cálculo Simbólico (CAS). Le aparecerá la siguiente ventana



De clic izquierdo sobre la celda a la derecha del número 1, escriba j/i y luego de clic izquierdo en el botón ***Cálculo numérico*** que se señala en la figura de arriba. Cuando realice esto le aparecerá lo siguiente:



De clic izquierdo sobre la celda a la derecha del número 2, escriba l/k y luego de clic izquierdo en el botón ***Cálculo numérico***. Cuando realice esto le aparecerá lo siguiente:

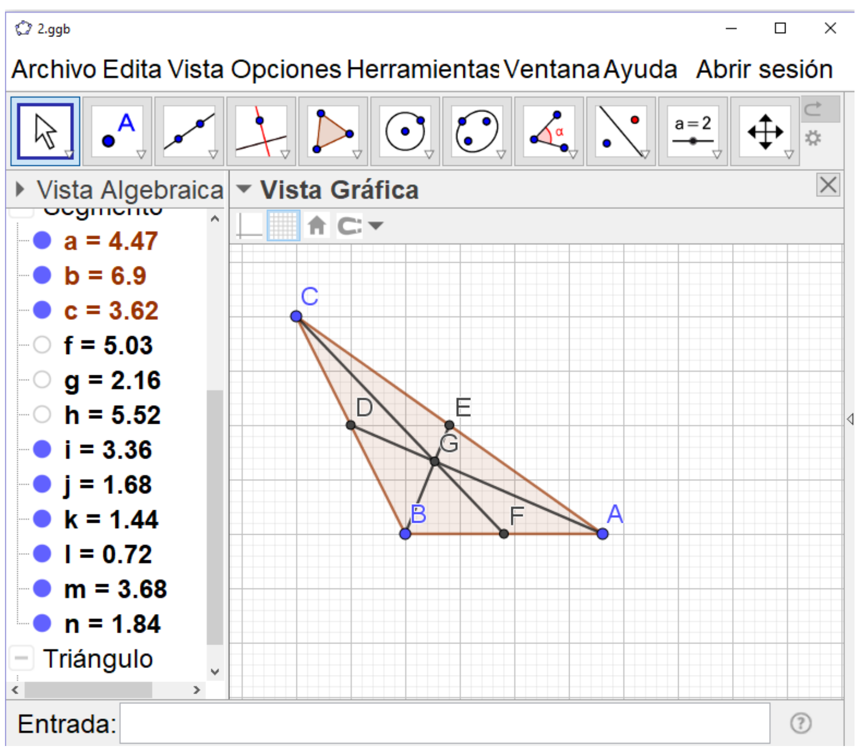


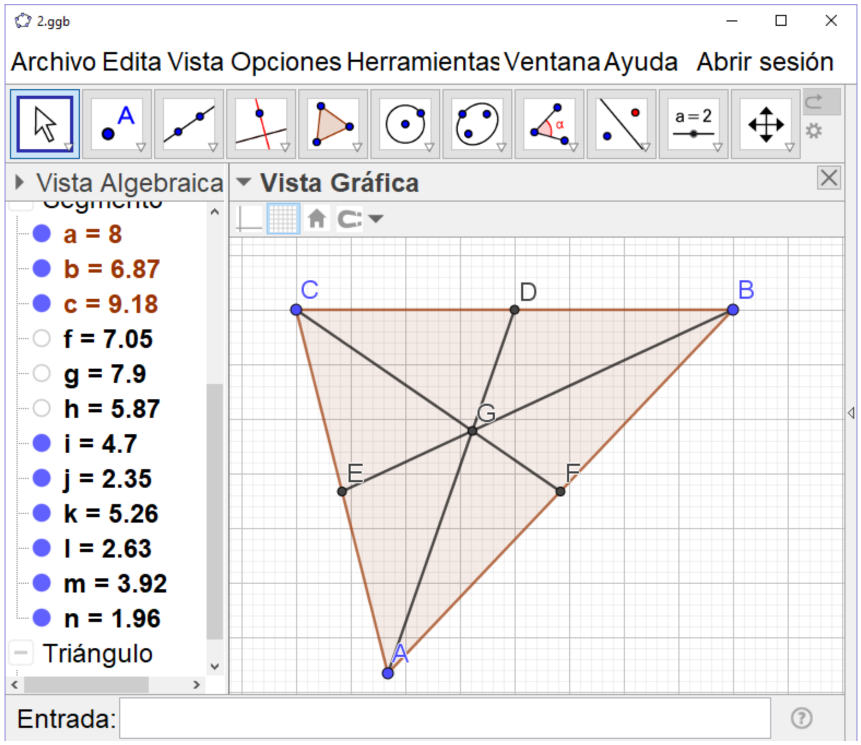
De clic izquierdo sobre la celda a la derecha del número 3, escriba n/m y luego de clic izquierdo en el botón ***Cálculo numérico***. Cuando realice esto el valor obtenido será 0.5.

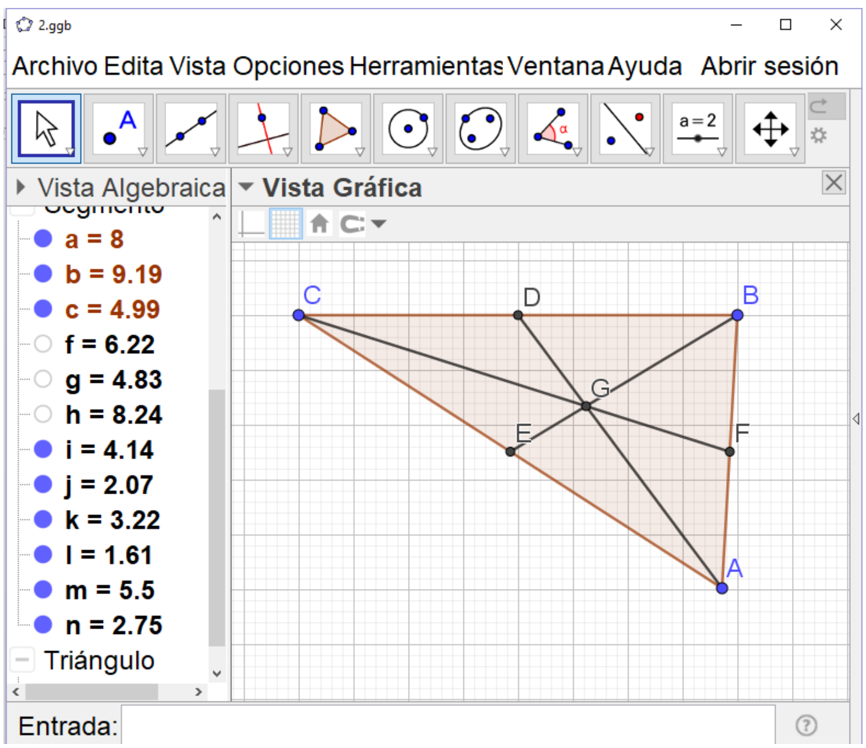
a) ¿Cuál es el valor obtenido?

El valor es 0.5, o lo que es lo mismo $\frac{1}{2}$.

4. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***. Luego marque cualquiera de los vértices del triángulo y mueva el cursor. Algunos movimientos son:







Observe en la ***Vista Algebraica*** que en cada caso $GD:GA = 1:2$, $GE:GB = 1:2$, $GF:GA = 1:2$.

b) ¿Varía el valor obtenido en cada caso? ¿Cuál es el valor obtenido?

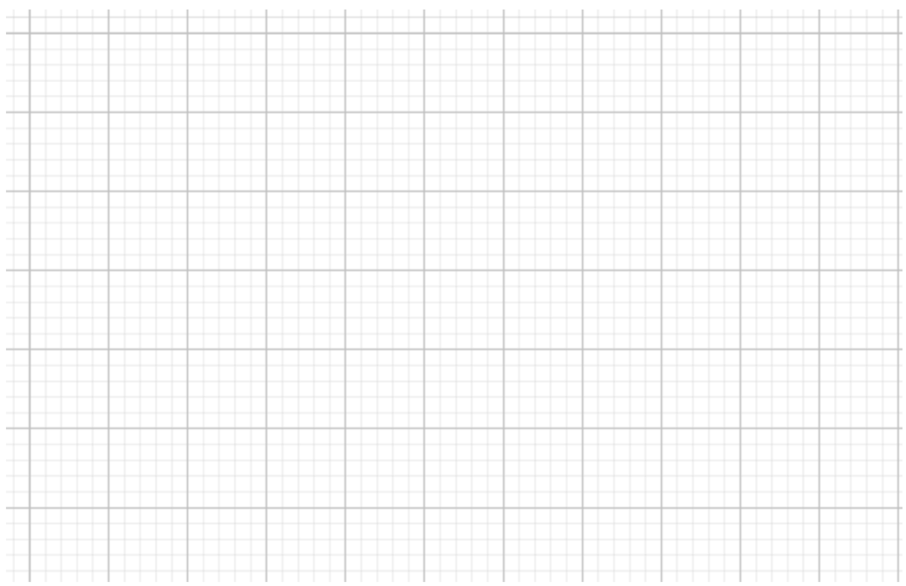
El valor nunca varía, siempre es $\frac{1}{2}$.

c) ¿Qué conclusión puede obtener?

El baricentro divide a las medianas en dos segmentos de razón 2 a 1, es decir, que uno mide el doble del otro.

3.1.3. Simulación de actividad 3. El triángulo medial

1. Cuando abra el nuevo archivo de Geogebra y oculte los ejes, la zona de trabajo es:

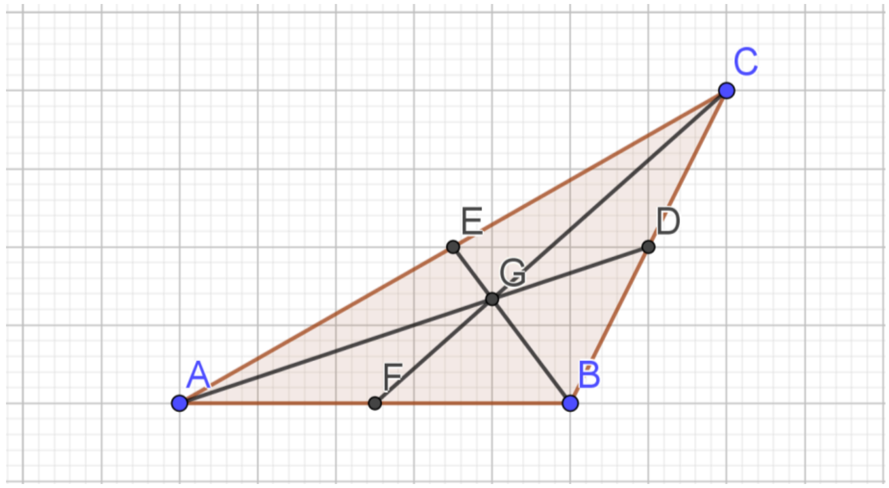


2. Seleccione en las ***Herramientas de polígonos***, la herramienta ***Polígono*** y construya el triángulo ABC. Luego, seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Medio o Centro***, y construya primero el punto medio de $\overline{BC}$, luego el punto medio de $\overline{AC}$ y después el punto medio de $\overline{AB}$.

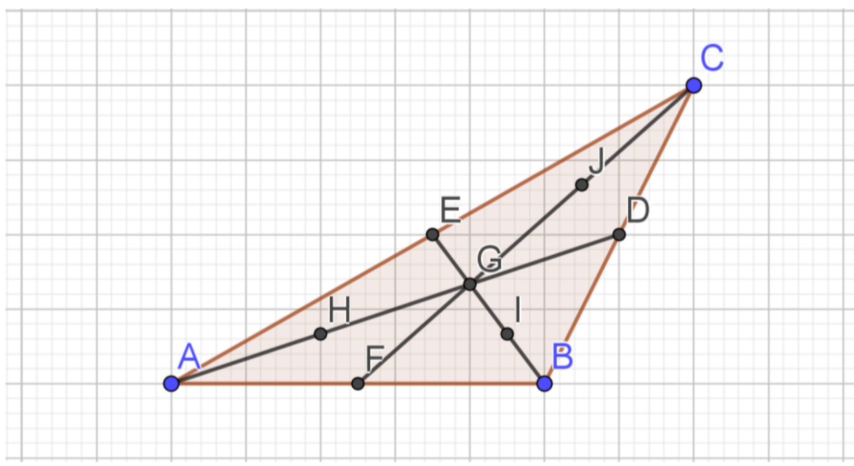
   Ahora seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento*** y construya $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$. (Oculte las etiquetas de los segmentos)

   Finalmente, seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección*** y marque el punto (G) de intersección de las medianas (el baricentro).

   Con estos pasos se construye la figura:



3. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Medio o Centro***, y construya el punto medio de $\overline{AG}$, segundo el punto medio de $\overline{BG}$, y tercero el punto medio de $\overline{CG}$.

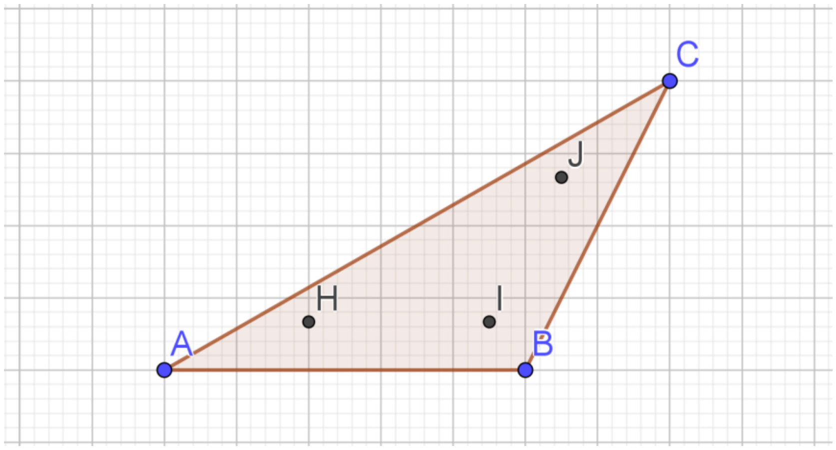


a) Sin utilizar la opción de medir, conteste: ¿Qué otro segmento en el triángulo medirá lo mismo que $\overline{BI}$? ¿Por qué?

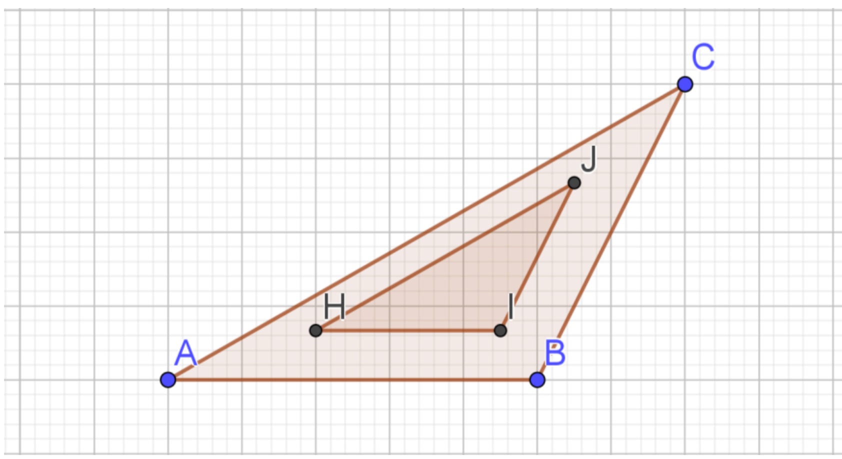
<u>Como I es punto medio de BG, se tiene que $\overline{GI}$ también tiene la misma medida.</u>

<u>Por otra parte, como G es el baricentro, de la actividad 2 conoce que BG es el doble de EG, y al ser I punto medio de BG, entonces $\overline{GE}$ también tiene la misma medida que $\overline{BI}$.</u>

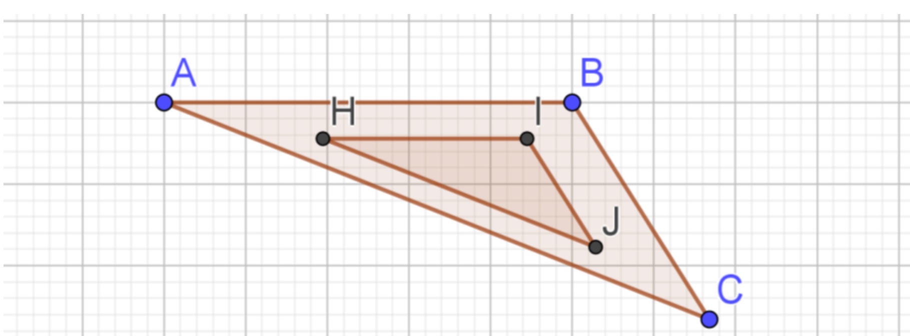
4. Cuando oculte las medianas, los puntos medios de los lados del triángulo ABC, y el baricentro, se tendrá:

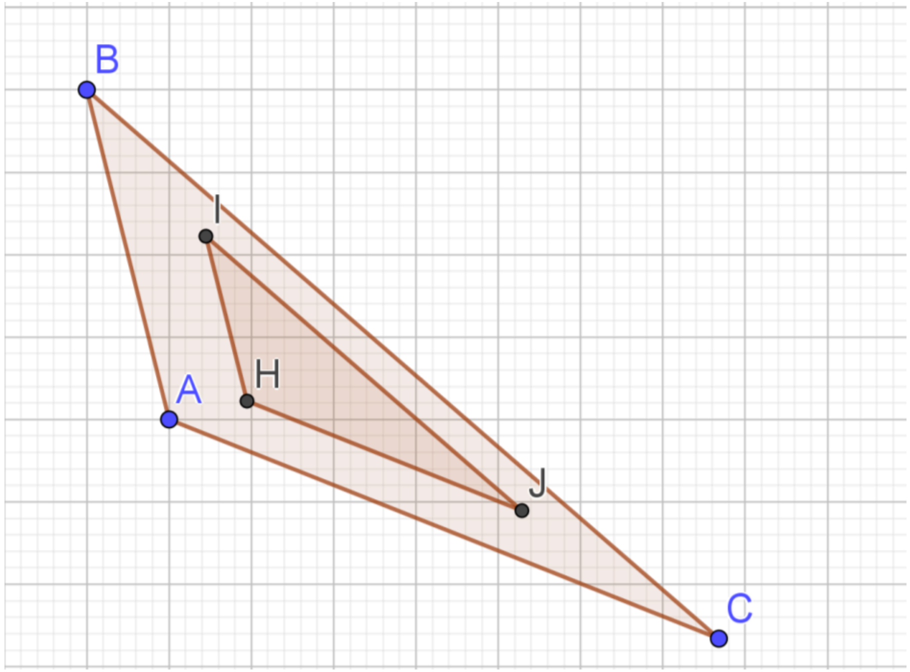


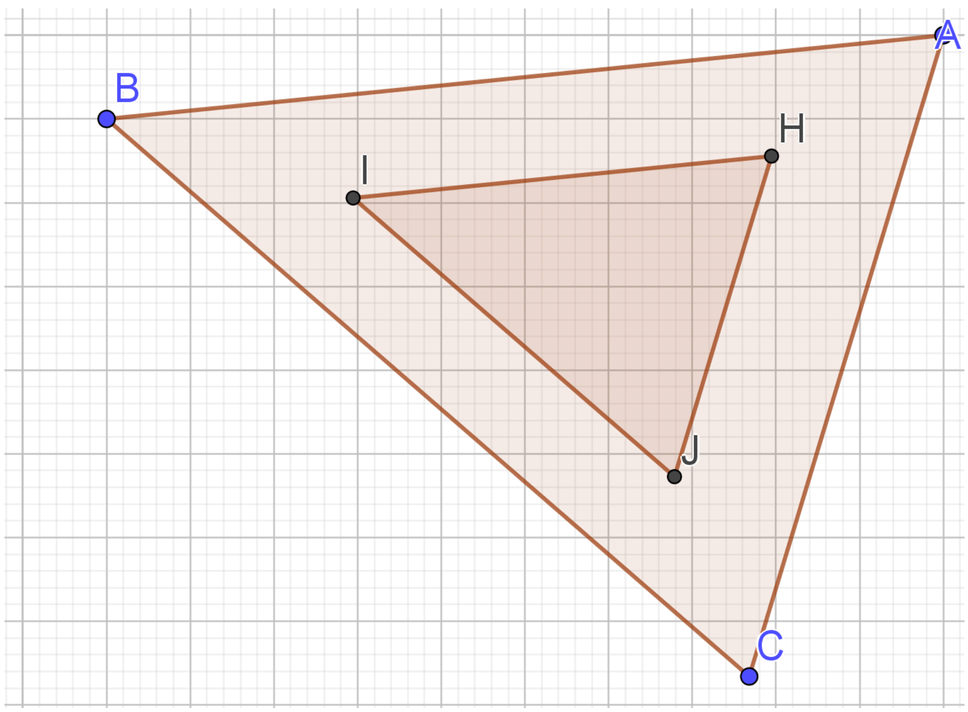
5. Seleccione en las ***Herramientas de polígonos***, la herramienta ***Polígono*** y construya el triángulo HIJ. (Oculte las etiquetas de sus lados)



6. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***. Luego marque cualquiera de los vértices del triángulo ABC y mueva el cursor. Algunos movimientos son:



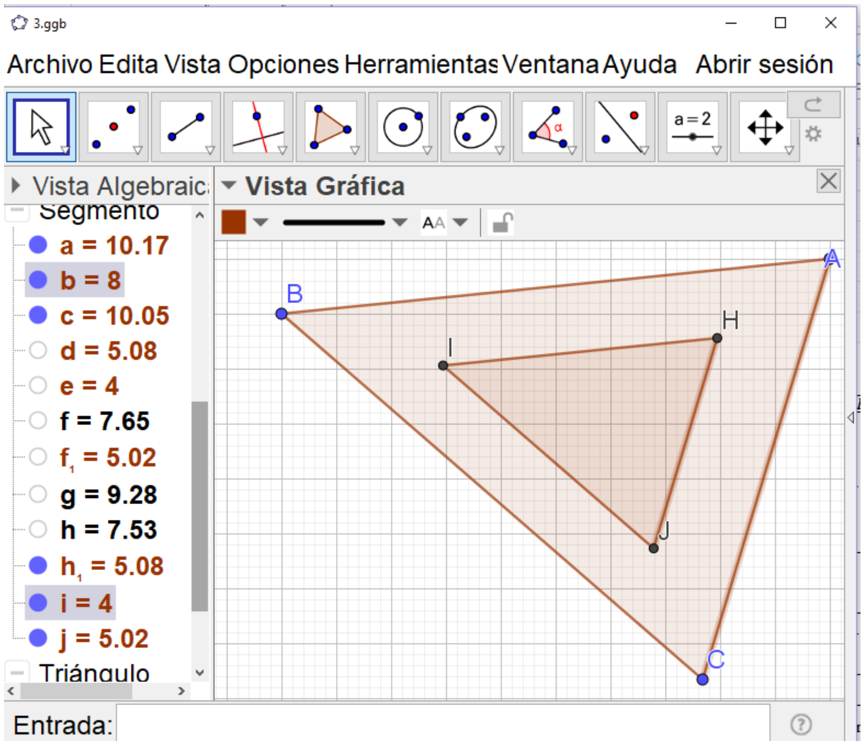




b) ¿Qué relación guardan $\overline{AC}$ y $\overline{HJ}$, $\overline{AB}$ y $\overline{HI}$, $\overline{BC}$ y $\overline{IJ}$?

<u>En todos los casos puede observarse que son paralelos: $\overline{AC}$ y $\overline{HJ}$, $\overline{AB}$ y $\overline{HI}$, $\overline{BC}$ y $\overline{IJ}$.</u>

7. Trabajando con la última figura, al seleccionar $\overline{AC}$ y $\overline{HJ}$, se tiene en la ***Vista Algebraica*** que $AC = 8$ y $HJ = 4$, tal a como puede observar en la siguiente figura:



c) ¿Cuál es el valor de $HJ:AC$?

El valor de esta razón es $\frac{1}{2}$.

d) ¿Cuál es el valor de $HI:AB$ y $IJ:BC$?

Si observa en la ***Vista Algebraica***, puede ver que el valor de estas razones es $\frac{1}{2}$.

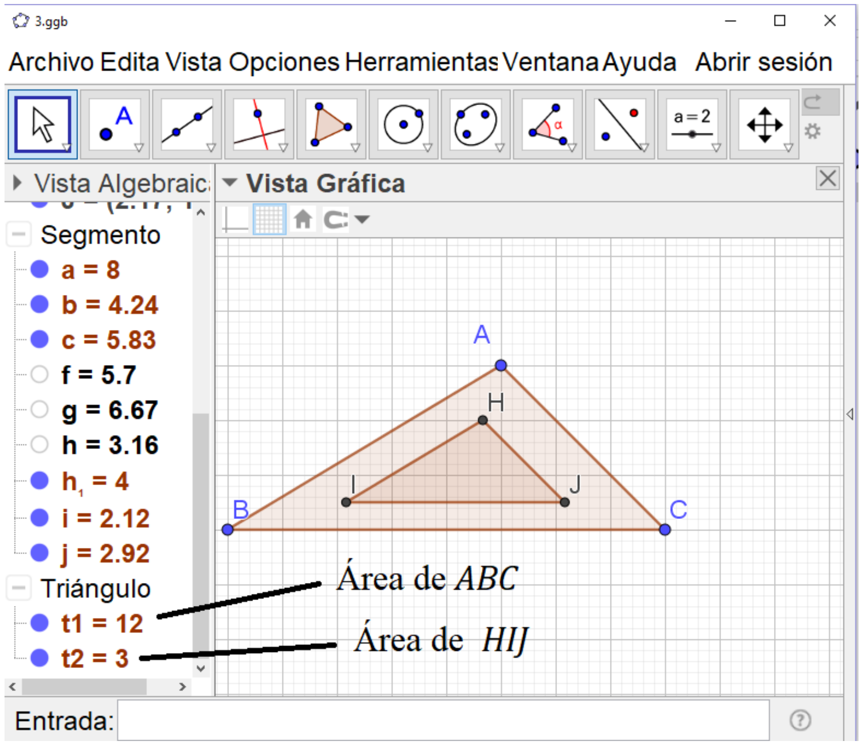
e) ¿Cómo son los triángulos ABC y HIJ? ¿Por qué?

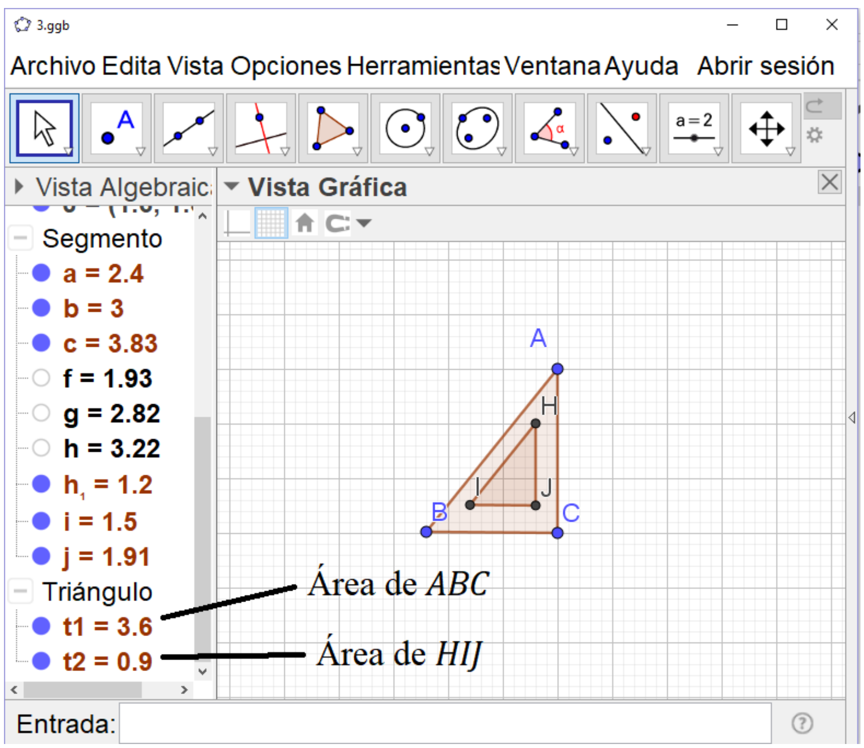
Son semejantes. Porque la razón entre sus lados es la misma. Así por el teorema de semejanza Lado-Lado-Lado estos dos triángulos deben ser semejantes.

f) ¿Qué relación guardan los perímetros de estos triángulos? ¿Por qué?

Como HJ, IJ y HI son la mitad de AC, BC y AB respectivamente, entonces el perímetro del triángulo HIJ es la mitad del perímetro del triángulo ABC.

g) Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***. Luego marque cualquiera de los vértices del triángulo ABC y mueva el cursor.





Observe en la ***Vista Algebraica*** las áreas de los triángulos.

¿Cuál es la relación que guardan sus áreas?

<u>En ambos casos el área del triángulo ABC es cuatro veces el área del triángulo HIJ.</u>

h) La razón entre las áreas es $\frac{1}{4}$.

i) ¿Qué puedes concluir sobre lo obtenido hasta este momento?

i. Cada lado del triángulo que se forma con los puntos medios de los segmentos cuyos extremos son el baricentro de un triángulo y los vértices del mismo, es paralelo a un lado de este triángulo.

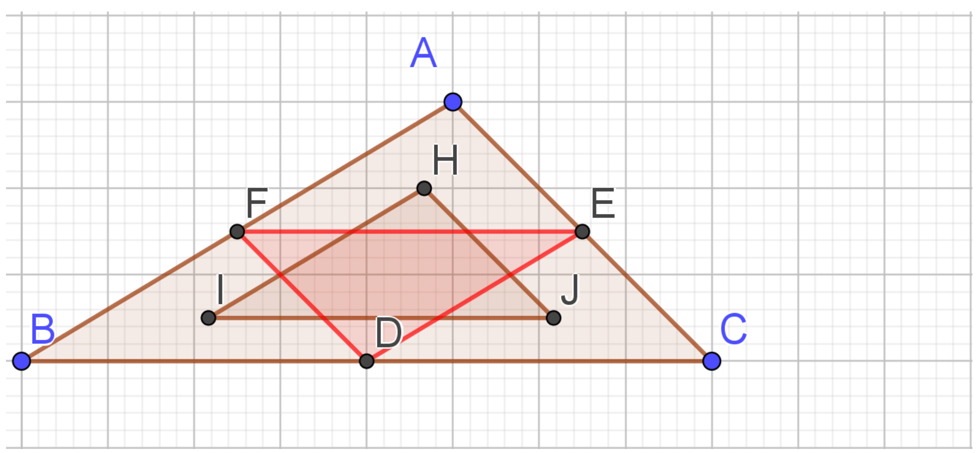
ii. La razón entre los lados que son paralelos es $\frac{1}{2}$.

iii. El triángulo original es semejante al triángulo pequeño.

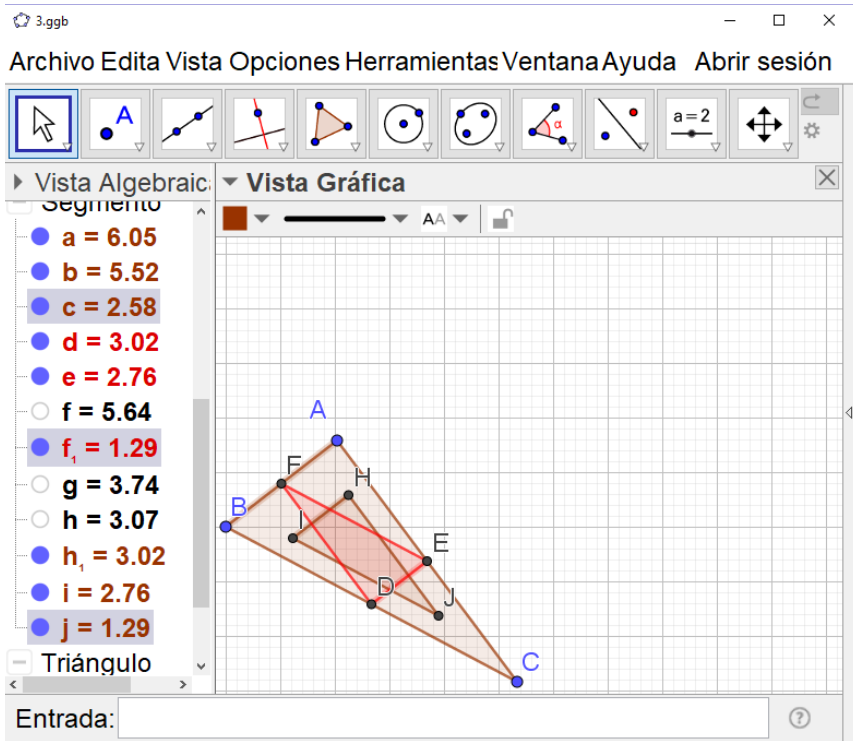
iv. El perímetro del triángulo original es dos veces el perímetro del triángulo pequeño.

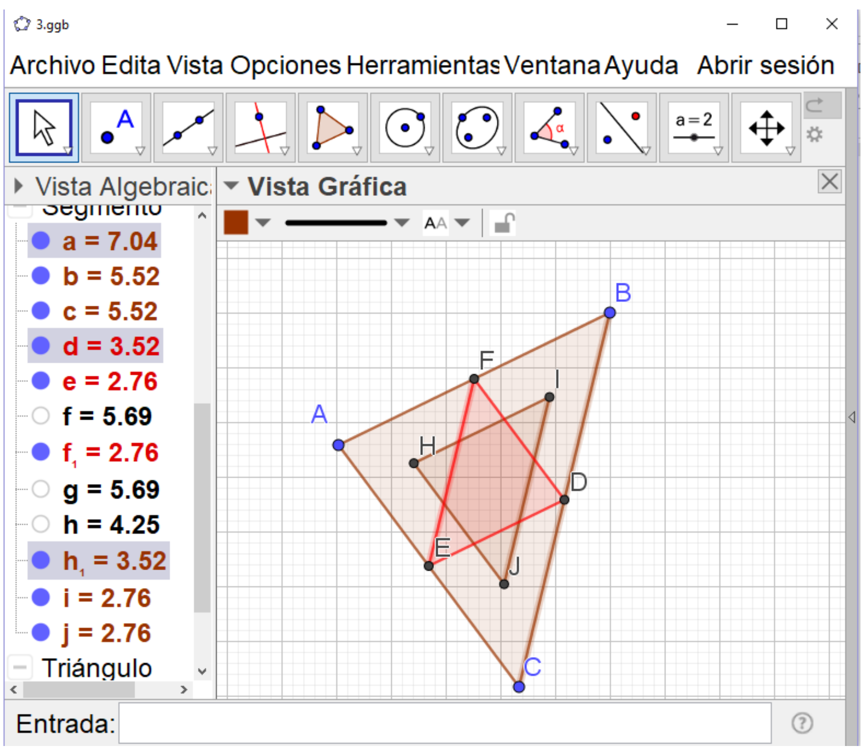
v. El área del triángulo original es cuatro veces el área del triángulo pequeño.

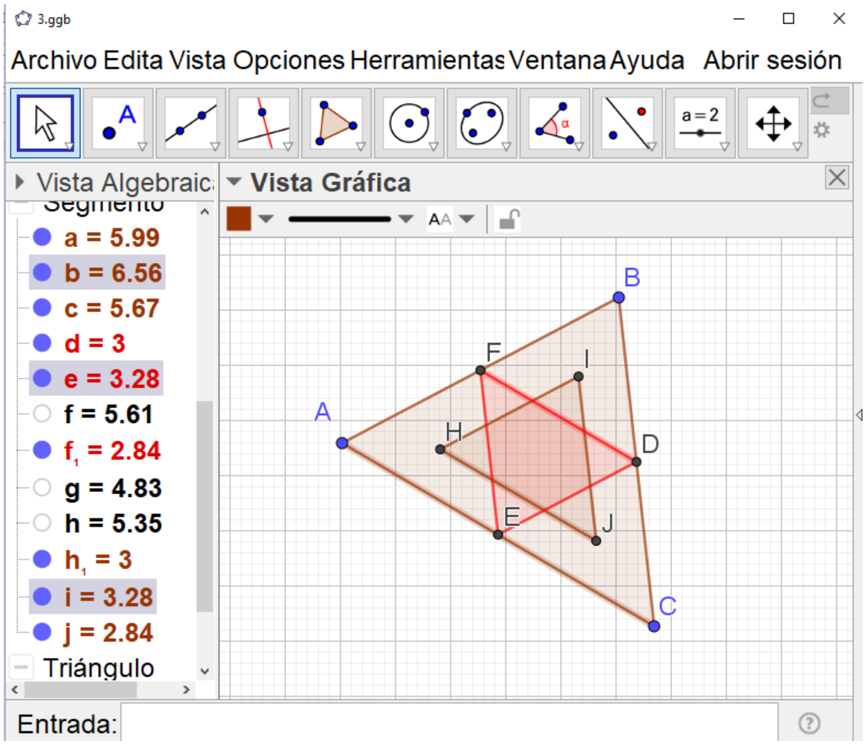
8. Luego de que haga visibles los puntos medios de los lados del triángulo ABC, seleccione en las ***Herramientas de polígonos***, la herramienta ***Polígono*** y construya el triángulo DEF. (Oculte las etiquetas de sus lados).



9. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***. Marque cualquiera de los vértices del triángulo ABC y mueva el cursor. En las siguientes figuras se muestran las ***Vistas algebraica*** y ***gráfica*** para responder a las preguntas.


3.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión
Vista Algebraic
Vista Gráfica
Segmento
a = 6.05
b = 5.52
c = 2.58
d = 3.02
e = 2.76
f = 5.64
f1 = 1.29
g = 3.74
h = 3.07
h1 = 3.02
i = 2.76
j = 1.29
Triángulo
A
B
C
D
E
F
H
I
J
Entrada:


3.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión
Vista Algebraic
Vista Gráfica
Segmento
a = 7.04
b = 5.52
c = 5.52
d = 3.52
e = 2.76
f = 5.69
f1 = 2.76
g = 5.69
h = 4.25
h1 = 3.52
i = 2.76
j = 2.76
Triángulo
A
B
C
D
E
F
H
I
J
Entrada:



j) ¿Qué relación guardan $\overline{AC}$ y $\overline{FD}$, $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$, $\overline{BC}$ y $\overline{FE}$?

Son paralelos. Observe en la ***Vista Algebraica*** que AC es el doble de FD, AB el doble de ED y BC el doble de FE.

k) ¿Cuál es el valor de $FD:AC$, $ED:AB$ y $FE:BC$?

Si observa en la ***Vista Algebraica***, puede ver que el valor de estas razones es $\frac{1}{2}$.

l) ¿Cómo son los triángulos ABC y DEF? ¿Por qué?

Son semejantes. Porque la razón entre sus lados es la misma. Así por el teorema de semejanza Lado-Lado-Lado estos dos triángulos deben ser semejantes.

m) ¿Qué puede concluir sobre el triángulo original y el medial?

i. Cada lado del triángulo medial es paralelo a un lado del triángulo original.

ii. La razón entre los lados que son paralelos es $\frac{1}{2}$.

iii. El triángulo original es semejante al medial.

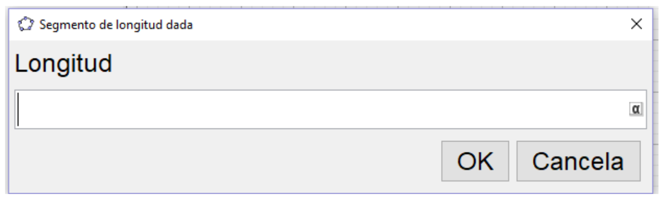
n) Observe en la ***Vista Algebraica*** las medidas de los lados de los triángulos DEF y HIJ. ¿Cómo son estos triángulos? ¿Por qué?

Los triángulos son congruentes, porque cada lado del triángulo DEF es congruente a un lado del triángulo HIJ.

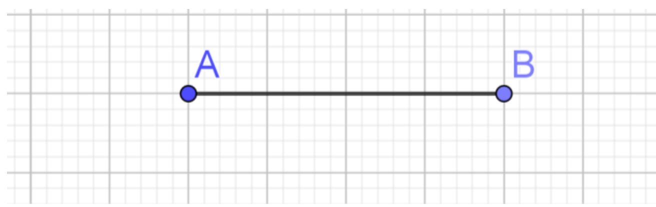
3.2. Simulación de actividades con mediatrices

3.2.1. Simulación de actividad 4. La mediatriz de un segmento

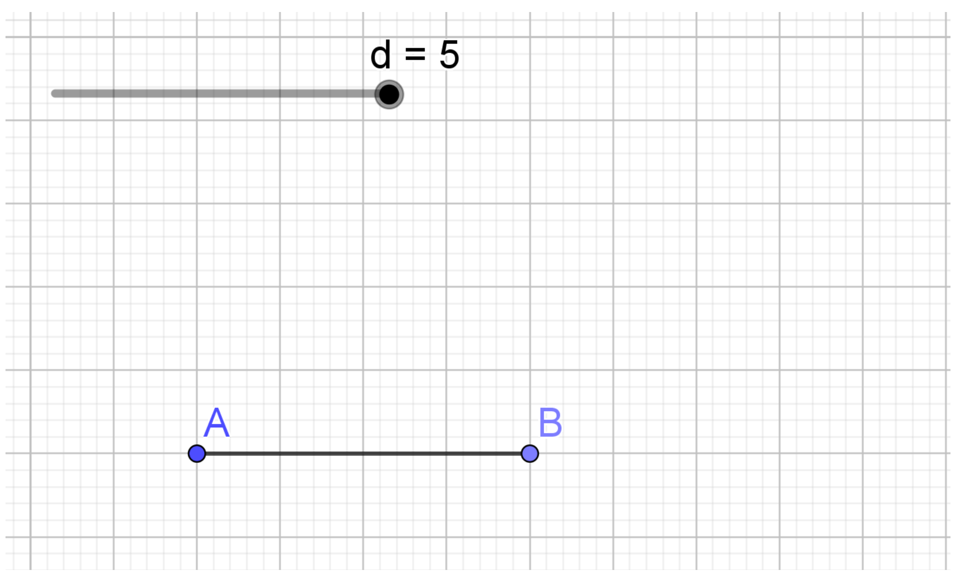
1. Después de abrir Geogebra, oculte los ejes. Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento de longitud dada***, le aparecerá lo siguiente:



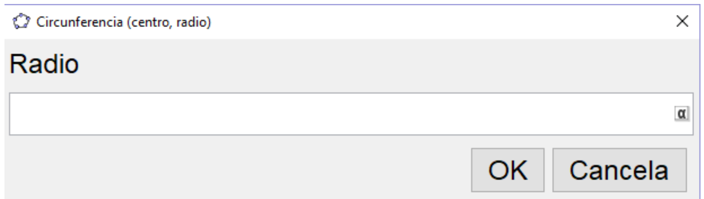
   Escriba 4, y luego de OK. Oculte la etiqueta del segmento.



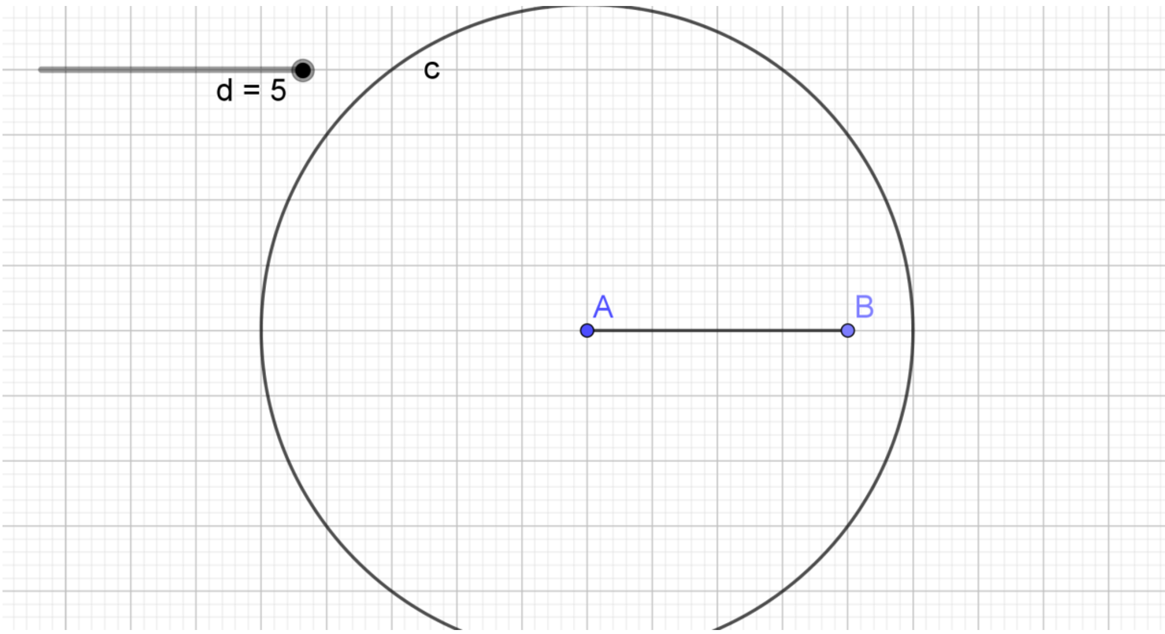
2. En la barra de ***Entrada***, escriba $d = 5$ para crear el deslizador. Luego, de clic izquierdo en el círculo que aparece a la izquierda de $d = 5$ en la ***Vista Algebraica*** para que el deslizador sea visible en la zona de trabajo.



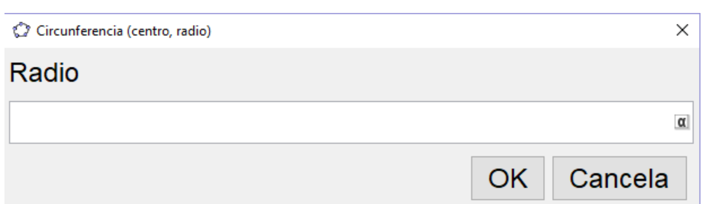
3. Seleccione en las ***Herramientas de circunferencias y arcos***, la herramienta ***Circunferencia (centro, radio).*** Luego, de clic izquierdo sobre el punto A, le aparecerá lo siguiente:



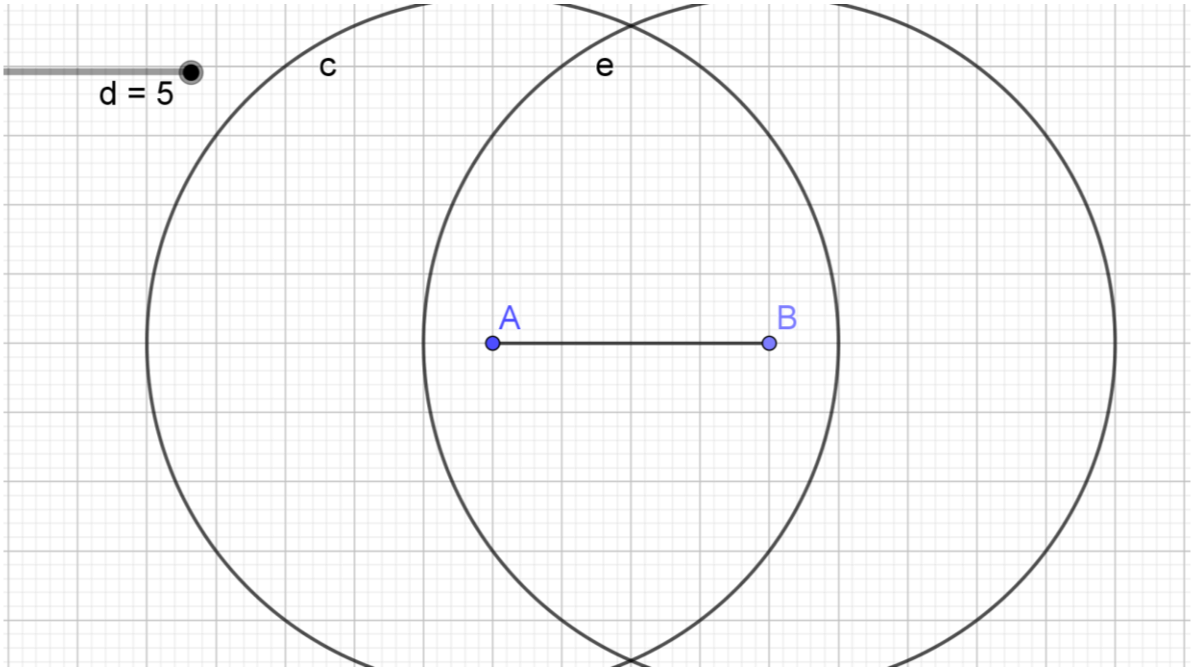
Escriba d, y luego seleccione OK. Maximice la ventana de Geogebra para que tenga una mejor visión de la circunferencia.



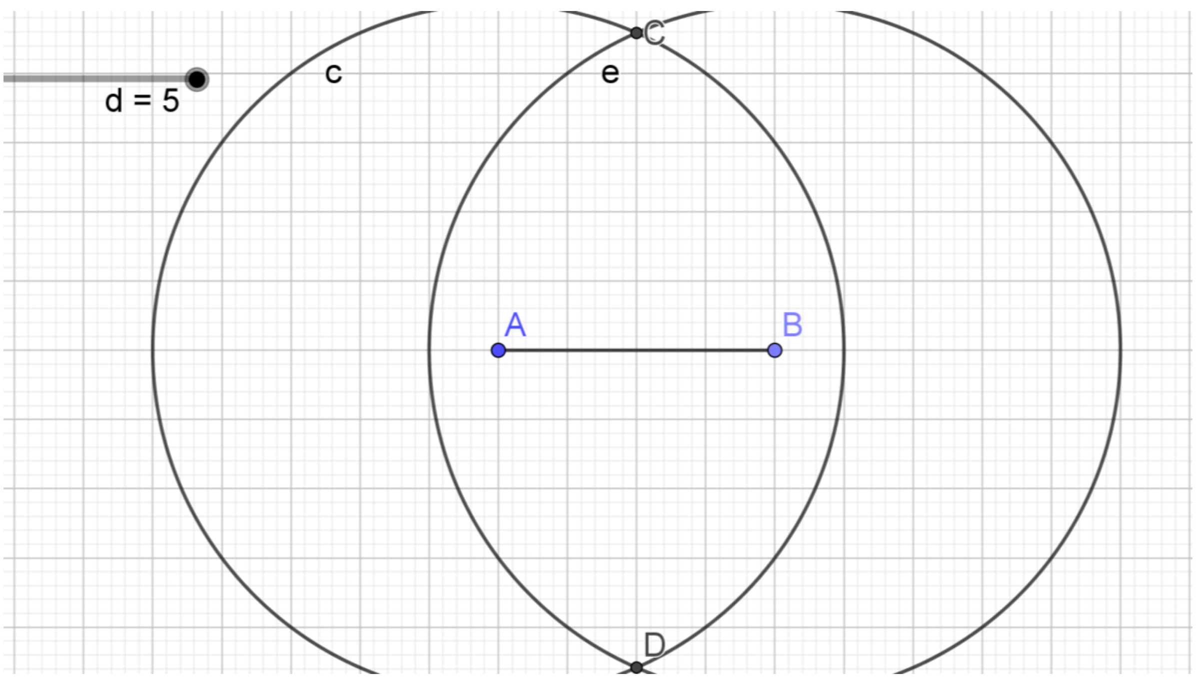
4. Seleccione en las ***Herramientas de circunferencias y arcos***, la herramienta ***Circunferencia (centro, radio).*** Luego, de clic izquierdo sobre el punto B, le aparecerá nuevamente:



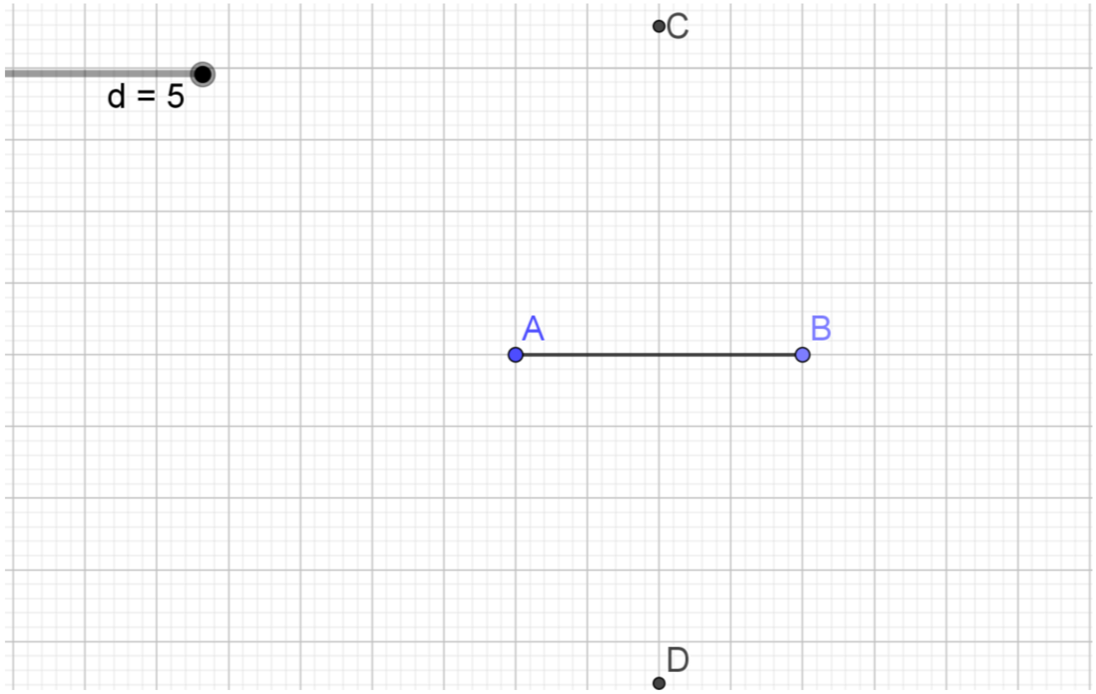
Escriba d, y luego seleccione OK.



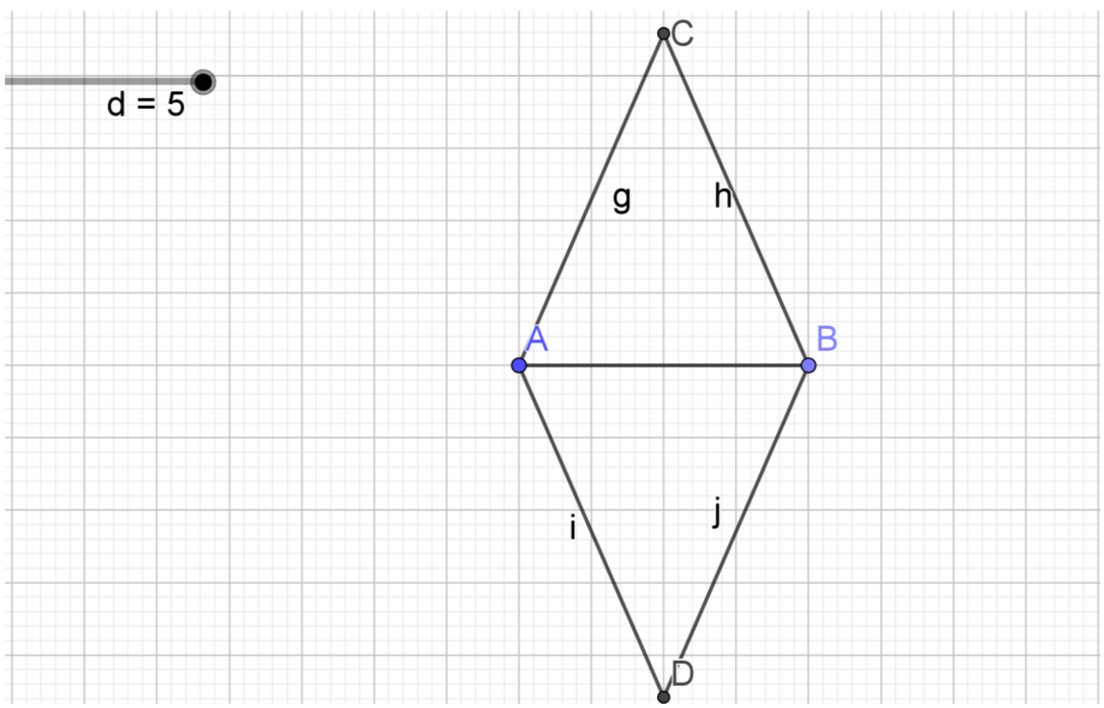
5. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***, luego de clic izquierdo sobre cada una de las circunferencias.



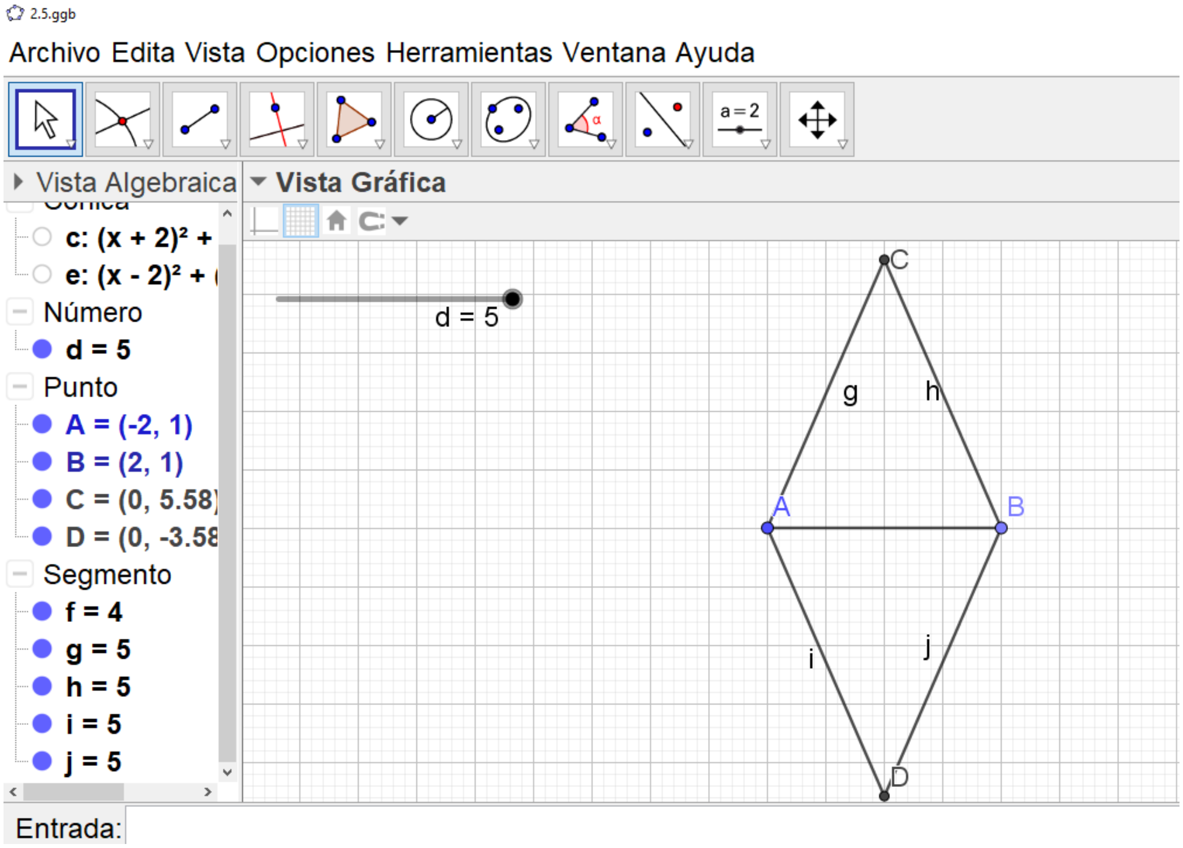
6. Oculte las circunferencias dando clic izquierdo sobre el círculo a la izquierda de las circunferencias en la ***Vista Algebraica***.



7. Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento***. Luego, construya los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$.



8. Observe en la ***Vista Algebraica*** las medidas de $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$.



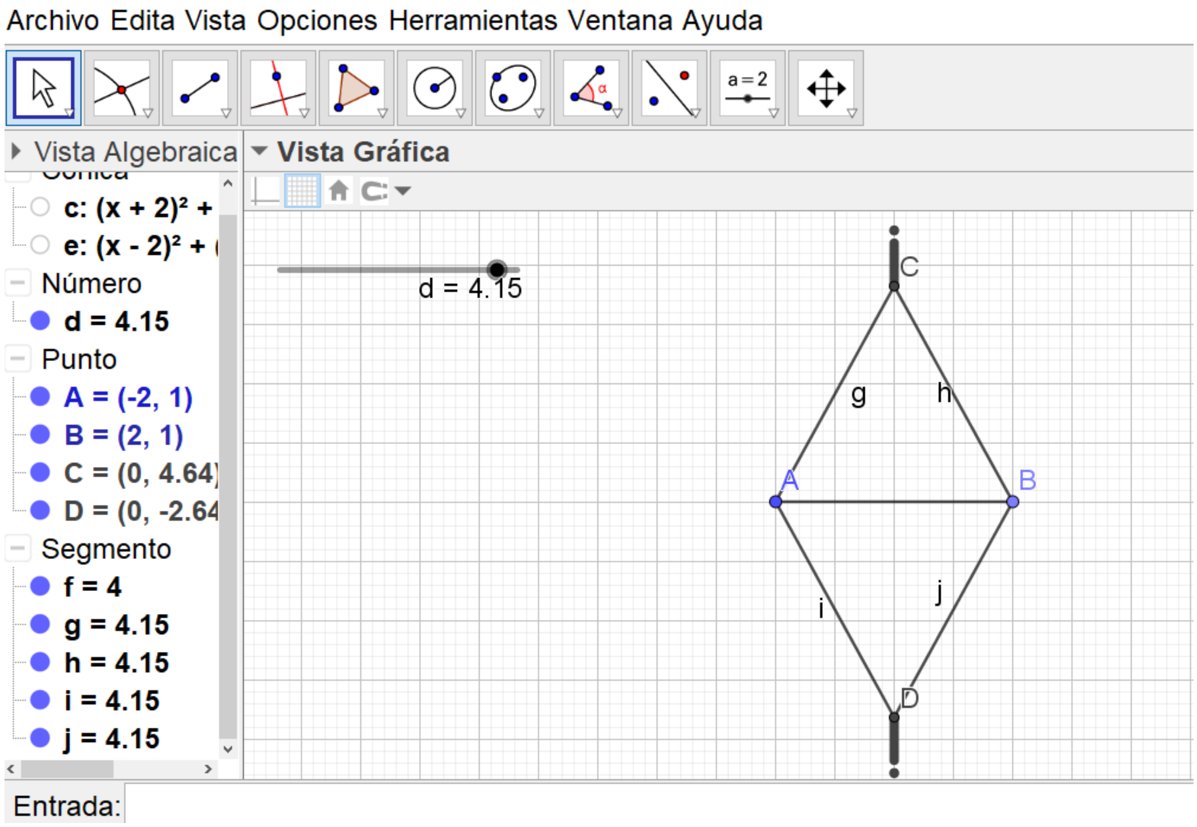
f) ¿Cómo son las medidas de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$? ¿y las de $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$?

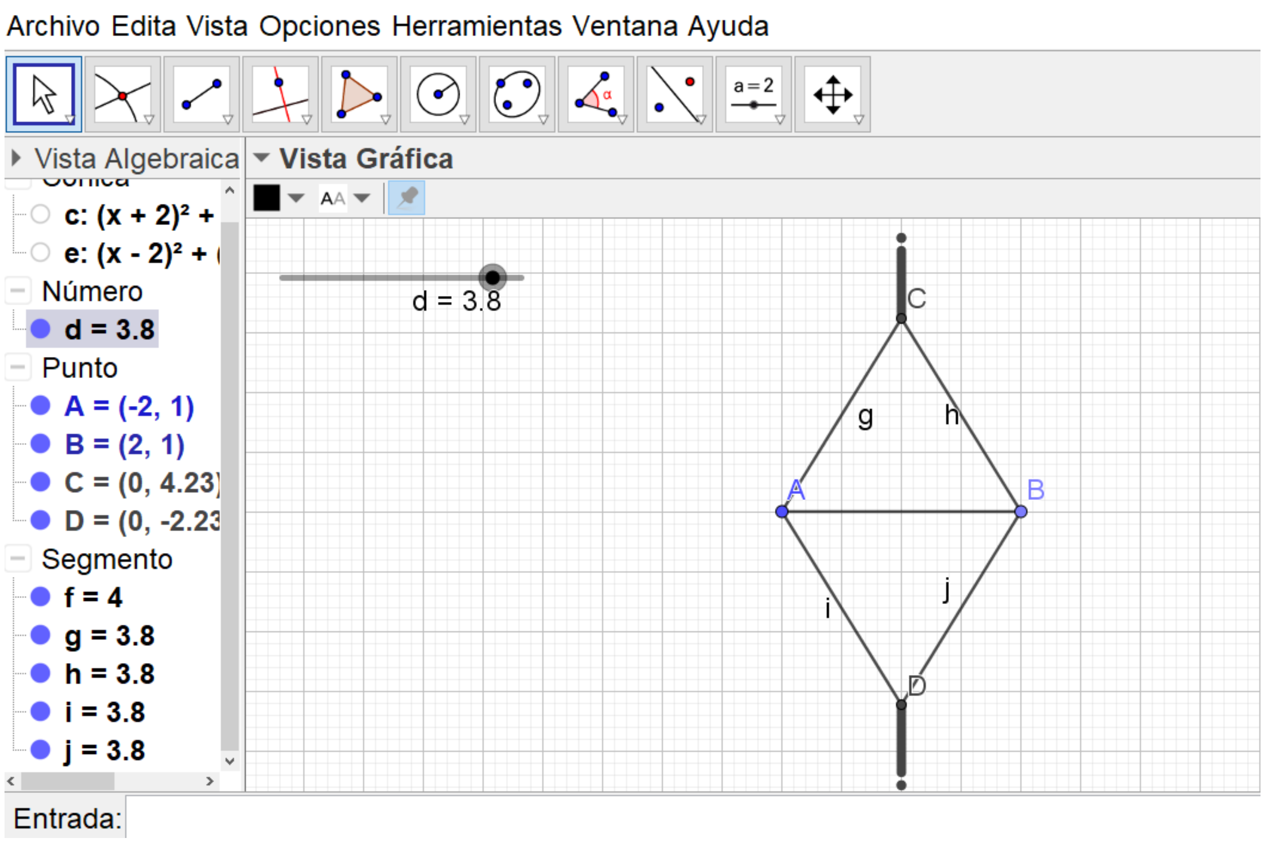
<u>Las medidas de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son iguales. Las de $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ también son iguales.</u>

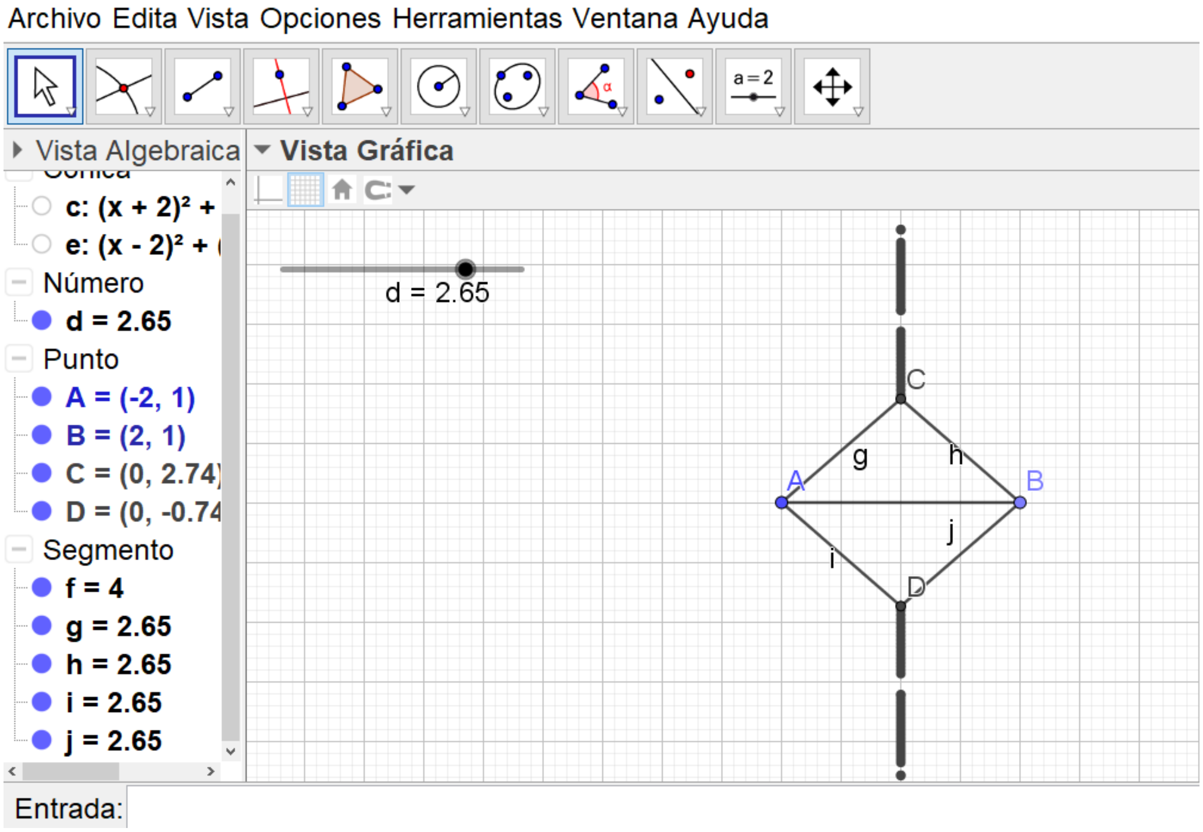
g) ¿Serán estos los únicos puntos equidistantes a los extremos del segmento?

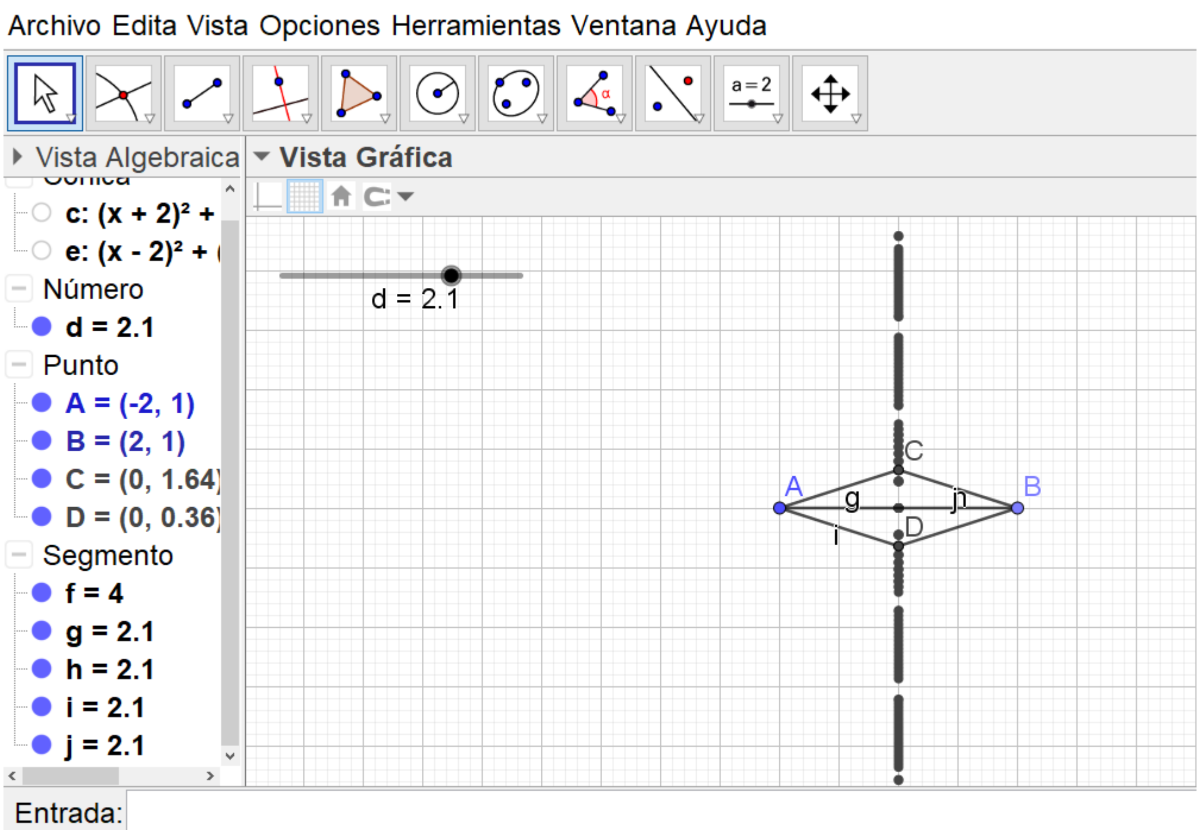
<u>No. Hay más.</u>

9. De clic derecho sobre el punto C y luego seleccione ***Rastro***. Haga lo mismo con D. Luego mueva el deslizador.


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
a = 2
Vista Algebraica
Vista Gráfica
c: (x + 2)² +
e: (x - 2)² +
Número
d = 4.15
Punto
A = (-2, 1)
B = (2, 1)
C = (0, 4.64)
D = (0, -2.64
Segmento
f = 4
g = 4.15
h = 4.15
i = 4.15
j = 4.15
d = 4.15
C
g
h
A
B
i
j
D
Entrada:


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
a = 2
Vista Algebraica
Vista Gráfica
c: (x + 2)² +
e: (x - 2)² +
Número
d = 3.8
Punto
A = (-2, 1)
B = (2, 1)
C = (0, 4.23)
D = (0, -2.23
Segmento
f = 4
g = 3.8
h = 3.8
i = 3.8
j = 3.8
d = 3.8
C
g
h
A
B
i
j
D
Entrada:


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
a = 2
Vista Algebraica
Vista Gráfica
c: (x + 2)² +
e: (x - 2)² + (
Número
d = 2.65
Punto
A = (-2, 1)
B = (2, 1)
C = (0, 2.74)
D = (0, -0.74
Segmento
f = 4
g = 2.65
h = 2.65
i = 2.65
j = 2.65
d = 2.65
C
g
h
A
B
j
i
D
Entrada:


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
a = 2
Vista Algebraica
Vista Gráfica
c: (x + 2)² +
e: (x - 2)² + (
Número
d = 2.1
Punto
A = (-2, 1)
B = (2, 1)
C = (0, 1.64)
D = (0, 0.36)
Segmento
f = 4
g = 2.1
h = 2.1
i = 2.1
j = 2.1
d = 2.1
C
A
g
h
B
i
D
Entrada:

h) ¿Cómo son las medidas de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$? ¿y las de $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$?
Son iguales.

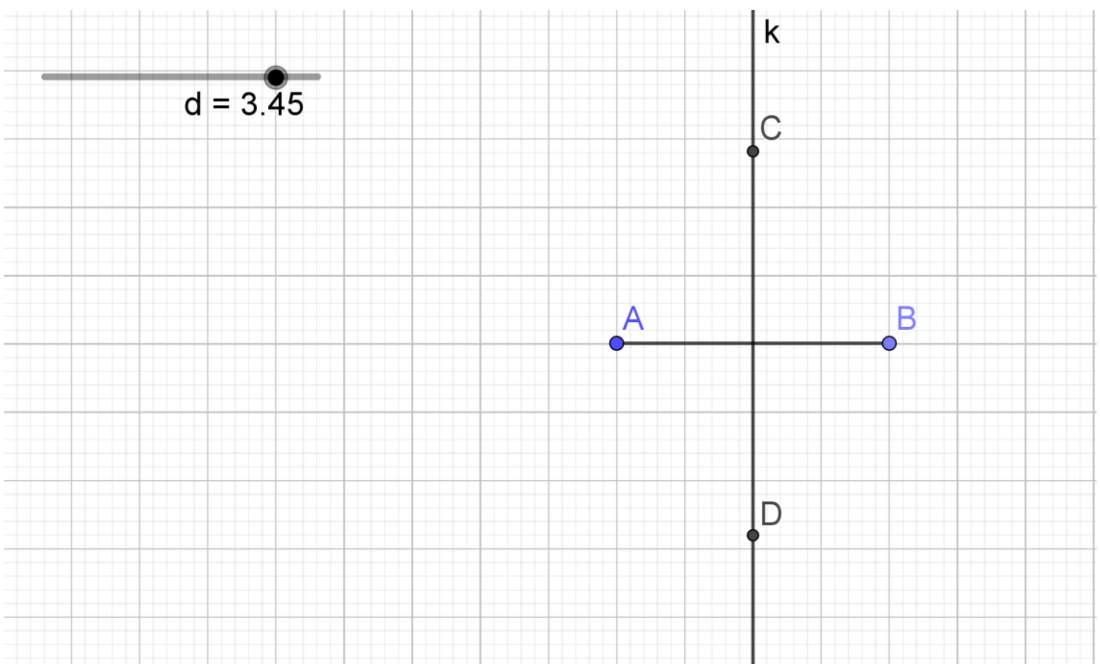
i) ¿Cuántos puntos equidistan de los extremos de $\overline{AB}$?
Infinitos puntos.

j) ¿Qué figura forman los puntos que equidistan de los extremos del segmento?
Forman una recta.

10. Seleccione en las ***Herramientas generales***, la herramienta ***Desplaza vista gráfica*** para borrar el rastro.

Oculte los segmentos dando clic izquierdo sobre el círculo a la izquierda de sus medidas en la ***Vista Algebraica***.

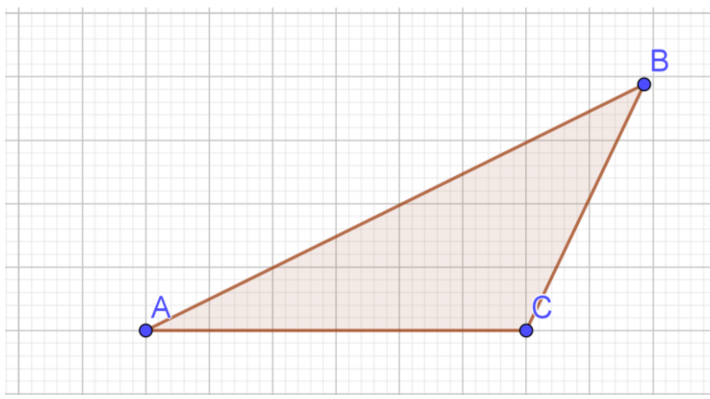
Ahora, seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Recta***, y luego de clic izquierdo sobre los puntos C y D.



k) La recta que construyó, ¿en dónde corta a $\overline{AB}$?, ¿qué tipo de ángulos forma con $\overline{AB}$?
Observe que lo corta en su punto medio, y además es perpendicular, así que forman ángulos rectos.

3.2.2. Simulación de la actividad 5. Circunferencia circunscrita en un triángulo y circuncentro

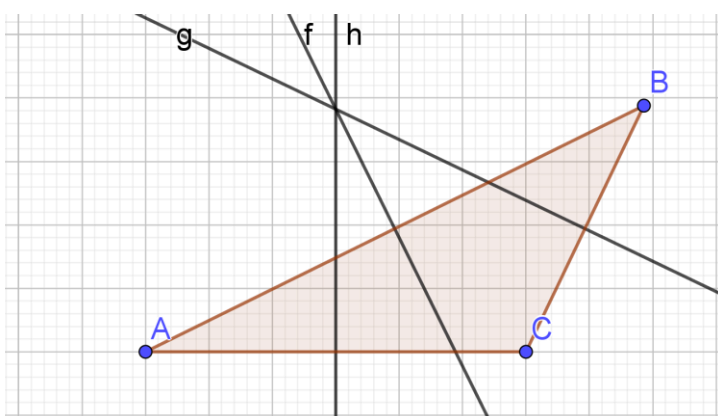
1. En un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes coordenados. Luego, seleccione en las ***Herramientas de polígonos***, la herramienta ***Polígono*** y construya el triángulo ABC. Oculte las etiquetas de los lados.



   a) ¿Cómo podría hallar el punto que se encuentra a la misma distancia de los tres vértices? Proponga un procedimiento y justifíquelo.

   Utilizando las mediatrices de los lados. Esto porque cada una de las mediatrices de los lados es un conjunto de puntos que equidistan de los vértices del triángulo, así que el punto donde concurren las tres mediatrices es simultáneamente equidistante de los tres vértices del triángulo.

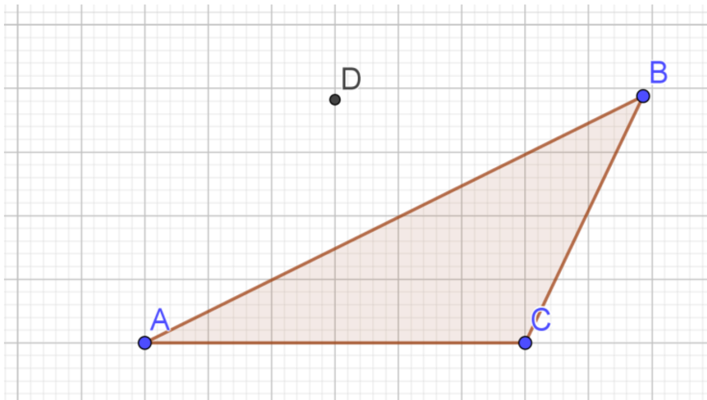
2. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Mediatriz.*** Luego, de clic izquierdo sobre los extremos de cada lado para construir las mediatrices.



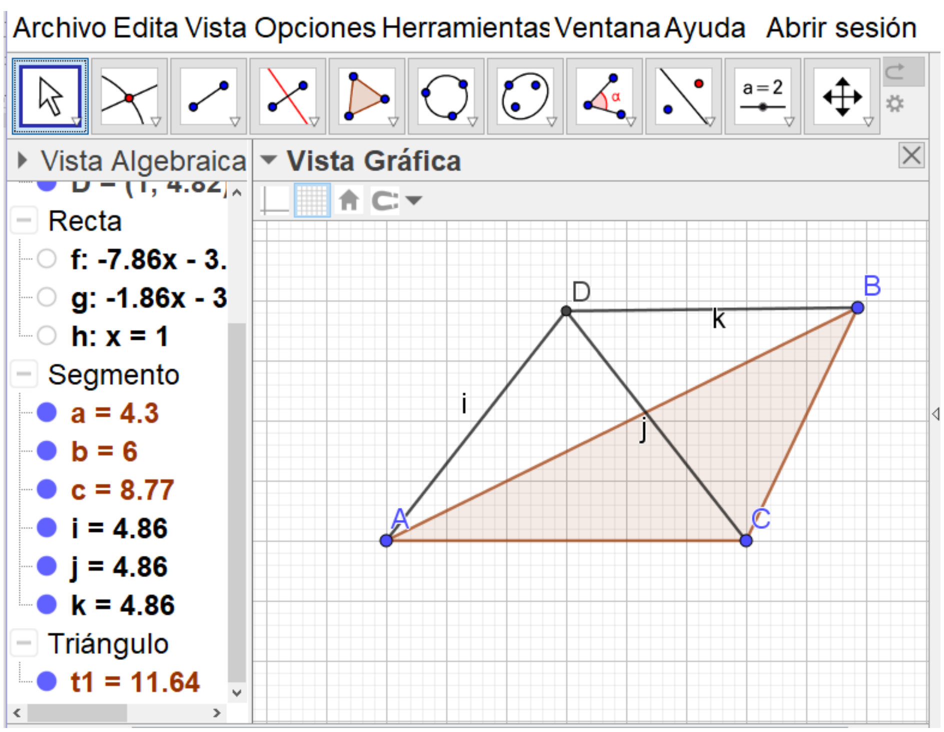
b) ¿Se cortan las tres mediatrices en un único punto?

Si.

3. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***intersección***. Construya el punto de intersección (D) dando clic izquierdo sobre dos cualquiera de las mediatrices. Luego ocúltelas.



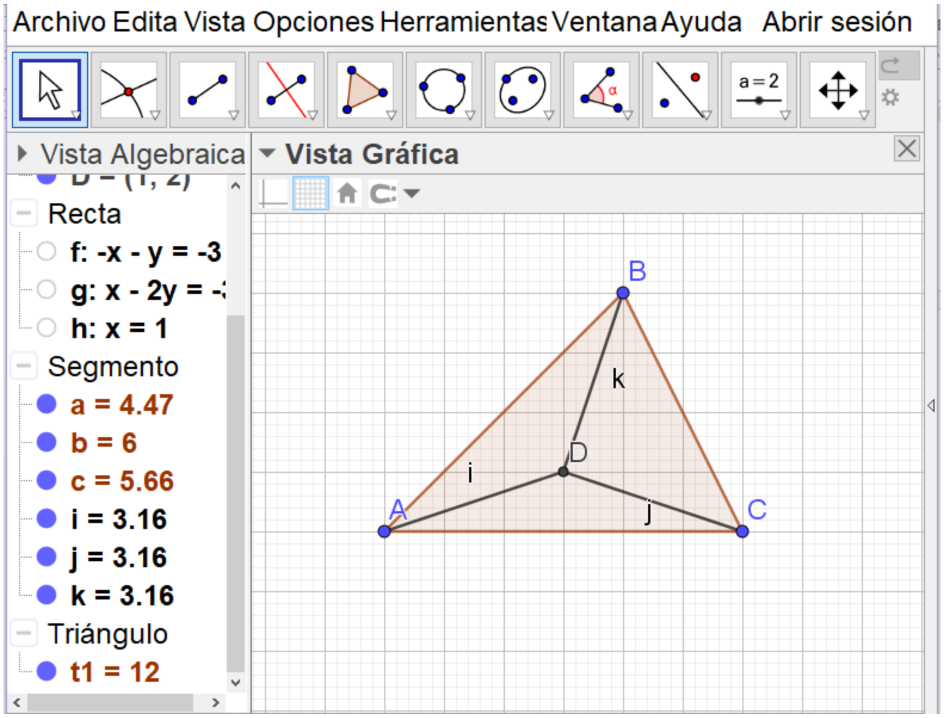
4. Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento***, luego construya los segmentos $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ y $\overline{DC}$.

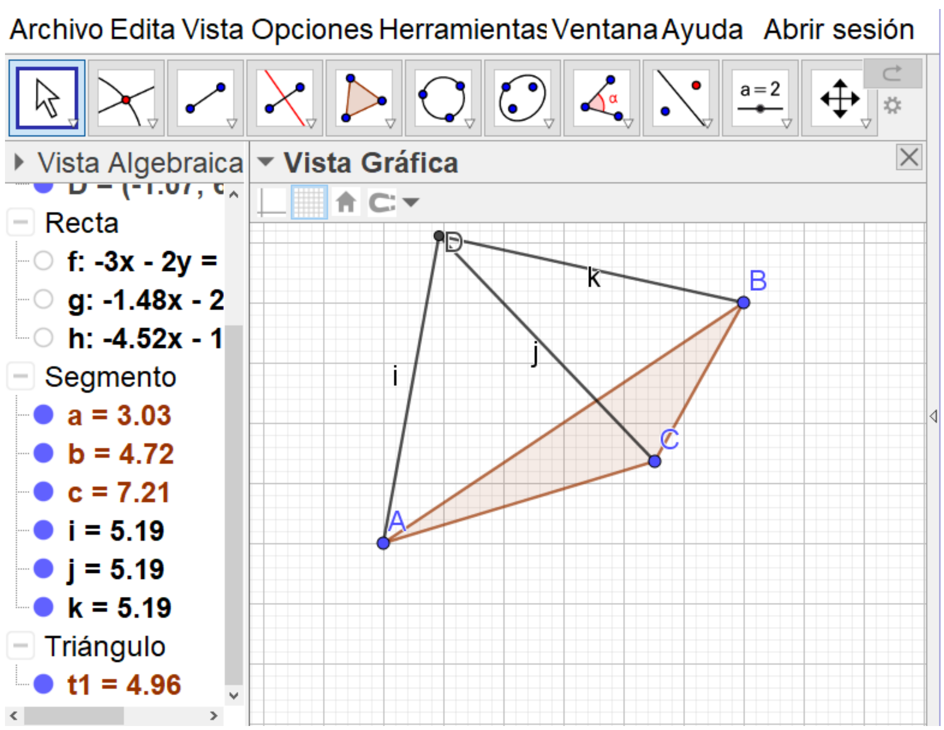


c) ¿Equidista D de los vértices del triángulo?

En la ***Vista Algebraica*** puede observar que D equidista de los vértices del triángulo.

5. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***, y mueva los vértices del triángulo.

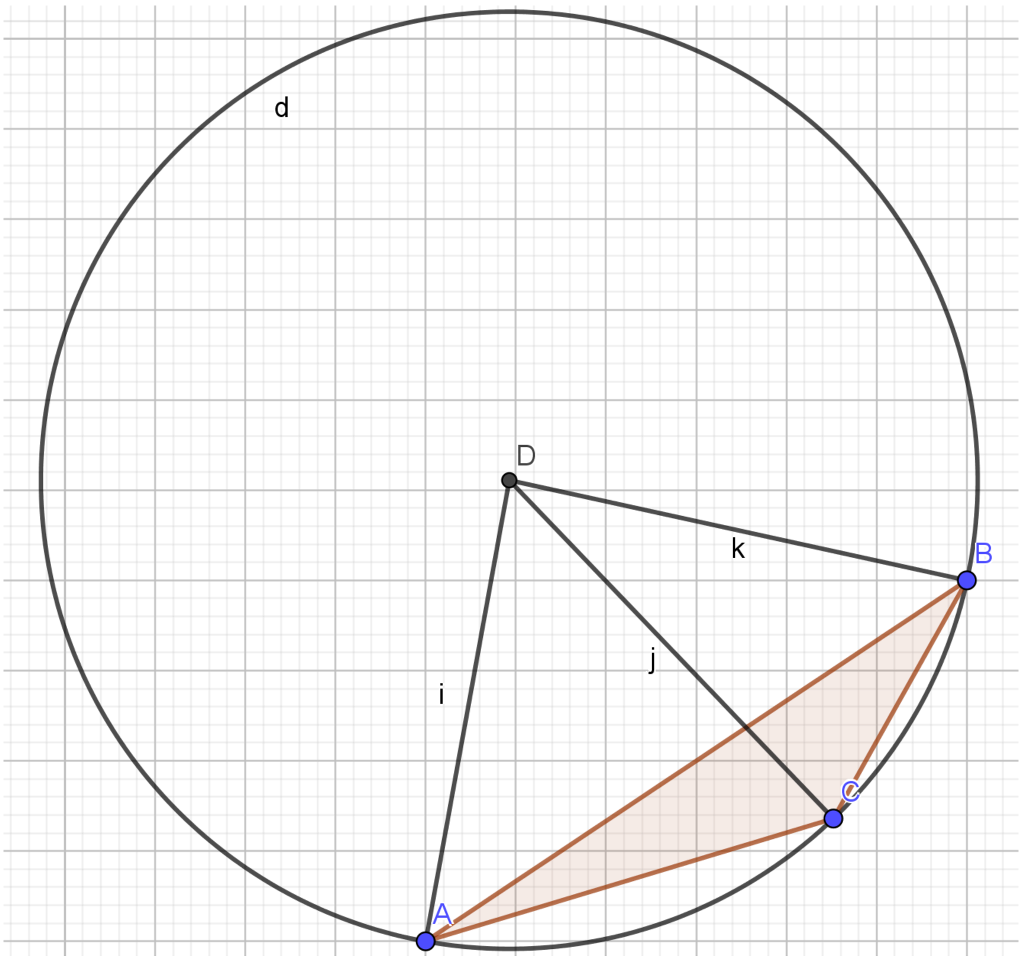




d) ¿Se mantiene equidistante el punto D?

Se mantiene equidistante.

6) Seleccione en las ***Herramientas de circunferencias y arcos***, la herramienta ***Circunferencia por tres puntos.*** Luego, de clic izquierdo sobre los vértices del triángulo.



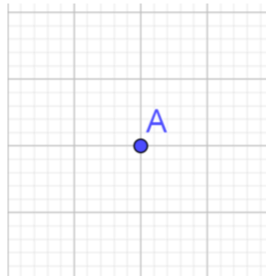
7) ¿Por qué puede ser trazada esta circunferencia?

Porque el circuncentro equidista de los vértices del triángulo. Así la circunferencia dibujada tiene como centro al punto D.

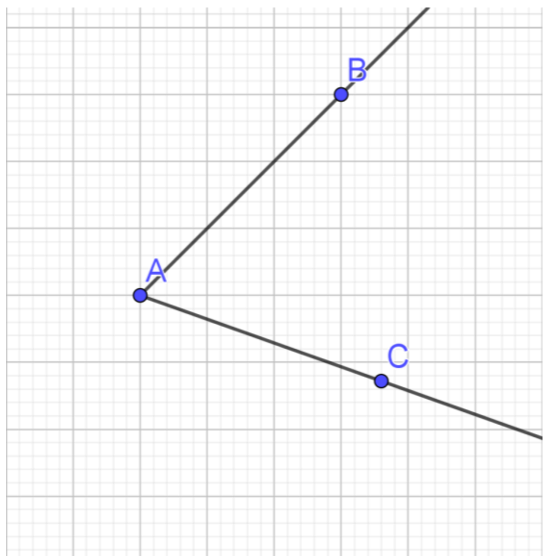
3.3. Simulación de actividades con bisectrices

3.3.1. Simulación de actividad 6. La bisectriz de un ángulo

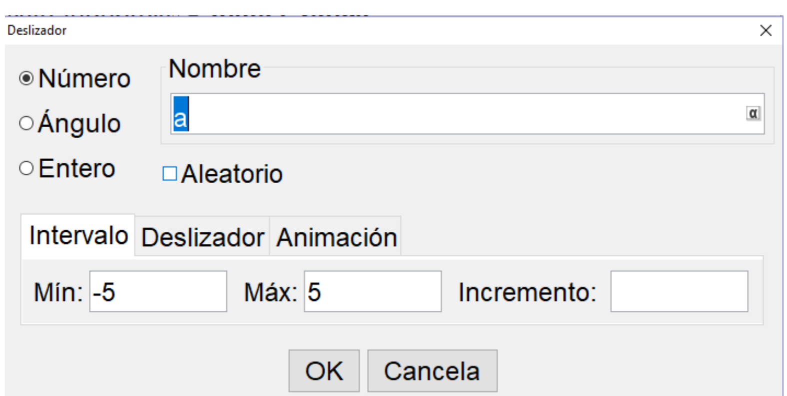
1. Abra un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes. Luego, seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Punto*** y dibuje un punto A.



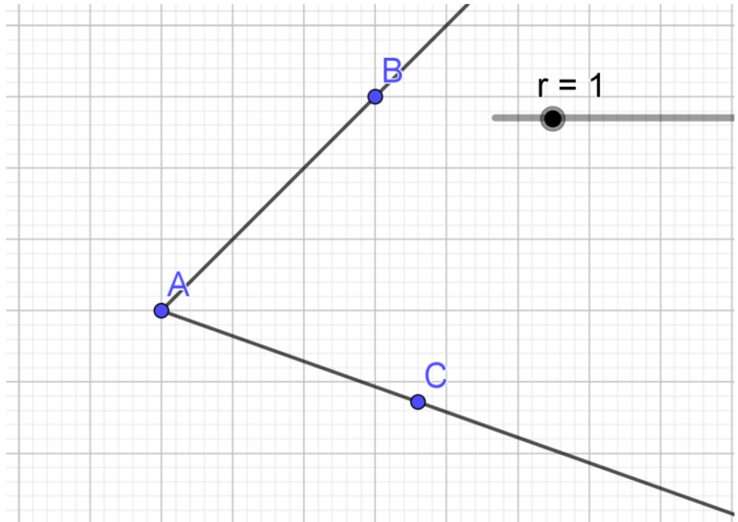
2. Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Semirrecta***. De clic izquierdo en el punto A, y luego en otro punto del plano. De clic izquierdo en el punto A, y luego en otro punto del plano, pero que no esté en la recta que contiene a la primera semirecta. Oculte sus etiquetas.



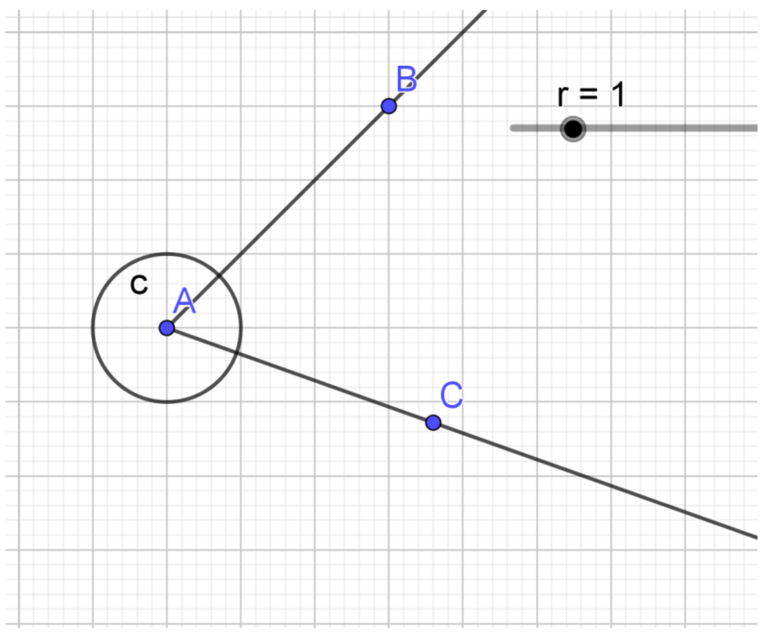
3. Seleccione en las **Herramientas de incorporación e interacción**, la herramienta ***Deslizador.*** De clic izquierdo en la zona de trabajo, y le aparecerá lo siguiente:



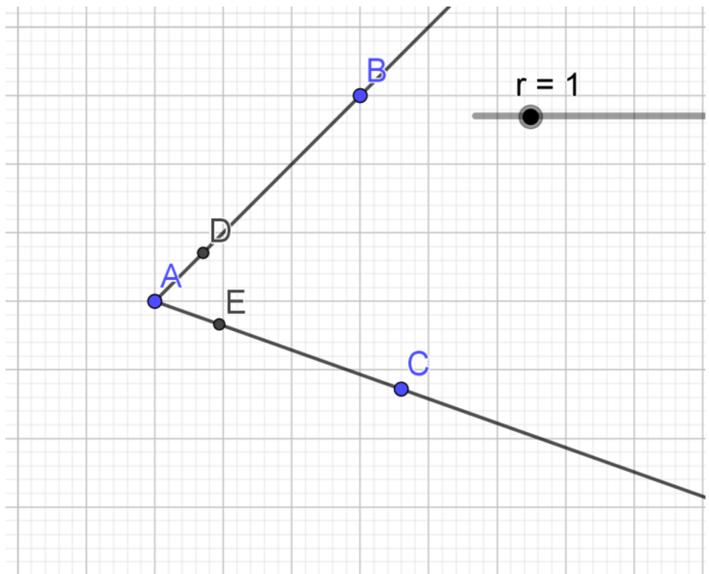
En ***Nombre*** escriba r, y 0 en Min. Luego, de OK.



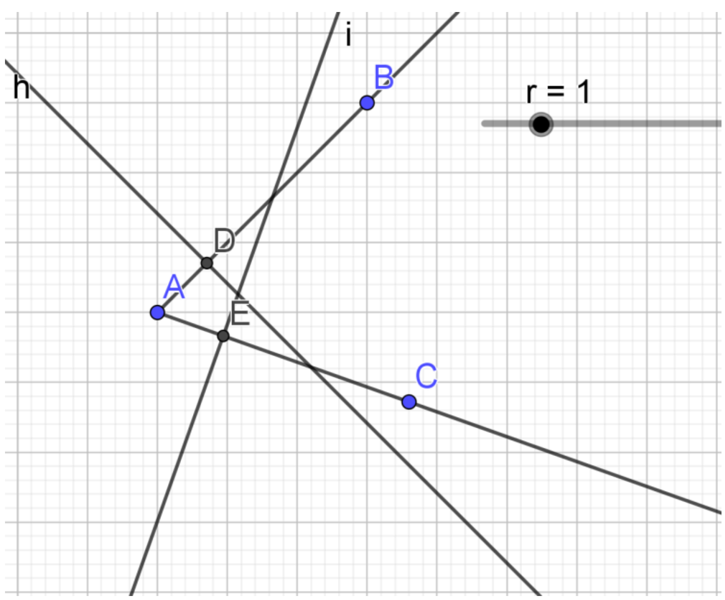
4. Seleccione en las ***Herramientas de circunferencias y arcos***, la herramienta ***Circunferencia (centro, radio)***. De clic izquierdo en A, escriba r y luego de OK.



5. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección.*** Luego, marque la circunferencia y una de las semirrectas. Marque nuevamente la circunferencia y ahora la otra semirrecta, así construye los interceptos solicitados D y E. Luego, oculte la circunferencia.

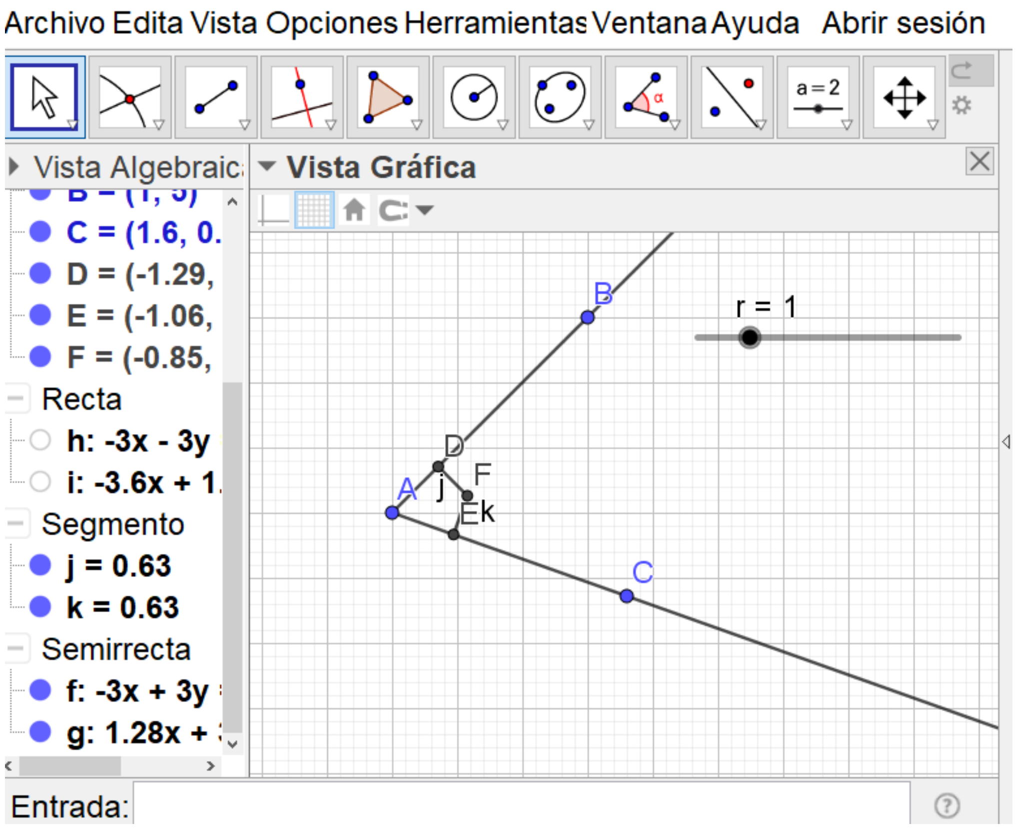


6. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Perpendicular***. De clic izquierdo sobre la semirrecta que contiene a D en un punto distinto de D, y luego marque el punto D. Ahora, de clic izquierdo sobre la semirrecta que contiene a E en un punto distinto de E, y luego marque el punto E.



7. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección.*** Luego, marque las rectas trazadas en el paso anterior y así construya el punto de intersección F. Oculte las rectas.

Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento*** y construya los segmentos $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$.



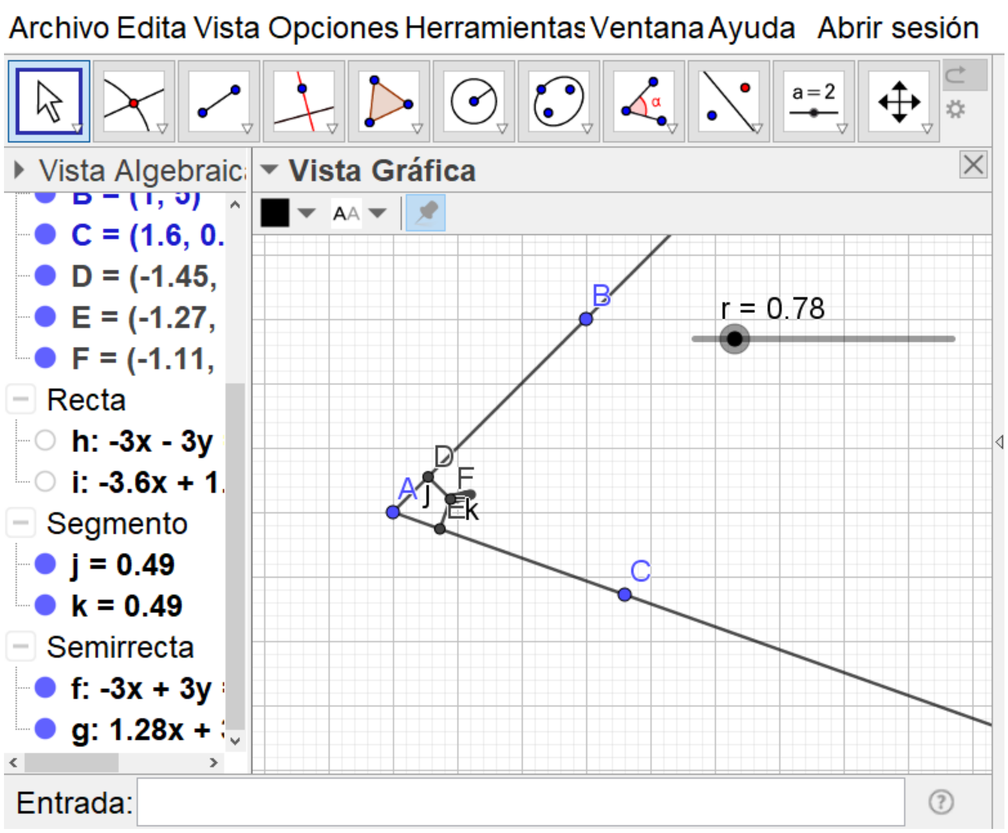
i) ¿Cómo son las medidas de $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$?

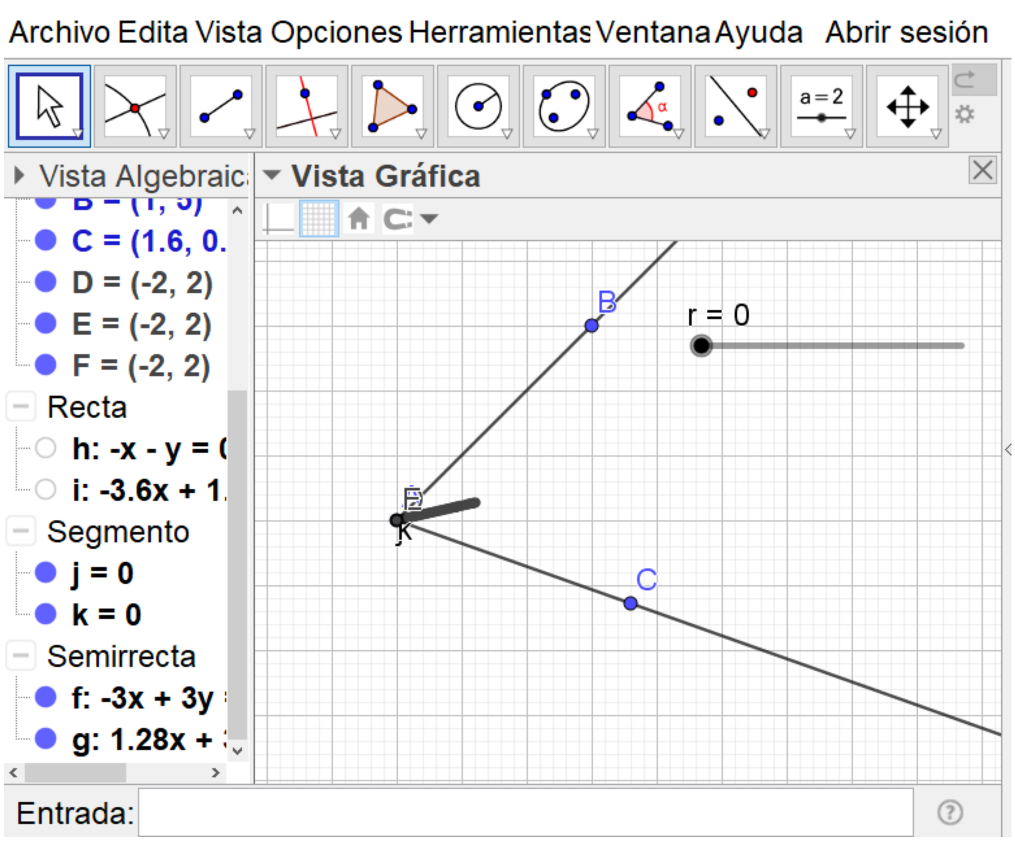
<u>En la ***Vista Algebraica*** puede verse que las medidas son iguales.</u>

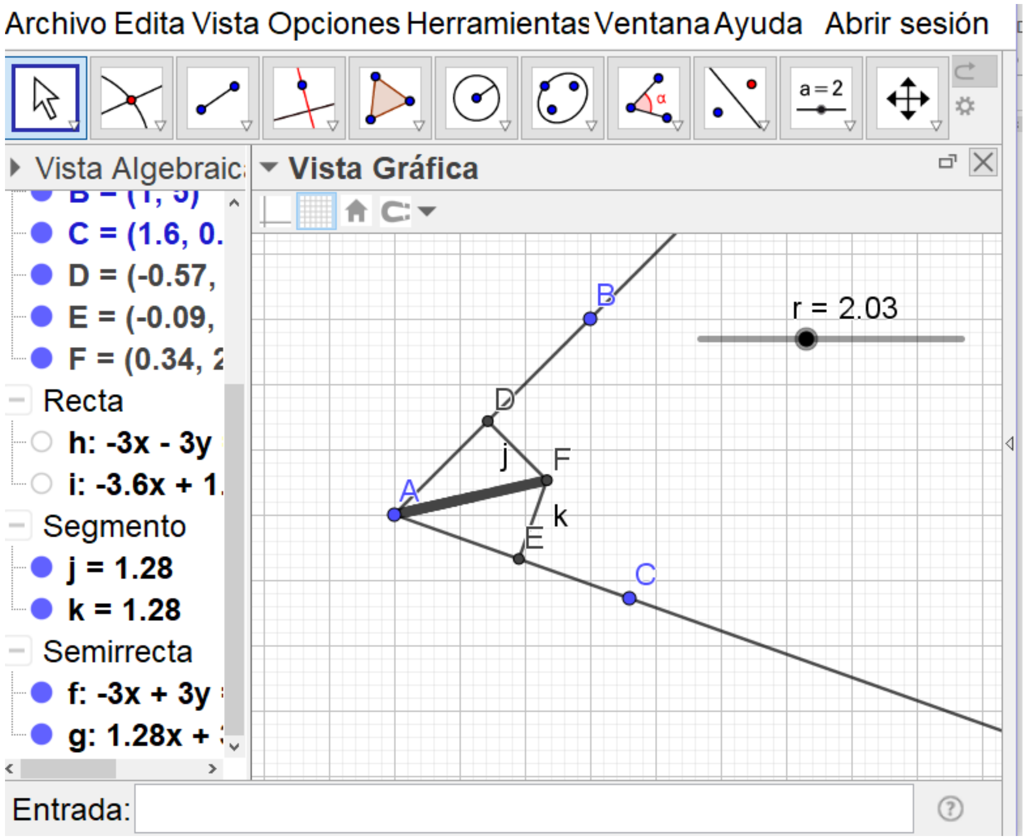
j) ¿De quienes equidista el punto F?

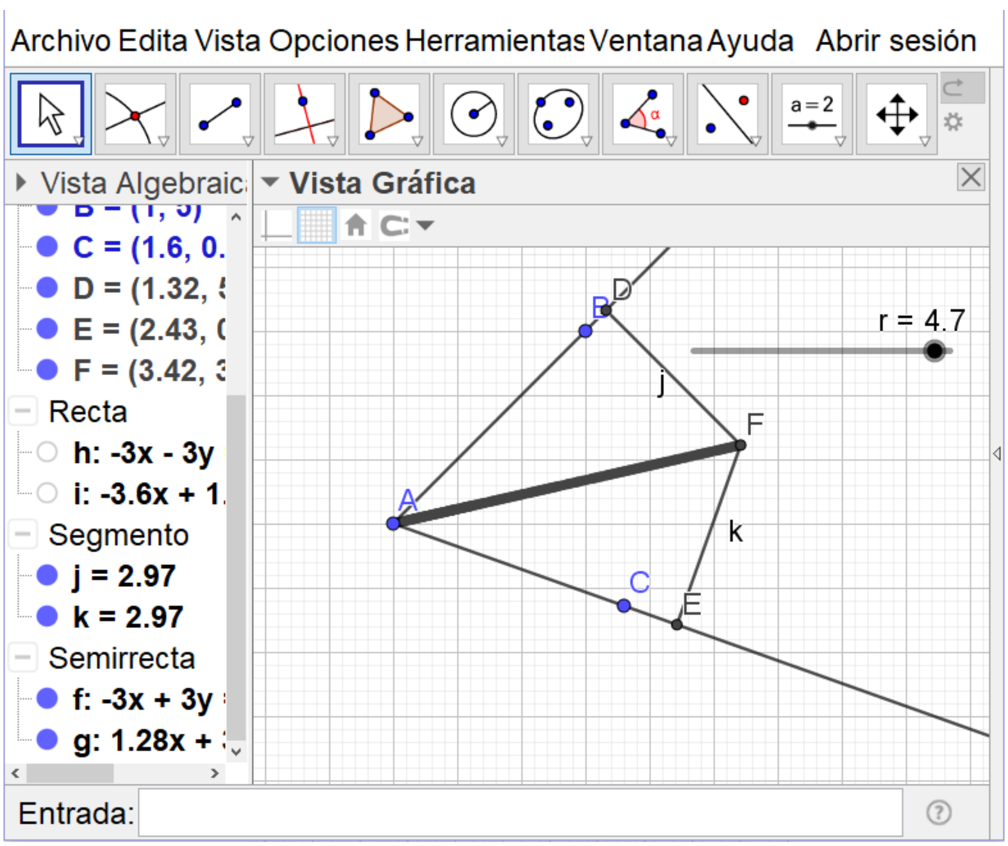
<u>Equidista de los puntos D y E.</u>

8. De clic derecho sobre el punto F, marque ***Rastro***, y luego mueva el deslizador. Observe que de las cuatro figuras siguientes, en la segunda el punto F coincide con el vértice. Esto significa que el dibujo que deja el rastro corta al ángulo en su vértice.


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión
Vista Algebraic
Vista Gráfica
C = (1.6, 0.
D = (-1.45,
E = (-1.27,
F = (-1.11,
Recta
h: -3x - 3y
i: -3.6x + 1.
Segmento
j = 0.49
k = 0.49
Semirrecta
f: -3x + 3y
g: 1.28x +
r = 0.78
B
D
F
A
J
E
K
C
Entrada:


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión
Vista Algebraic
Vista Gráfica
C = (1.6, 0.
D = (-2, 2)
E = (-2, 2)
F = (-2, 2)
Recta
h: -x - y = (
i: -3.6x + 1.
Segmento
j = 0
k = 0
Semirrecta
f: -3x + 3y
g: 1.28x +
r = 0
B
C
Entrada:


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión
Vista Algebraic
Vista Gráfica
C = (1.6, 0.
D = (-0.57,
E = (-0.09,
F = (0.34, 2
Recta
h: -3x - 3y
i: -3.6x + 1.
Segmento
j = 1.28
k = 1.28
Semirrecta
f: -3x + 3y
g: 1.28x +
r = 2.03
A
B
C
D
E
F
j
k
Entrada:


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión
Vista Algebraic
Vista Gráfica
C = (1.6, 0.
D = (1.32,
E = (2.43,
F = (3.42,
Recta
h: -3x - 3y
i: -3.6x + 1.
Segmento
j = 2.97
k = 2.97
Semirrecta
f: -3x + 3y
g: 1.28x +
r = 4.7
A
B
C
D
E
F
j
k
Entrada:

k) ¿Qué figura forma el rastro?

Una semirrecta.

l) ¿Cómo son las medidas de $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$?

Son iguales.

m) ¿Corta el dibujo formado por el rastro al ángulo BAC? ¿En qué punto?

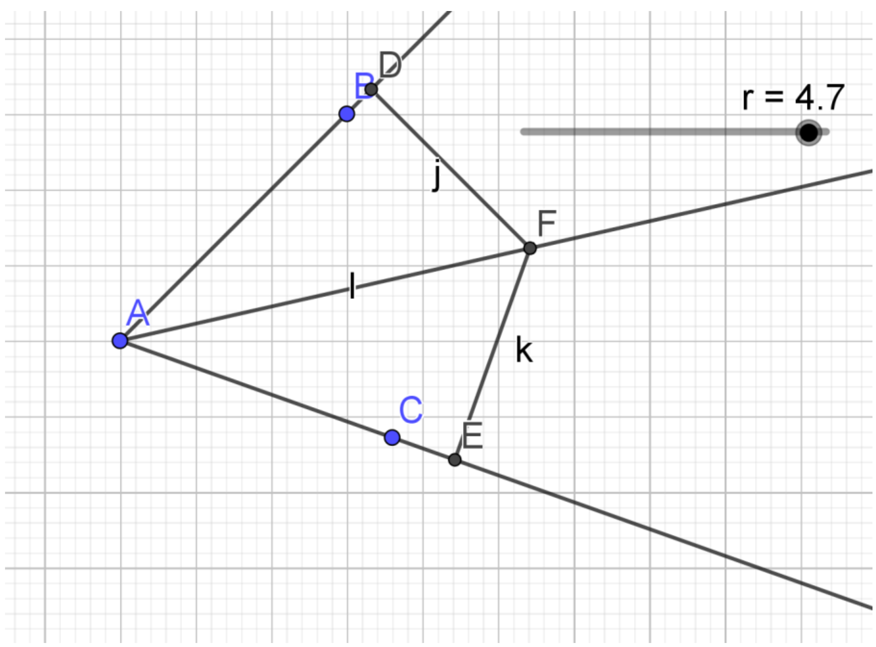
Si. Lo corta en su vértice A.

n) ¿Equidista el punto F de los lados del ángulo BAC?

Si.

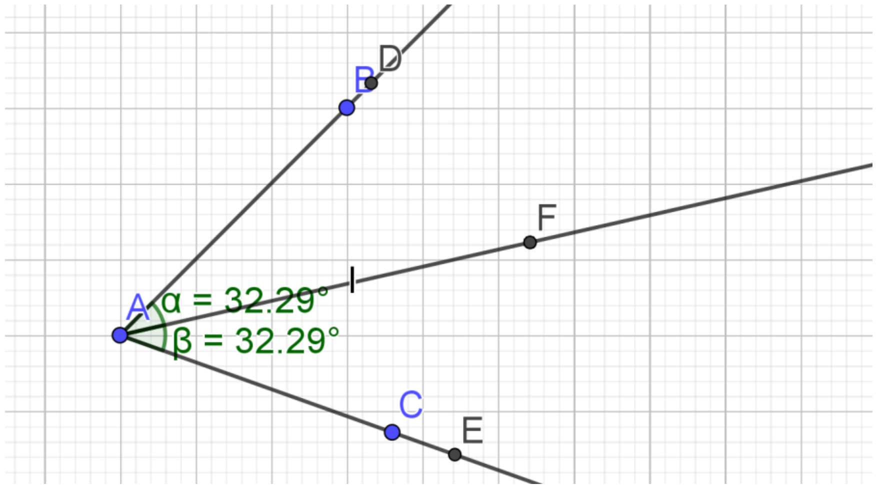
9. Seleccione en las ***Herramientas generales***, la herramienta ***Desplaza vista gráfica***. Luego, desplace la zona de construcción y así se borra el rastro.

   Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Semirrecta.*** Ahora marque el punto A y después el F.



10. Después de ocultar el deslizador, $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$ marcando el círculo que aparece a su izquierda en la ***Vista Algebraica***, seleccione en las ***Herramientas de ángulos***, la

herramienta ***Ángulo***. Ahora, de clic izquierdo sobre los puntos B, A y F pero en sentido antihorario. Haga lo mismo con F, A y C.



o) ¿Cómo son las medidas de los ángulos BAF y FAC?

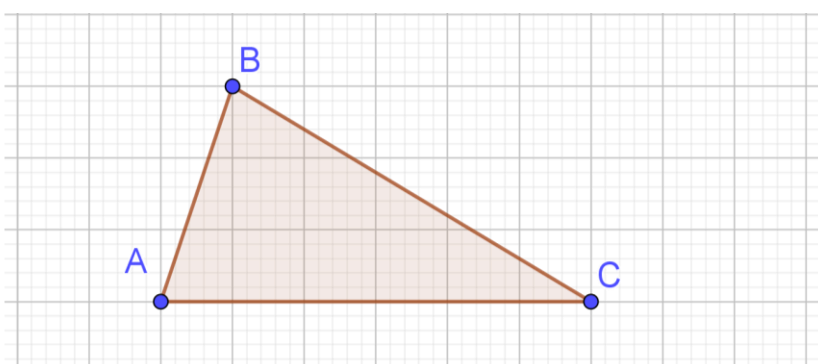
Las medidas son iguales.

p) ¿Qué hace la semirrecta al ángulo BAC?

Lo divide en dos ángulos que tienen la misma medida.

3.3.2. Simulación de la actividad 7. Circunferencia inscrita en un triángulo e incentro

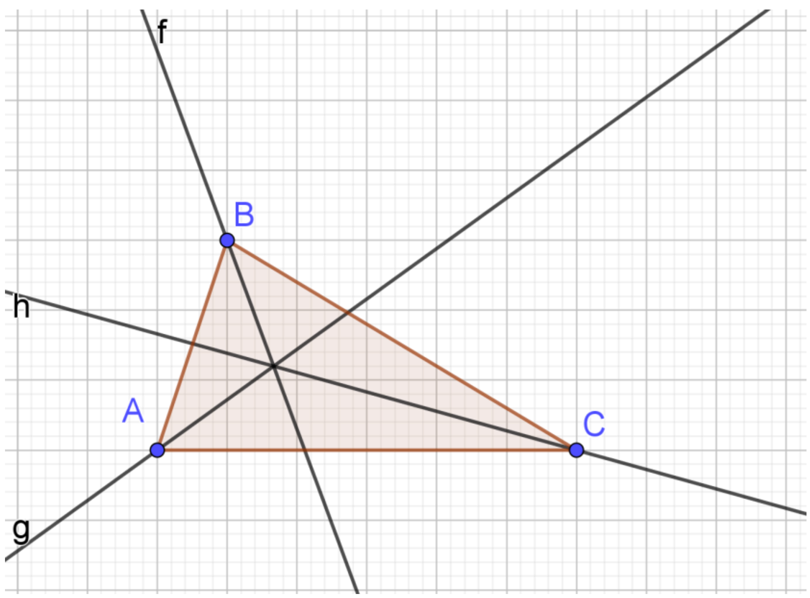
1. En un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes coordenados. Luego, seleccione en las ***Herramientas de polígonos***, la herramienta ***Polígono*** y construya el triángulo ABC. Oculte las etiquetas de los lados.



a) ¿Cómo podría hallar el punto que se encuentra a la misma distancia de los tres lados de un triángulo? Proponga un procedimiento y justifíquelo.

Utilizando las bisectrices de los ángulos. Esto porque cada una de las bisectrices de los lados es un conjunto de puntos que equidistan de los lados del triángulo, así que el punto donde concurren las tres mediatrices es simultáneamente equidistante de los tres lados del triángulo.

2. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Bisectriz.*** Luego, de clic izquierdo en A, B, C para construir la bisectriz del ángulo B; de clic izquierdo en B, A, C para construir la bisectriz del ángulo A; de clic izquierdo en A, C, B para construir la bisectriz del ángulo C.



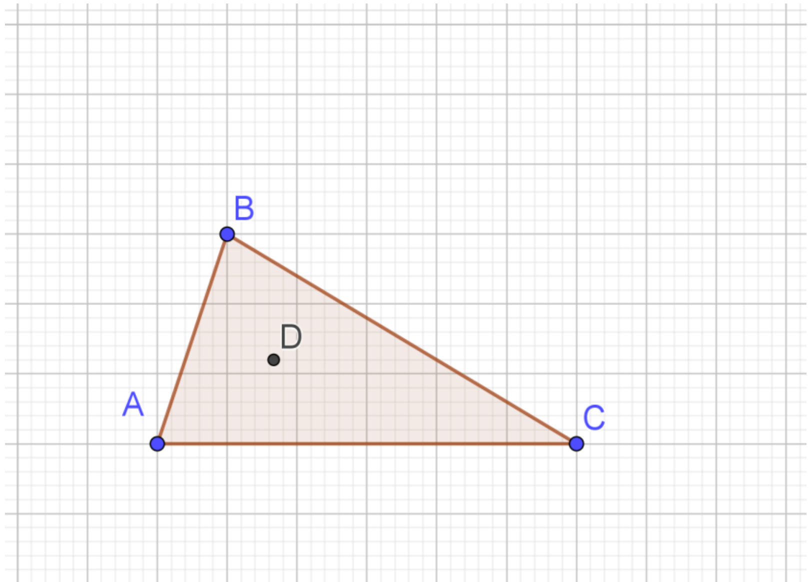
b) ¿Se cortan las tres bisectrices en un único punto?

Si.

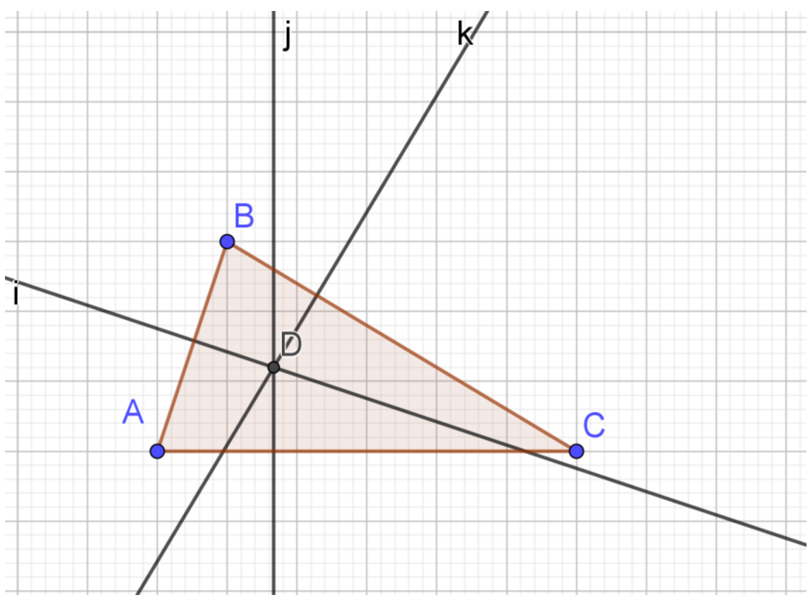
3. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***intersección***. Luego:

Construya el punto de intersección (D) dando clic izquierdo sobre dos cualquiera de las bisectrices.

Oculte las bisectrices dando clic izquierdo sobre el círculo que aparece a su izquierda en la ***Vista Algebraica***.



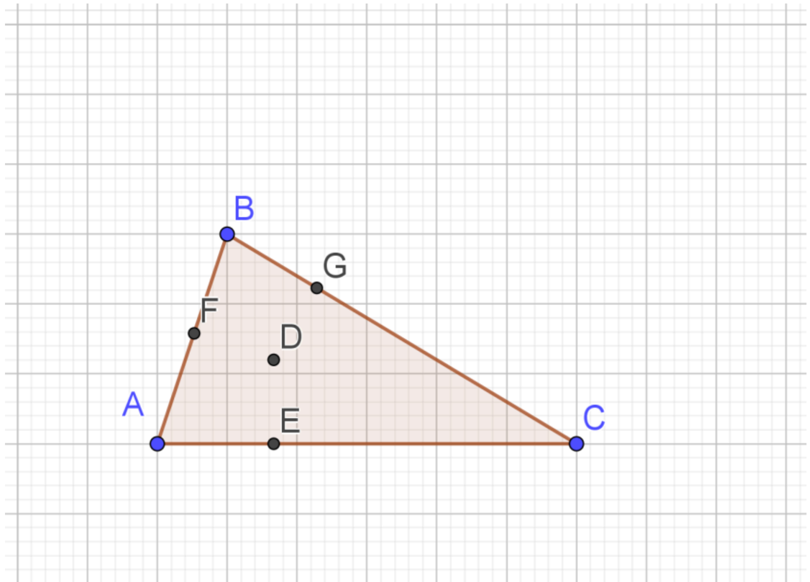
4. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Perpendicular.*** Luego, de clic en: $\overline{AB}$ y luego D, $\overline{AC}$ y luego D, $\overline{BC}$ y luego D.



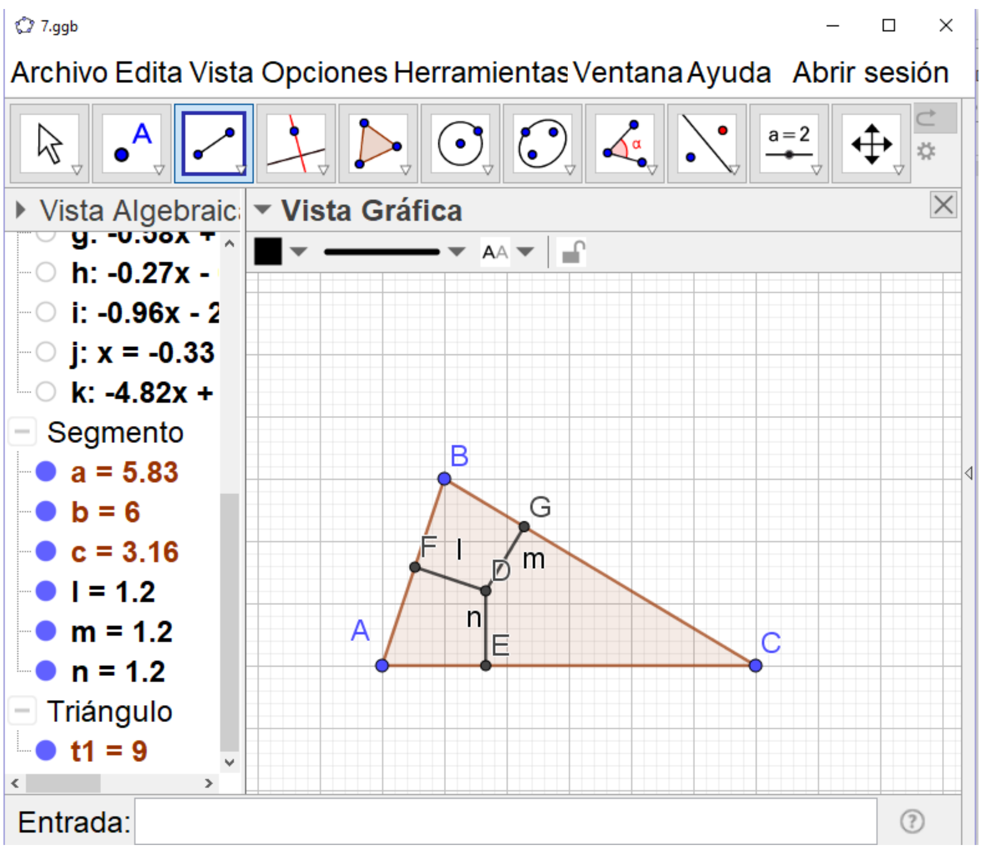
5. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***intersección***. Luego:

   Marque $\overline{AC}$ y su perpendicular, para construir su punto de intersección E.
   Marque $\overline{AB}$ y su perpendicular, para construir su punto de intersección F.
   Marque $\overline{BC}$ y su perpendicular, para construir su punto de intersección G.

   Después de que oculte las rectas obtendrá:



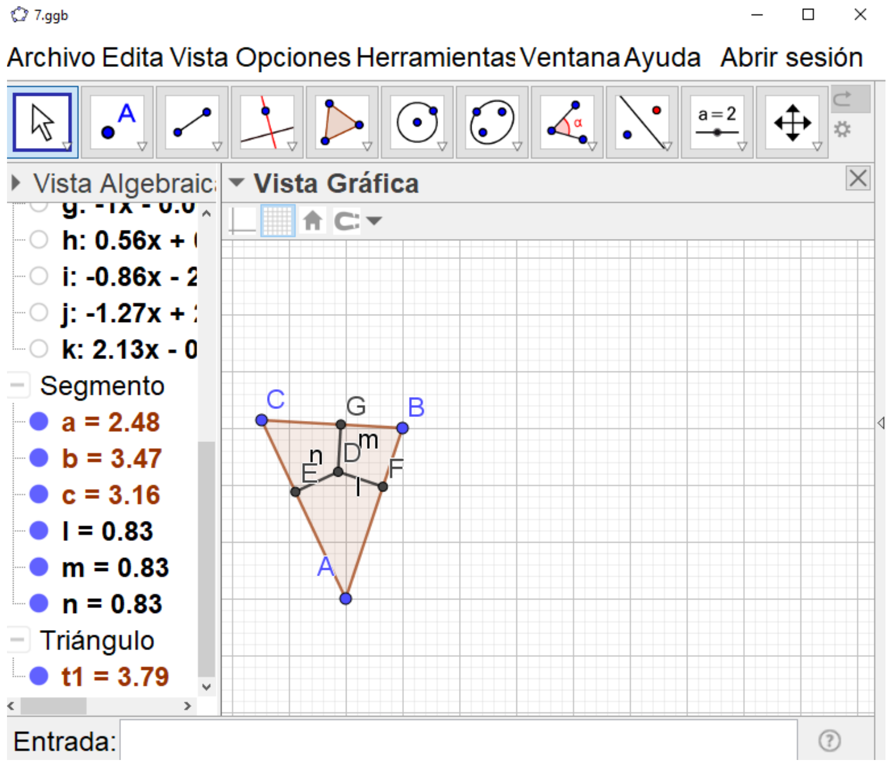
6. Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento***, luego construya los segmentos $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ y $\overline{DG}$.

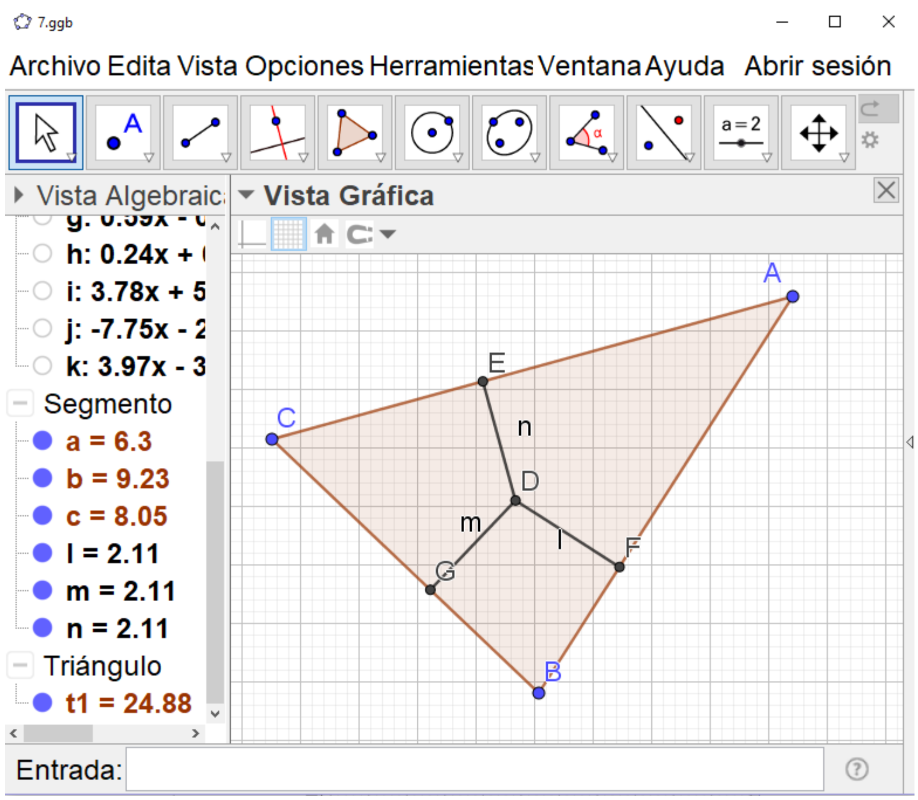


c) ¿Equidista *D* de los vértices del triángulo?

<u>En la ***Vista Algebraica*** puede observar que *D* equidista de los lados del triángulo.</u>

7. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***, y mueva los vértices del triángulo.

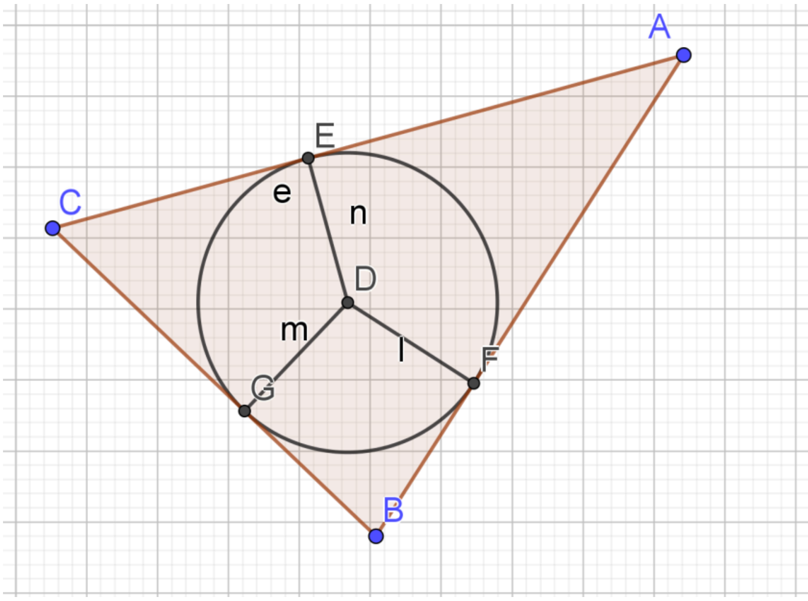




d) ¿Se mantiene equidistante el punto D?

Se mantiene equidistante.

8) Seleccione en las ***Herramientas de circunferencias y arcos***, la herramienta ***Circunferencia por tres puntos.*** Luego, de clic izquierdo sobre los puntos E, F y G.

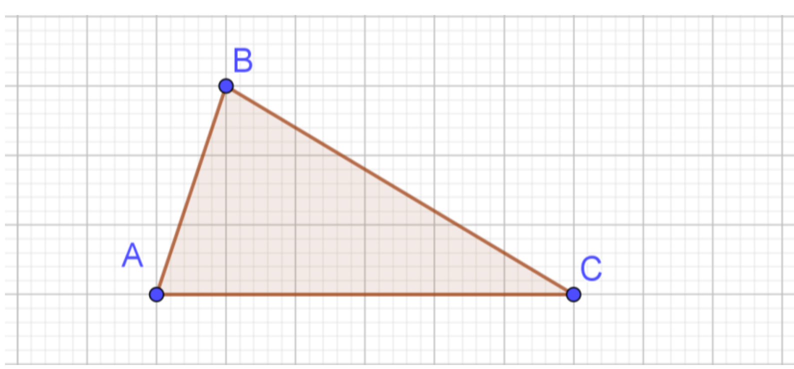


e) ¿Por qué puede ser trazada esta circunferencia?

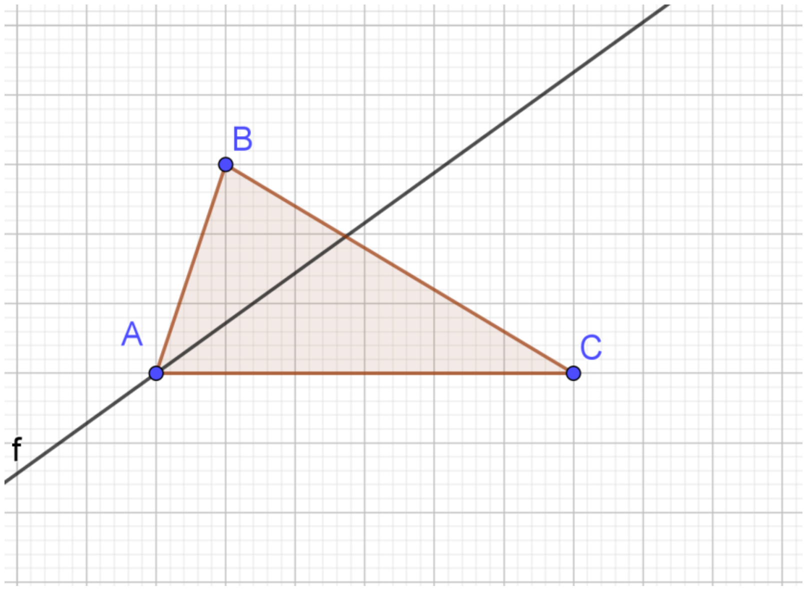
Porque el incentro equidista de los lados del triángulo y estos tres puntos están en los lados del triángulo. Así la circunferencia dibujada tiene como centro al punto D.

3.3.3. Simulación de actividad 8. Teorema de la bisectriz

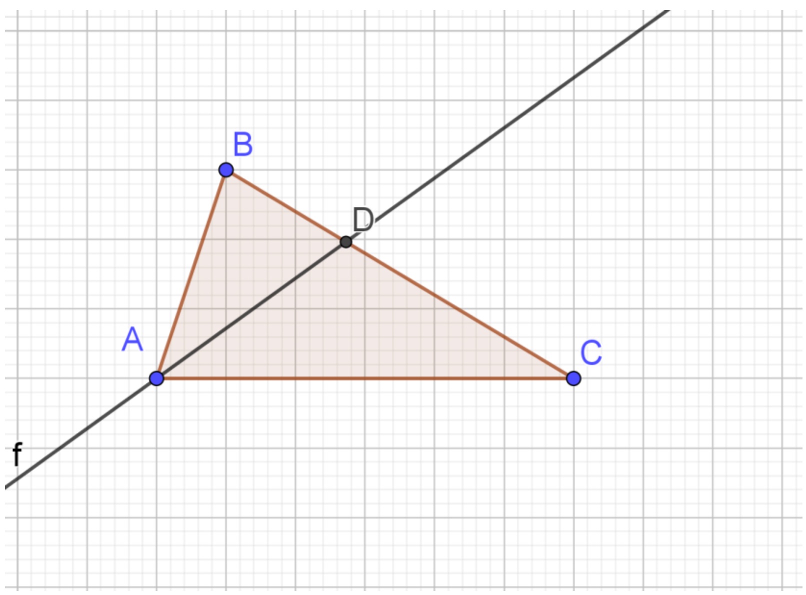
1. En un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes coordenados. Luego, seleccione en las ***Herramientas de polígonos***, la herramienta ***Polígono*** y construya el triángulo ABC. Oculte las etiquetas de los lados.



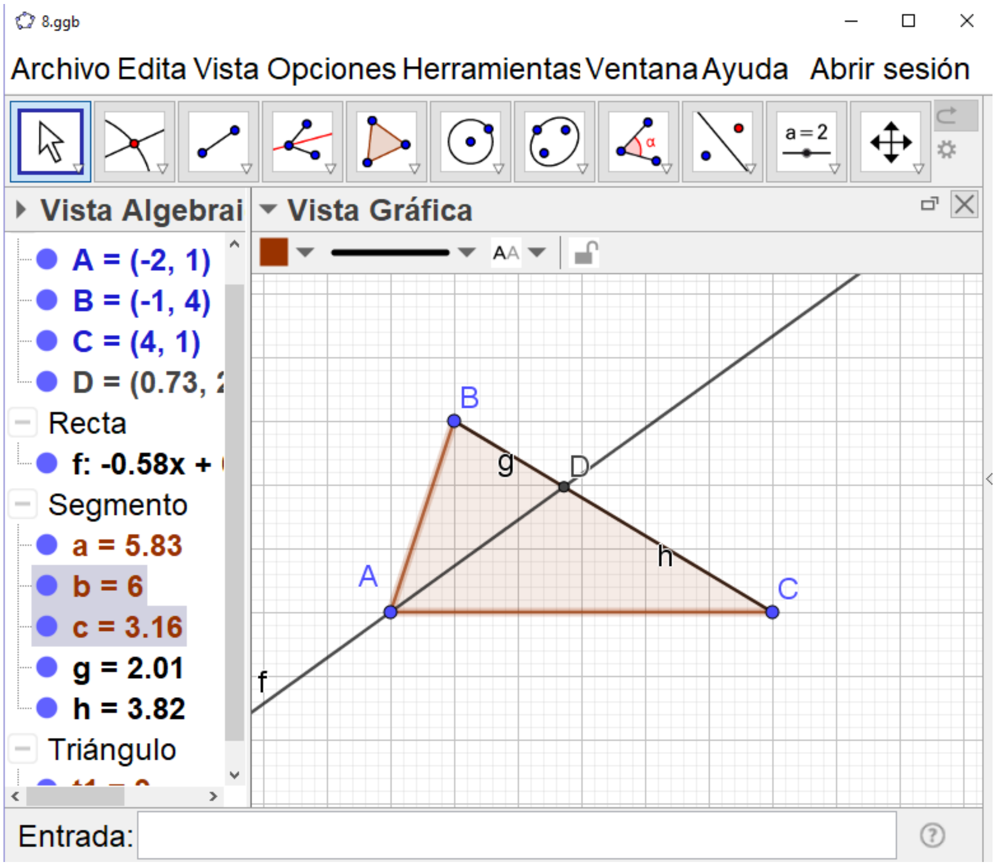
2. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Bisectriz***, y luego marque los vértices del triángulo en este orden: B, A, C.



3. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***intersección***. Luego, marque el lado $\overline{BC}$ y la bisectriz.

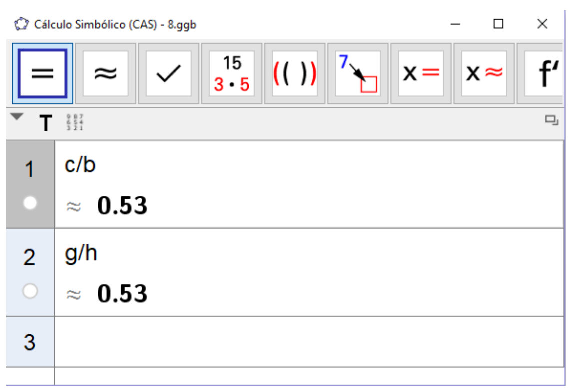


4. Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento***. Luego, marque los puntos B y D, y luego los puntos C y D.



5. En el Menú Vista seleccione Cálculo Simbólico (CAS).

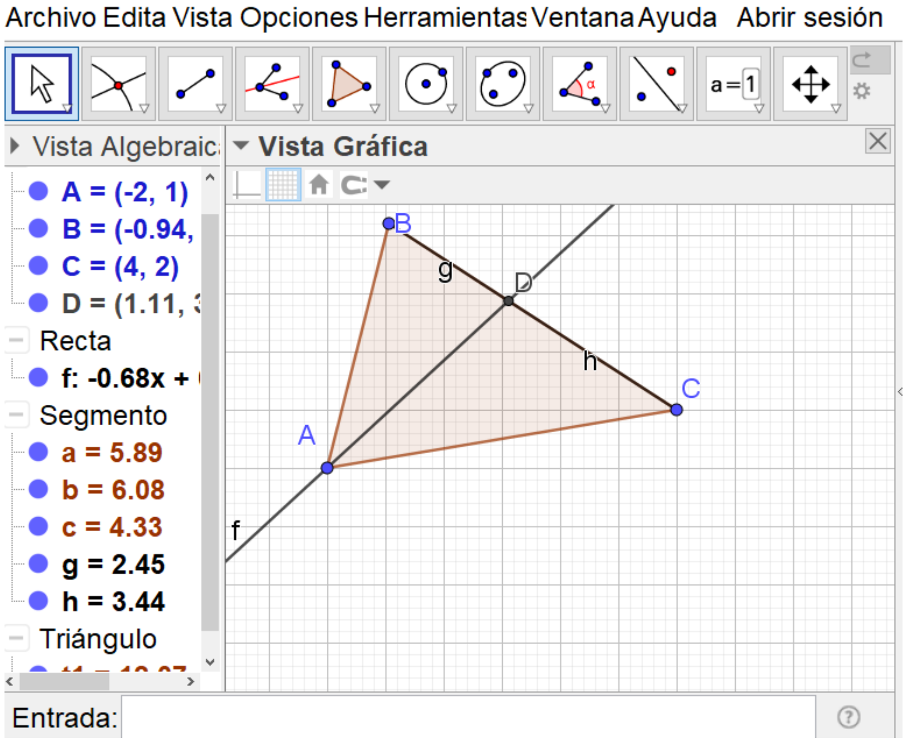
De clic izquierdo sobre la celda a la derecha del número 1, escriba c/a y luego de clic izquierdo en el botón ***Cálculo numérico***. De clic izquierdo sobre la celda a la derecha del número 2, escriba g/h y luego de clic izquierdo en el botón ***Cálculo numérico***. Así se tiene:



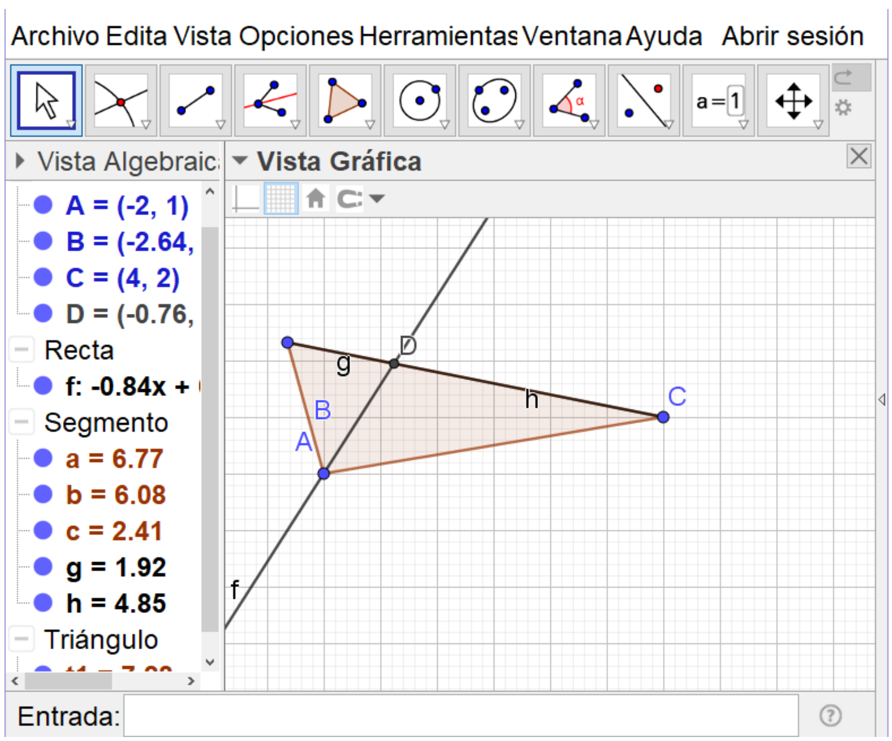
a) ¿Cómo son esas razones?

Las razones son iguales.

6. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***, y mueva los vértices del triángulo. Mantenga CAS activada y observará que las razones son iguales.



En este caso ambas razones son igual a 0.71.



En este caso ambas razones son igual a 0.4.

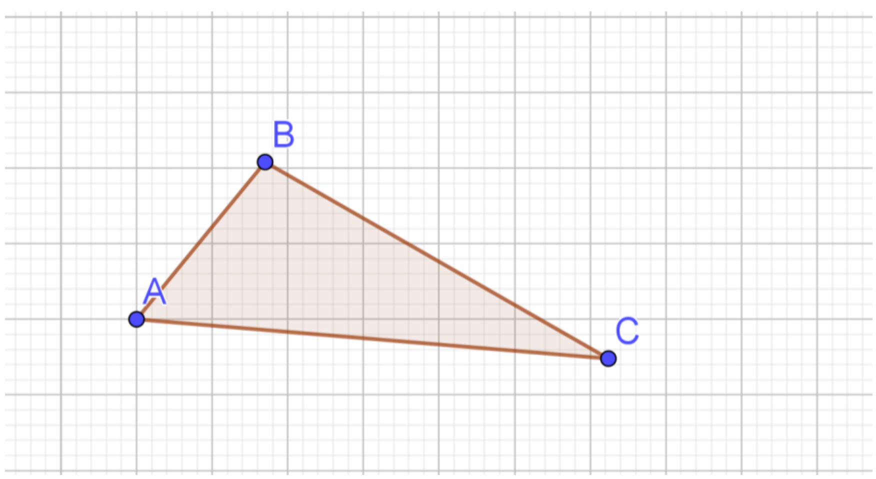
b) ¿Continúan siendo iguales estas razones?
Si. Siempre son iguales.

c) ¿Qué conclusión puede establecer?
En un triángulo, la razón entre dos lados es igual a la razón de las partes en las que queda dividido el tercer lado por la bisectriz de ángulo interno opuesto.

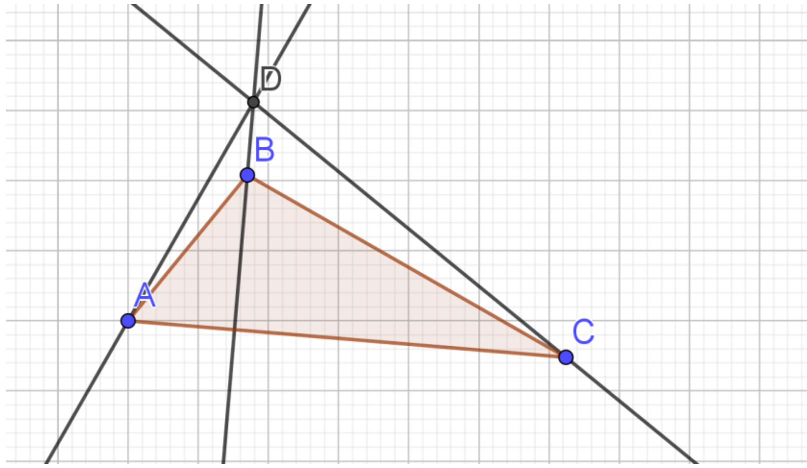
3.4. Simulación de actividades con alturas

3.4.1. Simulación de actividad 9. El ortocentro

1. Abra un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes coordenados y seleccione en las ***Herramientas de polígonos***, la herramienta ***Polígono***. Luego, de clic izquierdo en tres puntos diferentes de la zona de construcción. Oculte las etiquetas de los lados.



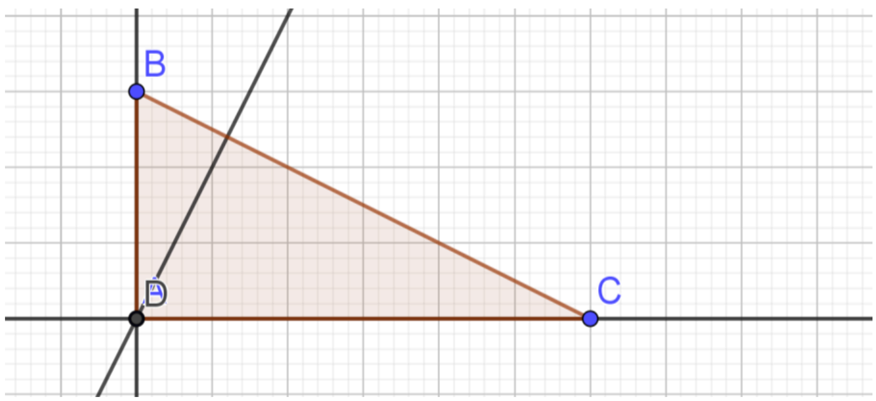
2. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Perpendicular.*** Luego:
De clic izquierdo sobre el lado $\overline{AB}$ y luego marque el punto C.
De clic izquierdo sobre el lado $\overline{BC}$ y luego marque el punto A.
De clic izquierdo sobre el lado $\overline{AC}$ y luego marque el punto B.
Ahora, seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***, y luego marque dos de las rectas, para crear el punto de intersección.

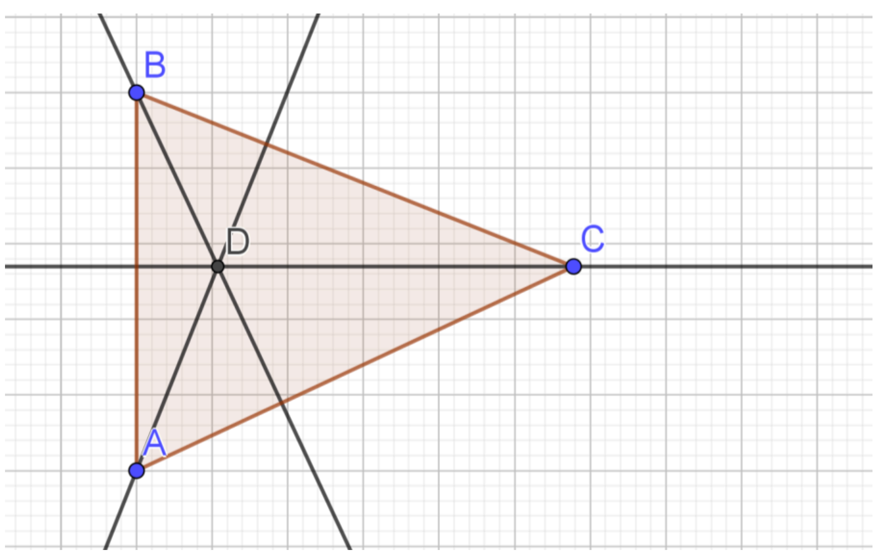


a) ¿En cuántos puntos se cortan?

En un solo punto.

3. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***, y mueva los vértices del triángulo.



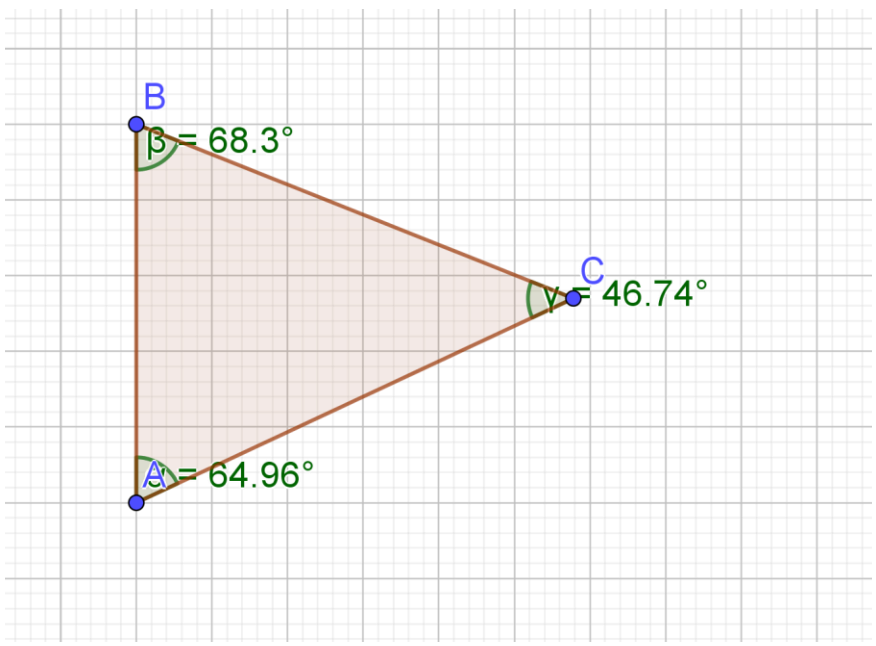


b) ¿Siempre se cortan en un punto?

Siempre se cortan en un único punto.

3.4.2. Simulación de actividad 10. El triángulo órtico

1. Abra un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes coordenados y seleccione en las ***Herramientas de polígonos***, la herramienta ***Polígono***. Construya el triángulo acutángulo. Para verificar que efectivamente es acutángulo, seleccione en las ***Herramientas de ángulos***, la herramienta ***Ángulo***, y construya los tres ángulos. (Para construir cada ángulo debe marcar los tres vértices pero en sentido antihorario).



Efectivamente, es un triángulo acutángulo. Esto es porque sus tres ángulos son agudos.

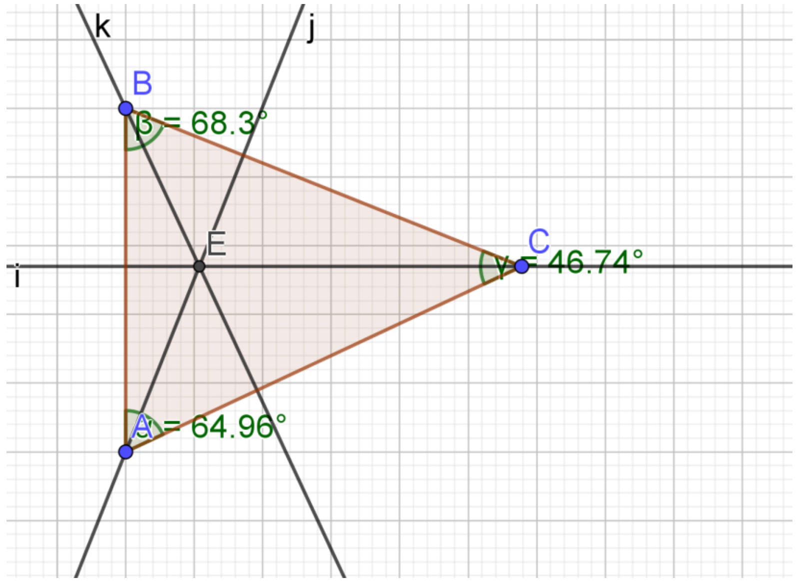
2. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Perpendicular.*** Luego:

   De clic izquierdo sobre el lado $\overline{AB}$ y luego marque el punto C.

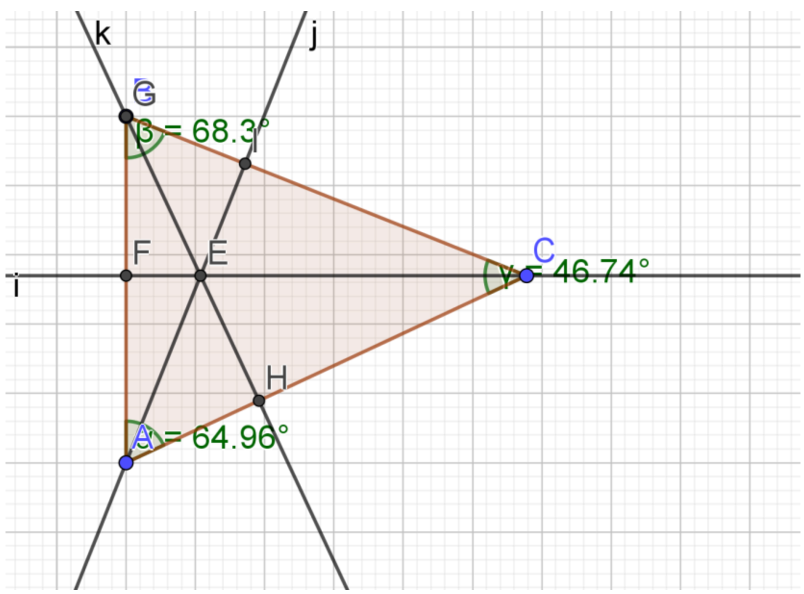
   De clic izquierdo sobre el lado $\overline{BC}$ y luego marque el punto A.

   De clic izquierdo sobre el lado $\overline{AC}$ y luego marque el punto B.

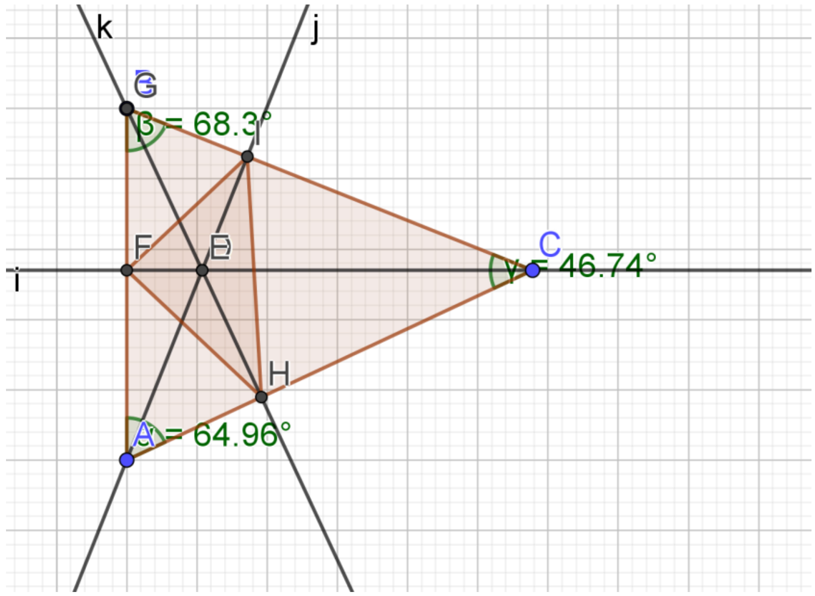
   Ahora, seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***, y luego marque dos de las rectas, para crear el punto de intersección.



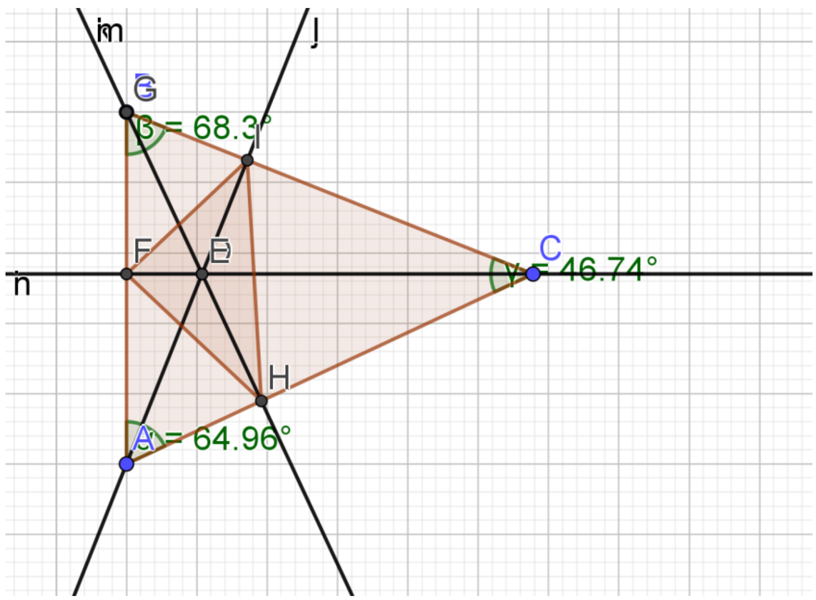
3. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***, y luego:
   De clic izquierdo sobre el lado $\overline{AB}$ y la perpendicular a él.
   De clic izquierdo sobre el lado $\overline{AC}$ y la perpendicular a él.
   De clic izquierdo sobre el lado $\overline{BC}$ y la perpendicular a él.



4. Seleccione en las ***Herramientas de polígonos***, la herramienta ***Polígono***, luego de clic izquierdo sobre los puntos en donde las rectas cortan perpendicularmente a los lados del triángulo. (Oculte las etiquetas de los lados del triángulo)



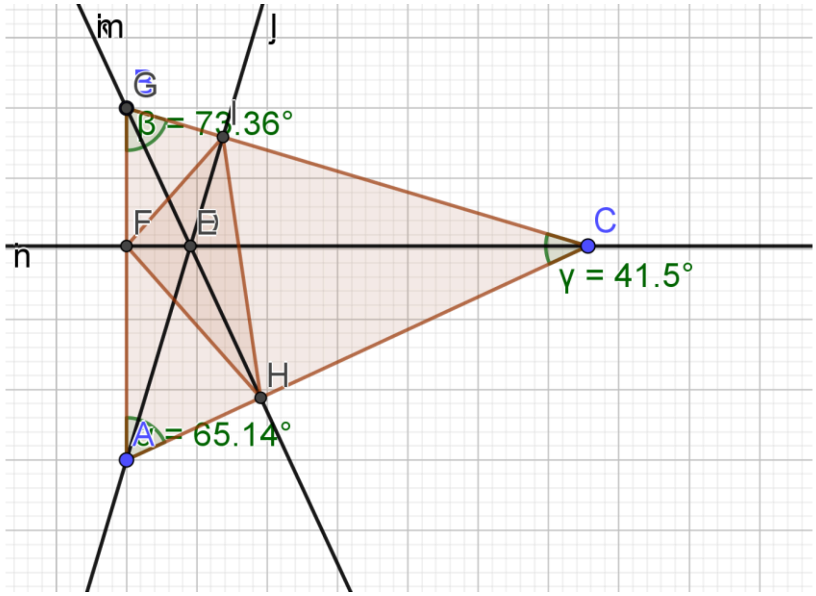
5. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***bisectriz***. Ahora construya las bisectrices.

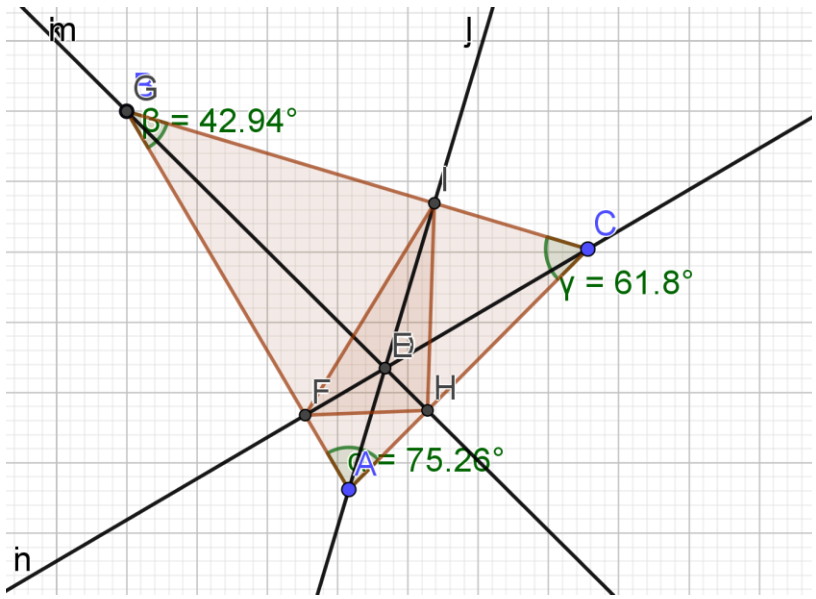


   a) ¿Con quienes coinciden?

      Coinciden con las alturas del triángulo ABC.

6. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***, y mueva los vértices del triángulo.





b) ¿Coinciden siempre las bisectrices del triángulo órtico con las alturas del triángulo original?

<u>Siempre coinciden.</u>

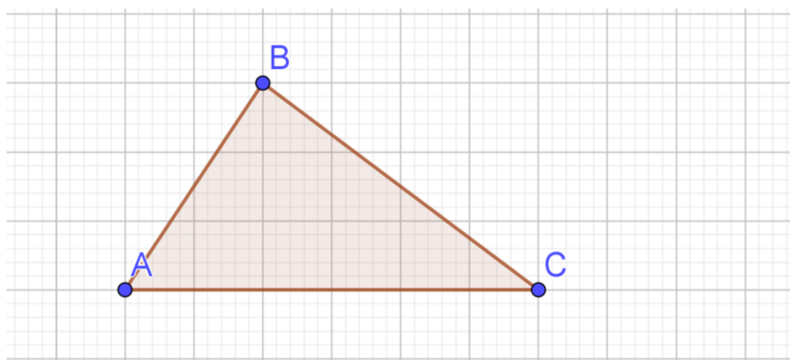
c) ¿Qué puede concluir sobre las bisectrices del triángulo órtico?

<u>Las bisectrices del triángulo órtico coinciden con las alturas del triángulo dado.</u>

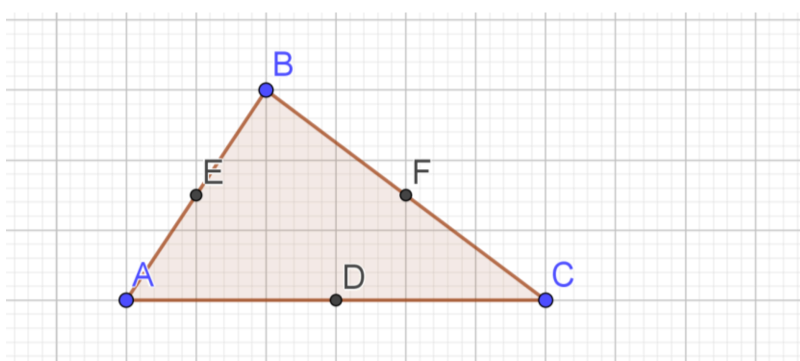
3.5. Simulación de actividades sobre la relación entre los puntos notables de un triángulo

3.5.1. Simulación de actividad 11. La recta de Euler

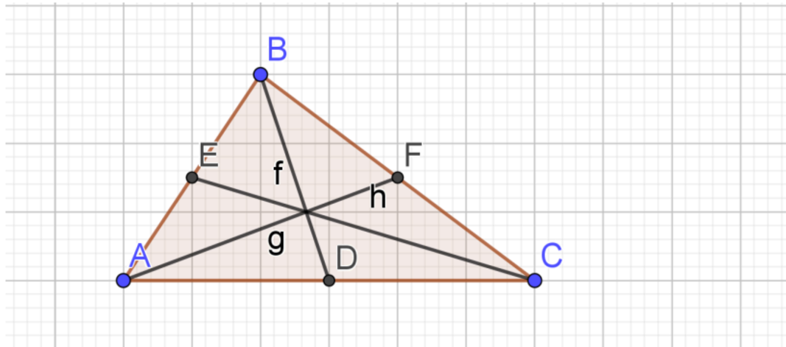
1. Abra un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes coordenados y seleccione en las ***Herramientas de polígonos***, la herramienta ***Polígono***. Construya un triángulo ABC que no sea equilátero. Observe en la Vista Algebraica que las medidas de los lados son diferentes. (En caso de que los tres lados tengan la misma medida, mueva uno de los vértices)



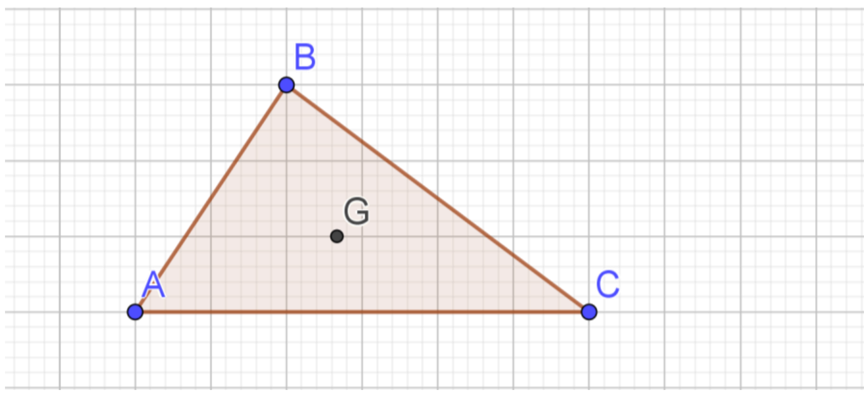
2. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Centro o Medio***. Luego, construya los puntos medios de los tres lados.



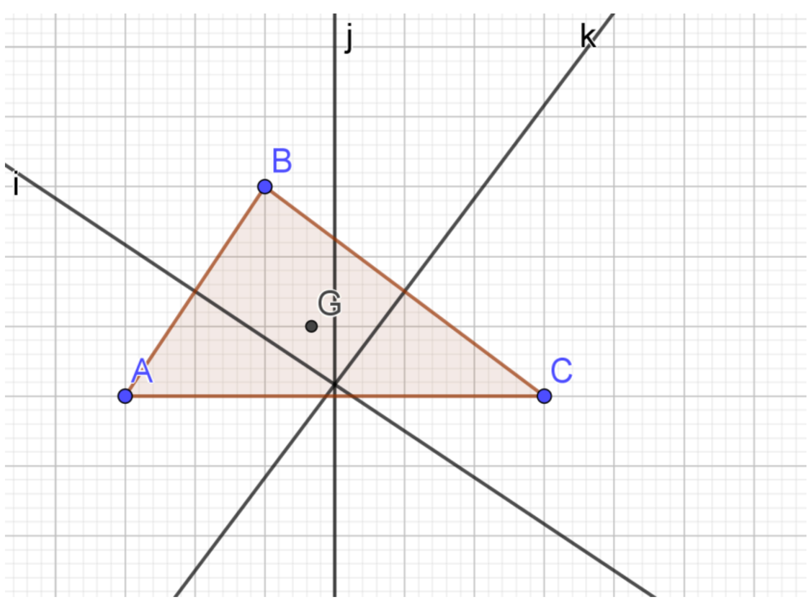
Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento***. Luego, construya las medianas.



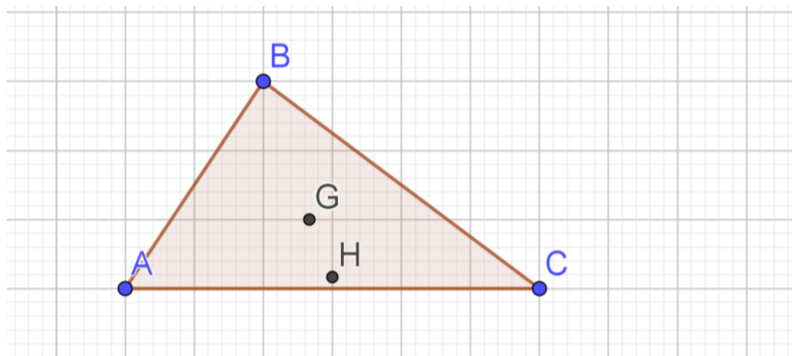
Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***. Ahora, de clic izquierdo sobre dos de las medianas para construir el baricentro G. Luego, oculte las medianas y los puntos medios de los lados del triángulo.



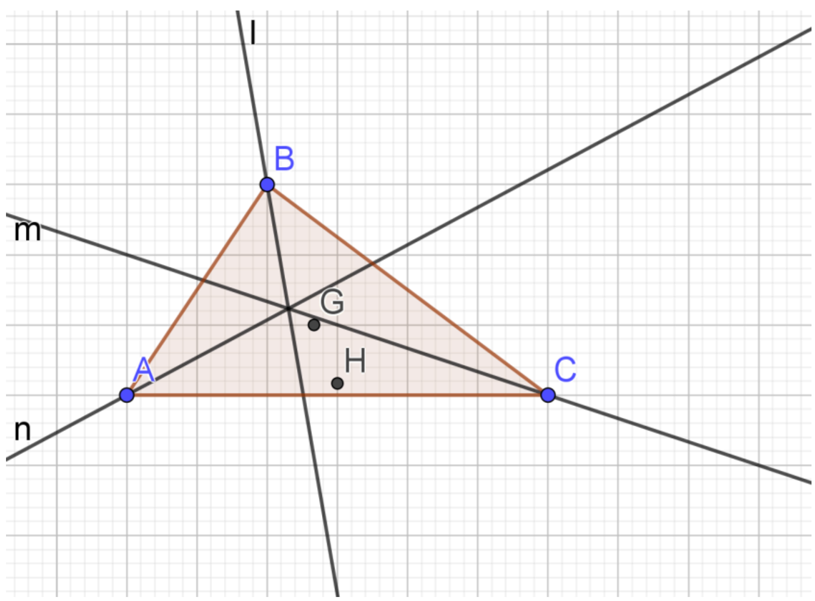
3. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Mediatriz.*** De clic izquierdo sobre los extremos de cada segmento y construya las mediatrices.



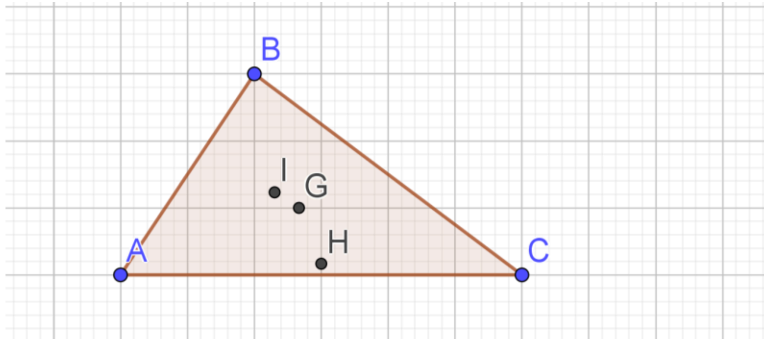
Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***. Ahora, de clic izquierdo sobre dos de las mediatrices para construir el circuncentro H. Luego, oculte las mediatrices.



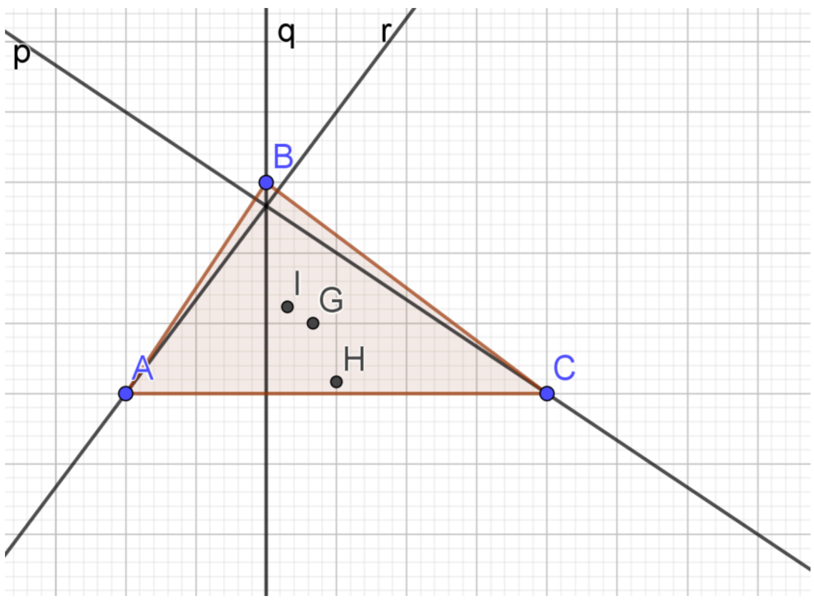
4. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Bisectriz.*** De clic izquierdo sobre las ternas de puntos: A, B y C; A, C y B; B, A y C, y construya las bisectrices.



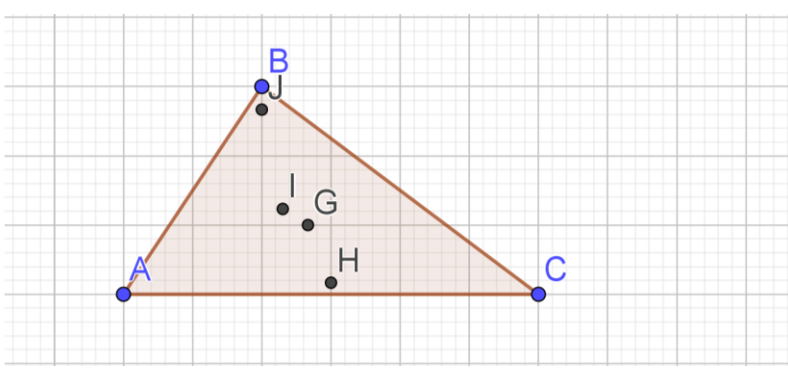
Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***. Ahora, de clic izquierdo sobre dos de las bisectrices para construir el incentro I. Luego, oculte las bisectrices.



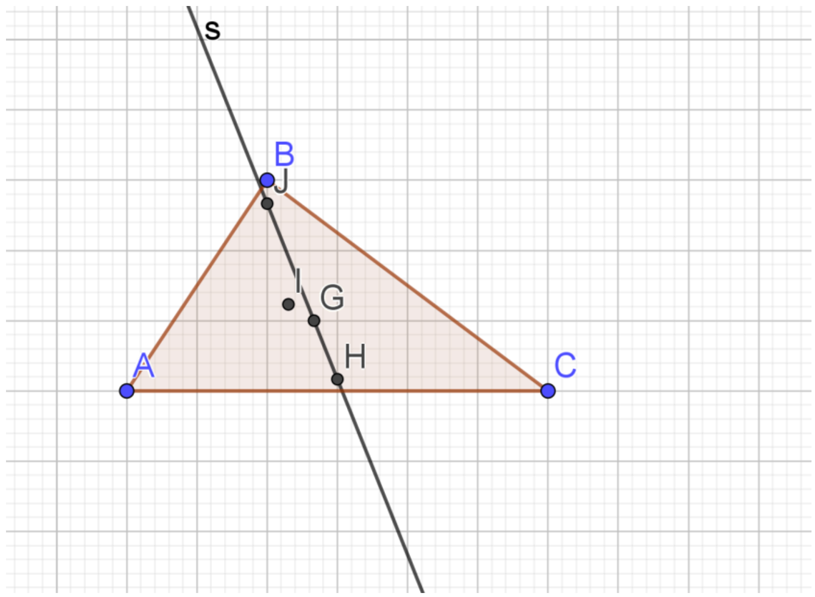
5. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Perpendicular.*** De clic izquierdo sobre cada lado del triángulo y después en el vértice opuesto, para construir las alturas.



Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***. Ahora, de clic izquierdo sobre dos de las alturas para construir el ortocentro J. Luego, oculte las alturas.

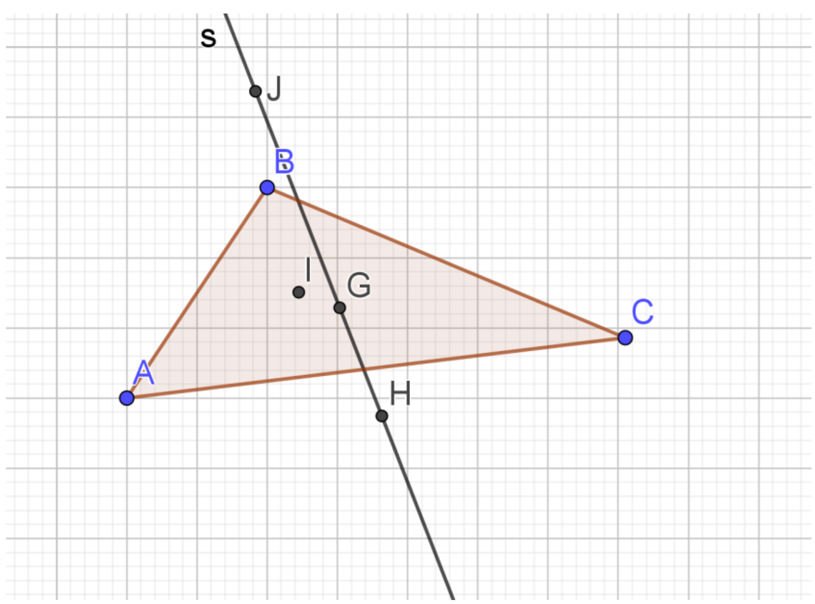


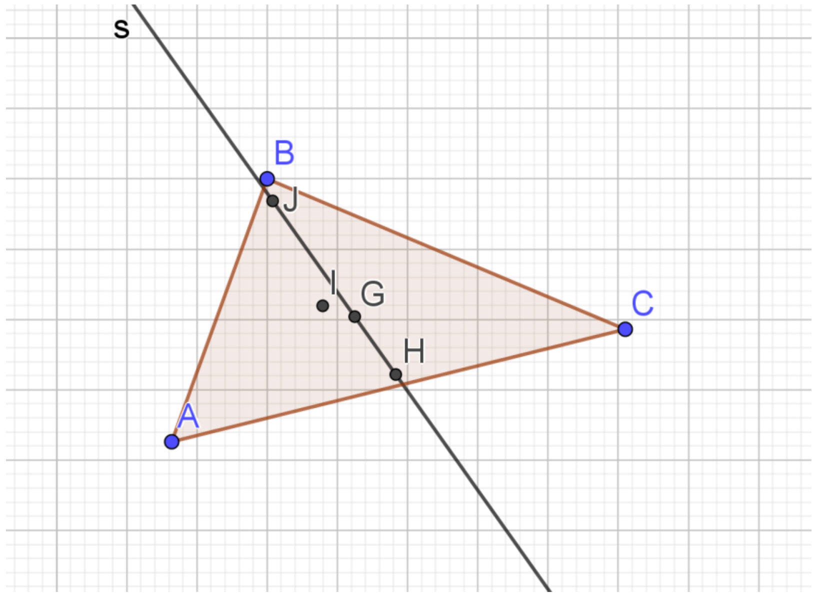
6. Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Recta.*** De clic izquierdo sobre los puntos G (Baricentro) y H (Circuncentro), y así construya la recta que pasa por el baricentro y el circuncentro.

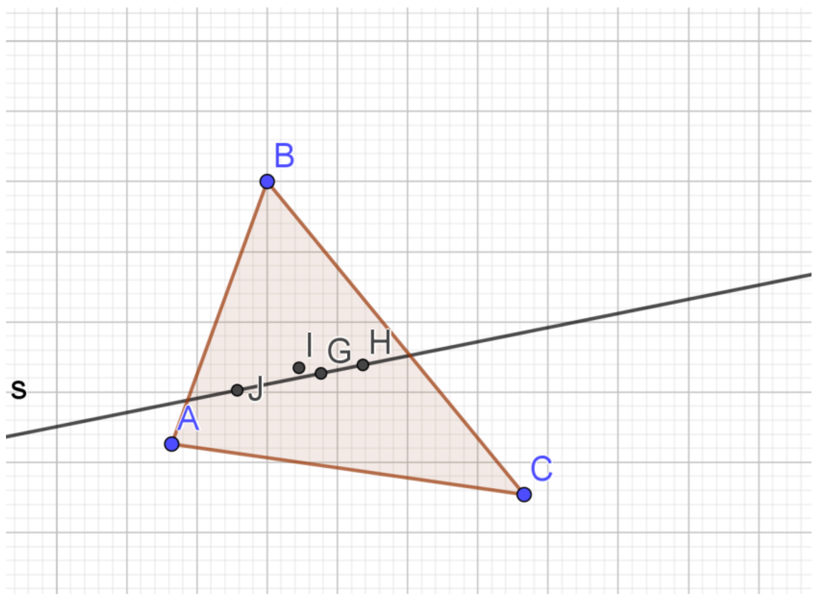


e) ¿Qué se puede decir del baricentro, circuncentro, y ortocentro?
<u>Están alineados, es decir, pertenecen a la misma recta.</u>

7. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***, y mueva los vértices del triángulo.







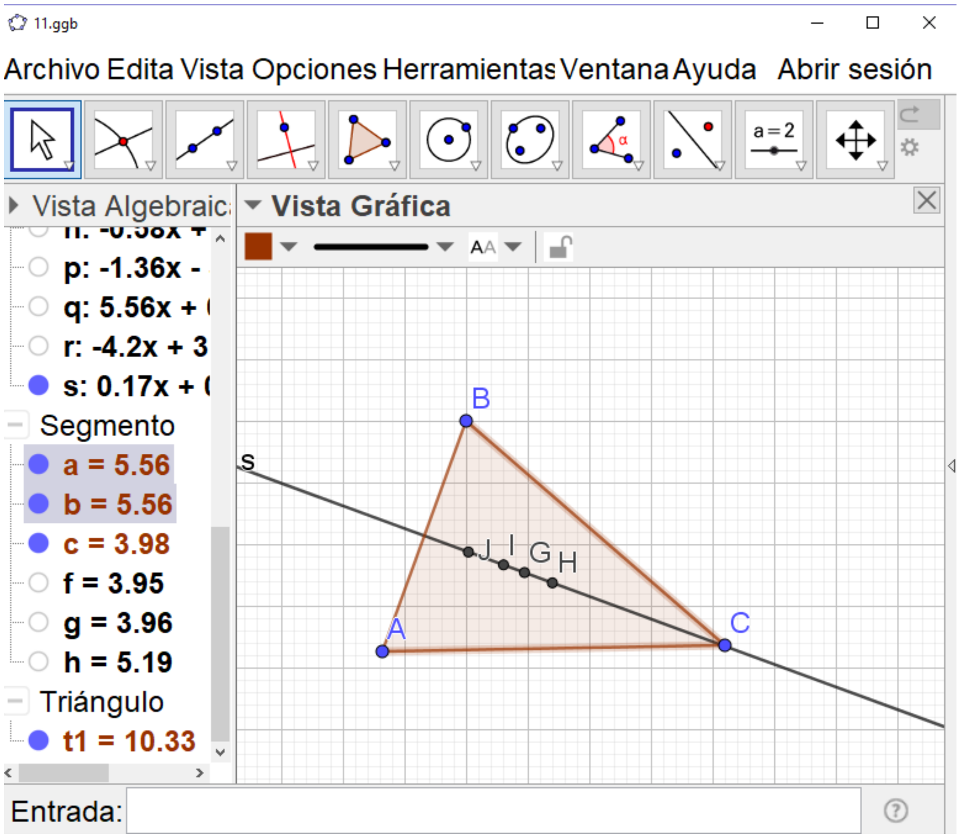
f) ¿Siempre están alineados el baricentro, el circuncentro y el ortocentro?

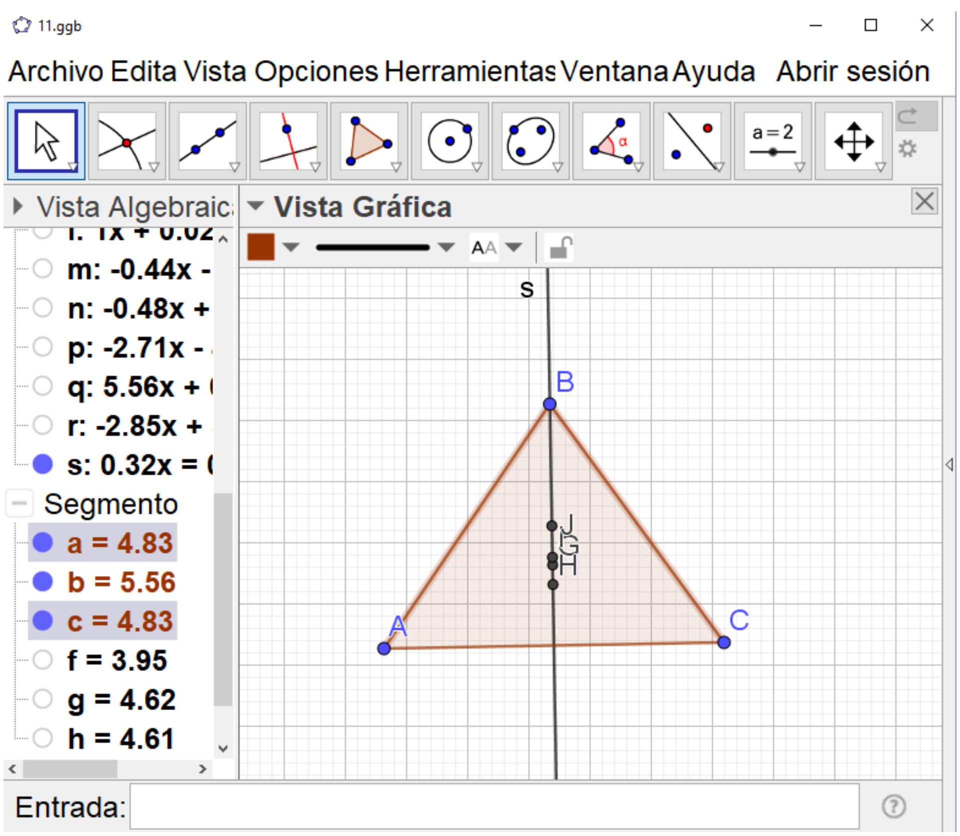
Si.

g) ¿Qué puede concluir?

El baricentro, el circuncentro y el ortocentro están sobre una misma recta.

8. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***, y mueva los vértices del triángulo.


11.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión
a = 2
Vista Algebraic
Vista Gráfica
p: -1.36x -
q: 5.56x +
r: -4.2x + 3
s: 0.17x +
Segmento
a = 5.56
b = 5.56
c = 3.98
f = 3.95
g = 3.96
h = 5.19
Triángulo
t1 = 10.33
Entrada:
s
B
J
I
G
H
A
C

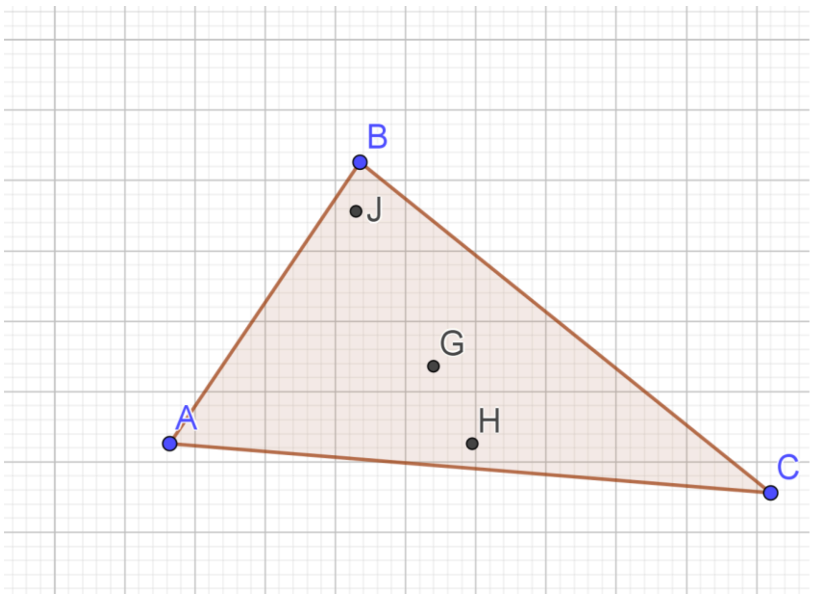

11.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda Abrir sesión
a = 2
Vista Algebraic
Vista Gráfica
m: -0.44x -
n: -0.48x +
p: -2.71x -
q: 5.56x +
r: -2.85x +
s: 0.32x =
Segmento
a = 4.83
b = 5.56
c = 4.83
f = 3.95
g = 4.62
h = 4.61
Entrada:
s
B
J
G
H
A
C

h) ¿En qué tipo de triángulos los cuatro puntos notables de un triángulo están en la recta de Euler?

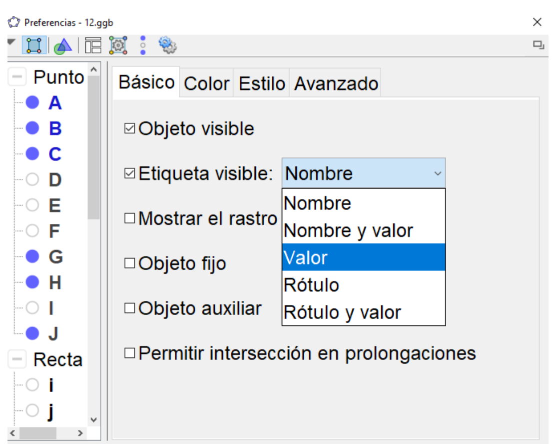
Cuando el triángulo es isósceles.

3.5.2. Simulación de actividad 12. Relación entre la distancia del baricentro al ortocentro y la distancia del baricentro al circuncentro.

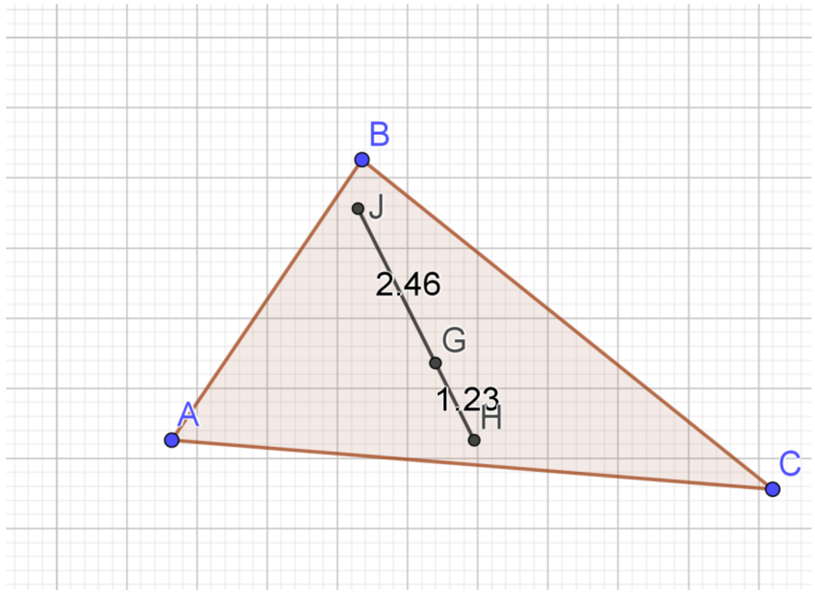
1. Abra el archivo de la construcción anterior, oculte la recta de Euler y el incentro.



2. Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento.*** De clic izquierdo sobre los puntos G (Baricentro) y H (Circuncentro), y luego sobre G (Baricentro) y J (Ortocentro). Ahora, seleccione los dos segmentos. De clic derecho y luego marque ***Propiedades***. Se desplegará una ventana como la siguiente:

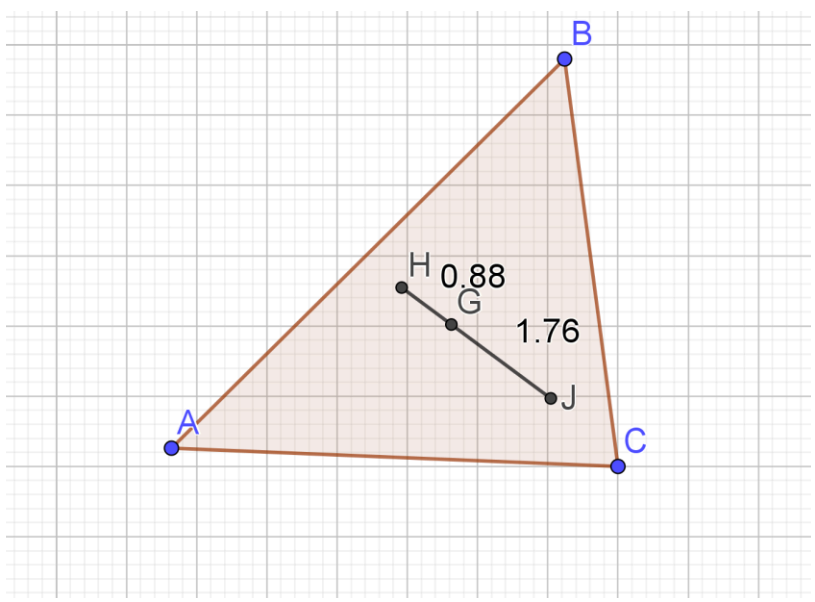


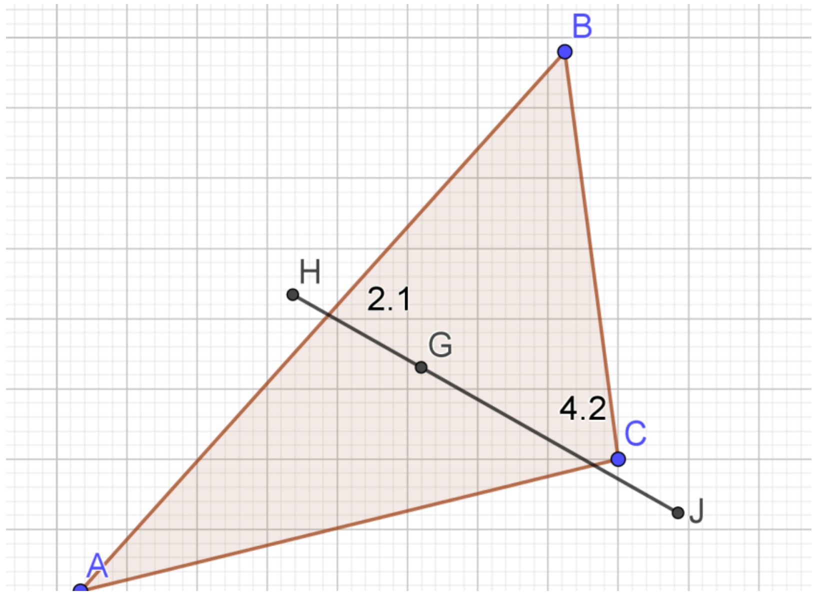
En donde dice ***Nombre***, seleccione ***Valor***. Luego, cierre la ventana.



d) ¿Qué relación guardan las medidas de los segmentos dibujados en el paso anterior?
En la figura se observa que GJ es el doble de GH.

3. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***, y mueva los vértices del triángulo.





e) ¿Se mantiene la relación entre los segmentos?

Si. GJ es el doble de GH.

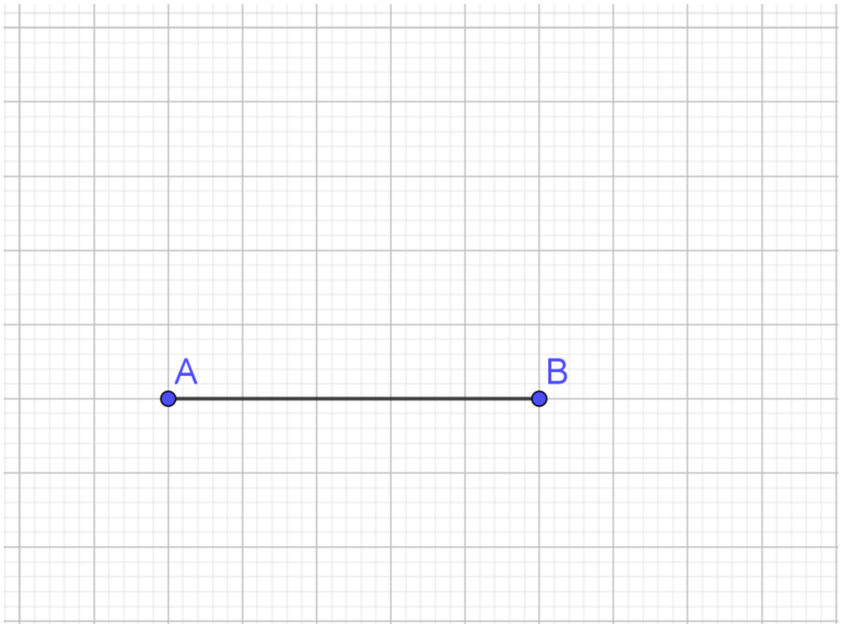
f) ¿Qué puede concluir sobre la distancia del baricentro al ortocentro y la distancia del baricentro al circuncentro?

Como G es el baricentro, H el circuncentro y J el ortocentro, se concluye que la distancia del baricentro al ortocentro es el doble de la distancia del baricentro al circuncentro.

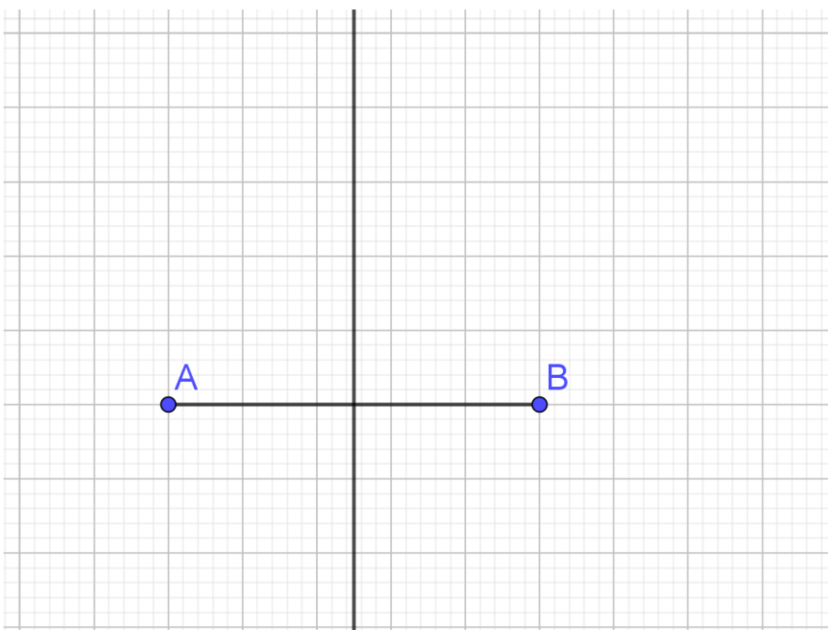
3.6. Simulación de actividades sobre rectas notables en un triángulo isósceles y en un equilátero

3.6.1. Simulación de actividad 13. Rectas notables en un triángulo isósceles.

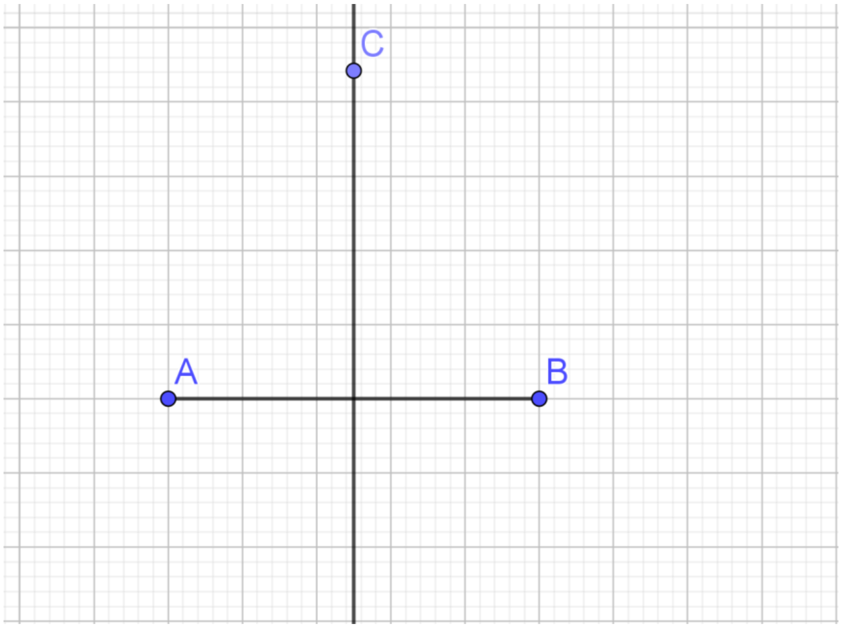
1. Después que abra un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes de coordenadas. Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento.*** Luego, construya el segmento solicitado y oculte su etiqueta.



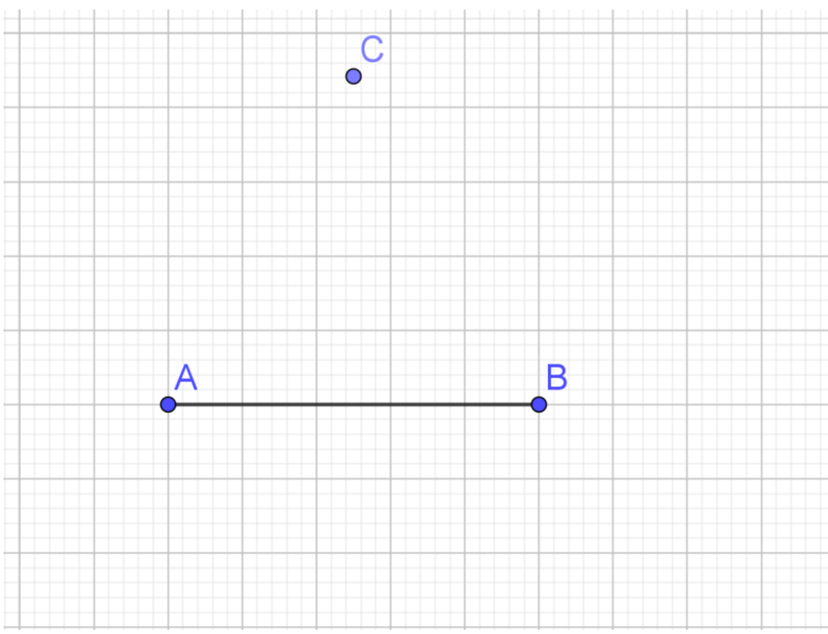
2. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Mediatriz.*** De clic izquierdo en los puntos A y B. Oculte la etiqueta de la mediatriz.



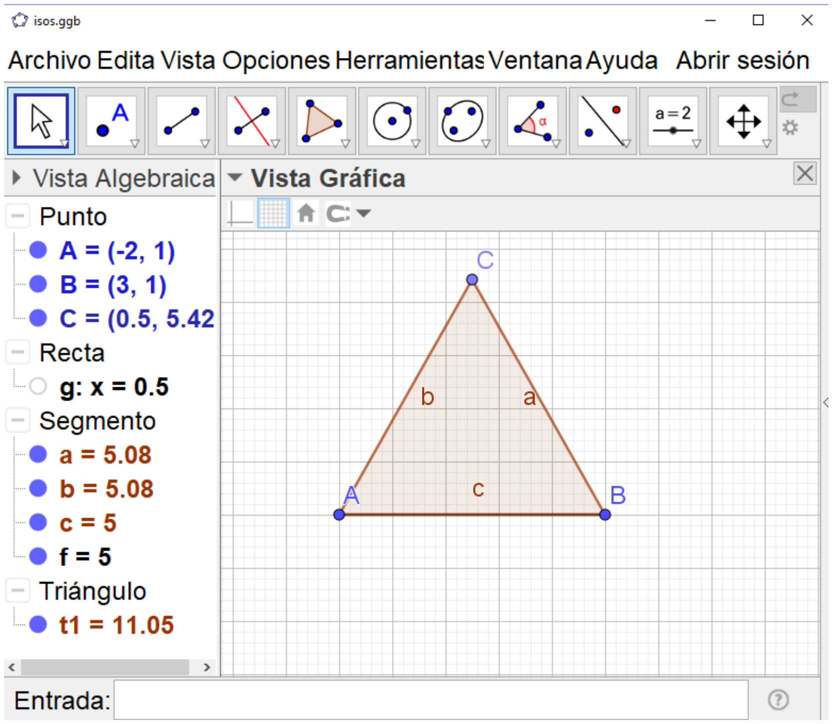
3. Seleccione en las ***Herramientas de puntos*** la herramienta ***Punto***, y luego construya el punto dando clic sobre la recta, pero que no sea el intercepto de esta con $\overline{AB}$.



4. Oculte la mediatriz, dando clic izquierdo sobre el círculo a la izquierda de la recta en la ***Vista Algebraica***.



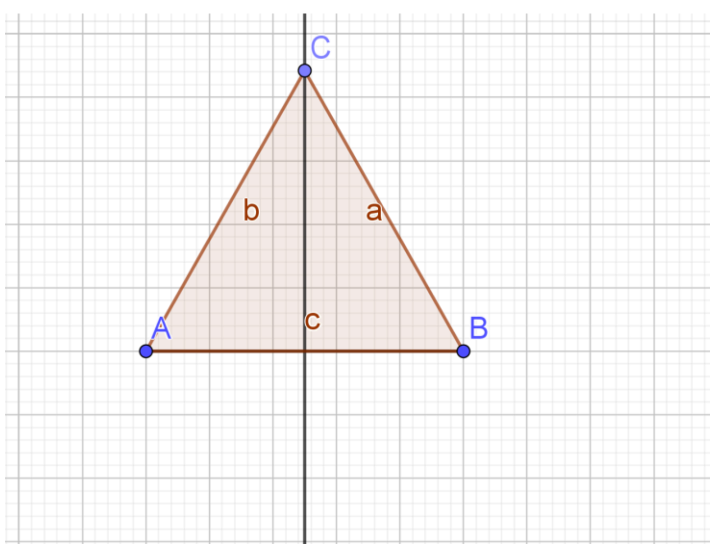
5. Seleccione en las ***Herramientas de Polígonos***, la herramienta ***Polígono***, y dibuje el triángulo cuyos vértices son A, B, y C.



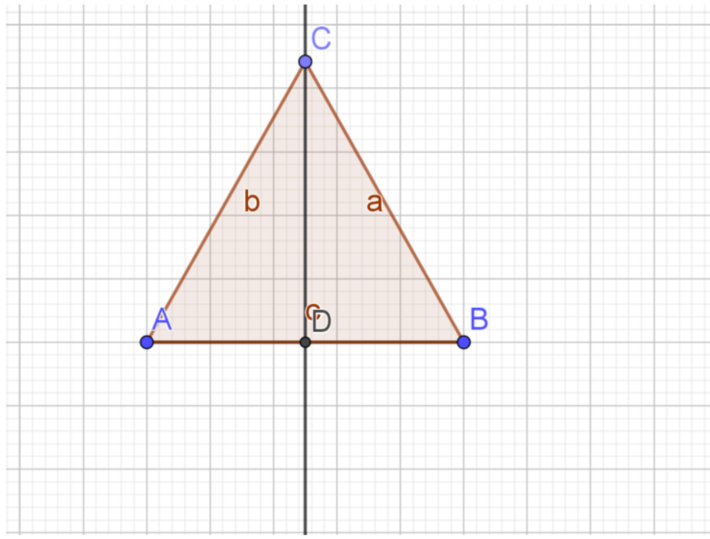
a) ¿Qué tipo de triángulo es? ¿Por qué?

<u>Es isósceles. En la ***Vista Algebraica*** puede observar que dos lados tienen la misma medida.</u>

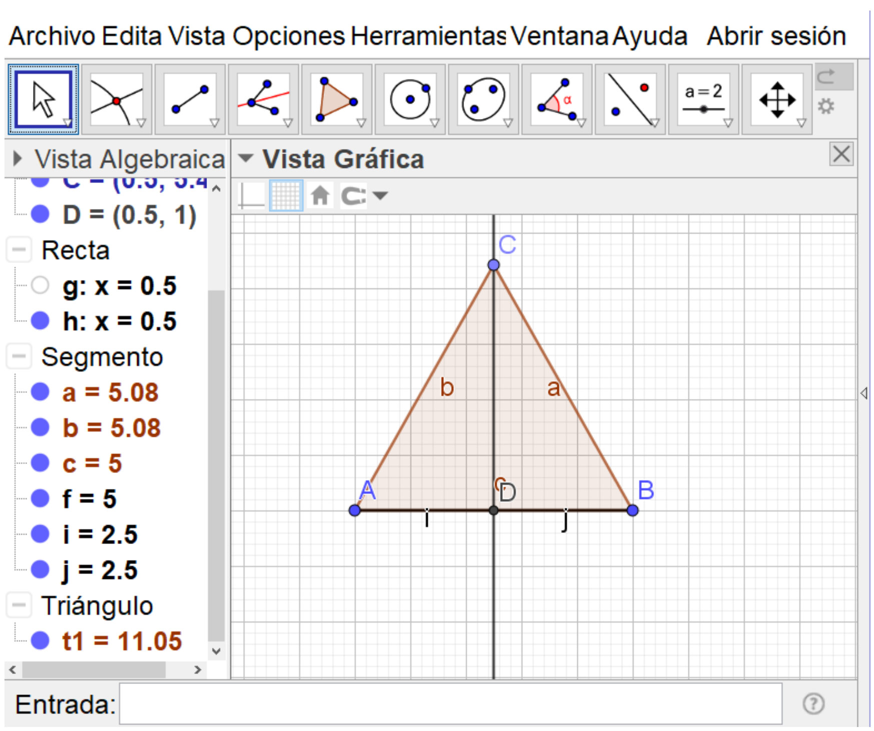
6. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Bisectriz.*** Luego de clic izquierdo sobre los vértices del triángulo, en el siguiente orden: A, B, C. Oculte la etiqueta de la bisectriz.



7. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***, y luego de clic izquierdo sobre la recta y el segmento $\overline{AB}$.



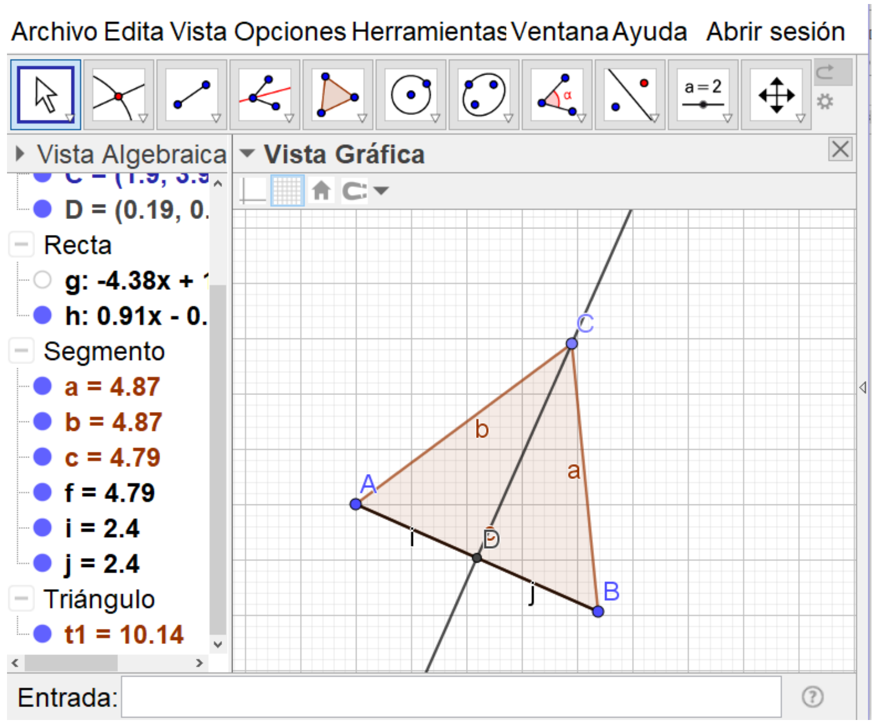
8. Seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento***, y luego dibuje los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$.

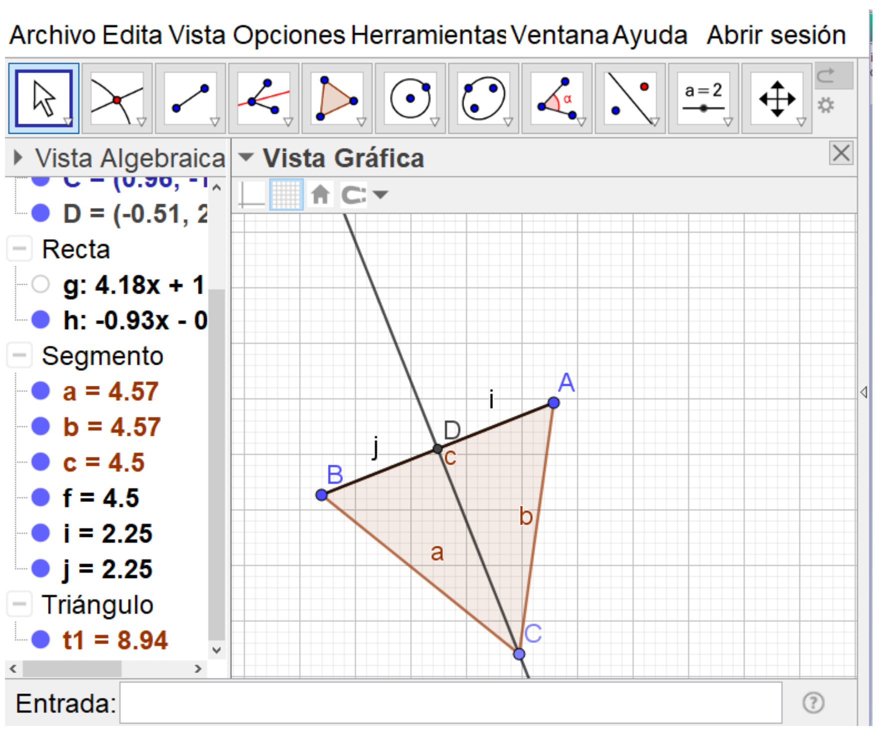


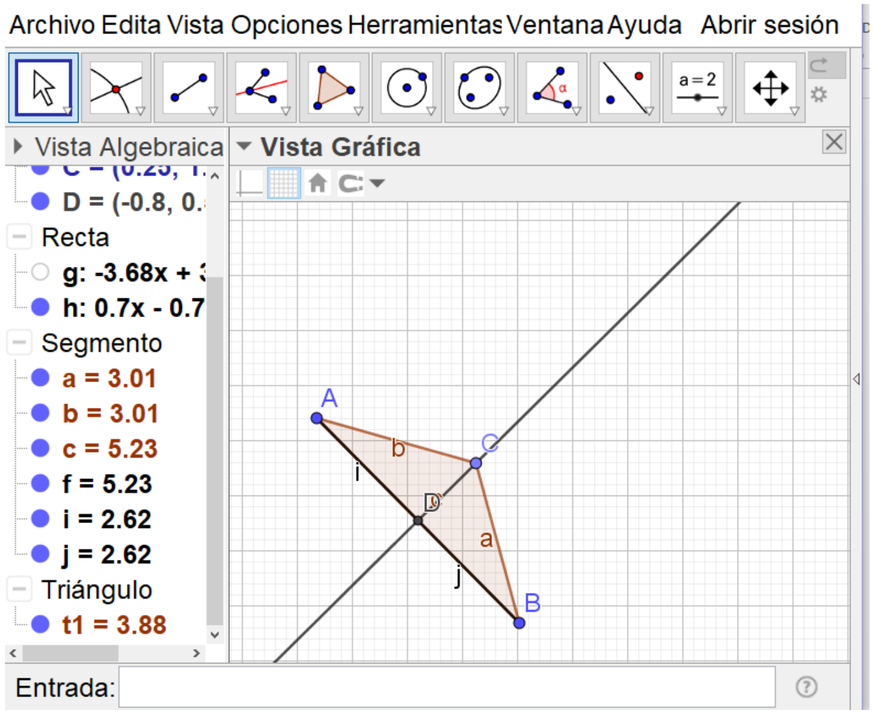
b) ¿Es D el punto medio de $\overline{AB}$? ¿Por qué?

Si. Porque $AD = DB$.

9. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***, y mueva cualquiera de los extremos de $\overline{AB}$.







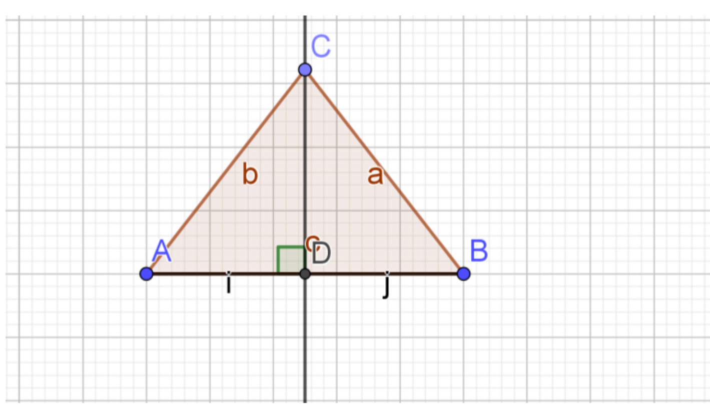
c) ¿es ΔABC isósceles? ¿Continúa siendo D el punto medio de $\overline{AB}$?

En la ***Vista Algebraica***, para cada caso él ΔABC es isósceles, y D es el punto medio de $\overline{AB}$.

d) ¿Qué puede concluir sobre el punto en donde la bisectriz del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles corta a la misma?

El punto donde es cortada la base por la bisectriz del ángulo opuesto a ella es el punto medio de dicha base.

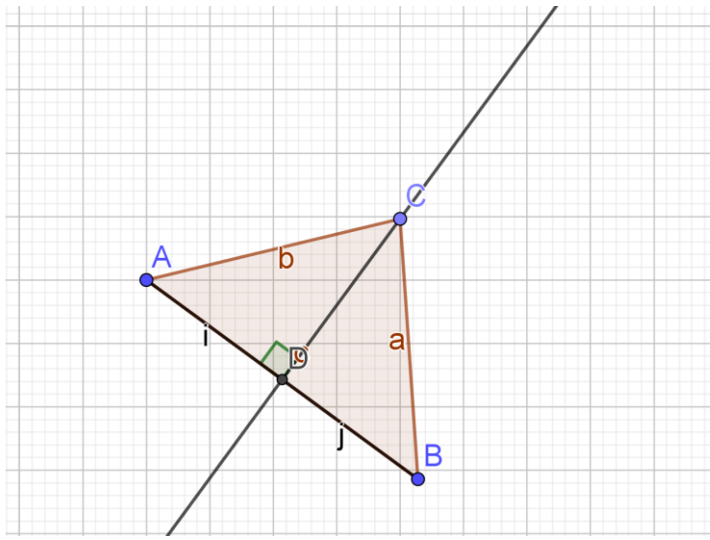
10. Seleccione en las ***Herramientas de ángulos***, la herramienta ***Ángulo***, y dibuje el ángulo CDA marcando primero C, luego D y por último A. Observe la medida del ángulo y luego oculte la etiqueta.

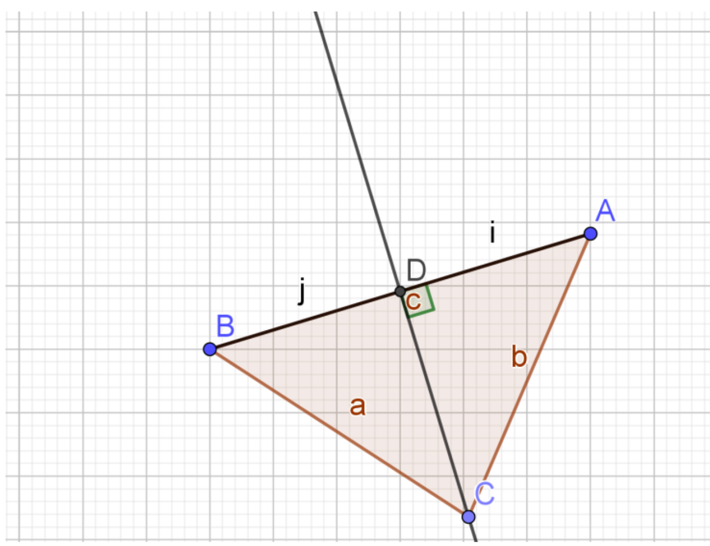


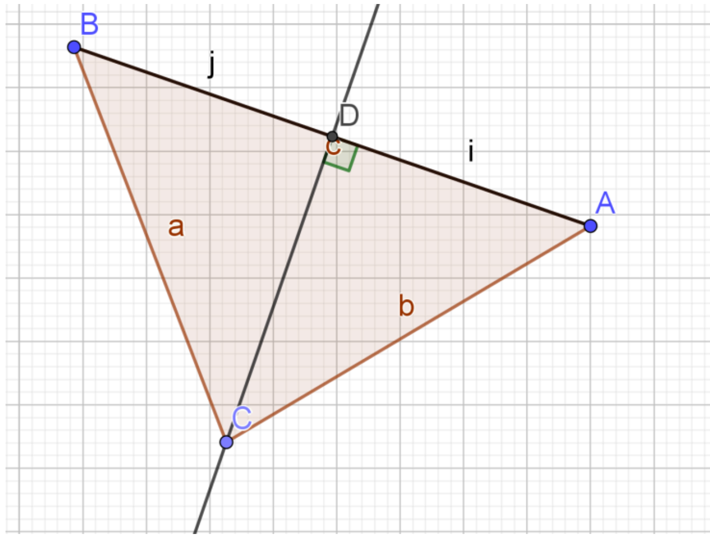
e) ¿Qué relación guardan la bisectriz y $\overline{AB}$? ¿Por qué?

La bisectriz es perpendicular al segmento $\overline{AB}$, porque forman ángulos rectos.

11. Seleccione en las ***Herramientas de desplazamiento***, la herramienta ***Elige y mueve***, y mueva cualquiera de los extremos de $\overline{AB}$.







f) ¿continúan siendo perpendiculares?

Si.

g) ¿Qué puede concluir sobre la bisectriz del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles?

La bisectriz del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles es perpendicular a ella y la corta en su punto medio.

h) ¿Son iguales la mediatriz y la bisectriz del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles? ¿Por qué?

Son iguales, porque por definición de mediatriz esta corta al segmento en su punto medio y además es perpendicular, lo cual coincide con la respuesta al inciso g).

i) ¿Son iguales la altura correspondiente a la base y la bisectriz del ángulo opuesto a esta? ¿Por qué?

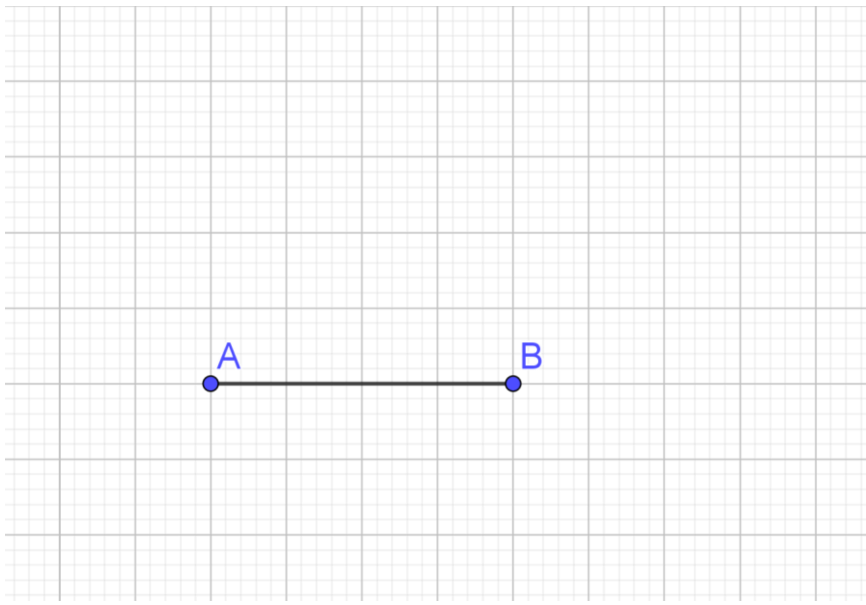
Si. Porque se llama altura de un triángulo a una recta que se traza perpendicularmente desde uno de sus vértices hacia el lado opuesto o su prolongación.

j) ¿Qué se puede concluir sobre la altura y mediatriz correspondiente a la base de un triángulo isósceles, y la bisectriz del ángulo opuesto a la base?

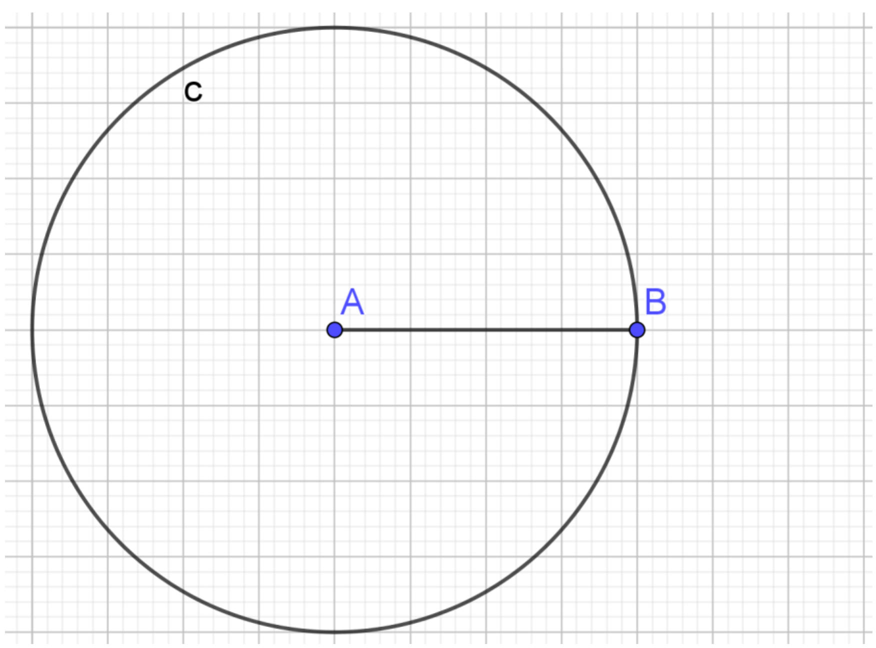
Son iguales las tres.

3.6.2. Simulación de actividad 14. Rectas notables en un triángulo equilátero

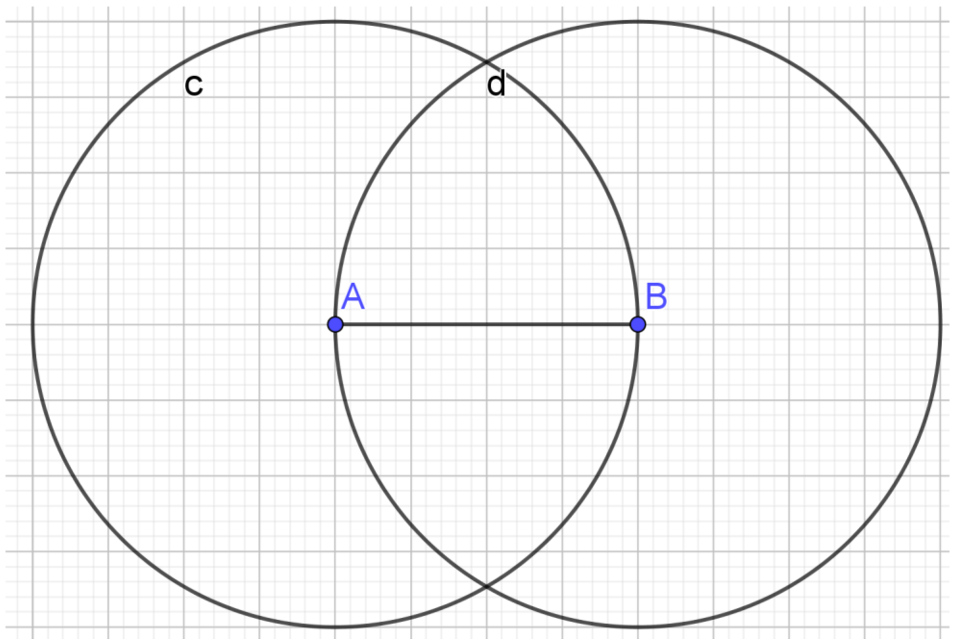
1. Abra un nuevo archivo de Geogebra, oculte los ejes y seleccione en las ***Herramientas de rectas***, la herramienta ***Segmento.*** De clic izquierdo sobre dos puntos diferentes de la zona de trabajo. Oculte la etiqueta de este segmento.



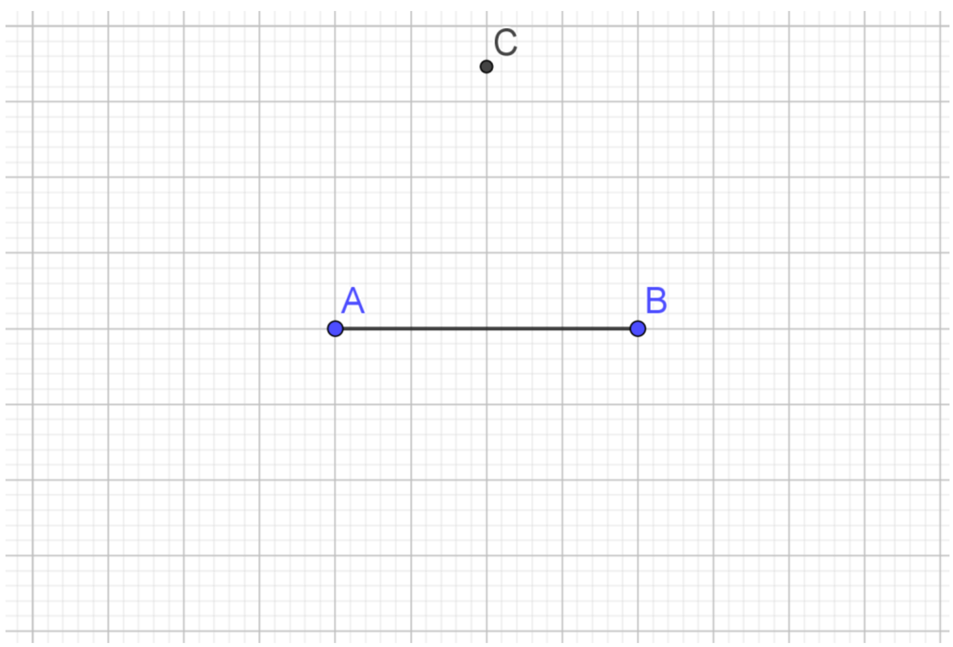
2. Seleccione en las ***Herramientas de circunferencias y arcos***, la herramienta ***Circunferencia (centro, punto).*** De clic izquierdo sobre A, y luego sobre B.



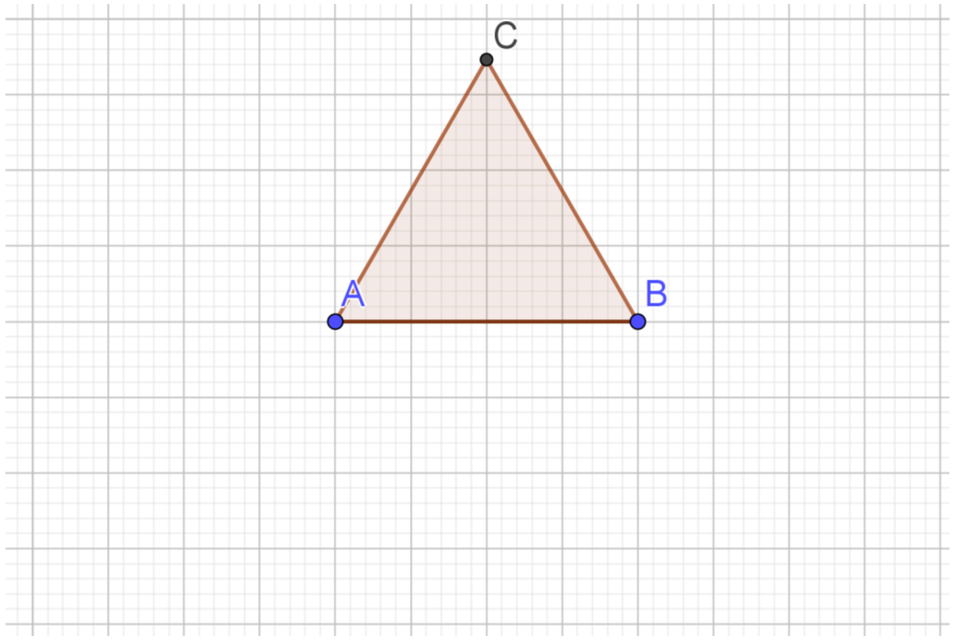
3. Seleccione en las ***Herramientas de circunferencias y arcos***, la herramienta ***Circunferencia (centro, punto).*** De clic izquierdo sobre B, y luego sobre A.



4. Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Punto***. Ahora, de clic izquierdo sobre el punto donde se cortan las dos circunferencias. Luego, ocúltelas.



5. Seleccione en las ***Herramientas de polígonos***, la herramienta ***Polígono***. Luego, marque los puntos A, B y C. Oculte las etiquetas de los lados.



a) ¿Por qué son iguales AB, BC y AC?

$AB = BC$ porque son radios de una misma circunferencia.

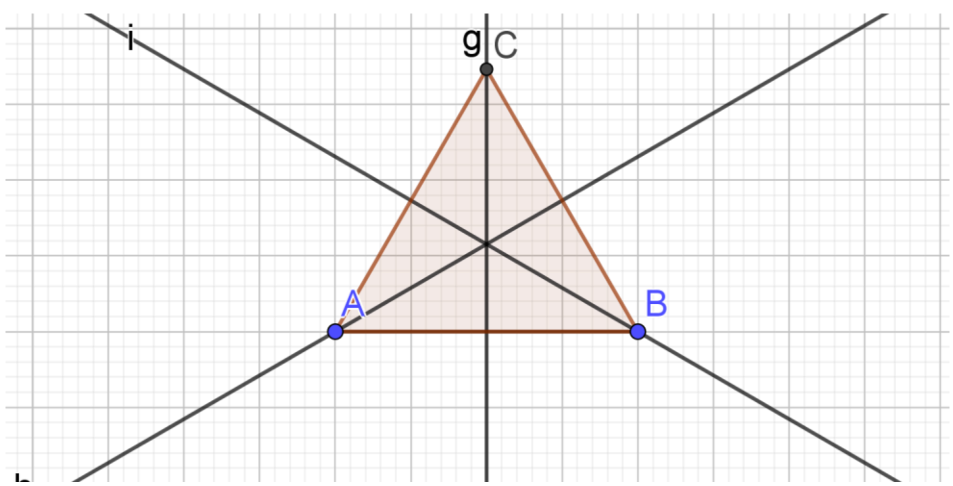
$AB = AC$ porque son radios de una misma circunferencia.

$AC = BC$ por transitividad de la igualdad.

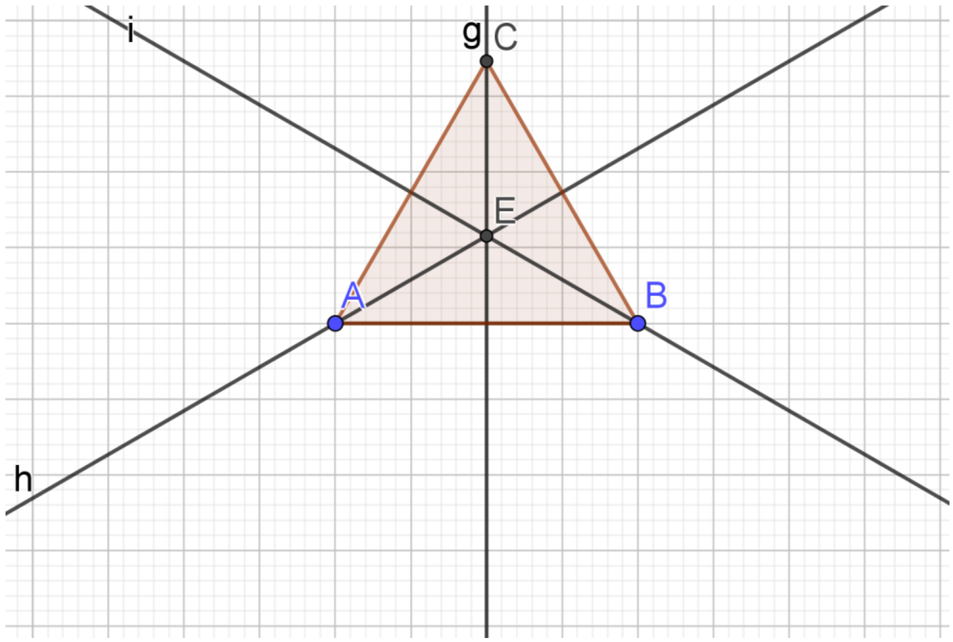
b) ¿Qué tipo de triángulo es?

Como los tres lados tienen la misma medida, entonces es un triángulo equilátero.

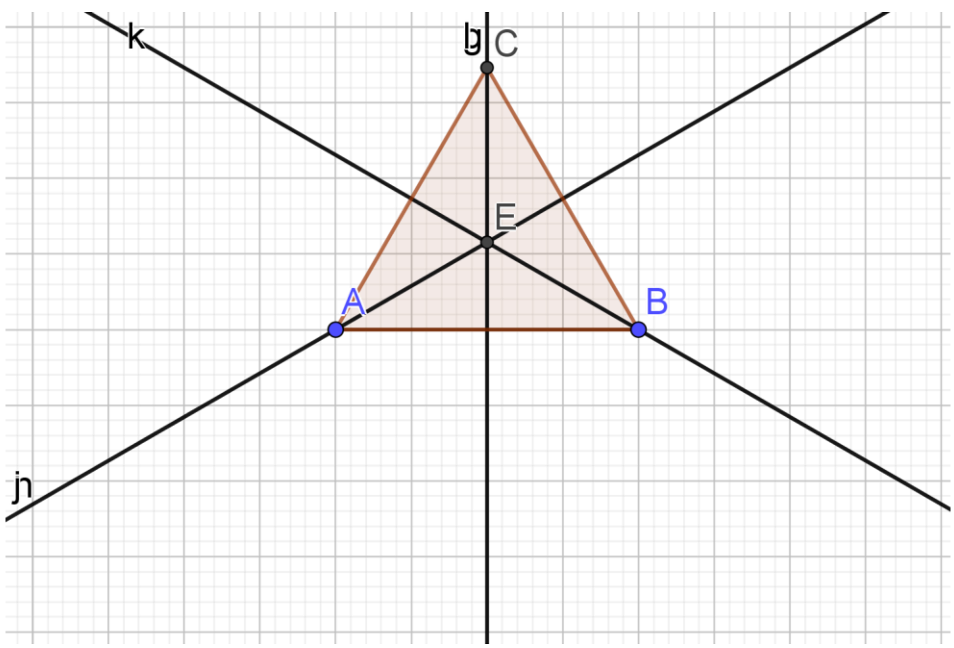
6. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Mediatriz.*** De clic izquierdo sobre los extremos de cada segmento y construya las mediatrices.



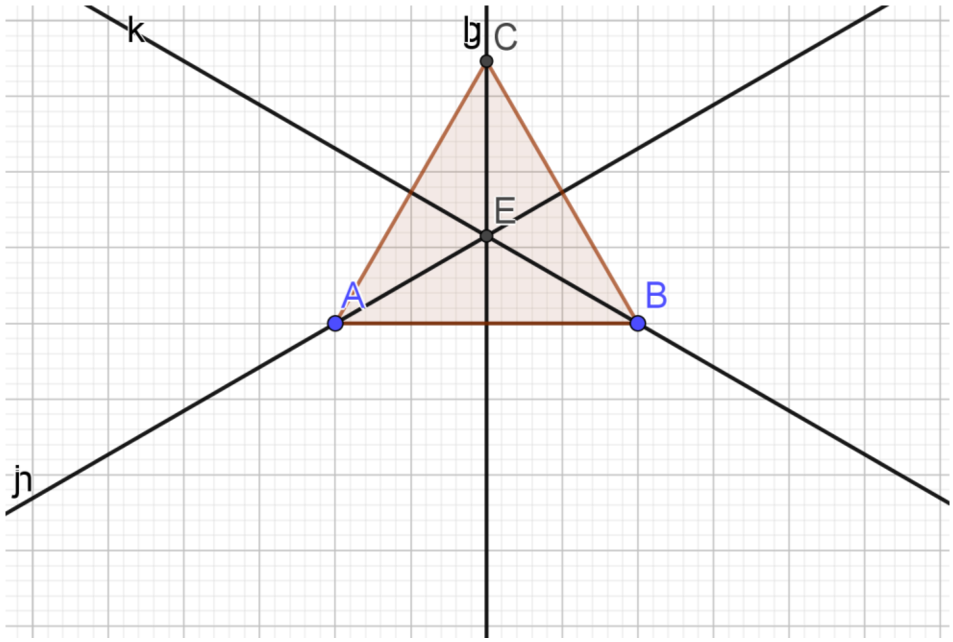
Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***. Ahora, de clic izquierdo sobre dos de las mediatrices para construir el circuncentro.



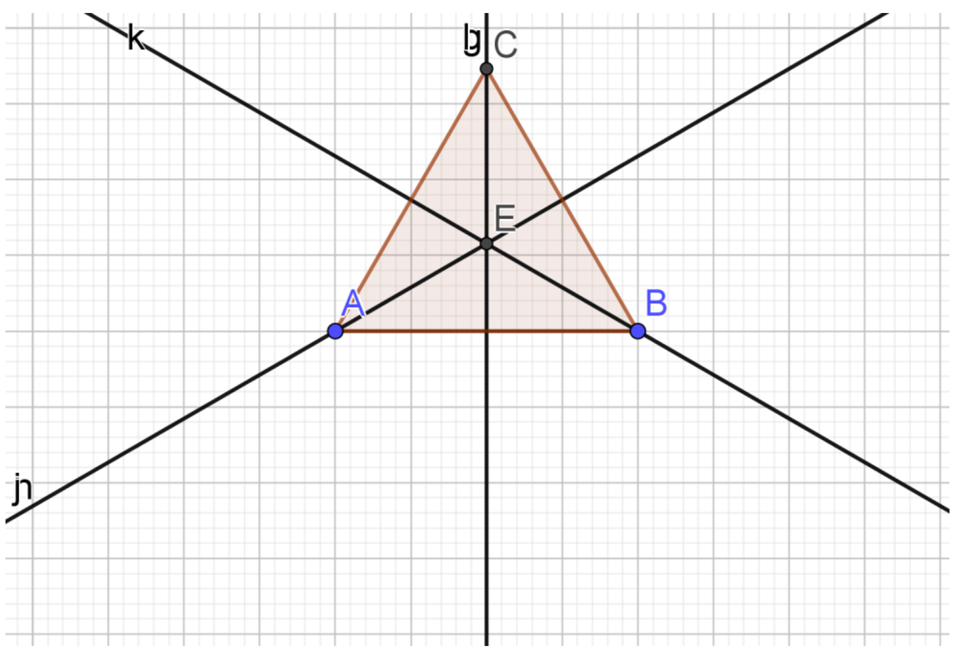
7. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Bisectriz.*** De clic izquierdo sobre las ternas de puntos: A, B y C; A, C y B; B, A y C, y construya las bisectrices.



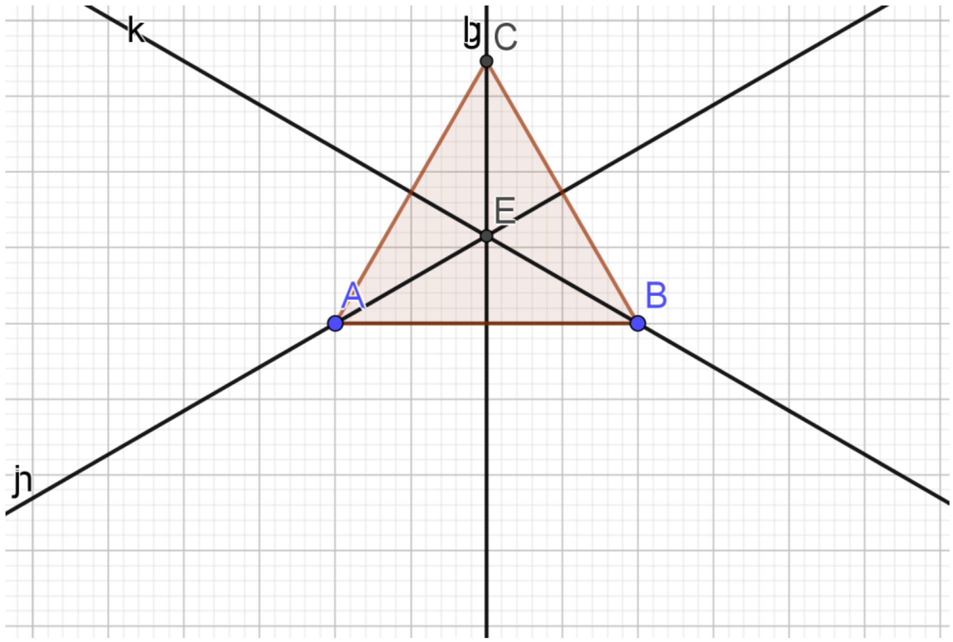
Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***. Ahora, de clic izquierdo sobre dos de las bisectrices para construir el incentro.



8. Seleccione en las ***Herramientas de trazado especial***, la herramienta ***Perpendicular.*** De clic izquierdo sobre cada lado del triángulo y después en el vértice opuesto, para construir las alturas.



Seleccione en las ***Herramientas de puntos***, la herramienta ***Intersección***. Ahora, de clic izquierdo sobre dos de las alturas para construir el ortocentro



c) ¿Por qué las medianas están contenidas en las mediatrices?

Porque las mediatrices pasan por el punto medio de un lado y el vértice opuesto al mismo.

d) ¿Qué ocurre con las rectas notables?

Son iguales.

e) ¿Qué ocurre con el baricentro, el circuncentro, incentro y ortocentro?

Son iguales.

f) ¿Qué conclusión puede establecer?

En un triángulo equilátero las rectas notables coinciden. Asimismo los puntos notables coinciden.

CONCLUSIONES

La propuesta para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana que se propone en este trabajo no pretende ser la panacea en la solución de todos los problemas involucrados en el aprendizaje de Geometría, como tampoco que los alumnos comprendan y aprendan Geometría Euclidiana sin ningún esfuerzo. Lo que pretende ser es un método que proporciones mejores resultados que otras formas de trabajo, ofreciendo una alternativa donde los alumnos son llevados a razonar lo que están haciendo, a comprender el significado de la Geometría Euclidiana, y que lleguen a ser capaces de resolver problemas diferentes de los ya conocidos, dejando a un lado la memorización estéril.

Con la incorporación de la tecnología en las actividades propuestas, el papel del profesor cambia radicalmente, las intervenciones del profesor son enfocadas a que los alumnos reflexionen y encuentren por sí mismos una solución aceptable. Desde el inicio de cada una de las actividades, el propósito siempre debe ser ayudar a los estudiantes a que se involucren en la actividad, evidencien sus conocimientos matemáticos anteriores, y lleguen a desarrollar correctamente las ideas matemáticas a partir de sus propias experiencias derivadas de la manipulación, exploración de modelos dinámicos y la retroalimentación que les provee el software. Por tanto, el profesor asume el papel de organizador del trabajo, de guía y de asesor.

En este mismo sentido, las actividades propuestas colocan al estudiante en la situación de participar activamente en la construcción de sus propios conceptos, de los diferentes objetos geométricos relacionados a triángulos; fomentando una actividad matemática viva, variada, dinámica, exploratoria, de manera que el estudiantes sienta el placer de ir descubriendo por sí mismo las relaciones geométricas que existen entre diferentes objetos geométricos relacionados a un triángulo.

La medición es un recurso al que los estudiantes pueden recurrir y en varias de las actividades esto se promueve, por lo que se hace necesario buscar la manera en que la medición progresivamente pase de ser un medio que sirve como verificación y validación a uno que se utilice como herramienta heurística. De acuerdo con Duval este cuidado con la medición es necesario, pues “cuándo la hipótesis incluye números como medidas de lados o segmentos, la aprehensión operativa es neutralizada y la figura cumple solo una función ilustrativa o de apoyo. Incluso podemos tener un conflicto entre la figura y las medidas que lleve a una paradoja" (Duval, 1999, pág. 21)

Así pues, una veta que se puede seguir explotando es el estudio de condiciones y diseño de actividades que permitan utilizar la medida como medio heurístico.

Las posibilidades son muchas, pero requieren que el profesor esté dispuesto a afrontar las situaciones que implica utilizar la herramienta computacional (tanto en ventajas como desventajas).

Finalmente, es necesario señalar que no se ha aplicado una prueba piloto que nos ofrezca resultados acerca de la propuesta, sin embargo, ha sido sustentada en diferentes investigaciones que particularmente tienen resultados positivos en el uso del pensamiento reflexivo, SGD y uso de modelos dinámicos para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana.

PERSPECTIVA DE FUTURO

Los posibles temas que se pueden tratar en trabajos donde se estudie el aprendizaje o la percepción de la Geometría dentro de un ambiente de Geometría Dinámica, son muchos por la gran diversidad de posibilidades. En lo particular se puede decir que este trabajo deja abiertas las puertas para profundizar en aspectos que no se pudieron tomar en cuenta (por la amplia temática). Entre los que se encuentran:

- La recta de Euler.
- Estudio de polígono mediales.
- La circunferencia.
- Lugares geométricos, etc.

BIBLIOGRAFÍA

Abrate, R., Delgado, G., y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoaméricana de Educación*, 39 (1), 1-9.

Astorga, A. y Aliendro, E. (2005). *La enseñanza de la geometría en la escuela primaria René Berthelot y Marie Hélene Salim.* Laboratorio de Didáctica de la Ciencia y Técnica de la Universidad Borseaux I de Aquitania.

Avilés F., A. (2014). *El pensamiento reflexivo como marco para el aprendizaje de la Geometría Euclidiana en un sistema por competencias.* Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro.

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2005). *Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría*. Números, 62. 33 - 44 – 1.

Boyer, C. (1968). Libro de Historia de la Matemática. Brooklyn, New York.

Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, Journal for Research in Mathematics Education vol. 17 n° 1, pp.31-48.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001) Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático. México: Pearson Educación.

Castelnuovo, E. (1973). Geometría Intuitiva. Ed. Labor, Barcelona.

Crowley, M.L. (1987): The Van Hiele Model of the development of geometric thought, en *N.C.T.M. (1987): Learning and teaching geometry, K-12* (1987 Yearbook). (N.C.T.M.: Reston, EE.UU.), pp. 1-16

De Villiers, M. (1996), Future of Secondary School Geometry, SOSI Geometry Imperfect Conference, 2-4 November, Pretoria.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view, in Mammana, C. and Villani, V. (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study* (pp. 37-51), Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

Duval, R. (1999). Representation, visión and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt Espinosa y L. M. Santos Trigo (Edits.), *Proceedings of the 31st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, págs. 3-26). Cuernavaca, Morelos, México: Cinvestav y Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Flores, J. (2008). *Enseñanza de la geometría espacial utilizando Cabri 3D*. Documento manuscrito presentado en el V Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Gamboa, R. (2007). Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Año 2, N° 3. Pp. 11-44.

Gamboa, R., y Ballesteros, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista electrónica EDUCARE*, 14 (2), 125-142.

Goldenberg, E. P. y Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), Designing learning environments for developing understanding of geometry and space (pp. 351–367). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Guerra Rodríguez, M. (2010). La geometría y su didáctica. *Innovación y Experiencias educativas*, 3-6.

Guillen, G. (2004). El modelo de van Hiele aplicado a la Geometría de los sólidos. *Educación Matemática, 16*(3), 103-125.

Harris, G. (2000). The Use of a Computer Algebra System in Capstone Mathematics Courses for Undergraduate Mathematics Majors. Internacional Journal for Technology in Mathematics Education, 1 Vol, 7.

Hernández R, Fernández C., Baptista M. (2014). Metodología de la Investigación. México: Mc-Graw Hill.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Matemáticos en Ambientes con Tecnologías. Boletín de la asociación Matemática Venezolana, Vol. X, N° 2.

Hohenwarter, M. (2001). *Geogebra - Dynamic Mathematics for Everyone*.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. PhD tesis.

Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Kerlegand, C. (2008) *Desarrollo de dos propiedades de la circunferencia usando el modelo de Van Hiele y la visualización*. México: CICATA-IPN.

Laborde, C. (1994). Enseigner la géometrie, *Bulletin de l′A.P.M.E.P*.,396,523-548.

Laborde, C. y Capponi, B. (1994). Cabri–Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (1–2), 165210.

Lagrange, J.B, Artigue, M., Laborde, C. y Trouche. L. (2001). A meta study on IC Technology in education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration. *Proceedings of the 25 PME Conference.* Freudenthal Institute, Utrecht.

Larios, V. (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica*. PhD tesis.

Levy, P. (1997). *Cyberculture. Rapport au Conseil de l′Europe*. Éditions Odile Jacob. [Trad. it.: *Cyberculture. Gli usi social delle nuove tecnologie*. Milano: Feltrienelli. 2001]. p. 161-162.

Mora, D. (2003). La demostración como aspecto fundamental para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Mimeografiado. La Paz: Instituto Normal Superior Simón Bolívar.

Pachano Rivera, Lizabeth, y Terán de Serrentino, Mirian. (2008). Estrategias para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación básica: una experiencia constructivista. *Paradígma*, *29*(1), 133-146.

Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, (2004). Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Primera Edición.

Reyes Hernández, A. (1999). Propuesta didáctica, Juegos didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el Nivel Medio Superior. PhD tesis.

Rodríguez, G. y Gil, J. (1996). “Metodología de la Investigación Cualitativa”. Málaga, España: Aljibe.

Serres, Y. (2002). La demostración en educación matemática. Mimeografiado. Caracas: Universidad Central de Venezuela.

ANEXOS

ANEXO I: ENCUESTA A TÉCNICOS DEL MINED

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

UNAN – MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDICIPLINARIA DE CHONTALES

Instrucciones. El objetivo de esta encuesta es obtener información sobre la situación actual del tratamiento de la geometría en la Educación media como parte de un trabajo de investigación de tesis de doctorado.

Años de experiencia como asesor pedagógico: _____________, Niveles de enseñanza en los que ha trabajado (tiempo en cada uno): _____________, Categoría docente y científica que posee: _____________, Años de experiencia en la impartición de alguna asignatura de Matemática: _______________

1. ¿Para qué se enseña geometría en primaria/secundaria?

   ________ Conocer una rama de la matemática

   ________ Desarrollar estrategias de pensamiento

   ________ Agudizar la visión del mundo que nos rodea

   ________ Descubrir posibilidades creativas

   ________ Aprender matemática experimentalmente

2. Considero que los contenidos impartidos en esta área son:

   ________ Más de los necesarios

   ________ Los necesarios

   ________ Los más necesarios

   ________ Menos de los necesarios

   ________ Los menos necesarios

3. El tiempo que se dedica a estos contenidos es:

________ Excesivo

________ Adecuado

________ Casi adecuado

________ Poco

________ Muy poco

4. ¿Cómo califica usted el nivel de preparación científico-pedagógico de los docentes para dar tratamiento a los contenidos geométricos?

________ Muy bajo

________ Bajo

________ Medio

________ Alto

________ Muy Alto

5. ¿Cómo califica usted el gusto que sienten los docentes para el trabajo con los contenidos geométricos?

________ Muy bajo

________ Bajo

________ Medio

________ Alto

________ Muy Alto

6. En su opinión ¿con qué frecuencia imparten los docentes las sesiones de clases de geometría?

________ Siempre ________ A veces ________ Nunca

7. ¿Con qué frecuencia usted como asesor pedagógico prepara a los docentes en esta área?

    ________ Siempre ________ A veces ________ Nunca

8. Marque con una × cuáles y con qué frecuencia usted considera que se realizan las siguientes actividades en las clases donde se trata el contenido geométrico.

Actividades	Las realiza		Frecuencia con que las realiza		
	Si	No	Siempre	A veces	Nunca
Reconocimiento de figuras					
Reconocimiento de propiedades					
Trazado y construcción					
Problemas de cálculo					
Demostración					

9. ¿Cuáles de los siguientes formas de trabajo usted considera que utilizan con más frecuencia los maestros en el tratamiento de los contenidos geométricos?

    ________ Exposición

    ________ Ejemplificación

    ________ Ilustración

    ________ Demostración

    ________ Conversación heurística (De búsqueda)

    ________ Preguntas y respuestas

    ________ Discusión

    ________ Trabajo independiente

    ________ De exposición

10. A continuación se presentan materiales y medios que se pueden utilizar para el trabajo con la geometría. Marque, por favor, los que usted considera que los maestros poseen y con qué frecuencia los utilizan.

Materiales	Lo poseen		Frecuencia con que lo utiliza		
	Si	No	Siempre	A veces	Nunca
Libro de texto					
Cuaderno de trabajo					
Hoja milimetrada					
Papel de calcar					
Reglas					
Escuadra					
Compás					
Transportador					
Otros ¿cuáles?					

11. Algunas sugerencias que realizo para perfeccionar la enseñanza - aprendizaje de la Geometría son:

____

____

____

____

____

ANEXO II: GUÍA DE ENTREVISTA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

UNAN – MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDICIPLINARIA DE CHONTALES

Estimado estudiante, con el propósito de obtener información sobre cómo se abordan los contenidos de geometría de sólidos en el bachillerato, los documentos oficiales con los cuales desarrollan sus clases, perspectivas para mejorar dicho proceso y además, el nivel de conocimiento de SGD y sus implicaciones en el aula de clases, solicito su amable participación en el tema.

Temas a tratar:

- Experiencias vividas en la enseñanza – aprendizaje de contenidos de sobre triángulos en geometría.
- Documentos oficiales que apoyan dicho proceso.
- Uso de SGD en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática.

Objetivo: Conocer las experiencias vividas en la enseñanza – aprendizaje de los contenidos de geometría sólidos, los documentos oficiales con los cuales desarrollan sus clases, perspectivas para mejorar dicho proceso y además, el nivel de conocimiento de SGD y sus implicaciones en el aula de clases.

Datos Generales

Técnica: Entrevista **Tipo**: Semiestructurada **Fecha**: _______________

Duración: 20 a 30 min. **Lugar**: _______________ **Contexto**: _______________

¿Quién lo va a entrevistar?: Investigador

Criterios de la muestra teórica: Estudiantes de la carrera de Física – Matemática que llevan el curso de Geometría I, algunos de los cuales son docentes de bachillerato.

Cuestionario que guiará el proceso de la entrevista:

1. ¿Cómo abordan los contenidos de la geometría de sólidos? Comente sus experiencias.

2. Cada semestre el MINED orienta una semana de capacitación, ¿reciben dentro de esta, aspectos relacionados al tratamiento didáctico metodológico de los contenidos matemáticos?

3. ¿Han recibido capacitaciones para desarrollar en el aula de clases los contenidos de geometría de sólidos? ¿Cómo se desarrolló y por cuánto tiempo?

4. ¿Consideran ustedes que en su formación recibe las herramientas necesarias para el buen desempeño en la enseñanza de los contenidos de geometría sólidos? ¿Qué hace falta?

5. ¿Qué medios didácticos utiliza en la enseñanza de los contenidos de geometría de sólidos?

6. ¿Cuál es la metodología que utiliza al enseñar los contenidos de geometría de sólidos?

7. Consideran importante la incorporación de las TIC en el aula, ¿por qué?

8. ¿Conocen el GeoGebra? Comente sus experiencias.

9. ¿Qué recomienda para mejorar el proceso de enseñanza - aprendizaje de los contenidos de los contenidos sobre triángulos?