UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA UNAN-MANAGUA

Facultad Multidisciplinaria de Chontales

ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA COGNITIVA DE LOS ESTUDIANTES EN LOS CASOS DE FACTORIZACIÓN A PARTIR DE LOS ERRORES Y OBSTÁCULO. UNIDAD DE ÁLGEBRA DEL PROGRAMA DE MATEMÁTICA GENERAL, UNAN-MANAGUA, 2016.

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN EDUCACIÓN E INTERVENSIÓN SOCIAL

Autora: Maribel del Carmen Avendaño

Dirigida por: Dra. Marta Roxana Mendieta

Managua, Nicaragua, agosto 2017.

- *Un error corregido puede ser más fecundo que un éxito inmediato (J. Piaget)*

- *El único hombre que no se equivoca es el que nunca hace nada (Johann Wolfgang Goethe)*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN-MANAGUA

AVAL

La Doctora Martha Roxana Mendieta, profesora titular del Departamento de Psicología de la Facultad de Humanidades y Ciencias Jurídicas, de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, UNAN-Managua, como directora de la tesis presentada para aspirar al grado de Doctora por la Master Maribel del Carmen Avendaño.

HACE CONSTAR

Que la tesis **"ESTUDIO DE LA ESTRUCTURA COGNITIVA DE LOS ESTUDIANTES EN LOS CASOS DE FACTORIZACIÓN A PARTIR DE LOS ERRORES Y OBSTÁCULO. UNIDAD DE ÁLGEBRA DEL PROGRAMA DE MATEMÁTICA GENERAL, UNAN-MANAGUA, 2016"**, realizada por la citada doctoranda, reúne las condiciones científicas y académicas necesarias para su presentación y defensa.

Managua, Nicaragua, 2017.

Fdo. Dra. Martha Roxana Mendieta

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a todas aquellas personas que hicieron posible que este trabajo llegara a feliz término. A mi tutora la Dra. Martha Roxana Mendieta, al Dr. Luis Manuel Casas García y Ricardo Luengo, por brindarme las orientaciones oportunas y efectivas para el desarrollo de esta investigación.

A los profesores María José López, Damaris Berrios, Carlos Mendoza y Marlon Espinoza, los estudiantes del grupo MG5-01 del 2016; que me permitieron recopilar la información. A los Directores de los Departamentos de Matemática de la UNAN-Managua, la Dra. Gloria Parrilla, Sergio Martínez y Hellen Parrales, y a los coordinadores de asignatura Tony Romero y Aracely Barreda, quienes participaron en entrevista para la definición de los instrumentos.

A mis hijos Luis y Kirs, a mi madre y a mi esposo, por su comprensión y cariño.

RESUMEN

Estudio de la estructura cognitiva de los estudiantes en los casos de factorización a partir de los errores y obstáculo. Unidad de Álgebra del programa de asignatura Matemática General.

por

Maribel del Carmen Avendaño

En esta investigación se analiza la estructura cognitiva de los estudiantes en los casos de factorización y sus prerrequisitos a partir de los errores y obstáculos. El propósito de este análisis es profundizar a través de las estructuras cognitivas las causas de los errores y obstáculos que enfrentan los estudiantes en el proceso de aprendizaje de estas herramientas algebraicas.

Desde una perspectiva cualitativa la información se recogió a través de: Análisis Documental, a los documentos curriculares; Entrevista a Profundidad con los Directores de Departamento de Matemática y coordinadores de la asignatura de Matemática General, para conocer: las estrategias que los docentes aplican en la enseñanza de los casos de factorización. Además, para seleccionar los conceptos nucleares y conocer desde su experiencia, los errores y obstáculos que se presentan durante el aprendizaje de estas identidades algebraicas y construir el cuestionario que se aplicó a los estudiantes.

El cuestionario se utilizó para identificar los errores y obstáculos mediante la resolución de ejercicios relacionados a los casos de factorización y sus prerrequisitos. Además, se aprovechó este instrumento para aplicar la técnica de Asociación de Palabras para hacer explícitas la estructura cognitiva de los estudiantes sobre los conceptos prerrequisitos y los casos de factorización en su representación algebraica y geométrica. También se aplicaron las Redes Asociativa de Pathfinder, por su comprobada eficacia para conocer la representación gráfica de la estructura cognitiva de los estudiantes.

Los resultados del estudio revelan cuáles son los conceptos nucleares que tienen más jerarquía para los alumnos. Además, se comprobó que estos conceptos no son precisamente los que más dominan los estudiantes, ni los que siguen la lógica de la disciplina. Asimismo, se determinaron los errores y obstáculos que se presentan en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización que al contrastarlos con las estructuras cognitivas, se vislumbra una ruta metodológica para la enseñanza del Álgebra Elemental.

Palabras claves: Estructura cognitiva, conceptos nucleares, errores y obstáculos.

Contenido

INDICE DE TABLA

INDICE DE FIGURAS

Capítulo 1

Contexto y Ámbito de la Investigación

Capítulo 1

1. CONTEXTO Y ÁMBITO DE LA INVESTIGACIÓN

En este primer apartado se aborda la introducción, la justificación, el problema y delimitación del objeto de estudio, las preguntas de investigación, los objetivos, la matriz de descriptores y el sistema categorial de la investigación.

1.1. Introducción

En la práctica diaria se ha detectado que durante el proceso de aprendizaje, los estudiantes con mucha frecuencia comenten determinados errores: al relacionar conceptos, al explicar una situación determinada, al resolver un ejercicio, al realizar una demostración, al formular un teorema, al resolver un problema, etc. Estos errores son atendidos por los docentes, escribiendo la respuesta correcta, o señalando dónde se equivocaron -con un círculo-, y lo más común, marcar con una X el error.

Estas dificultades, obstáculos, faltas, fallas, despistes o equivocaciones; sinonimias con las que se suele justificar el error, no permiten que la estructura cognitiva de los estudiantes tenga movilidad para dar lugar a la reconstrucción de los conocimientos y al desarrollo cognitivo de los mismos.

Si miráramos el error como la pauta para orientar el proceso de enseñanza, partiendo de los errores que cometen los estudiantes en el tema objeto de estudio y trabajando los obstáculos que tienen que enfrentar para superar el error, esto nos permitiría alcanzar los aprendizajes deseados.

En esta investigación se estudiaron básicamente dos aspectos, el primero conocer los errores y obstáculos que se presentan durante el aprendizaje de los casos de factorización y el segundo, el estudio de estos errores y obstáculos a través de las estructuras cognitivas apoyado de las técnicas Redes Asociativas de Pathfinder (representación gráfica) y Test de Asociación de Palabra (representación semántica). Los resultados son focos de reflexión para los docentes de Matemática, sobre la forma en la que abordan el error y de la necesidad de cambiar el tratamiento metodológico que le dan a la enseñanza de esta disciplina. .

El trabajo se estructuró en 9 capítulos: Contexto y ámbito de la investigación, fundamentación teórica, diseño metodológico, resultado y análisis de los resultados, conclusiones, recomendaciones, bibliografía y anexos.

1.2. Justificación de la Investigación

En el proceso de construcción de los aprendizajes matemáticos con frecuencia aparecen errores, que por su persistencia y masividad son objeto de preocupación por parte de los docentes, puesto que, obstaculizan el desarrollo del conocimiento matemático. Pese a que muchos de estos son advertidos por los profesores en el momento de las explicaciones, no es suficiente para que los alumnos tomen conciencia y los auto-superen. Esta situación se agudiza cuando los errores están asociados a contenidos neurálgicos de la asignatura y como consecuencia tenemos el efecto dominó en el aprendizaje de los contenidos curriculares subsiguientes.

Si tenemos en cuenta los objetivos estratégicos de la UNAN-Managua, de pertinencia y calidad, cito:

> Brindar una formación académica integral a técnicos y profesionales, dirigentes institucionales, docentes y administrativos, en los diferentes niveles que corresponde, de acuerdo con el contexto del país, la transformación curricular y su perfeccionamiento permanente, para dar respuestas de calidad a los desafíos nacionales con una visión multidisciplinaria de toda problemática. (Modelo Educativo, Normativa y Metodología para la planificación curricular MENM, 2011, p.20)

Ningún proceso de enseñanza se puede llamar de calidad, si los estudiantes muestran serias deficiencias en el aprendizaje. La Dirección Académica de la UNAN-Managua, en el año 2011, realizó una investigación para valorar el impacto de las Conferencias Magistrales en las asignaturas de Formación General, entre ellas la asignatura Matemática General.

La unidad del programa de asignatura donde los estudiantes presentaron mayor dificultad, fue la unidad de Álgebra, específicamente, los casos de factorización. Estos casos son una herramienta algebraica para la resolución de ejercicios y problemas, no solo del Álgebra misma –intradisciplinaria–, como encontrar las raíces de una ecuación, interceptos, etc., sino también, tienen aplicación interdisciplinaria como la geometría, trigonometría, de estadísticas; y transdisciplinaria en fórmulas de Física, de Química, etc.

Tradicionalmente, la enseñanza del Álgebra se reduce a copiar en la pizarra las fórmulas para que los estudiantes mecánicamente las repitan en forma de letanías y posteriormente, resuelvan una determinada cantidad de ejercicios. El aprendizaje, es memorístico, repetitivo y sin ningún significado. Producto de esto, los alumnos fracasan en el aprendizaje, puesto que, no logran comprender las fórmulas algebraicas, confunden un caso de factorización con otro, aplican incorrectamente las propiedades de los números reales, no reducen correctamente los términos semejantes, entre otros. Esto los conduce a cometer errores a la hora de resolver ejercicios o problemas de este tipo.

Rico, citado por García, Segovia & Lupiáñez (2012), señala que los estudios relacionados a los errores en el proceso de aprendizaje, es una de las principales preocupaciones actuales en la educación Matemática, pero que las investigaciones en torno a este tema son pocas. Por su parte Ruano, Soca & Palarea (2008), con la afirmación de que los organizadores de los errores son los obstáculos –de diferente naturaleza– que afrontan los estudiantes durante el aprendizaje de los objetos matemáticos, nos brindan un camino en la búsqueda de las causas de estos errores.

A lo anterior se le suman los recientes descubrimientos del campo de la Neurociencia, principalmente los experimentos cognitivo conductuales que están arrojando información sobre cómo comprendemos y ejecutamos mentalmente tareas Matemáticas. Estos resultados, junto con el conocimiento de la estructura cognitiva de los estudiantes sobre los contenidos objeto de aprendizaje, tendremos un buen binomio que nos podrían dar pautas de por qué los estudiantes yerran al resolver ejercicios y problemas algebraicos y así, potenciar estos obstáculos y convertirlos en organizadores didácticos en el proceso de enseñanza de los contenidos algebraicos.

También, el hecho de que en el país no hay estudio en esta línea de investigación y como profesional de la educación Matemática, estos planteamientos provocan curiosidad y motivación de indagar sobre la estructura cognitiva de los estudiantes, referida a los casos de factorización a partir de los errores que cometen los aprendientes al resolver ejercicios y problemas que involucran a estas herramientas algebraicas, son causa suficientes para desarrollar esta investigación.

1.3. Delimitación del Objeto de Estudio

En la actualidad se han realizado muchos estudios que de una manera u otra intentan dar respuesta a los bajos índices de aprendizaje de la Matemática, en todos los niveles de educación. Esta situación no es de hoy, ni solo se presenta en Nicaragua, sino que se produce a nivel mundial, desde que la Matemática forma parte del currículo. Como consecuencia de esto, la mayoría de los docentes de Matemática se amparan en esta tradición, para hacer caso omiso a la problemática.

Los profesores manifiestan que la mejor evidencia del aprendizaje de la Matemática por parte de los alumnos es cuando resuelven ejercicios y problemas, a través de razonamientos lógicos, aplicando las definiciones, teoremas, propiedades, leyes, algoritmos, etc., sin cometer errores. En este sentido, el error es visto como el criterio calificador del éxito o fracaso en el aprendizaje y no como punto de partida para aprender (Sanmartí, 2012) y para reorientar el proceso de enseñanza.

Mason (1996), señala que muchos de los errores que comenten los estudiantes son producidos por el docente; estos se encuentran en la categoría de los obstáculos didácticos, que son el origen de algunos obstáculos cognitivos (Trujillo, Guerrero & Castro, 2006, p. 29). Por su parte Bachelard (2000) y Brousseau (1983), mencionan que existen otro tipo de obstáculos que son también, causas del error, como son los obstáculos epistemológicos.

La mayoría de las investigaciones relacionadas con los errores que cometen los estudiantes durante el proceso de aprendizaje de la Matemática, se enfocan en la causa inmediata, identificando concretamente, qué definición, qué teorema, propiedad, algoritmo, etc., no aplican bien los estudiantes, pero no se profundiza en las meta causas, que se presume están ligadas a la forma en que el estudiante tiene organizado el conocimiento en su estructura cognitiva.

Por lo expuesto anteriormente, el objeto de estudio, de esta investigación es "Análisis de la estructura cognitiva de los estudiantes en los casos de factorización a partir de los errores y obstáculos".

1.4. Cuestiones de la Investigación

Los contenidos de la unidad de Álgebra, se estudian desde el séptimo al décimo primer grado en la educación secundaria nicaragüense. No obstante, en el examen de ingreso a la UNAN-Managua, los alumnos comenten errores, al resolver ejercicios y problemas relacionados con estas herramientas algebraicas. Los docentes universitarios señalan que la causa de estos errores es porque los estudiantes traen una formación deficiente del nivel medio. Este señalamiento es un ruido de fondo, debemos de empezar por conocer por un lado los errores y el origen de estos, puesto que ellos "no se producen de forma accidental" (Rico, 1995, p. 80). Por otro, cómo esto se encuentran semánticamente en la estructura cognitiva de los estudiantes. Basados en esta afirmación se plantea la primera pregunta de investigación:

¿Cuáles son los errores y los obstáculos que se presentan al estudiar los casos de factorización en la asignatura de Matemática General?

El identificar los errores y obstáculos, no es suficiente si realmente se quiere resolver el problema, es necesario tipificar el error y sus obstáculos, para profundizar y tratar científica y metodológicamente el origen de estos. La reflexión presentada, conlleva a la segunda pregunta de investigación:

¿Qué tipo de errores y obstáculos enfrentan los estudiantes en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización en la asignatura de Matemática General?

Los seres humanos respondemos a las distintas situaciones que se nos presentan en la vida diaria según las estructuras cognitivas referida al área del conocimiento que está relacionada con tal situación. Por esta razón, ante un nuevo aprendizaje es importante conocer si los estudiantes dominan los prerrequisitos, ya que de lo contrario, estos se convierten en obstáculos para el nuevo aprendizaje. Motivados por este planteamiento, se formula la tercera pregunta de investigación:

¿Cuál es la representación gráfica de la estructura cognitiva de los estudiantes relacionada con los casos de factorización y sus prerrequisitos?

Conocer cómo los estudiantes tienen anclados en sus estructuras cognitivas, el tema objeto de estudio y los conceptos relevantes y confrontar con los errores y obstáculos, tendríamos un mejor panorama de las causas de fondo sobre el aprendizaje del tema objeto de estudio. Esta reflexión, nos incita a formular la cuarta pregunta de investigación

¿Cómo se relacionan los errores y obstáculos en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización con la representación gráfica de estructura cognitiva de los estudiantes entorno a estos casos?

1.5. Objetivos de la Investigación

En la formulación de los objetivos de investigación se ha tomado en cuenta, además de las preguntas anteriores, una de las líneas de investigación actual que describe Rico citado por García et al. (2012) en torno a los errores: estudios sobre análisis, causas, elementos y taxonomías de clasificación de los errores.

1.5.1. Objetivo General

Analizar la estructura cognitiva de los estudiantes en los casos de factorización a partir de los errores y obstáculos que se presentan en el proceso de aprendizaje de la unidad de Álgebra del programa de Matemática General.

1.5.2. Objetivos Específicos

1.5.2.1. Identificar los errores que cometen los estudiantes en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización.

1.5.2.2. Determinar los obstáculos que enfrenan los estudiantes en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización.

1.5.2.3. Clasificar los errores identificados en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización.

1.5.2.4. Clasificar los obstáculos detectados en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización.

1.5.2.5. Determinar la representación gráfica de la Estructura Cognitiva de los estudiantes en los casos de factorización y sus prerrequisitos.

1.5.2.6. Contrastar los errores y obstáculos en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización con la representación gráfica de la estructura cognitiva de los estudiantes.

1.6. Matriz de Descriptores

Las matrices de descriptores o matrices metodológicas, son aplicables a investigaciones cualitativas. Estas permiten diseñar de forma general el proceso de investigación. Además, reflejan la congruencia vertical y horizontal entre los elementos más importantes de la investigación, lo que garantiza la correlación entre estos elementos. Así, los aportes científicos del estudio serán valiosos, pertinentes y viables (García & Arce, 2012).

La Matriz de Descriptores que se ha construido para el presente estudio, está estructurada en tres dimensiones estrechamente relacionadas con los objetivos de investigación. Los campos de entrada son los siguientes:

- **Objetivos específicos**: Propósito del estudio. En estos se encuentran claramente reflejadas las variables de investigación.
- **Preguntas directrices**: Están derivadas de los objetivos, orientan sobre qué se va a indagar.
- **Categoría**: Objeto a investigar, variables del estudio.
- **Definición:** Conceptualización teórica del objeto a investigar.
- **Fuente de Información**: Personas, instancias, documentos, etc., de donde se obtendrá la información.
- **Técnica de Recogida de Datos**: Forma en la que se va a obtener la información
- **Indicadores:** Guía para identificar la categoría en estudio, en los instrumentos.
- **Ítem**: Pregunta del instrumento dónde se ausculta la categoría.
- **Estadístico**: Parámetro cuantitativo para conocer la frecuencia de las categorías y subcategorías en estudio y determinar significancia del resultado.

Tabla 1**: *Dimensión 1***: *Errores durante el aprendizaje de los casos de factorización en la Unidad de Álgebra del programa de Matemática General(Cualitativa)*

Objetivos	Preguntas Directrices	Categoría	Definición	Fuentes de Información	Técnica de recogida de datos	Indicadores	Items	Estadístico
Identificar los errores y obstáculos en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización en la unidad de Álgebra del programa de Matemática General, UNAN-Managua, 2016.	**¿Cuáles son los errores que se cometen durante el aprendizaje de los casos de factorización en la unidad de Álgebra en el programa de Matemática General?**	Error	Práctica (acción, argumentació9 n, etc) que realiza el alumno, que no es válida, desde el punto de vista de la institución Matemática escolar (Godino, Batanero & Font, 2003)	Profesores coordinadores de la asignatura Matemática General de la UNAN-Managua Y Estudiantes de primer ingreso	Entrevista a profundidad Cuestionarios con preguntas abiertas: Cuestionario	Definiciones empleadas de forma incorrectas, algoritmos utilizados inadecuadamente, incoherencia en las expresiones y el lenguaje algebraico inapropiado.	Entrevista: Item de la segunda y tercera sesión. Todo el Cuestionario para estudiante	Conceptos matemáticos en donde los estudiantes comenten errores con **Frecuencia**.
Clasificar los errores y obstáculos en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización en la unidad de Álgebra del programa de Matemática General, UNAN-Managua, 2016	**¿Cuáles son los tipos de errores que se presentan en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización en la unidad de Álgebra en el programa de Matemática General?**	Tipos de errores	**Error Semántico**: Se manifiesta cuando se interpreta erróneamente conceptos, definiciones, teoremas y principio, etc., matemáticos. **Error Sintáctico:** Utilizar de forma incorrecta los símbolos matemáticos. **Error Algorítmico**: Si al escribir o al seguir un proceso no se aplica la rigurosidad y formalidad Matemática del procedimiento requerido. **Error de Lenguaje Algebraico**: Si al escribir o leer expresiones algebraicas no se utiliza la simbología correcta. O bien al pasar de lenguaje común al lenguaje algebraico o viceversa no se utiliza la simbología algebraica correspondiente **Errores de Cálculo**: Si al efectuar operaciones el cálculo no es correcto.	Estudiantes del primer ingreso de la UNAN-Managua. .	Cuestionarios con preguntas abiertas: Cuestionario	Errores de orden: Semántico Sintáctico Algorítmico De lenguaje algebraico	Todo el Cuestionario	**Frecuencia** con la que se dan cada tipo de error. **Porcentaje** que representan cada tipo de error.

Tabla 2. ***Dimensión 2:*** *Obstáculos durante el aprendizaje de la Unidad de Álgebra del programa de Matemática General (Cualitativa)*

Objetivos	Preguntas Directrices	Categoría	Definición	Fuentes de Obtención de la Información	Técnica de recogida de datos	Indicadores	Items	Estadístico
Identificar los obstáculos, en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización en la unidad de Álgebra del programa de Matemática General, UNAN-Managua, 2016.	**¿Cuáles son los obstáculos que se presentan en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización en la unidad de Álgebra en el programa de Matemática General?**	Obstáculos	Un obstáculo se distingue por ser un conocimiento, que tiene dominio de validez, es resistente y reaparece, es muestra de la existencia de un saber y se manifiesta a través de los errores que no son producto del azar (Barrantes, 2006).	Profesores coordinadores de la asignatura Matemática General de la UNAN-Managua Y Estudiantes de primer ingreso Documentos curriculares	Entrevista a profundidad Cuestionarios con preguntas abiertas: Cuestionario Análisis documental	Conocimientos trasladados a otros contexto y que no funcionan: Definiciones, teoremas, propiedades, algoritmos.	Entrevista: Item de la segunda y tercera sesión. Todo el Cuestionario para estudiante Toda la fichas de análisis documental	**Porcentajes de frecuencia** con la que se presentan algunos conceptos matemáticos que son obstáculos para el aprendizaje de la unidad de Álgebra.
Clasificar los obstáculos en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización en la unidad de Álgebra del programa de Matemática General, UNAN-Managua, 2016.	**¿Cuáles son los tipos de Obstáculos se presentan en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización en** la **unidad de Álgebra en el programa de Matemática General?**	Tipos Obstáculos	**Obstáculos cognitivos**: Son producto de la experiencia previa de los estudiantes y del procesamiento interno de estas experiencias. **Obstáculos epistemológicos:** Son las limitaciones o impedimentos que afectan la capacidad de los individuos para construir el conocimiento real o empírico y lo tilda como la causa del estancamiento científico. **Obstáculos didácticos:** Son generados de una elección didáctica inadecuada dentro de un proyecto o sistema educativo.	Estudiantes del primer ingreso de la UNAN-Managua. Documentos curriculares	Cuestionarios con preguntas abiertas: Cuestionario Análisis documental	Obstáculos cognitivos: Error sistemático Error resistente Error no idiosincrásico Obstáculos epistemológicos: Definiciones, teoremas, propiedades, algoritmos Trasladados a otros contextos y que no funcionan. Obstáculos didácticos: Estrategias, contenidos desarrollados, recursos utilizados.	Todo el Cuestionario Toda la fichas de análisis documental	**Porcentajes de frecuencia** con la que se dan cada tipo de obstáculos **Porcentaje** que representan cada tipo de obstáculos.

Tabla 3. ***Dimensión 3****: Representación Gráfica de la Estructura Cognitiva de los estudiantes de primer ingreso en los casos de factorización de la Unidad de Álgebra del programa de Matemática General, UNAN-Managua (Cualitativa)*

Objetivos	Preguntas Directrices	Categoría	Definición	Fuentes de Obtención de la Información	Técnica de recogida de datos		Items	Estadístico
Determinar la representación gráfica de la Estructura Cognitiva de los estudiantes en los casos de factorización y sus prerrequisitos.	**¿Cuál es la representación gráfica de la Estructura Cognitiva de los estudiantes en los casos de factorización y sus prerrequisitos, unidad de Álgebra en el programa de Matemática General?**	Estructura Cognitiva	"Es el constructo hipotético que se refiere a la organización de las relaciones entre conceptos en la memoria semántica o a largo plazo". Shavelson, citado por Casas (2002)	Profesores coordinadores de la asignatura Matemática General Estudiantes de primer ingreso de la UNAN-Managua.	Entrevista con docentes Redes Asociativas de Pathfinder	Conceptos Nucleares Índice de complejidad, coherencia y similaridad	Segundo Item de la primera sesión y primer ítems de la tercera sesión Toda la red	**Porcentajes de frecuencia máximos y mínimos**

Dimensión 3(continuación): Representación gráfica *Estructura Cognitiva de los estudiantes de primer ingreso en los casos de factorización de la Unidad de Álgebra del programa de Matemática General, UNAN-Managua (Cualitativa)*

Objetivos	Preguntas Directrices	Categoría	Definición	Fuentes de Obtención de la Información	Técnica de recogida de datos	Indicadores	Items	Estadístico
Contrastar los errores y obstáculos en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización con la representación gráfica de la estructura cognitiva de los estudiantes.	**¿Cómo se relacionan los errores y obstáculos en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización con la estructura cognitiva de los estudiantes entorno a estos casos?**	Relación estructura con los errores y obstáculos en el aprendizaje de los casos de factorización.	"Incidencia de la estructura cognitiva, los errores y obstáculos en el aprendizaje de los casos de factorización".	Estudiantes de primer ingreso de la UNAN-Managua.	Cuestionario Redes Asociativas de Pathfinder	Errores Obstáculos en los conceptos nucleares Índice de complejidad, coherencia y similaridad	Todos los ítems del cuestionario Toda la red	Porcentajes de frecuencia máximos y mínimos

1.7. Sistema Categorial

El sistema categorial en las investigaciones cualitativas es un instrumento básico. Considerando que las investigaciones no son estándar, se requiere del diseño de una estructura que sustente todo lo que se valore importante para el estudio. Este sistema debe cumplir dos condiciones; exhaustividad y mutua exclusividad.

La primera, significa que cualquier comportamiento del ámbito considerado como objeto de estudio , puede asignarse a una de las categorías; en consecuencia, dicho sector de comportamiento se podría descomponer, a nivel conceptual, en el conjunto de los núcleos categoriales.

La segunda, mutua exclusividad, se refiere al no solapamiento de las categorías que componen un sistema, por lo que a cada comportamiento se le asignaría una sola categoría (Anguera, 1995).

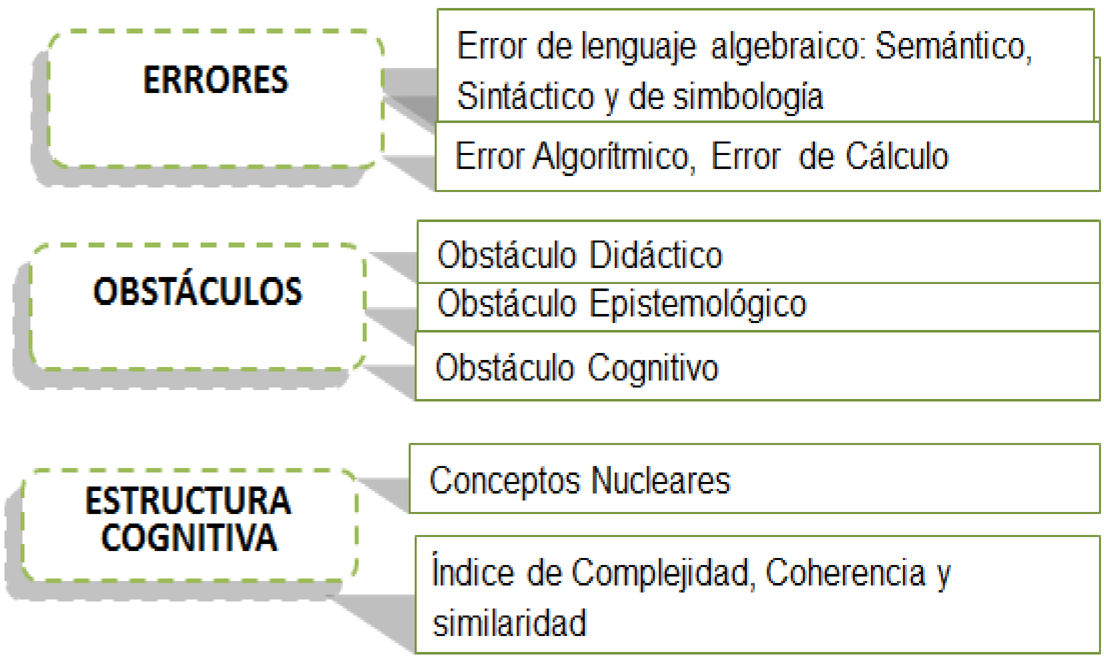


Figura 1. Categorías de la investigación. Elaboración propia

Tabla 4. *Sistema Categorial*

Dimensión	**Categoría**	**Sub categorías**
Errores durante el aprendizaje de la Unidad de Álgebra del programa de Matemática General	E. El Error	ESE. Error Semántico
		ESI. Error Sintáctico
		EAL. Error Algorítmico
		ESM. Error Simbólico
		ECA. Error de Cálculo
Obstáculos durante el aprendizaje de la Unidad de Álgebra del programa de Matemática General	O. El Obstáculo	OCG. Obstáculo Cognitivo
		OEP. Obstáculo Epistemológico
		ODI. Obstáculo Didáctico
Estructura Cognitiva de los estudiantes de primer ingreso en los casos de factorización de la Unidad de Álgebra del programa de Matemática General, UNAN-Managua (Cualitativa)	EC. Estructura Cognitiva	CN. Conceptos Nucleares
		ICOH: Índice de coherencia ICOM: Índice de complejidad ISIMI: Índice de similaridad

Capítulo 2

Fundamentación Teórica de la Investigación

Capítulo 2

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN

2.1. Marco Contextual de la Investigación

La UNAN-Managua, es la universidad más grande de Nicaragua, y cuenta con diez Facultades, siete de ellas en Managua, la capital, y cuatro en distintas regiones del país: Carazo, Matagalpa, Estelí y Chontales.

Esta institución en su proceso de transformación curricular en el año 2011, incorporó entre las asignaturas de formación general, la Matemática General. Esta se desarrolla en 60 horas presenciales, 120 de estudio independiente para un total de 180 horas equivalentes a 4 créditos académicos. Cada semestre se abre un promedio de 13 grupos con 150 a 200 estudiantes cada uno.

La investigación se realizó con los estudiantes que cursan la asignatura de Matemática General en el primer semestre de 2016 en el turno diurno en la UNAN-Managua. Estos alumnos en su mayoría son de escasos recursos, provienen de colegios públicos y sus edades oscilan entre 16 y 19 años.

La asignatura se desarrolla semanalmente en dos sesiones de clase, una Conferencia Magistral y otra en trabajo de sub grupos. A las conferencias asisten aproximadamente 200 estudiantes, que luego se dividen en cinco sub grupos de 40 alumnos −estos pertenecen a la misma carrera−, para poner en práctica lo estudiado en la conferencia.

La unidad del programa que contiene el objeto de estudio, lleva por nombre “Álgebra”, se desarrolla en 16 horas presenciales y pretende que los estudiantes alcancen los siguientes objetivos:

- Aplicar los conceptos, leyes y axiomas del Álgebra en la resolución de operaciones con polinomios.
- Resolver problemas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas lineales y desigualdades.

A través de los siguientes contenidos:

Reseña histórica del Algebra y su importancia, Definición de Álgebra; Lenguaje común y algebraico. Expresiones algebraicas. Leyes de los exponentes. Operaciones con polinomios. Productos notables. Factorización. Concepto y propiedades. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Métodos para resolver sistemas de ecuaciones y desigualdades.

2.2. Estado del Arte de la Investigación

En este apartado se presentan seis estudios que tratan de manera científica y metodológica el error en el aprendizaje de la Matemática, específicamente en aquellos contenidos relacionados a los casos de factorización o bien a los prerrequisitos de éstos. Además, estudios de conceptos matemáticos relacionados con Neurociencia o estructuras cognitivas.

La descripción de los estudios se organizó de la siguiente manera, primero el tema, en segundo lugar el objetivo, luego las técnicas utilizadas y por último los resultados relevantes relacionados con el tema de esta investigación.

2.2.1. Estudios relacionados a errores algebraicos

Análisis y clasificación de errores cometidos por los alumnos de secundaria en el proceso de sustitución formal (Ruano, Socas & Palarea, 2008)

El objetivo de esta investigación fue el análisis y clasificación de errores cometidos por los alumnos de secundaria en el proceso de sustitución formal, generalización y modelización en Álgebra. El estudio se realizó con alumnos del bachillerato. Las técnicas utilizadas fueron el cuestionario y la entrevista clínica.

Entre los resultados se destacan:

- En cuanto a la sustitución formal. Los errores fueron sustituir el valor de una variable por otra, no se usar adecuadamente los paréntesis y errores de cálculo.
- Con relación a la Generalización. Los errores cometidos están ligados a que los alumnos no saben trabajar con letras, no conciben que una expresión no se pueda cerrar, y la particularizan con un valor numérico. Uso incorrecto de la propiedad distributiva.
- Entorno a la Modelización. Entre los errores resaltan: Los estudiantes utilizan la misma letra para todas las variables, particularizan el modelo, realizan cálculos sin encontrar el modelo o bien dejan el modelo incompleto.

En el estudio solo se identificaron como causas, las de origen ausencia de sentido y los obstáculos. No se presentan datos conclusivos acerca de las causas asociadas a la parte afectiva y emocional. No obstante, en el estudio se aprecian errores de tipo semántico, al no utilizar correctamente las variables y propiedades, sintáctico en el uso inadecuado de los signos de agrupación y de cálculo, esta última causa seguramente se produjo como consecuencia de las anteriores.

Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo (Abrate, 2006)

Esta investigación tuvo por objetivo, el análisis de las dificultades y errores de conceptos yprocesos matemáticos en las producciones escritas de los alumnos al ingresar a la universidad de Villa María, Argentina. La investigación consistió en conocer los errores más frecuentes que los profesores detectan durante la formación en el nivel medio y cuáles de estos persisten al ingresar a la universidad. Asimismo, las posibles causas y motivos que los hacen prevalecer.

Las técnicas utilizadas en el estudio fueron: la entrevista a docentes, un test de evaluación previa al ingresar a la carrera y para profundizar, entrevistas a estudiantes.

Entre los hallazgos más relevantes asociados al Álgebra se tienen:

A aplicación de propiedades de potenciación:

- Aplican la propiedad de producto de potencias de distinta base e igual potencia ($a^n\ b^n = (ab)^n$) a suma de potencias $\sqrt{\square^2 + \square^2} = \sqrt{\square^2} + \sqrt{\square^2}$. La investigadora clasifica este error como asociación de una propiedad definida para el producto aplicada a la suma.
- Aplicación de la propiedad del producto de potencias, a la potencia de una potencia: Afirman que $(a^n)^m = a^{n+m}$. Aquí se observa la asociación con dos propiedades. Estos alumnos están considerando que la expresión $(a^n)^m$ es igual a $a^n\, a^m$ y que por tanto esta expresión es igual a^{n+m} .
- La aplicación de la fórmula de diferencias de cuadrados a trinomio cuadrado perfecto: escriben $(x+3)^2 = (x+3)(x-3)$, señalan que la causa de este error es porque no dominan la semántica de las fórmulas.
- Los estudiantes aplican la ley de los signos al sumar o restar dos cantidades: –13+20= – 7 (– + = –) y –5 –8=13 (– . – = +).
- Al resolver el ejercicio $\left(\frac{3}{2}\square\right)^2$ responden que es igual a $\frac{9}{4} + 3\square + \square^2$, si observamos lo que han hecho es desarrollar un binomio al cuadrado. La causa de este error la tildan de recuperación. Considero que el error es de tipo semántico ya que no manejan la definición de término ven $\frac{3}{2}$ y la x como dos términos. Esto los conduce a aplicar erradamente, una fórmula válida para una expresión binomial (binomio al cuadrado) en donde intervienen las operaciones suma o resta.

Articulación de los subsistemas medio y superior para la enseñanza de la Matemática (Avendaño, Collado & Valverde, 2003)

El estudio consistió en determinar el nivel de articulación entre el sistema medio y superior para la enseñanza de la Matemática. La investigación tenía entre los objetivos, determinar los errores cometidos por los alumnos en el examen de admisión a la UNAN-Managua, en el área de Matemática. Las técnicas utilizadas fueron la entrevista a docentes, análisis documental del examen de ingreso y encuestas a estudiantes que realizaron dicho examen.

En la búsqueda de datos relacionados con errores producidos por la falta de dominio de los contenidos de Álgebra se detectó que:

- Al resolver ecuaciones exponenciales, como : $3^{□} = 1$; $□ = \frac{1}{3}$ para ellos x está multiplicando a 3, lo que significa que la expresión la ven como una ecuación lineal y la resuelven como tal. La causa podría ser o bien no se han apropiado del concepto de potenciación- error semántico-, o no dominan el procedimiento para resolver ecuaciones exponenciales –error algoritmo- y recurren al procedimiento más cercano que dominan, como es la resolución de ecuaciones lineales.

- Funciones Cuadráticas: Para determinar el vértice de este tipo de función se utilizan dos métodos. Los que utilizaron la fórmula general, no tuvieron éxito porque omiten el signo para encontrar la abscisa. Los que se fueron por factorización, no lograron completar el trinomio cuadrado perfecto. El primer error se califica como error sintáctico y el segundo semántico porque no se saben la regla.

- Ecuaciones Trigonométricas: No resuelven la ecuación $1 - □□□^{2} \propto = 0$, ya que no logran identificar que esta expresión es una diferencia de cuadrados. Este error es de orden semántico.

- Identidades trigonométricas. utilizan la fórmula $1 - □□□ \propto = □□□ \propto$ $□□□\, 1 - □□□^{2} \propto = □□□^{2} \propto$. En este caso, están aplicando a la operación diferencia, propiedades de potenciación para la operación multiplicación. Este error es de transferencia.

- No factorizan expresiones algebraicas y menos aún si para ello, tienen que realizar cambios de variable. En esta situación no se aprecia la causa, pero se puede conjeturar que es por falta de dominio de las identidades algebraicas.

En los resultados de estas investigaciones se visualizan errores muy frecuentes en contenidos relacionados al Álgebra:

- Casos de factorización. Se identificaron, errores y sus posibles causas en tres de los diez casos: factor común, diferencia de cuadrado y trinomio cuadrado perfecto.
- Ley de los signos.
- Propiedades de los números reales: En la propiedad distributiva y las propiedades de potenciación, potencia de una potencia y producto de potencias de igual base.
- Errores de asociación. Leyes, propiedades y algoritmos del producto, los aplican a las operaciones suma o resta, en las cuales no son válidos.

Los investigadores coinciden en algunos errores aunque las llamen de diferentes maneras, como “asociación incorrecta” o “incorrecta transferencia”, otro tipo de error lo llaman “falta de generalización” o “generalización no válida” y otros simplemente lo tildan como “obstáculo cognitivo”.

2.2.2. Estudios sobre Conceptos Matemáticos desde la Neurociencia y los Procesos Cognitivos

Los siguientes resultados de investigaciones están referidos a las regiones del cerebro que se activan y los procesos cognitivos involucrados al resolver tareas con objetos algebraicos.

El Cerebro Algebraico (Gluck, Anderson &, Kosslyn, 2004)

En el capítulo sexto del libro Memory and Mind, se describe un experimento cuyo fin fue identificar las áreas del cerebro que se activan al resolver ecuaciones lineales sencillas.

El experimento se realizó con 10 estudiantes en edades comprendidas entre once y catorce años y tuvo una duración de seis días, para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $1x + 0 = 8 = 4$

b) $3x + 0 = 12$

c) $1x + 8 = 12$

d) $7x + 1 = 29$.

Este experimento se desarrolló a través de la aplicación del Modelo ACT-R, este consiste en un modelo general de la cognición, que proporciona información sobre la estructura de la memoria, entendiéndola como un conjunto de chunks -unidades de información memorística- simbólicos relacionados, a los que se puede acceder mediante pistas de recuperación. El modelo de memoria empleado en el ACT-R es similar al de las redes semánticas, pero los procesos que describe se asemejan más a las características de un modelo asociativo.

El estudio se realizó en tres regiones cerebrales:

- La Corteza Prefrontal, generalmente se asocia al acceso de la información y las operaciones para determinar objetivos.

- La Corteza Parietal, los trabajos en Neurociencia han mostrado que esta corteza se activa en situaciones de imágenes espaciales.
- La Corteza Motora, porque los informantes responderían utilizando su dedo índice derecho.

Los resultados del estudio fueron los siguientes:

- Las partes del cerebro que se activan al resolver ecuaciones son la corteza prefrontal, parietal izquierda y motriz izquierda.
- Las partes activadas en el cerebro del joven se corresponden a las activadas en tareas similares efectuadas por adultos.
- La actividad en la región prefrontal tras cuatro días de práctica, había disminuido tanto en el adolescente como en el adulto.
- Los adolescentes a diferencia de los adultos, mostraron una disminución de la actividad cerebral parietal después de una práctica en la resolución de ecuaciones.

De lo anterior se infiere que los adolescentes acceden más fácilmente a nuevos niveles de abstracción que los adultos debido a que recurren menos a formarse imagen de la ecuación. Como consecuencia de esto, el equipo de investigadores señala que el cerebro de los adolescentes es apropiado para aprender el Álgebra.

De esta investigación podemos destacar dos elementos muy importantes para nuestro estudio; el primero es que el lóbulo prefrontal izquierdo, el lóbulo parietal inferior izquierdo, son el cerebro matemático, lo que no quiere decir que en tareas relacionadas a la Matemática solo se activan estas regiones cerebrales, lo que sí se puede afirmar es que éstas, son las especializadas. El segundo, es que los adolescentes tienen el potencial para el estudio del Álgebra.

Validación de la estructura cognitiva de signos mediante modelos de ecuaciones estructurales (Romero, Ponsoda & Ximénez, 2006)

EL objetivo de este trabajo fue validar los procesos cognitivos implicados en la resolución de ítems de un test sobre operaciones aritméticas básica entre números enteros aplicando el enfoque del Modelo de Ecuaciones Estructurales (SEM). El test consta de 66 ítems de forma a*b=c donde * es una de las cuatro operaciones básicas y a, b y c son números enteros de uno o dos dígitos. El test fue aplicado a 221 estudiantes, de séptimo grado y de décimo grado de tres colegios de Madrid.

A continuación se muestran las matrices del estudio. La primera está relacionada a los procesos cognitivos requeridos para cada ítem. La segunda refleja el estudio del modelo cognitivo.

Tabla 5. *Procesos Cognitivos asociados a cada grupo de ítem.*

Operación	Descripción del proceso
PC1 (Suma)	Suma entre dos números naturales
PC2 (Resta)	Resta entre dos números naturales, con *a* > b
PC3 (Producto)	Multiplicación entre dos números naturales
PC4 (Cociente)	División exacta entre dos números naturales
PC5 (Identificación de mayor y menor en valor absoluto)	Identificación del componente mayor en valor absoluto y planteamiento de la resta del menor al mayor
PC6 (Intercambio de componentes)	Intercambio de posición entre *a* y *b*
PC7 (Signo del resultado)	Determinación del signo positivo o negativo del resultado aplicando la correspondiente regla
PC8 (Conversión de resta en suma)	Cambio del signo de *b* y del operador de resta por suma

Tabla 6. *Matriz W, estructura cognitiva para los procesos requeridos para cada grupo de ítems*

Características		Matriz W								T
		PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	
G1	(a)+(b)	1	0	0	0	0	0	0	0	0.86
G2	(-a)+(-b)	1	0	0	0	0	0	1	0	0.95
G3	(-a)+(b), (a)+(-b) a>b	0	1	0	0	1	0	1	0	0.99
G4	(-a)+(b), (a)+(-b) a<b	0	1	0	0	1	1	1	0	0.96
G5	(a)-(b) a>b	0	1	0	0	0	0	0	0	0.99
G6	(-a)-(-b) a>b	0	1	0	0	1	0	1	1	0.99
G7	(-a)-(-b), (a)-(b) a<b	0	1	0	0	1	1	1	1	0.94
G8	(-a)-(b)	1	0	0	0	0	0	1	1	0.99
G9	(a)-(-b)	1	0	0	0	0	0	0	1	0.99
G10	(-a)x(b),(a)x(-b),(-a)x(-b)	0	0	1	0	0	0	1	0	0.95
G11	(-a)/(b), (a)/(-b), (-a)/(-b)	0	0	0	1	0	0	1	0	0.98

La siguiente gráfica representan los modelos de estructuras cognitivas del ***caso 1*** con los grupos:

Los resultados muestran una relación fuerte de subordinación en G9→G8, posiblemente a que ambos grupos requieren los mismos procesos excepto del proceso cognitivo ejecutado en la determinación del signo positivo o negativo del resultado correspondiente según la regla. Esta misma relación la observamos en G2→G8 y se califica positiva y significativa, indicando que para resolver los ítems del grupo G8 es importante la habilidad empleada en los ítems del grupo G2.

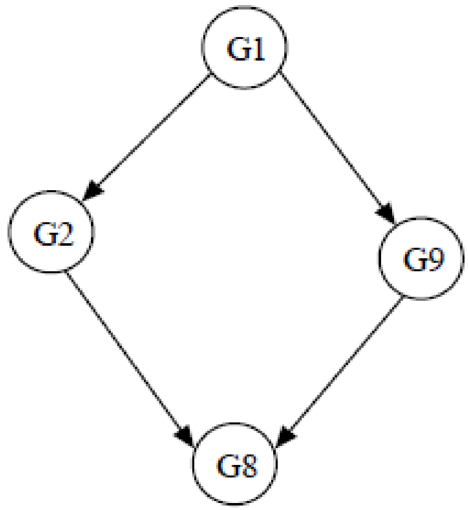


Figura 2. Modelos de estructuras cognitivas del caso1.

Los resultados observados en relaciones G1→G2 y G1→G9, no son significativos, puesto que los ítems del G1 han resultado ser muy fáciles y por tanto no se aprecia capacidad para predecir. En cambio, en G2 y G9 se observó una relación moderada que no se esperaba entre los residuos asociados al rendimiento de estos grupos, esto podría ser debido a que componentes distintos requerido en G1 (suma) estén afectando a ambos grupos por las características comunes de formato. En todos los resultados de los ítems de G2 y G9 son incorrectos.

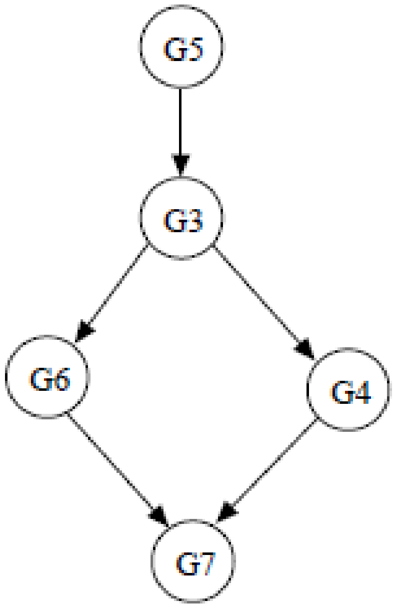


Figura 3. Modelos de estructuras cognitivas del caso 2.

En cuanto al ***caso 2***, era de esperarse que en las relaciones G6→G7, G3→G4 y G4→G7, se apreciara una relación lineal positiva y significativa porque los procesos requeridos por los ítems deG3 representan la mayor parte de los procesos requeridos por los de G4, G6 y G7.

La relación G5→G3 no resultó significativa, debido a que ambos comparten un proceso y difieren en dos.

También señalan que los grupos G3 yG6 difieren únicamente en el PC8 y existe entre ellos una relación significativa pero negativa. Estos resultados evidencian la importancia dela operación de conversión de la resta en suma en la resolución de este tipo de tarea y puede servir a los docentes para hacer énfasis en dicho proceso durante la enseñanza del tema.

Al realizar la triangulación lógica se observó que en los ítems que presentan mayor dificultad, ocurre cuando $a>b$, mientras que en los fáciles cuando $a<b$. Esto significa que el valor de a y b puede tener un papel en este grupo de ítems.

El estudio tiene doble importancia para la presente investigación. Por un lado se da pautas de las causas de los errores que cometen los estudiantes cuando utilizan la ley de los signos en las operaciones aritméticas. Por otro, la ruta de cómo explican los docentes la realización de las operaciones básicas, situación que podría ser el obstáculo didáctico principal del aprendizaje de las operaciones básica y la aplicación de la ley de los signos.

2.3. Marco Teórico

En la actualidad los resultados de investigaciones acerca del funcionamiento del cerebro, vislumbran formas innovadoras acerca de cómo se produce el aprendizaje. La Neurociencia está proporcionando evidencia que tanto un cerebro en maduración como uno ya maduro se modifican estructuralmente cuando ocurre un evento de aprendizaje (Bransford, Brown y Cocking citado por Mogollón, 2010).

Por su parte la Psicología Cognitiva, constituye una teoría que trata el análisis, la descripción, la comprensión y la explicación de cómo las personas adquieren, guardan, recuperan y utilizan el conocimiento a través de los proceso cognitivos (Rivas Navarro, 2008), aportando información valiosa entorno a cómo se produce el aprendizaje, a través de dos enfoques: El procesamiento de la información (funcionamiento del cerebro) y el racionalista-constructivista (estructuras cognitivas). El primero, trata de explicar, la forma en la que el ser humano procesa la información, adquiere el conocimiento y lo utiliza (Rivas Navarro, et al., 2008). El segundo, se enfoca en explicar cómo el aprendizaje se da través de la reestructuración de los conocimientos previos (Gómez Cumpa, 2004).

Considerando los objetivos de la investigación y lo antes expuesto, este capítulo aborda la base neuro-cognitiva, en la que se fundamenta esta investigación y por ende, el aprendizaje de la Matemática. Apoyado en las variables principales del estudio, el primer acápite de este apartado está relacionado con la Neurociencia, para explicar cómo produce el aprendizaje de los objetos matemáticos aplicando las teorías del funcionamiento del cerebro humano.

Dado que la estructura cognitiva es producto de los procesos cognitivos, el segundo, trata sobre los Procesos Cognitivos, para explicar desde el enfoque del procesamiento de la información, cómo las personas adquieren, guardan, recuperan y utilizan el conocimiento a través de estos procesos. (Rivas Navarro, et al., 2008).

En el tercer acápite, aborda qué es la Estructura Cognitiva, haciendo un recorrido desde los esquemas conceptuales, hasta llegar al desarrollo cognitivo, todos ellos enfocados en los objetos matemáticos. En primer lugar, porque las estructuras cognitivas tienen sus cimientos en los esquemas conceptuales y en segundo lugar, porque la movilidad se manifiesta a través del crecimiento intelectual, que no es más que la capacidad para comprender nuevos conceptos.

En el cuarto acápite, tomando en cuenta que el estudio está orientado a los errores y obstáculos en el aprendizaje de la Matemática desde la estructura cognitiva de los estudiantes, se presentan los fundamentos teóricos del error y los obstáculos, aspectos que dificultan el desarrollo cognitivo.

En el quinto acápite, se aborda el Lenguaje Algebraico y los Algoritmos, en este se describe las habilidades cognitivas relevantes tanto para el desarrollo del lenguaje algebraico como del pensamiento algebraico, y del carácter conceptual como del procedimental: La semántica, la simbología, la sintaxis y los algoritmos.

2.3.1. Neurociencia

Existen varios estudios que tratan de explicar la causa de los errores que cometen los estudiantes al resolver ejercicios y problemas de Matemática. La mayoría de estos se han limitado a señalar la falta de manejo de aquellos contenidos que impiden que los alumnos acierten con sus respuestas. No obstante, lo importante aquí es descifrar ¿por qué mis alumnos no aprenden? ¿Qué hago para favorecer en mis estudiantes nuevas conexiones neuronales para que haya aprendizaje?

La Neurociencia, nos enseña mucho de cómo aprende el ser humano. En la actualidad se conoce como la disciplina que se encarga del estudio interdisciplinario del cerebro humano (Gómez et al., 2004).También, se conoce como la ciencia que estudia el sistema nervioso, desde el funcionamiento neuronal hasta el comportamiento humano. Gracias a ella, hoy tenemos una mayor comprensión entre el funcionamiento del cerebro y la conducta. No obstante, existen muchos enigmas por resolver acerca de este órgano, principalmente, aquellos que están asociados al aprendizaje.

Según Pizano Chávez (2007), la Neurociencia tiene por objetivos:

- Estudiar el sistema nervioso.
- Integrar los resultados de la Neuroanatomía, Neurofisiología, Neuroquímica, Neuropsicología, Biología, Física, Química.
- Tratar la Neurociencia Cognitiva como un enfoque dentro del cognitivismo moderno.
- Estudiar el cerebro y la inteligencia como soportes para un verdadero equilibrio de desarrollo cognitivo.

El presente estudio tiene como base la teoría existente alrededor del último objetivo de la Neurociencia.

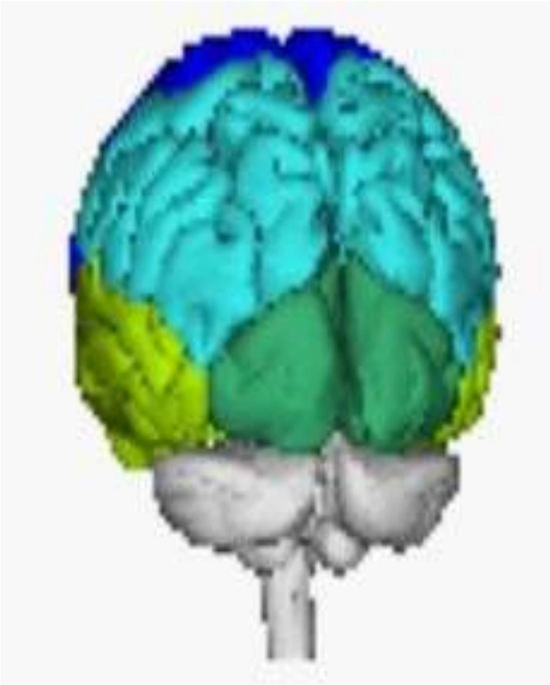


Figura 4. Hemisferios Cerebrales. Fuente http://www.personarte.com/hemisferios.htm

El hallazgo más importante que se ha realizado acerca del cerebro ha sido el descubrir que el funcionamiento de los hemisferios cerebrales, son muy diferentes. Por ejemplo, hablar, escribir, leer y razonar con números, es responsabilidad del hemisferio izquierdo. Habilidades como, percibir y orientarse en el espacio, realizar trabajos geométricos, elaborar mapas conceptuales e imaginar la rotación de formas o figuras; estas tareas son ejecutadas principalmente por el hemisferio derecho (Sperry, citado por Gómez, 2004).

Otro aspecto importante fue descubrir que el lado izquierdo del cuerpo está controlado principalmente por el hemisferio derecho y que el lado derecho del cuerpo está controlado por el hemisferio izquierdo. Además, se conoce que estos hemisferios se comunican a través de un haz de fibras nerviosas llamada cuerpo calloso.

Para realizar cualquier tarea utilizamos los dos hemisferios. Cada uno de ellos procesa la información recibida por los sentidos de distinta manera, lo que conduce a que cada hemisferio tenga diferente pensamiento el cual estará determinado según la predominancia del hemisferio en la persona.

Aparentemente se aprecia una superioridad del hemisferio izquierdo, sobre el derecho. Gazzaniga (1977), descubrió que este último es capaz de experienciar la mayoría de las actividades mentales que desarrollan el hemisferio izquierdo.

La siguiente tabla muestra los modos de pensamiento que se ejecuta en cada uno de los hemisferios:

Tabla 7. *Modos de Pensamientos según el hemisferio cerebral*

Hemisferio Izquierdo	Hemisferio Derecho
• Analítico	• Holístico-intuitivo
• Abstracto	• Concreto
• Secuencial	• Global
• Lineal	• Aleatorio
• Realista	• Fantástico
• Verbal	• No verbal
• Temporal	• Atemporal
• Simbólico	• Literal
• Lógico	• Analógico

Esta caracterización de los hemisferios hace pensar que el hemisferio izquierdo tiene la capacidad que se requiere para el aprendizaje de los objetos matemáticos, puesto que es lógico, analítico, abstracto, simbólico. Sin embargo, existe otra capacidad igualmente importante, como es la imaginación –hemisferio derecho-, que es el vehículo para alcanzar los mayores niveles de abstracción, capacidad necesaria para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

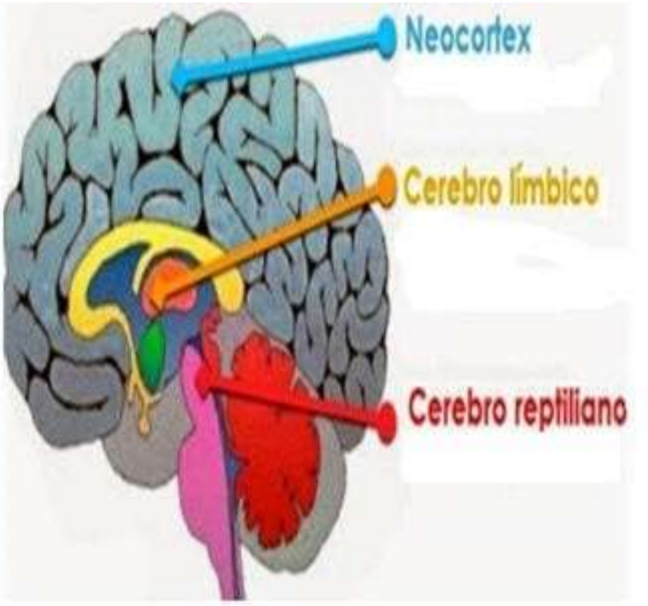


Figura N 5 . Cerebro Triuno. http://memoriaemocional.com/el-cerebro-reptiliano-descodificacion-biologica/

Estos hallazgos tienen repercusión en los diseños curriculares, fundamentalmente en la elaboración de estrategias de enseñanza, puesto que, conociendo el funcionamiento de los hemisferios cerebrales podemos organizar la información objeto de aprendizaje, clasificarla y saber qué parte de los hemisferios cerebrales se necesita activar para favorecer el aprendizaje de los contenidos matemáticos.

MacLean, citado por Gómez et al. (2004), tiene otra concepción del funcionamiento del cerebro, él afirma que el cerebro humano está integrado por tres cerebros: el reptiliano, el sistema límbico y la neocorteza, en cada una de ellos realiza diferentes funciones. A esta teoría se le conoce como la teoría del Cerebro Triuno.

El ***Cerebro Reptiliano***, también llamado cerebro básico, es el encargado de la conducta automática y programada; es el cerebro más primario. Está formado por los ganglios basales, el tallo cerebral y el sistema reticular. Se relaciona con patrones de conducta, sentido de pertenencia y existencialidad, sistema de valores y creencias.

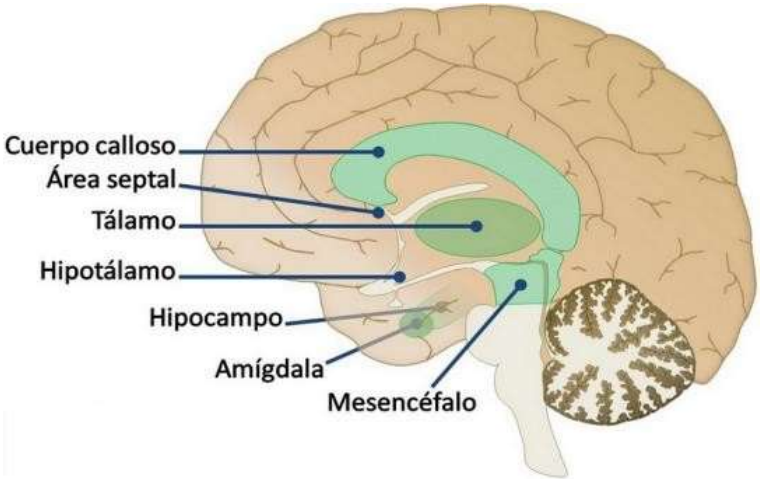


Figura 6. Cerebro Reptiliano.
https:/www.google.com.ni/webhp?sourceid=chrome instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=cerebro+reptiliano

El Sistema Límbico. Este controla la vida emotiva. En la siguiente gráfica se presenta la estructura y funciones del sistema límbico.

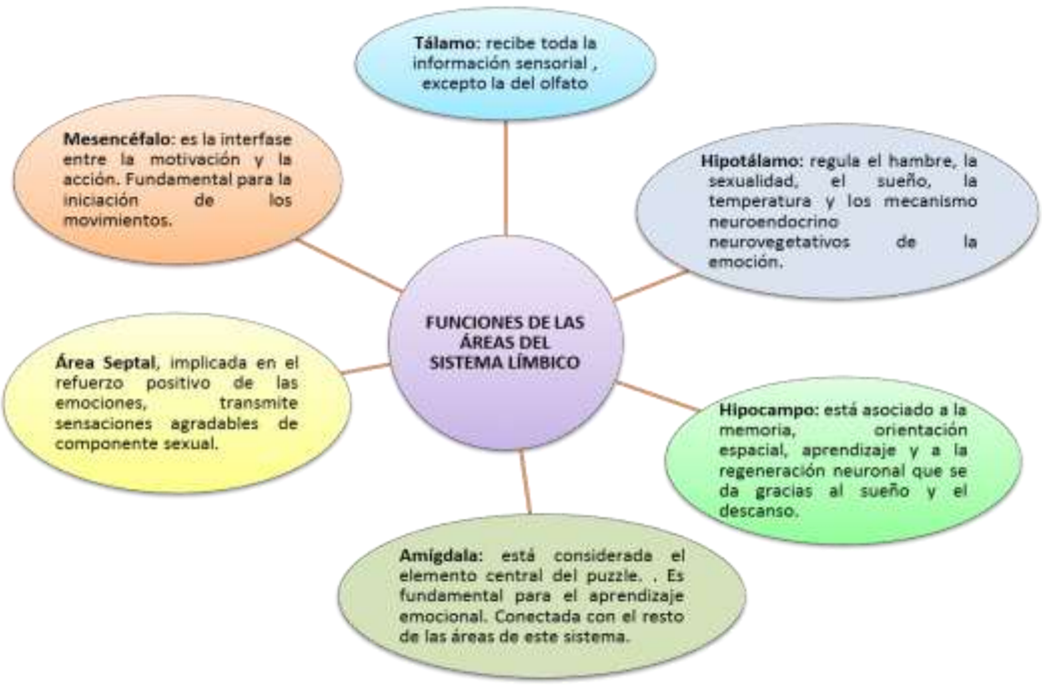


Figura 7. Sistema Límbico. Elaboración propia.
fuente: http://www.enciclopediasalud.com/categorias/cerebro-y-sistema-nervioso/articulos/el-cerebro-emocional-el-sistema-limbico recuperado el 30 de diciembre de 2014.

Este sistema es el encargado de los procesos emocionales: calidez, amor, odio, gozo, depresión, dolor, regulación endocrina y los procesos relacionados con la motivación (Velázquez, Calle & Remolina, 2006). Este sistema es el más importante en lo que se refiere al aprendizaje, puesto que los estímulos pasan antes por el sistema emocional.

ElSistema Neocortical, describe el funcionamiento del cerebro mediante los dos hemisferios –funcionamiento según Sperry, descrito anteriormente−.

El Cerebro Triuno, al concebir a la persona con múltiples capacidades interconectadas y complementarias, le permite explicar el comportamiento del ser humano de forma integral, de manera que el modo de pensamiento que prevalece bajo está concepción es el emocional, conjugado con las inteligencias múltiples, para sacar el máximo provecho a la capacidad cerebral. Esto significa que las estrategias de enseñanza aprendizaje deben integrar los tres cerebros mediante un clima psicoafectivo, con escenarios de aprendizajes variados, significativos y que promuevan la interacción entre estudiantes y docentes.

Otra teoría sobre el funcionamiento del cerebro es la de Herrmann (1989), conocida como la teoría del Cerebro Total, esta concibe el cerebro además de los hemisferios –izquierdo y derecho– y el sistema límbico, como un todo orgánico dividido en cuatro cuadrantes para lograr un estudio más amplio y completo del funcionamiento del cerebro y las implicaciones en la creatividad y el aprendizaje. A estos cuatro cuadrante les llamó lóbulos (Gómez et. al., 2004).

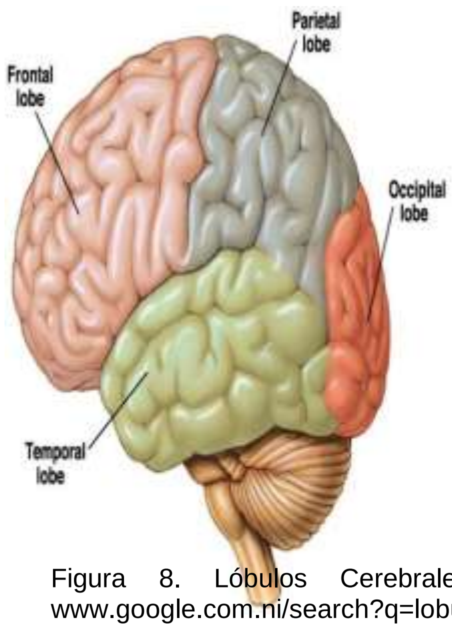


Figura 8. Lóbulos Cerebrales www.google.com.ni/search?q=lobulos+cerebrales&espv

Cada uno de estos cuadrantes se recombinan y forman a su vez cuatro modalidades de pensamiento.

El cuadrante cortical izquierdo, realiza procesos cognitivos tales como: análisis, razonamiento lógico, rigor y claridad. El cuadrante cortical derecho, desarrolla los procesos cognitivos de conceptualización, síntesis, visualización, asociación.

El límbico izquierdo realizas procesos cognitivos que contribuyen al aprendizaje de los objetos matemáticos. *La planificación*, para la resolución de problemas, la *formalización*, para los procesos de abstracción, para la construcción de sistemas axiomatizados y en la *definición de algoritmos*, para el desarrollo de habilidades en la manipulación de estos objetos. En cambio el límbico derecho, los procesos cognitivos que realiza están relacionados con la parte afectiva, basada en los sentimientos; estos procesos son necesarios para cualquier tipo de aprendizaje.

Figura 9. Cuadrantes del cerebro.
https://www.google.com.ni/search?q=cuadrantes+de+herrmann&espv

Bajo esta concepción del funcionamiento del cerebro, se puede afirmar que la parte del cerebro con capacidades Matemáticas está en el cortical y límbico izquierdo. Haciendo coincidir esta división con la división del cerebro en hemisferios, estamos hablando del prefrontal y parietal izquierdo inferior.

Tomando en cuenta que el cerebro es el órgano de la intelectualidad de los seres humanos y el planteamiento acerca del funcionamiento del cerebro, tenemos dos conclusiones. La primera, estas teorías juegan su rol, en el campo educativo, y que por tanto los currículos y el papel del docente, deben replantearse, de manera que el proceso de aprendizaje esté orientado a potenciar la capacidad del cerebro de los estudiantes, atendiendo sus diferencias individuales.

La segunda, está ligada al aprendizaje de la Matemática, según estas teorías, la actividad Matemática se da en mayor medida en el lóbulo frontal y parietal izquierdo inferior. Esta zona controla el pensamiento matemático y la capacidad viso-espacial (Fernández, 2010), lo que no significa que la actividad Matemática se dé solo en esta parte del cerebro. La localización del conocimiento matemático es compleja debido a los distintos circuitos que pueden actuar de manera parcialmente autónoma (Guillén, 2012).

2.3.2. Los Procesos Cognitivos

Este acápite presenta los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de la Matemática, cada uno de ellos enfocados desde la psicología cognitiva y la Neurociencia.

2.3.2.1. La Atención

En el ambiente educativo, este vocablo juega un papel determinante en el proceso de construcción del conocimiento. La falta de atención es señalada como una de las causantes del fracaso escolar, independientemente del área disciplinar.

La palabra atención es muy utilizada en el vulgo, para indicar cuidado, esmero, dedicación, entre otros. Este significado adquiere varias acepciones según el contexto donde se utilice. Muchos psicólogos, le han adjudicado diferentes significados con el afán de explicar el alcance e importancia que la atención tiene dentro de los procesos cognitivos.

Desde la neurociencia, la atención es el resultado de una red de conexiones corticales y subcorticales donde predomina el hemisferio derecho. Ésta focaliza selectivamente la información sensorial, resuelve la competencia entre los estímulos para su procesamiento en paralelo, y recluta y activa las zonas cerebrales para temporizar las respuestas apropiadas (Estévez, García & Junqué, 1997).

La atención puede ser transitoria o duradera. A su vez se puede clasificar por la intensidad y persistencia (Rivas Navarro, et al., 2008). La primera es el grado de atención prestada la segunda la duración. Así, un alto grado de atención se manifiesta en un determinado nivel de concentración, la duración de esa concentración es la persistencia.

Por otro lado, para Benedet (2002), cada uno de los procesos cognitivos son un sistema y afirma que la atención como tal se encarga de:

- Mantener el estado de alerta
- Detectar los cambios estimulantes pocos frecuentes
- Seleccionar la información relevante de la irrelevante.
- Mantener dicha función selectiva durante la ejecución de una actividad o tarea cierta duración.
- Evaluar el estado del sistema en cada momento
- Distribuir óptimamente los recursos entre las diferentes representaciones y operaciones que están activadas en el cerebro.

La persistencia y la intensidad de la atención, indudablemente son factores importantes durante el proceso de aprendizaje, especialmente en Matemática. La atención es más persistente e intensa en tanto en cuanto, mayor sea el grado de motivación intrínseca que se haya despertado en el estudiante en aprender los contenidos de esta disciplina o bien en la calidad del estímulo por parte del docente para mantenerlo en la actividad de aprendizaje.

Al tallo cerebral y al sistema activador reticular ascendente, se le atribuye el control de los estados de alerta y vigilia, necesarios para que se active la función atencional. La región fronto-craneal, junto con el córtex límbico, son capaces de identificar estímulos específicos y producir el bloqueo o inhibición de respuesta a estímulos posteriores.

De acuerdo con lo antes expuesto se explica que la atención como sistema tiene dos funciones, una mantener el estado de alerta del sistema cognitivo y la otra, seleccionar la información relevante, para que este sistema, con capacidad limitada, no se desborde. Por ende, la atención no es propiedad exclusiva de una región del cerebro, prevalece la idea de que ésta depende de la actividad coordinada de grupos neuronales que se encuentran distribuidos en el sistema nervioso central (Petersen citado por González & Ramos, 2006).

2.3.2.2. La Percepción

La percepción es el sistema cognitivo que está íntimamente ligado a la atención, en donde esta última es la fuente y la primera el foco (Benedet et al., 2002).

Los seres humanos recibimos estímulos del mundo exterior e interior a través de los sentidos. Esta información es recibida por el cerebro en forma de impulsos nerviosos, se organiza de forma significativa en nuestro interior, se interpreta según nuestras experiencias, deseos y necesidades, para tomar conciencia del mundo que nos rodea, a todo este proceso se le conoce como percepción.

Mediante una secuencia de estímulos se produce la transmisión de la información por los sentidos, hasta llegar a los niveles superiores del sistema nervioso central. Si el individuo se halla en un estado de activación adecuado, el mensaje llega al nivel cortical donde se realiza un proceso de recepción, selección y reorganización de la información. Dicho proceso requiere de toda la información almacenada en la memoria a largo plazo, a partir de aquí el acto perceptivo es subjetivo y personal. Así, del estado afectivo del individuo esta condicionada la percepción.

Según Matlin (2002) “La percepción es un proceso que usa el conocimiento previo para recopilar e interpretar los estímulos que nuestros sentidos registran”

(p. 32). Esta definición, además de afirmar que todo lo que percibe el ser humano lo hace a través de los sentidos, resalta la importancia que tienen los conocimientos previos en el proceso de aprendizaje.

La percepción, es el resultado del procesamiento personal activo, producto de la detección sensorial de la estimulación física, en la que intervienen, las expectativas, los conceptos, los esquemas cognitivos, que están a disposición en la memoria y que se activan en la elaboración o construcción del significado (Rivas, et a., 2008).

Aunque con enfoques diferentes – Neurociencia y Psicología Cognitiva–, existe una sinergia entre estas concepciones, en cuanto al papel de la percepción en el aprendizaje, en este caso, de la Matemática. Por un lado, indagar los conocimientos previos cómo señalaba David Ausubel sobre el nuevo objeto matemático, nos permite conocer los esquemas cognitivos, y enseñar en consecuencia con estos resultados, a través situaciones que estimulen los sentidos, activándolos hasta el nivel cortical, para que se alcancen los aprendizajes deseados.

2.3.2.3. La Memoria

La memoria, es considerada una capacidad de los seres humanos para recordar, evocar y registrar experiencias pasadas, Goshen–Gottstein, citado por Lacruz de Diego (2006). Para Piaget, la memoria esta relaciona con los esquemas que son los patrones organizados en pensamiento y conducta, que el individuo sigue en situaciones particulares. Donoso (2012), afirma que la atención y la percepción, pasan por la memoria para quedarse como esquema o bien modificar uno ya existente. De estos tres planteamientos de lo que es la memoria y su relación con otros proceso cognitivos, se deducen varios tipos de memoria.

Autores como Rodríguez Palmero, Moreira, Caballero Sahelice & Greca, (2008), señalan que la memoria pueden ser transitoria o largo plazo. Esta última también conocida como memoria permanente, esta relaciona con las llamadas memoria semántica y memoria episódica. Además, está constituida por dos grandes categorías de conocimiento, el declarativo y el procedimental. También, existe otro tipo de memoria llamada operativa o de trabajo, que es activa en el procesamiento de la información (Rivas, et. al 2008). A continuación se describe brevemente cada uno de los tipos de memoria y su relación entre ellas.

Memorias Transitorias: Son temporales y de breve duración. Persisten unos cuantos segundos hasta minutos. Son esenciales para realizar funciones cognitivas de alto nivel. Estas memorias pueden ser sensoriales o corto plazo.

Memoria Sensorial: Para Vila Chaves (2011), es la encargada del registro inicial de la información que llega a través de los sentidos. Es un almacén de capacidad limitada en donde la información se desvanece rápidamente.

Memoria a Corto Plazo: mantiene la información por cierto tiempo. Para mantener la información se necesitan circuitos de repaso repetidos. La capacidad de almacenamiento es limitada (Gluck, Mercado & Myers, 2008)

Memoria a Largo Plazo: la información ocurrida puede durar horas, días hasta varios años. La cantidad de información que puede almacenar es virtualmente ilimitada (Glassman, citado Lacruz de Diego, 2006).

Memoria Declarativa: Concierne al saber qué. Se tiene acceso a ella de manera consciente. Esta puede ser episódica o semántica.

- *Memoria Episódica*: Se corresponde a los acontecimientos o experiencias que ha vivido uno mismo. Estos acontecimientos se encuadran en un contexto de espacio y tiempo (Gluck, et al.,2008).

- *Memoria Semántica:* es la encargada de los procesos relacionados a la adquisición, retención o almacenamiento y recuperación de hechos y conceptos. (Rivas, et. al 2008). Este tipo de memoria está íntimamente ligada con el concepto de estructura cognitiva porque almacena los significado de las palabras y como se relacionan unos con otros. Se refiere al conocimiento, al saber a la cultura de las personas, no implica el recuerdo de sucesos concretos. Las áreas cerebrales implicadas en la memoria semántica son: las áreas hipocampales, la corteza prefrontal y lóbulo temporal, ambos ubicados en la parte inferior izquierda. Precisamente aquí es donde se da la mayor actividad Matemática.

- *Memoria Procedimental*: Este tipo de memoria está ligada a la adquisición y utilización de esquemas cognitivos y motores. Los esquemas cognitivos son imprescindibles para las funciones de pensamiento y los esquemas motores son necesarios para comunicarnos con el entorno. Son habilidades muy duraderas y se mejoran con las experiencias repetidas. Nos permite hacer y pensar, pero no nos permite acordarnos de lo que hacemos o pensamos, no siempre pueden expresare con palabras y se adquieren y se recuperan sin tener conciencia de ello. Las memorias episódicas y semánticas dependen de la memoria de habilidades, pero esta última no depende de las anteriores.

Memoria Operativa o de Trabajo: Es considerada el dispositivo o mecanismo encargado de procesar y mantener la información relevante durante el desarrollo de las tareas cognitivas (Baddeley y Hitch, citado por Lacruz, 2006). Es la clave de la inteligencia (Gluck, et. al, 2008) y que por tanto, se reconoce como un factor decisivo para el aprendizaje y el desarrollo cognitivo (Vila Chaves, et al., 2011).

Este tipo de memoria está estrechamente relacionada con el concepto de conciencia. Únicamente cuando la información y los procesos cognitivos están en la memoria de trabajo podemos ser conscientes de ellos. Dicho de otra manera, solamente podemos captar de forma consciente la información que está contenida en la memoria de trabajo (Moscovitch citado por Benedet et al., 2002, p. 107).

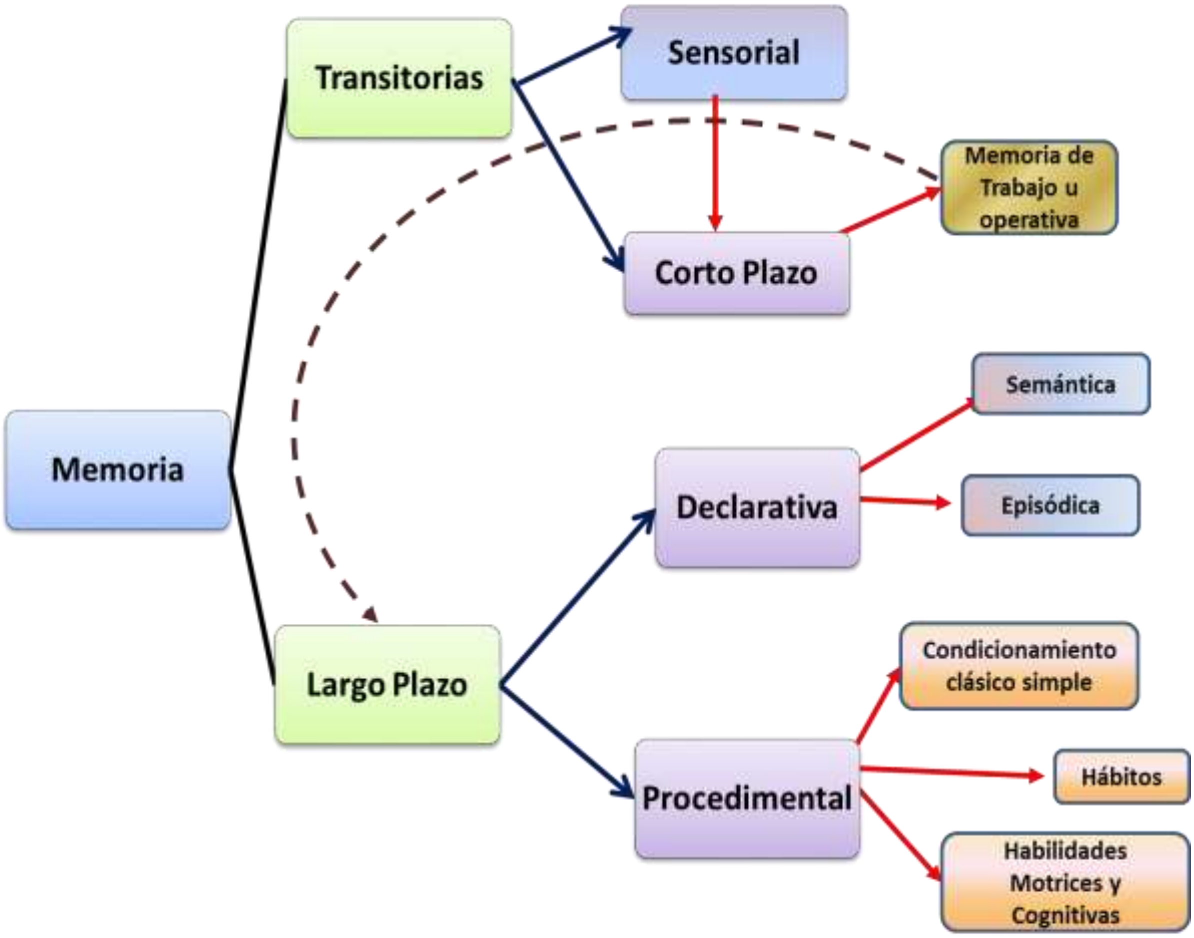


Figura 10. Tipos de memoria. Fuente (Lacruz, Rodríguez, Vila &Glick). Elaboración propia.

Para que estos tipos de memoria se puedan dar, tienen que pasar por tres etapas, codificación, almacenamiento y recuperación.

La codificación es el proceso inicial que nos permite registrar la información, para que la podamos utilizar después. Cuando se nos hace difícil evocar cierta información en un determinado momento, el origen puede ser, porque jamás hemos tenido acceso a esa información, por tanto, es imposible que la tengamos registrada, o bien que dicha información no se haya registrado de forma significativa. El proceso de almacenamiento, consiste en guardar la información y conservarla. El proceso de recuperación, permite localizar la información que hemos almacenado en la memoria. Sólo es posible recuperar la información que ha sido codificada y almacenada. Estos tres procesos, son los que nos dan la capacidad de recordar (Lacruz, et al., 2006).

El aprendizaje significativo de Ausubel, se ha venido comparando de forma antagónica con otro, llamado aprendizaje memorístico –aprendizaje repetitivo-. Sin embargo, es bueno saber que, para aprender hay que repetir los conocimientos adquiridos que se almacenan en la memoria. Por tanto, todo aprendizaje requiere del aprendizaje memorístico, pero hacer énfasis en promover la comprensión de lo que se aprende.

El aprendizaje de la Matemática demanda de la memorización de un sinnúmero de fórmulas, identidades, teoremas, de corolarios, definiciones, conceptos, propiedades, figuras, gráficas, etc., pero con comprensión, de manera que si los estudiantes recuerdan una fórmula –por ejemplo–, deben comprender el significado de cada uno de los símbolos que forman esa estructura llamada "fórmula". En consecuencia, es necesario que el docente conozca este proceso cognitivo, que hasta hoy es un aspecto importante para medir la inteligencia humana.

2.3.2.4. El Lenguaje

Los seres humanos nacemos con habilidades para comprender cambios fonéticos sutiles. No obstante, es la experiencia con un idioma determinado, durante los diez primeros meses de vida quien sensibiliza al cerebro a sonidos relevantes de ese idioma. El idioma es el resultado de la combinación de un número finito de símbolos arbitrarios y un conjunto de principios semánticos, de acuerdo con normas de sintaxis (Gopnik, Meltzoff y Kuhl, citado por OCDE, 2009).

Cuando se aprende el lenguaje, se aprende el significado de los sonidos, la sintaxis, el vocabulario. Además, se aprende a manipularlo para una emisión eficiente de los conceptos (Melo, 2011).

Toda expresión verbal de un mensaje parte del pensamiento. Para que la información sea transmitida como lenguaje mediante la palabra, primero tiene que ser procesada como mensaje en el sistema de pensamiento (Benedet, et al., 2002). La palabra, expresa conceptos, razonamientos y juicios, esta es producto de un proceso de generalización y pertenece simultánea e indisolublemente al dominio del lenguaje y del pensamiento (Cubero & Ramírez, 2005).

La función del lenguaje además de codificar las experiencias, para facilitar el pensamiento sirve como instrumento para comprender y comunicarnos con los demás. No hay lenguaje sin pensamiento.

Existen varios tipos de lenguaje:

Oral: Se da por la pronunciación de sonidos vocales que forman palabras para expresar las ideas o pensamientos.

Escrito. Es un complemento del lenguaje hablado. Es la representación de una lengua a través de un sistema de escritura.

Táctil. Es aquel que se expresa a través del tacto, o sea contacto con la piel. Transmite sentimientos y emociones.

Auditivo. Es el que nos permite comunicarnos a través del sonido. Solo puede ser utilizado por personas que no tienen discapacidad auditiva.

Visual. Este tipo de lenguaje transmite mensaje mediante la representación de imágenes o signos gráficos de lo que percibe por medio de la vista.

Lenguaje interno. Es un lenguaje limitado, simplificado, que reproduce únicamente la imagen auditiva sintetizada, y donde algunas palabras se reemplazan por imágenes de los objetos, este tipo de lenguaje, se describe las ideas que tenemos en nuestro pensamiento.

Para concluir se han tomado las palabras de Maya Elcarte & Rivero Rodrigo (2010), quienes afirman que la organización del lenguaje se articula alrededor de dos polos, uno receptivo, que es la puerta de entrada de la audición y la comprensión del lenguaje hablado; además, la visión y la comprensión del lenguaje escrito. Un polo expresivo, que es la puerta de salida, la formación o articulación verbal adecuada al contexto del entorno.

2.3.2.5. El Pensamiento

El pensamiento, es el proceso cognitivo más complejo, en él participan los procesos de atención, percepción memoria y lenguaje. Se manifiesta a través de una serie de actividades mentales que se agrupan en dos: la formación de concepto y la resolución de problemas (Benedet et. al., 2002 y Rodríguez Palmero, et al., 2008).

Para Melo Florián (2011) el pensamiento implica ordenar selectivamente un conjunto de símbolos para el aprendizaje, organizar la información, para la resolución de problemas, para razonar, y formar juicio. Además, afirma que de estos símbolos surgen las ideas o conceptos, y la disposición de las nuevas ideas con cierto orden, con determinadas relaciones y que deben seguir ciertas reglas lógicas.

Existen dos tipos de pensamiento, el inductivo y el deductivo. El pensamiento inductivo permite llegar a conclusiones mediante ciertas premisas que amplían la información semántica en ellas, pero que no garantizan la veracidad de dicha conclusión. En cambio, el pensamiento deductivo, parte de premisas verdaderas, aplica principios lógicos y por tanto, las conclusiones solo pueden ser verdaderas, pero a diferencia del pensamiento inductivo, no se incorporan nuevas información a nuestros conocimientos (Benedet et al., 2008).

En estas concepciones, el pensamiento y los tipos de pensamientos se encuentran el razonamiento.

Para Rico et al. (1997), razonamiento es:

> Capacidad de establecer nuevas relaciones entre las unidades de información que constituye un concepto, y se expresa mediante una secuencia argumental. El razonamiento es la forma usual de procesar conceptos, es decir, de derivar un concepto de otro o implicar una nueva relación sobre la base de las relaciones ya establecidas (p.33).

Al igual que el pensamiento existen dos tipos de razonamiento el inductivo y el deductivo. En el razonamiento deductivo las conclusiones se deducen de la información previa recibida (lo que conocemos como premisas) se hace explícita una información ya implícita; se ofrecen conclusión mediante la combinación y manipulación de la información existente. Las conclusiones producidas por este tipo de inferencias son válidas desde el punto de vista de la lógica formal. Siempre que las premisas sean verdaderas en su contenido, también se obtendrán conclusiones verdaderas; esto sucede porque el esquema o forma argumental de la inferencia es válida, de manera que lo expresado en la conclusión está incluido lógicamente en las premisas.

En el razonamiento inductivo, las inferencias inductivas no supone implicación lógica, de este modo las conclusiones inductivas únicamente pueden tener un carácter hipotético o probabilístico en mayor o menor medida, no pudiendo ser consideradas como conclusiones válidas desde el punto de vista lógico.

García-Madruga y Moreno Ríos citado por Vila (2011) afirman que el razonamiento inductivo es: *«Un proceso de generalización en el que se concluye una regla a partir del cumplimiento de la misma en un número determinado de situaciones concretas».*

Piaget, distingue cuatro períodos en el estudio cognoscitivo del pensamiento humano –sensorio motor, pre operacional, operaciones concretas y operaciones formales–, estos períodos o estadios como él los llama, son muy importantes en el desarrollo del pensamiento matemático. Esto quiere decir que el estudiante desde los 12 años su pensamiento va más allá de lo concreto.

2.3.2.6. Resolución de Problemas

La Psicología Cognitiva para explicar cómo se realiza el procesamiento de la información, además de la atención, percepción, memoria y pensamiento, considera la resolución de problemas.

Antes de desarrollar en qué consiste el proceso de resolución de problema se define qué es un problema y qué es la solución de un problema. Según la Real Academia de la Lengua Española un problema es:

- Cuestión que se trata de aclarar.
- Proposición o dificultad de solución dudosa.
- Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin.
- Disgusto, preocupación.
- Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.

Estas acepciones de problema, tienen un factor común, todo problema requiere solución, la cual no está directamente al alcance. Además, que en la búsqueda de la solución se activan dos de los procesos cognitivos superiores como son la memoria y el pensamiento. Para aclarar algo recurrimos a nuestra memoria episódica o semántica para pensar sobre las dificultades, hechos, circunstancias que nos acontecen y que ameritan una solución para el bienestar de nuestras vidas.

Muchos autores como Garner, Rishner y Glasser, entre otros, consideran que la evidencia de la mayor o menor inteligencia se refleja en la habilidad para resolver problemas.

¿Qué significa resolver un problema?

Newell y Simon, citado por Benedet et al. (2002), consideran que "*la resolución de problemas es una secuencia de operaciones que se desarrollan dentro de un espacio delimitado por un estado inicial y un estado final.*" (p. 196)

De esta afirmación se infiere que la resolución de problemas es un proceso que amerita razonamiento más o menos complejos.

Los primeros experimentos que se realizaron con computadoras cuya pretensión era comparar los procesos que realizaban los ordenadores y el hombre a la hora de resolver un problema, se dedujo que la solución de problema en el hombre consiste en la búsqueda selectiva de la representación mental del problema, las posibles soluciones y la identificación de la solución más adecuada (Newell & Simon, citado por Auqué, 2004).En la actualidad, uno de los retos que mundialmente enfrentan los docentes en la enseñanza de la Matemática es desarrollar en sus estudiantes la competencia de resolver problemas.

En el siguiente mapa conceptual se refleja lo que significa resolver un problema. Sus características, sus perspectivas, sus procesos y consideraciones. Este gráfico permite ver la sinergia entre los aspectos neurofisiológicos, cognitivos, y ecológicos y su incidencia determinante de la estrategia o las estrategias que cada individuo aplica a la hora de resolver un problema.

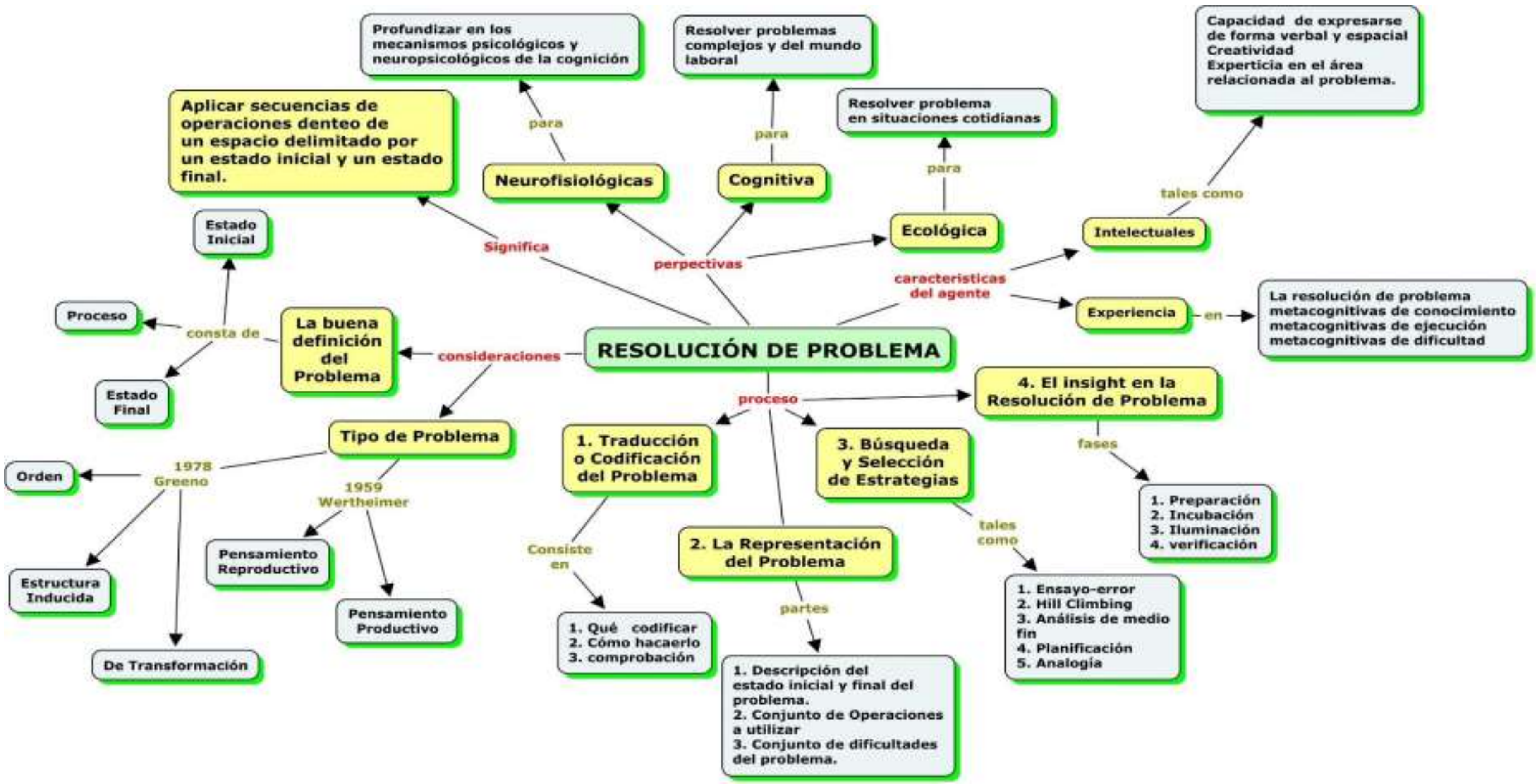


Figura 11. Resolución de problema: Fuente Auqué (2004). Elaboración propia.

2.3.3. Estructuras Cognitivas y Conceptos Nucleares

Antes de abordar qué son las estructuras cognitivas, se analizará el concepto de esquema conceptual, por la relación estrecha que estos tienen y su incidencia en el proceso de construcción de conceptos.

Es sabido que el ser humano responde ante las distintas situaciones que se le presentan según sus experiencias y los conocimientos que posee alrededor de dicha situación. Uno de los mayores aportes de Piaget a la psicología cognitiva, fue el concepto de esquema, definiéndolo como: Organización invariante del comportamiento para una determinada clase de situación.

Los esquemas tienen asociado metas, reglas de acción, invariantes operatorios y posibilidades de inferencias, a todos estos Vergnaud, citado por Moreira (2002) le llama ingredientes de los esquemas:

- Metas y anticipaciones: Un esquema está dirigido siempre a una clase de situación en las cuales el sujeto puede revelar una posible finalidad de la actividad y esperar algunos efectos o determinados eventos.

- Regla de Acción: Esta es la generadora de los esquemas, porque permite la generación y continuidad de secuencias de acciones del sujeto. Podemos decir que son las reglas de búsqueda de información y control de los resultados de dichas acciones.

- Invariantes Operatorios: Son todos aquellos conocimientos que están presentes en los esquemas, constituyendo así, la base que permite obtener la información pertinente e inferir los propósitos y las reglas de acción más adecuadas para tal fin. Son los teoremas-en-acción y los conceptos-en-acción que utiliza el individuo para reconocer los elementos más adecuados de cada situación.

- Posibilidades de Inferencias: Es el razonamiento que el sujeto puede hacer a partir de cálculos, reglas y anticipaciones, producto de todas las actividades implicadas en los otros ingredientes.

En conclusión, para Vergnaud, el esquema conceptual está relacionado con el tipo de organización cognitiva, es la ligadura entre la conducta humana y la representación que se tenga sobre determinada situación a través de los invariantes operatorios, por ser los que articulan la teoría y la práctica, en otras palabras, es la asimilación, en términos de Piaget.

Tall y Vinner(1981), introducen este vocablo aplicado a la Matemática, para explicar algo que esta recordado en nuestra memoria al escuchar o ver el nombre de un concepto matemático y lo definen así:

> Es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso que tenga representaciones visuales o una colección de expresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las figuras mentales las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente. Pero es importante recordar que las expresiones verbales no son las primeras cosas evocadas en nuestra memoria [.….] (p. 68)

2.3.3.1. Estructura Cognitiva

En la didáctica de la Matemática, es importante el estudio de las representaciones que se hace el aprendiz a medida que va construyendo el conocimiento matemático. Además, conocer cómo se van almacenando en la memoria los conceptos y saber, por qué se organizan de una u otra manera. Esta información permitiría orientar al docente cómo llevar a cabo su proceso de enseñanza de forma efectiva; recordemos que los objetos de esta ciencia, no son accesibles a los sentidos y el acceso se da a través de representaciones semióticas.

Al conjunto de conceptos e ideas que tiene un individuo sobre un determinado campo de conocimiento, así como la forma en que los tienen organizados, es a lo que Ausubel le llama Estructura Cognitiva. Su teoría acerca del aprendizaje de conceptos, se basa en el supuesto de que los conceptos se organizan jerárquicamente en la estructura cognitiva del alumno, de los más inclusivos a los menos inclusivos.

Para Shavelson, citado por Casas (2002) las estructura cognitiva es "el constructo hipotético que se refiere a la organización de las relaciones entre conceptos en la memoria semántica o a largo plazo" (p. 72).Así, la estructura cognitiva no es rígida, no es jerárquica –idea contraria a la de Ausubel–, va evolucionando individualmente a medida que se van adscribiendo nuevos atributos a los objetos del mundo ya sean estos, subjetivos u objetivos o ambos, lo que hacen posible que el individuo, pueda diferenciar entre unos y otros y definir nuevas relaciones estructurales entre ellos. Con estas nuevas relaciones entre el conocimiento existente y el conocimiento nuevo, la estructura cognitiva se modifica haciendo que los conocimientos sean más comprensivos y coherentes para el aprendiz.

Para Azcárate(1995), la estructura cognitiva es el "conjunto de todas las imágenes mentales(cualquier clase de representación: forma simbólica, diagramas, gráficos, etc.) del estudiante asociadas al concepto con todas las propiedades y procedimientos que le caracterizan"(p. 55).

De las definiciones anteriores se infieren las siguientes características de la estructura cognitiva:

- Las representaciones se dan en forma de redes. Lo que significa que estas son estructuras compuestas por Nodos (concepto o conceptos) y Enlace (relación proposicional entre conceptos).
- No es estática, esta cambia y evoluciona, en dependencia de la adquisición de nuevas características de los objetos del entorno en el que se desenvuelve el individuo ya sean estas, objetivas o subjetivas.
- Es condición para la existencia de conocimiento.

Considerando que la Matemática es un campo de conocimientos, la estructura cognitiva que cada individuo posee sobre los objetos matemáticos, es conformada por todas aquellas ideas, conceptos, definiciones, habilidades, propiedades, algoritmos, etc., aprendidos significativamente. Dicha significación no necesariamente es acorde a la ciencia.

Así, los esquemas conceptuales, describen la estructura cognitiva de un individuo, asociada a un concepto matemático a través de sus representaciones mentales.

Existen cuatro métodos para obtener datos acerca de la estructura cognitiva. Estos son: asociación de palabras, test verbales, establecimiento por parte del sujeto y puntuación de similaridad entre conceptos. Estos métodos han sido utilizados en diferentes investigaciones a través de técnicas que se pueden representar de forma numérica o gráfica.

El siguiente gráfico describe a groso modo en qué consisten cada una de estas técnicas:

- **ASOCIACIÓN DE PALABRAS**
  - **Listas de Palabras**: **Asociación libre:** Se da una palabra al alumno, para que él genere palabras relacionadas en un tiempo dado. **Asociación Controlada:** El aprendiz Además de generar palabras las ordenas.
  - **Ordenación de Tarjetas**: Selección de grupos de conceptos. Escribir el nombre de los conceptos en las tarjetas. Se ordenan aleatoriamente antes de presentarlas al estudiante. Los estudiantes ordenan las tarjetas en grupos y asignan nombre a cada grupo. Investigador analiza y se compara las agrupaciones.
  - **Árboles Ordenados**: Selección de palabras que representen conceptos importantes de un campo de conocimiento un máximo de 25-30. Los conceptos se reparten en matrices **nxm**, se repite esta matriz en **n** hojas. El estudiante ordena las palabras verticalmente según lo similar que estos tengan en su opinión. Repite este proceso en cada una de las hojas. Se genera el árbol ordenado utilizando el algoritmo de Reitman y Rueter (1980).
- **TEST VERBALES**
  - **Relaciones Semánticas**: Preguntas sencillas y descriptivas para que el estudiante establezca relaciones entre conceptos. Se puede hacer por serie de selección múltiple o bien preguntas cortas para completar.
  - **Juicio de Relaciones**: Se presentan posibles pares de conceptos. Se comparan con las respuestas de los expertos sin ninguna transformación de la estructura de los datos. La comparación se puede hacer de dos formas, una asignando puntuación según la fuerza de la relación existente. Esta puntuación se consigue comparando la puntuación media de los expertos consultados con la de los alumnos o correlacionando las puntuaciones entre los expertos con la de los estudiantes. La otra forma es, contestando verdadero o falso si tiene o no relación.
  - **Analogías**: La esencia de la técnica es la transferencia de conocimiento de una situación a otra. Se presentan al aprendiz dos conceptos relacionados. Estos averiguan cuál es el tipo de relación. Se presenta un tercer concepto y una lista de palabras. El estudiante elige una palabra que tenga con el tercer concepto la misma relación que con los dos primeros.
- **ESTABLECIMIENTO POR PARTE DEL SUJETO**
  - **Mapas Semánticos**
  - **Mapas de Interacción Causal**
  - **Las Notas de Patrones**
  - **Los Mapas de Telaraña**
  - **Los Mapas de Conceptual**

  El sujeto es quien establece:
  - las relaciones entre los conceptos
  - Los tipos de relaciones entre ellos: causa-efecto, subordinación y otras.
  - La organización de los conceptos secundarios en torno a otros principales.

  Hay que entrenar al estudiante en la elaboración de estos mapas o notas de patrones.
- **PUNTUACIÓN ENTRE LA SIMILARIDAD ENTRE CONCEPTOS**
  - **Mapas Cognitivo**: Los datos que se utilizan en esta técnica se obtienen de alguna de las técnicas anteriores. El procedimiento más utilizado es por escalonamiento multidimensional. Estos datos de proximidad transformados se presentan en una matriz de coeficientes correlacionados. Esta se representa de forma espacial, colocando cada concepto en un punto de coordenadas, la gráfica resultante es la estructura cognitiva del estudiante.
  - **Redes Asociativas de Pathfinder**: En estas redes, los conceptos se representan por nodos y las relaciones entre ellos como segmento que los unen de mayor o menor longitud según la proximidad semántica. Esta proximidad se obtiene a través de un algoritmo que transforma la matriz de datos de proximidad de conceptos en una estructura de red. Este algoritmo busca aquellos nodos el camino indirecto más próximo y conserva solo los enlaces cortos. Por tanto la red refleja solo las relaciones más fuertes.

Figura 12. Métodos y Técnicas para determinar estructura cognitiva. Fuente: Casas L. 2001. Estudio de Estructura cognitiva de los alumnos a través de Redes Asociativas de Pathfinder: Aplicaciones y posibilidades en geometría. Tesis doctoral. Elaboración propia.

Para Casas, Luengo y Torres (2012), la técnica más innovadora y confiable para reflejar la estructura cognitiva de los estudiantes de forma visual con información numérica y sin interferencia de factores externos, son las Redes Asociativas de Pathfinder. Más adelante se describe cómo funciona esta técnica.

2.3.3.2. Teoría de los Conceptos Nucleares

La Teoría de los Conceptos Nucleares (TCN), fue desarrollada por Luis Manuel Casas en su tesis doctoral al estudiar el concepto de ángulo en el 2002. El sostiene que a medidas que el aprendiz progresa en los niveles de escolaridad, sus conocimientos acerca de un tema determinado, se estructuran de una forma cada vez más simple y alrededor de un conjunto limitado de conceptos relevantes -a los que llaman Conceptos Nucleares-, en donde estos, no son precisamente los más generales o los más abstractos, incluso pueden ser términos específicos, como las ejemplificaciones que da el docente cuando desarrolla el contenido en el aula de clase.

Para Luengo (2013):

> La TCN, lleva además asociada una técnica que permite la representación de la estructura del conocimiento de una manera analítica y gráfica, que proporciona información acerca de cómo se produce el aprendizaje en función de los cambios de la estructura cognitiva, con un procedimiento de obtención de datos no invasivos (p. 13).

Casas y Luengo, ofrecen un punto de vista para acercarnos a la comprensión de cómo se adquiere y organiza el conocimiento. Esto es una nueva perspectiva para explicar cómo los procesos de aprendizaje se producen en la mente del que aprende. Parten de una idea sencilla, expresan que la adquisición del conocimiento –en general– y su almacenamiento en la estructura cognitiva, sigue un proceso análogo cuando adquirimos el conocimiento de un entorno físico y de la misma manera que un cartógrafo elabora un mapa geográfico, los seres humanos elaboramos mapas cognitivos del entorno físico o de nuestros conocimiento en un área determinada.

Luengo, a través de esta metáfora describe cómo se encuentra un alumno en situación de aprendizaje de una nueva materia. En su exposición señala que, para la adquisición del conocimiento físico, se pueden considerar tres etapas: conocimiento de hitos, conocimientos de rutas y conocimiento de conjunto.

- Conocimiento de Hito. Está referido a lo que sobresale y que nos ha llamado la atención o recordamos por alguna experiencia personal. Trasladado al aprendizaje, no tiene que ver precisamente con aspectos fundamentales de la materia, sino que son hitos en forma de conceptos que por diversas razones han llamado la su atención y se mantienen en memoria, a estos hitos es lo que él llama Conceptos Nucleares, puesto que son conceptos alrededor de los cuales se organizan los demás.

- Conocimiento de Ruta. Se caracteriza por la capacidad de navegar de un punto a otro utilizando el conocimiento de hito, para tomar decisiones en cada punto acerca de los giros que habría que dar, pero sin considerar las áreas a su alrededor. En el aprendizaje, es un proceso que consiste en el establecimiento o rememoración de las relaciones de estos conceptos –Conceptos Nucleares– con otros, que a su vez pueden ser hito de otros mapas y de la creación de procedimientos de trabajo para obtener los resultados buscados. Como se puede observar este conocimiento no da la suficiente información sobre la estructura general como permitir a una persona optimizar dicha ruta.

- Conocimiento de Conjunto. El mapa cognitivo del entorno físico no está totalmente desarrollado hasta que no se alcance el conocimiento como una vista de conjunto. El alumno conoce la relación de una ruta con otra, de unos procedimientos de trabajo con otros y elige en función de los resultados que necesita o de los procedimientos más adecuados o de aquellos con los que se encuentra más familiarizado. Lo que significa, tener una visión completa de todos los hitos integrados en rutas

> relacionadas entre sí. Hasta entonces, la circulación por el mapa puede hacerse de diversas formas, eligiendo la ruta que más le convenga, ya sea por comodidad, por seguridad o por preferencia. El aprendizaje es un proceso de ajuste de las representaciones mentales del alumno.

La teoría de Ausubel y la Teoría de los Conceptos Nucleares (TCN), coinciden en que el conocimiento se construye sobre la base de los conocimientos previos. No obstante, entran en contradicción cuando la TCN afirma que no existen conceptos superiores e inferiores, sino que existen Conceptos Nucleares, que son los más significativos, los más destacados, pero que no necesariamente, son los más generales, sirven de anclaje y contribuyen al desarrollo de la estructura cognitiva para el estudiante.

A pesar de que en la estructura cognitiva del alumno aparecen cada vez más elementos y más relaciones entre ellos, ante una situación que se requiera utilizar los aprendizajes adquiridos y almacenados en la estructura cognitivas, ellos recurren a las relaciones más simples, pero significativas, a esto es a lo que Luengo llama “senderos de mínimo coste”.

Edelman, citado por Luengo (2013) según su teoría de la selección de grupos neuronales, sostiene que la activación de un mapa neuronal supone la activación de un circuitos que está asociado a él, pero no toda la estructura cerebral, ya que esto sería muy costo en términos energéticos. Este mismo autor cita a Rutmelthart y McLelland, quienes señalan que la inteligencia surge de la interacción de un gran número de unidades de procesamiento simple. Lo expuesto en este párrafo explica por qué al hacer uso de un aprendizaje la estructura cognitiva funciona por un principio de mínima energía.

Considerando que la Matemática es un campo de conocimientos, la estructura cognitiva que cada individuo posee sobre los objetos de esta disciplina, se conforma por todas aquellas ideas, conceptos, definiciones, habilidades, propiedades, algoritmos aprendidos significativamente. Dicha significación no necesariamente es acorde a la ciencia.

La Teoría de los Conceptos Nucleares, utiliza como plataforma metodológica las redes asociativas de Pathfinder (PFNET). A continuación se describe cómo funciona esta técnica, que ayudará a comprender dicha teoría.

2.3.3.4. Las Redes Asociativas de Pathfinder

Esta técnica está basada en la teoría de grafos. Las representaciones gráficas están conformadas por nodos que establecen relaciones distintas entre sí mediante aristas que describen la mayor o menor proximidad de los conceptos en la estructura cognitiva.

Estas redes se caracterizan por la forma organizada, en la que presentan los resultados, permiten identificar fácilmente los conceptos más o menos importantes, tener una representación gráfica. Además, disponer de un conjunto de índices, como los de consistencia, similaridad y complejidad, y otros de índole cuantitativo que permiten realizar análisis comparativos (Almeida, Casas & Luengo, 2014)

¿Cómo funciona esta técnica?

a) Seleccionar un conjunto de conceptos que representen un área del conocimiento, estos pueden ser simples o más elaborados.

b) Presentar todos los posibles pares en orden aleatorio.

c) Se solicita al estudiante dados dos de ellos, asigne una puntuación a la similaridad o diferencia que exista.

d) Resumir las puntuaciones obtenidas en una matriz de valores habitualmente transformados en coeficientes entre 0 y 1, de manera que los conceptos muy relacionados se puntúan con valores próximos a 1, y los que no lo estén, se puntúan próximos a 0.

e) Mediante un algoritmo matemático que selecciona los enlaces más importantes, se obtienen representaciones de las estructura cognitiva de los alumnos en muy distintos campos de conocimiento. (Casas, & Luengo, et al., 2013).

Investigaciones que han aplicado esta técnica demuestran que además de la versatilidad en este campo, los resultados de las representaciones de las organizaciones de los conceptos son realmente como el informante las aprecia.

A continuación se presentan un ejemplo de Redes Asociativas de Pathfinder tomadas de la tesis de Casas para describir cómo utilizar estas redes.

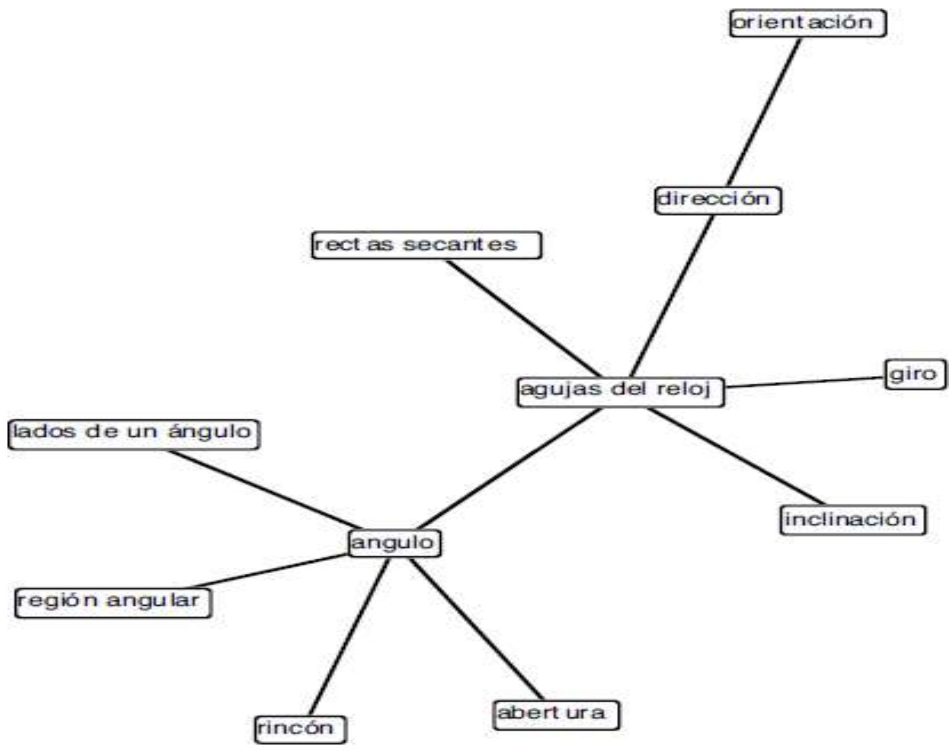


Figura 13. Red media de alumnos. Concepto de Ángulo

Para determinar el índice de complejidad de redes, se necesita calcular la densidad (D), el número de nodos múltiples (N) y la suma de los grados de los nodos múltiples (S). En la red se observa 11 conceptos, entonces n=11. Ahora se calculará la densidad, esta es igual al número de enlaces que se observan entre el número de posibles enlaces; tenemos que los enlaces que se observan son 10 por 2 porque son bidireccionales tenemos 20, y el número posibles de enlaces es: n(n-1)=11(11-1)=(11)(10)=110 –cuando los enlaces son unidireccionales el número máximo de enlaces se calcula $\frac{n(n-1)}{2}$–, al dividir 20 entre 110, tenemos que D=0.18. A mayor números de enlaces mayor enlaces cruzados entre los nodos y a mayor densidad mayor cantidad de relaciones.

En cuanto al valor de N, como hay dos enlaces a los cuales llegan más de dos enlaces bidireccionales, tenemos los nodos múltiples: ángulo y agujas del reloj, entonces N=2. Estos representan la jerarquía entre los conceptos. Observemos que del concepto de ángulo y del concepto de agujas del reloj salen cinco aristas. Entonces el grado de cada nodo múltiple es 5 y la suma de los grados de los nodos es S=10. Así el índice de Complejidad es: C= DxNxS =0.18x2x10=3.6. Cuando en una red el índice de complejidad (C) es cero, significa que esta red es muy lineal.

Otro parámetro es la coherencia, está referida a la consistencia de un conjunto de datos y a menudo se corresponde al grado de experiencia o grado de aprendizaje. El cálculo de la coherencia está basado en la premisa de que la relación de dos conceptos, puede determinarse a partir de las relaciones entre esos conceptos con otros del mismo conjunto.

También se puede obtener la similaridad de dos redes a partir de los enlaces entre ellas, concretamente, es el número de enlaces en común dividido por el número de enlaces que hay en las dos redes. Si las redes son idénticas, entonces la similaridad es 1, si no comparten enlaces la similaridad es 0. Este parámetro es importante en el estudio de estructuras cognitivas puesto que nos permiten comparar las redes de novatos y expertos.

2.3.4. El Error y los Obstáculos

El estudio de los errores en el proceso enseñanza aprendizaje según Engler et al., (2003) data desde 1917, con publicaciones realizadas por Thorndike. No obstante, Rico (1995) adjudica a Wiener (1922) la primacía en sus trabajos realizados en didáctica encaminados al estudio de errores. Estas investigaciones se han enfocado en detectar el error y clasificarlo; poco se ha estudiado en profundizar en el origen de las causas.

La palabra error es muy utilizada en nuestro lenguaje cotidiano, generalmente, dándole un significado negativo. No obstante, existen expresiones que le dan una connotación positiva como "de los errores se aprende" o "quien no erra no aprende".

El obstáculo, al igual que el error tiene connotación de problema o de dificultad. Se entiende por dificultad algo que impide ejecutar bien o entender pronto una cosa (Cundín, 2000), esto puede darse por diferentes motivos relacionados con el concepto que se aprende, con el método de enseñanza, con la preparación anterior del alumno o por su actitud ante el aprendizaje.

En el ambiente educativo, principalmente en Matemática, tanto el error, como los obstáculos son objeto de investigación, por lo que muchos autores se han dado a la tarea de definir estos conceptos.

2.3.4.1. El Error

Empezaremos por la definición de Matz, citado por García et al., (2012) *"Los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación"* (p. 143). Esta concepción refleja cuestiones que tienen que ver con la estructura cognitiva de un conocimientos aplicado a una situación de forma inadecuada.

Otros autores como Bell, Erlwager, Ginsburg, citados por Rico (1995), afirman que, los errores "surgen por las estrategias y reglas personales empleadas en la resolución de problemas, devienen de experiencias particulares e interpretaciones realizadas con base a los conocimientos matemáticos iniciales" (p. 80). Este concepto de error apunta a dos cosas, la primera a estrategias de aprendizaje ineficientes y la segunda a conocimientos previos equivocados, o incompletos, entre otros.

Para Brousseau et al., (1983):

> El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, su origen se constituye en un obstáculo. (p.173)

Esta definición de error, además que lo adjudica a conocimientos que fueron eficaces en algún momento pero que en otros contextos no funcionan, hace referencia a la existencia de tipos de errores cuyo origen lo denomina "obstáculo".

Según Godino, Batanero & Font et al., (2003): "el error es una práctica (acción, argumentación, etc) que realiza el alumno, que no es válida, desde el punto de vista de la institución Matemática escolar" (p. 69).

Esta definición enfocada en una recurrencia de errores, que son producto de aprendizajes matemáticos imperfectos, que por su frecuencia, dan lugar a pensar en que esas acciones y argumentos, en otros contextos son válidos y ya no serían catalogados como error. Por ejemplo, si preguntas en una clase primer grado ¿Cuánto es la mitad de dieciocho? La mayoría probablemente responderá nueve. Pero es posible que haya alguien que responda en un contexto coloquial "la mitad de 18 es 10" otro "la mitad de 18 es 1"

Autores como Abrate et al. (2006), aunque no definen formalmente el concepto de error manifiestan que: “el error es la capacidad de considerar verdaderos conceptos y procedimientos que están deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones o justificaciones falsas” (p. 21).

Tenemos el caso de autores como De la Torre (2004) que defiende la tesis de que “el error es un desajuste conceptual o de ejecución (…) y está en la propia trama o proceso de aprendizaje” (p. 15).

Estas dos últimas concepciones tienen una posición cognitiva, puesto que se refiere a aprendizajes incompletos o desajustados que conducen al error.

De lo anterior se observa, que los errores que cometen los estudiantes durante el aprendizaje de los objetos matemáticos, se producen porque no los tienen bien organizados en su estructura cognitiva, son producto de conceptualizaciones insuficientes y que por tanto, las relaciones que establecen entre los conceptos son incorrectas y los conducen al error. Además, se puede deducir que la definición que más se ajusta al objeto de estudio de la investigación es la de Godino, Batanero y Font, porque está enfoca en primer lugar al error matemático y en segundo lugar, al error cometido exclusivamente por el alumno.

Características de los errores:

- Los errores están asociados a aspectos cognitivos y a prácticas personales.
- El error, es la evidencia de que el proceso de aprendizaje no anda bien. Hay algo que está impidiendo que los estudiantes aprendan.
- Da pista de lo que ocurre en el razonamiento del aprendiz. Se dan de manera inconsciente. Quien comete un error cree ciegamente que lo hecho está bien y como consecuencia, éstos son resistentes.
- Son multi causales, la causa de un error no es única. Un error puede tener más de una causa y esta, ser el error en otra situación. Lo que significa, que para analizar las causas del error hay que estudiar las meta causas hasta llegar a la causa origen.

- Los errores con las características anteriores son producidos por obstáculos.

2.3.4.2. Los Obstáculos

Para profundizar en el estudio de los errores en el proceso de aprendizaje de la Matemática, a continuación se analizarán los obstáculos, como causas del error.

Bachelard et al., (2000) define el término obstáculo como:

> Aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas y que por esta razón se fija en la mente del estudiante, pero que posteriormente este conocimiento le resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas. (p.99).

Un obstáculo se distingue por ser un conocimiento, que tiene dominio de validez, es resistente y reaparece, es muestra de la existencia de un saber y se manifiesta a través de los errores que no son producto del azar (Barrantes, et al., 2006).

En el proceso de aprendizaje de la Matemática los estudiantes se ven expuestos a enfrentar obstáculos que van más allá de su intención, atención, voluntad o actitud –como queramos llamarle– y que son una barrera para la adquisición de nuevos conocimientos. Ellos en su intento de aprender, a menudo utilizan los conocimientos que no son los adecuados para la comprensión, que al final los conduce a la frustración.

Por tanto, es necesario desestructurar lo aprendido para poder aprender, venciendo los obstáculos que presentan en todo proceso de enseñanza aprendizaje.

2.3.5. Lenguaje Algebraico y los Algoritmos

Figura 14. Al–khwarizmi. Padre el Álgebra

Al–khwarizmi nació en Jorezm, al sur del Mar de Aral (hoy Jiva, Uzbekistán), se cree que fue en el año 780, vivió en Bagdad en la era de oro, de la ciencia islálica, a él se le considera el padre del Álgebra, debido a su obra Kitab al-jabr wa al-muqabalah, traducida al latín en el siglo XII dando origen al término "Álgebra". En ella se compilan las reglas para obtener las soluciones aritméticas de las ecuaciones lineales y cuadráticas, las que en esencia no difieren de los métodos de solución actual. Otra obra del insigne matemático árabe, es Algoritmi de numero Indorum, de la que se derivó a su vez el término "algoritmo".

El Álgebra desde su génesis, como conocimiento científico, fue concebida como una generalización de la aritmética, porque precisamente fue en la búsqueda de soluciones generalizadas a problemas aritméticos fue que se dio este tránsito. Hoy en día esta concepción ha cambiado, el Álgebra supone un cambio cualitativo de pensamiento del estudiante, porque en términos de estrategias globales de resolución de problema, sus enfoques se diferencian.

La resolución de un problema desde el enfoque aritmético supone la descomposición del mismo en subproblemas más sencillos, hasta llegar a una solución, que se impone por sí misma. Mientras que la resolución de un problema desde un enfoque algebraico implica, la identificación de las variables que intervienen y de los parámetros para posteriormente, buscar las relaciones entre ellos y conseguir expresarlas en términos algebraicos, dando lugar a una o varias ecuaciones que aún deben ser resueltas. (Bodanskii, citado por Gavilán, 2011).

2.3.5.1. El Lenguaje Algebraico

La Matemática como lenguaje ha separado y refinado varios de los elementos abstractos que son fundamentales a todos los lenguajes humanos" (Peat, 1990). El lenguaje algebraico está constituido principalmente de las letras del alfabeto y algunas expresiones griegas, su función fundamental es estructurar un idioma que contribuya a la generalización de las diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética, principalmente.

Palarea & Soca (1994), sostiene que el lenguaje algebraico es un sistema de representación que se encarga del significado de las escrituras algebraicas y del papel que juegan los signos del Álgebra en sí misma y como la herramienta de modelización de sistemas no algebraicos.

El leguaje algebraico, como parte esencial del lenguaje matemático es considerado un sistema de símbolos para dar significados y promover la existencia de las reglas que se utilizan para realizar transformaciones. Por tanto, está compuesto por una semántica y una sintaxis conformada por símbolos.

2.3.5.1.1. Símbolos

El Diccionario de la Real Académica de la Lengua Española, define símbolo como *"Representación sensorialmente perceptible de una realidad, en virtud de rasgos que se asocian con esta por una convención socialmente aceptada."*

La primera parte de esta definición no va con la de símbolos que se utilizan en Matemática, principalmente los algebraicos, ya que dichos símbolos no son sensorialmente perceptibles de una realidad. En cambio, al analizar la segunda parte de la definición se acerca a lo que Matemáticamente se entiende por símbolo en lo concerniente al convencionalismo de su significado dentro de la comunidad de matemáticos.

El símbolo algebraico es definido por Domene (2010) como "*elemento constitutivo de una teoría Matemática formalizada, que representa un número o un ente con el que se puede operar dentro de los límites establecidos por las propias reglas de la teoría Matemática en cuestión."*(p. 112).

Estos símbolos a los que se refiere Esquinas, se corresponden a un lenguaje formal pero asociado a signos. Esta misma autora los distingue como una marca sensible que representa los elementos y las relaciones. Para ella los signos algebraicos son una señal, una grafía que, al ser percibida, nos indica cualquiera de los elementos del campo matemático. Además, sostiene que los símbolos algebraicos son el significado de los signos algebraicos, y estos últimos son el significante, ellos forman a los conceptos que son la base del pensamiento matemático (Alcalá, 2002).

Atendiendo la lingüística de Saussure citado por Esquinas et al., el significante es el signo y el significado, es la idea, el concepto del objeto matemático según el contexto en el que este se presenta. El significado y el significante son los que dan sentido a los objetos matemáticos (Moreira, et al., 2002).

Para completar la terna hace falta el referente. El referente es el objeto en sí. En Matemática este componente, casi no es perceptible por lo abstracto de los objetos matemáticos, solo lo logran ver aquellos que han interiorizado el concepto, ya que son capaces de reconocerlo en donde quiera que esté con una simple mirada (Thompson & Sfard, 1994).

Alcalá et al. Ilustra esta situación mediante el siguiente ejemplo "tráeme cinco lápices", señala que el significante es la visión de la cifra 5, el significado es la representación subjetiva del valor numérico denotado y el referente le permite tomar los cinco objetos, en este caso los cinco lápices.

La notación simbólica que representa los conceptos, propiedades, fórmulas, operaciones, etc., son el puente para realizar razonamientos, juicios, inducciones y deducciones, que en el lenguaje ordinario sería imposible de lograr. Lo versátil de su utilidad y lo abstracto de sus símbolos, estructuras y significados, vuelve al lenguaje matemático, un lenguaje lógico y perfecto.

En este lenguaje se utiliza signos de la gramática: punto, coma, punto y coma, puntos suspensivos, paréntesis, apóstrofe, entre otros. Además, letras del alfabeto griego como α, β para nombrar ángulos y el mismo alfabeto latino, para designar las variables, las rectas, pendiente de una recta, para denotar conjuntos, etc.

En esta gama de símbolos nos encontramos con las siguientes situaciones:

- Símbolos que tienen el mismo significado. En las expresiones $\neg P$, $\sim P$ $y - P$ los símbolos $\neg$, $\sim$ y – tienen el mismo significado "NO".
- Símbolos que según el contexto varía su significado: $f : X \rightarrow Y$; $\lim_{x \to a} f(x) = b$ el símbolo →en el primer caso, forma parte de la sintaxis de una función. El segundo, forma parte de la sintaxis del límite de una función en un punto.
- Símbolos que solo tienen un significado. Los símbolos, $\int$, $\sqrt{\ }$, $\forall$, $\leq$ independientemente en el contexto que se encuentren significan lo mismo.

En estas situaciones para que los estudiantes puedan leer y comprender las expresiones en las que se encuentran los símbolos algebraicos, es necesario que ellos diferencien claramente, el significante y el significado.

Leer e interpretar símbolos utilizados en Álgebra, es una actividad lingüísticamente compleja de aprender, requiere la atención explícita de los procedimientos de conversión, además de la capacidad de priorizar la sintaxis antes de la semántica, o bien la capacidad de relacionar un objeto particular con la clase de objetos que denota el símbolo, entre otros aspectos.

2.3.5.1.2. La Semántica

La palabra semántica es un término que se escucha desde el siglo XIX, como ciencia que se ocupa de los significados. Se atribuye a Michel Bréal, en hacer de la semántica la disciplina que busca la significación de las palabras (Casas, 1997)

Para Guiraud (1994), la semántica se ocupa de investigar cómo y qué leyes de las palabras se emplean en los objetos. Chomsky (1975), considera la semántica como la base de la lingüística y por tanto, la razón de ser del lenguaje. A partir de aquí se diferencia varios tipos de semántica: la filosófica, la lógica y la lingüística.

La Semántica Filosófica, indaga el significado con relación al referente enfatizando en los problemas entre significado, la realidad, la verdad y el comportamiento.

La Semántica Lógica, estudia el significado como parte del pensamiento formal, este tipo de semántica es la que contribuye al desarrollo del pensamiento matemático a través del análisis, la síntesis, las abstracciones y generalizaciones, habilidades que nuestros estudiantes deben adquirir durante el proceso de aprendizaje de la Matemática. En el estudio, nos interesa analizar el nivel de desarrollo del pensamiento formal a través de los significados que le dan los alumnos a los objetos matemáticos presentes en la resolución de ejercicios y problemas relacionados con los casos de factorización.

Para Morris (1998), la Semántica Lingüística es: "*una ciencia empírica y la inducción es el método usado por ella para la formulación de sus leyes*". (p. 27). Precisamente, Este tipo de semántica es la encargada de analizar las relaciones que se establecen entre el significado y el significante.

Existen dos razones fundamentales del por qué la Semántica Lingüística tiene mucha importancia en el proceso de construcción del conocimiento matemático en los estudiantes, la primera, porque uno de los propósitos principales del aprendizaje de la Matemática es comprender el significado de los signos propios de esta disciplina, entre ellos los signos lingüísticos utilizados en Matemática y los significados que éstos cobran en diferentes contextos matemáticos. La segunda, porque muchos de los errores que cometen los estudiantes a la hora de resolver ejercicios y problemas de Matemática, son causados por desconocer los significados de los símbolos en dichos contextos.

2.3.5.1.3. La Sintaxis

Galagovsky (2004) afirma que los lenguajes poseen una forma adecuada y propia de ordenar las secuencias de sus elementos sintácticos y que precisamente solo estos elementos son los que percibe el aprendiz del discurso del experto. A partir de aquí se espera que los aprendices reconstruyan en sus mentes niveles semánticos semejantes a las que domina el experto, pero, que para alcanzar esta reconstrucción, únicamente disponen de sus propias representaciones mentales de partida, que probablemente son muy diferentes a las del experto.

Wittgenstein (1999) estudió las condiciones y las reglas sintácticas que caracterizan a un lenguaje que además de ser lógicamente perfecto, evite los sinsentidos y las confusiones que en algunas ocasiones se producen en el lenguaje corriente. Estas características están presentes en el lenguaje algebraico, por ser un lenguaje compuesto por expresiones lógicamente estructuradas y con un solo significado.

El lenguaje algebraico, está compuesto, por símbolos, signos, variables, con su sintaxis estricta. Por ejemplo las expresiones “el cuadrado de x” o “x al cuadrado” son equivalentes, pero quién no domina el lenguaje algebraico, en el primer caso podría escribir ${}^{2}x$, aplicando el lenguaje natural. No obstante, quien maneje el lenguaje algebraico jamás se le ocurriría escribir tal expresión, porque ésta carece de significado.

La siguiente expresión: $\forall x \in R, \exists! -x \in R: x + (-x) = 0$, es la sintaxis de unicidad de la propiedad del opuesto aditivo. Alguien que solo conoce los símbolos de forma independiente y desconoce estructuras de significados matemáticos, no podrá atinar con el significado correcto de esta sintaxis, porque el signo de admiración es un signo lingüístico (!) que por sí solo en Matemática, no tiene significado pero asociado a otro, forma una estructura con sentido, en este caso $\exists!$ se lee “existe un único”.

Las estructuras sintácticas o problemas lógicos de la adquisición del lenguaje, -como los llamó Chomsky en su tesis doctoral-, para poder aprenderlas se requiere además del conocimiento específico de la lengua -en este caso del lenguaje algebraico-,operaciones formales complejas que difícilmente se adquieren por instrucciones explícitas de los maestros u otro experto.

Dentro del lenguaje algebraico tenemos reglas sintácticas:

- **Término**. Los coeficientes van antes de las variables, las variables se escriben en el orden que están en el alfabeto, los exponentes se escriben en la parte superior derecha de la base y los subíndices en la parte inferior derecha de las variables.

- **Los signos de agrupación**

En la enseñanza de la aritmética se establece una jerarquía entre los signos de agrupación, lo que permite orientar el orden en el que se resolverá un ejercicio de este tipo. El mayor signo de agrupación es la llave $\{\ \}$, le siguen los corchetes [ ] y por último están los paréntesis ( ). Esto indica que primero se resuelve lo que está entre los paréntesis, luego lo que está en corchetes y por último lo que está entre llaves.

- **Operaciones Matemáticas**

  En la resolución de ejercicios en donde intervienen las operaciones aritméticas, estas guardan una jerarquía. Las primeras son la operación potenciación, multiplicación y división y por último la suma y la resta.

- **Uso de los signos de las operaciones aritméticas**

Para sumar y restar, solo existe un signo + y -, respectivamente. La operación multiplicación en las estructuras sintácticas algebraicas va implícita, porque si utilizamos la x, signo establecido para la multiplicación, en el contexto algebraico tiene el significado de variable. Cuando se quiere indicar explícitamente la operación multiplicación, generalmente se utilizan los paréntesis.

- **Uso del signo igual**

Si queremos indicar que dos expresiones son semánticamente iguales las unimos con el signo igual. Este se coloca en el centro, por ejemplo: 3x (x+2y) = $3x^2$ + 6xy. De igual manera, cuando tenemos expresiones fraccionarias como:

$$\frac{5x-2}{x+1}=\frac{3x+2}{x-1}$$

Las líneas de división tienen que quedar en el centro del signo igual.

Para resumir, se presenta en el siguiente gráfico la caracterización del lenguaje algebraico que manejan los expertos y los novatos. Asimismo, refleja cómo evoluciona el lenguaje algebraico del novato hasta adquirir el nivel de experto.

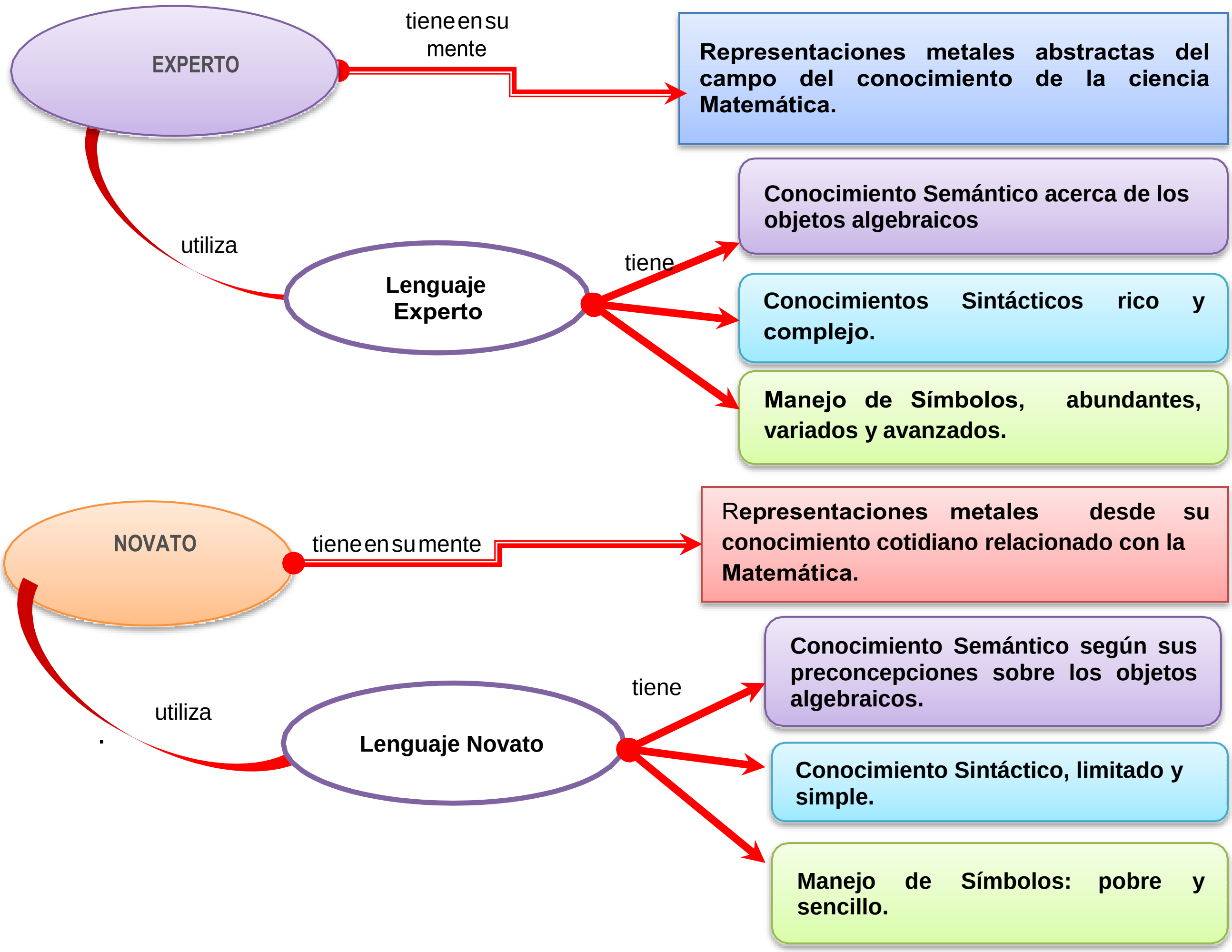


Figura 15. Conocimiento del Experto y el Novato. Adaptación del gráfico de Galagovsky (2004). Elaboración propia.

2.3.5.2. Los Algoritmos en Matemática

Los algoritmos están presentes en todas las ramas de la Matemática, especialmente en las operaciones básicas y el Álgebra, como el procedimiento para dividir polinomios, para resolver sistemas de ecuaciones, etc.

Los algoritmos son una serie finita de pasos, libre de ambigüedades, que conducen a la solución de un problema determinado (Fonseca & Sánchez, 2010).A través de ellos se obtienen resultados que no necesitan justificar los pasos que se dan. Además, son fácil de aplicar y para ello demanda concentración, siempre y cuando se apliquen con rigor y se siga el orden que se especifica en ellos (Labraña y Balterio, 2002).

Para que un listado de pasos se le pueda llamar algoritmo debe cumplir con las siguientes características:

- Preciso: Especifican claramente el orden en el que se deben ejecutar cada uno de los pasos.
- Efectivo: Utilizando los mismos datos, se puede aplicar n veces y el resultado siempre será el mismo.
- Finito: Tiene un número limitado de pasos.
- Eficaz: Resuelve el tipo de problema para el cual fue creado.

Los algoritmos forman parte importante del desarrollo del pensamiento matemático. Por su naturaleza los estudiantes tienden a memorizarlos y los aplican mecánicamente. Por ende, en la enseñanza de estas herramientas, se debe cuidar que los alumnos comprendan por qué aplicar cada uno de los pasos que conforman el algoritmo que van aplicar.

Los errores más comunes que se cometen cuando se aplica un algoritmo son:

- No seguir fielmente los pasos indicados en el algoritmo. Esto sucede cuando se omite la aplicación de uno de los pasos o se invierte uno de estos.
- No utilizar los datos indicados. No identifican el o los datos que se solicita en los pasos o se utilizan mal.
- De cálculo. Cuando en el paso se amerita realizar un cálculo y este no se realiza correctamente o bien no se realizan las conversiones previas.

2.3.5.3. La Enseñanza y el Aprendizaje del Álgebra

Los estudiantes que llegan a las universidades, psicológicamente están preparados para el aprendizaje del Álgebra, ya que sus edades sobrepasan a los 12 años, y según Piaget, tiene desarrollado el pensamiento formal, son capaces de apreciar las relaciones, expresiones y abstracciones en el Álgebra y en otros campos (Marquina, Moreno & Acevedo, 2014)

Muchas investigaciones respaldan la idea de enseñar el Álgebra a través de situaciones aritméticas, para facilitar la circulación a esta rama de la Matemática, considerada como la de mayor abstracción. Lo anterior significa, promover el desarrollo del pensamiento algebraico mediante el pensamiento numérico. El tratamiento didáctico inadecuado en esta vía, podría conducir a uno de los mayores errores que cometen los estudiantes, al resolver tareas de Álgebra dando respuestas numéricas, en estos alumnos, existe una necesidad de cerrar con un número y consideran que la solución esta inconclusa cuando esta lleva variables.

Bastable & Shifter, citado por Molina (2006), apuntan por la introducción temprana del estudio del Álgebra. Ellos afirman que si la enseñanza está fundamentada en las ideas de los alumnos y en promover su curiosidad, éstos evidenciarán su manera de pensar Álgebra en contexto de aritmética, geometría o medida. Esta ruta es más cercana a cualquier tipo de aprendizaje matemático.

A los estudiantes novatos, les resulta difícil utilizar métodos formales a la hora de resolver ejercicios y problemas algebraicos y los resuelven utilizando métodos que les funcionan en Aritmética, por ejemplo lo que les indica el signo igual, las convenciones, en el uso de los signos de agrupación, el orden convencional de las operaciones, las concatenaciones, etc. (Kieran, y Filloy, 1989)

Marquina, et al. (2014), coincide con Bastable & Shifter, en considerar al estudiante después de los 12 años apto para iniciar el estudio del Álgebra, tanto psicológicamente como académicamente, porque ya ha trabajado en aritmética y geometría elementos que le proporcionan un acercamiento a esta rama de la Matemática.

Por otro lado, los objetos algebraicos son abstractos y para favorecer el aprendizaje del Álgebra se requiere de un cambio de pensamiento, pasar de situaciones concretas a proposiciones generales con números y operaciones, es decir, proponer al estudiante actividades asociadas a procesos de generalización de forma gradual, puesto que, muchas de las situaciones de nuestro quehacer diario, hacemos referencia a este tipo de eventos “generalmente pasa que …” o “casi siempre…” solo que, en contexto matemáticos se exige el cumplimiento de propiedades para todos los elementos de una determina colección (Villa, 2006)

Las anteriores consideraciones expresan el qué, cómo y cuándo, iniciar la enseñanza del Álgebra, cuyo fin se traduce en desarrollar el pensamiento algebraico - esta es una forma de reflexionar Matemáticamente-. Pero también la enseñanza del Álgebra tiene otro reto, que es la contextualización de los contenidos algebraico, de manera que el aprendizaje, no se limite a la reducción de términos semejantes, a la simple repetición de fórmulas o la aplicación de algoritmos carentes de sentido. El docente debe manejar los distintos enfoques con los que se puede abordar el estudio del Álgebra y articularlos de forma tal, que el aprendizaje sea significativo, relevante y ameno.

Para Godino, citado por Rojas y Vergel (2013), el razonamiento algebraico “Implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las Matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar […], especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones […]" (p. 763).

A continuación tenemos los enfoques de la enseñanza del Álgebra:

- *Medio para resolver problema.* Porque en esta rama de la Matemática se encuentran herramientas que facilitan la modelización y generalización para el cálculo. En este sentido el Álgebra tiene un papel instrumental en la resolución de problemas.

- *Estudio de las Funciones*. Para establecer relaciones entre variables y analizar comportamiento de las funciones. En este enfoque los casos de factorización juegan un papel preponderante, pues son el pivote para hacer dichos análisis.

- *La Generalización*. Este enfoque se refiere a la generalización de relaciones y el estudio de patrones y estructuras. La generalización es indispensable para el desarrollo del pensamiento algebraico puesto que a través de esta se alcanzan los mayores niveles de abstracción. Esta no es solo pasar de una colección de situaciones particulares a una expresión que las abarque a todas, tampoco es solo definir a partir de las características de un objeto un grupo de estos, también se generaliza cuando transferimos a contextos propiedades que se cumplen en otros. Además, generalizamos cuando ampliamos el ámbito de definiciones a una ley (Villa, 2006:142)

- *El Lenguaje*. El lenguaje algebraico como medio para expresar ideas Matemáticas o sea, como un sistema de representaciones.

Todos estos enfoques además de desarrollar el pensamiento algebraico, son una vía para introducir el estudio del Álgebra, teniendo en cuenta que, al trabajar con uno de ellos es difícil no invadir a otros. Por tanto, es necesario que el tratamiento se haga desde diferentes perspectivas, para que el estudiante tenga una visión integral de los objetos algebraicos.

Duval, citado por Aragón, Castro, Gómez & González (2009) afirma que el acceso a los objetos matemáticos solo es posible mediante sus representaciones semióticas, por tanto el papel que juegan las representaciones numéricas, algebraicas, gráficas, los procedimientos matemáticos y el lenguaje con que estos se comunican son decisivos para que el conocimiento matemático sea comprendido. Para hacer florecer estas representaciones a través de los diferentes enfoques, es necesario utilizar recursos didácticos que permitan al aprendiente ponerse frente a experiencias sensoriales para la asimilación del nuevo contenido, acercándolo a situaciones de la vida cotidiana, de forma concreta, accesible y observable, que despierte y maximice la motivación.

¿Qué son los recursos didácticos?

Burgués y Fortuny, citados por García, Granier, Moreno y otros (2003), opinan que los recursos didácticos son todos los objetos, aparatos, medios de comunicación que ayudan a descubrir, entender o consolidar los conceptos fundamentales en las diversas fases del aprendizaje mediante la percepción, visual, sonora o táctil.

En la enseñanza del Álgebra se destacan como recursos didácticos, los elementos históricos para ubicar los objetos algebraicos en su evolución o bien, para identificar los obstáculos epistemológicos en el aprendizaje del Álgebra, lo que permitirá enfocar el planeamiento de manera que, el tránsito de este tipo de obstáculo sea más ligero para el estudiante.

La historia de esta ciencia como recurso, es importante para el alumno, ya que no solo lo enriquece culturalmente, sino también, da lugar a que conozca las ideas, los términos, el lenguaje y las notaciones en que se expresaban, las dificultades que se enfrentaron, los problemas que se resolvían y sus contextos, las estrategias, métodos y técnicas que aplicaban, cómo creaban las definiciones, teoremas y demostraciones. Este conocimiento, en el docente, le facilitará realizar las ilaciones tanto de carácter cultural como en la ciencia misma en el marco espacial y temporal, de cómo fueron evolucionando hasta su estado actual (González, 2004) y tener más flexibilidad en el diseño de sus estrategias de enseñanza de los temas algebraicos –en este caso–.

Son muchas las razones por las que resulta difícil aplicar la historia de las Matemáticas en las aulas, como recurso didáctico, porque depende de muchos factores, entre ellos el nivel académico, el conocimiento que tengan de la historia de esta ciencia y la importancia que el docente le dé a este conocimiento.

La historia de la Matemática es un buen punto de partida para iniciar el estudio de cualquier contenido, mostrar la aplicabilidad de estos, pero además, permite conocer la aparición de obstáculos epistemológicos que son muy parecidos a los que presentan los estudiantes en la actualidad.

De lo anterior queda planteado un reto a los docentes de Matemática ¿De qué manera podemos potencializar la historia, en este caso del Álgebra como recurso didáctico?

A continuación se presenta cómo se enfocan los casos de factorización en la educación media y primer año en las universidades.

En Matemática se conoce como factorización a la descomposición de una expresión Matemática en multiplicación. Pero factorizar una expresión algebraica, significa hallar los factores cuyo producto es igual a la expresión dada.

En la mayoría de los textos escolares se señala que existen diez casos de factorización.

En el currículo nacional de educación básica y media, los casos de factorización se estudian en noveno y décimo grado. En la universidad se estudian en la segunda unidad del programa de asignatura de Matemática General y se abordan básicamente 7 casos: factor común, diferencia de cuadrado, trinomio cuadrado perfecto, trinomio x^2 +bx +c, trinomio de la forma ax^2 +bx +c, suma o diferencia de cubos y el producto de un binomio al cubo.

En Nicaragua el libro que la mayoría de los docentes recomiendan a sus alumnos para estudiar los casos de factorización es el “Álgebra Baldor”. Este texto presenta la fórmula, da un ejemplo y luego propone una lista de ejercicios para aplicar dicha fórmula. Este tratamiento es el mismo para cada caso. Al final presenta una lista de no menos de cincuenta ejercicios con casos variados.

En los libros de textos nacionales los casos de factorización se trabajan de manera muy parecida, promoviendo así, el aprendizaje memorístico, repetitivo de un algoritmo sin comprensión. A esto se le suma el hecho, que no se dan ilustraciones de la aplicabilidad de ellos en la vida cotidiana. En el mejor de los casos, se utilizan figuras geométricas cuyas dimensiones se adaptan a los términos de los casos de factorización para que se puedan deducir los factores, pero esto solo es posible si los estudiantes manejan las fórmulas del área del rectángulo y cuadrado, además si comprenden la definición de perímetro y volumen del cubo.

Para el estudiante resolver ejercicios de productos notables es más fácil efectuar la multiplicación de los factores indicados para obtener el producto, que memorizar unas fórmulas que le permita calcular el producto “al aire”. En el caso de la factorización, dado el producto “aplicar el algoritmo mentalmente”, de manera que los factores se obtengan “por simple inspección”, estas habilidades solo se alcanzan si hay comprensión de cada una de estas identidades algebraicas.

En conclusión, esta forma de enseñar las identidades algebraicas, conlleva al fracaso en el aprendizaje de las mismas, porque los estudiantes utilizan estas expresiones algebraicas, de forma superficial y aplican las reglas sintácticas, desprovistas de los aspectos semánticos (Gómez, 1989) lo que hace que estos conocimientos no tengan relevancia para ellos, por estar carentes de utilidad práctica. Tal situación hace más compleja la apropiación del lenguaje algebraico, que tiene mucho potencial para la comprensión de otras ciencias y de la misma Matemática (Drouhard & Teppo, 2004).

Capítulo 3

Diseño Metodológico

Capítulo 3

3. DISEÑO METODOLÓGICO

La investigación se desarrolló en dos etapas. En la primera etapa se identificaron y clasificaron los errores y obstáculos que presentan los estudiantes durante el proceso de aprendizaje de los casos de factorización en la unidad de Álgebra del programa de Matemática General. En la segunda etapa, se determinaron y analizaron las estructuras cognitivas de los estudiantes relacionadas con dichos casos y sus prerrequisitos.

A continuación se describe el proceso paso a paso.

3.1. Paradigmas de Investigación

El paradigma de esta investigación es cualitativa porque el investigador define los criterios para filtrar los datos, con autoconciencia, reflexión continua y análisis recursivo, es de naturaleza flexible, abarca el fenómeno en su conjunto, el diseño es emergente, se va elaborando a medida que avanza el estudio, el problema se puede replantear adoptando los cambios que se consideren pertinentes. Se basa en categorías, que son las dimensiones de las variables de investigación, no admite análisis estadístico y no suele probar teorías o hipótesis, más bien, sirve para generarlas (López Noguero, 2002).

Además, este paradigma de forma inductiva enfocan los conceptos relevantes a medida que se va profundizando en el estudio (Hernández, Fernández & Baptista, 2006), se fundamenta en las experiencias que los docentes tienen acerca del aprendizaje de los casos de factorización, en los errores que cometen los estudiantes en el proceso de aprendizaje de estos casos y en los obstáculos que desde su óptica confrontan los alumnos.

En consecuencia de lo anterior, el estudio se desarrolló sobre el paradigma interpretativo, porque se indaga de forma procesual, con estrategia abierta y no estructurada, los errores y los obstáculos que se presentan en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización de la unidad de Álgebra, esto facilita acceder a aspectos importantes que no es posible lograr con una estrategia rígida. Se quiere ver desde los ojos de los alumnos y penetrar en los esquemas metales con los que ellos operan y que los conduce al error (Aravena, Kimelman, Micheli, Torrealba & Zúñiga, 2006).

También, en el estudio se aplicó la metodología fenomenológica, puesto que se intenta comprender las percepciones de los docentes, y como investigador, las interpretaciones de cómo se dan los errores, los obstáculos y la relación entre estos. Es decir el estudio pretende puntualizar cómo ocurre el fenómeno, desde la pura expresión, sin interferencia del investigador, mediante el análisis de múltiples perspectivas, y así comprender cómo los estudiantes construyen sus significados (Villalobos, 2013).

El nivel de profundidad del estudio va más allá de la descripción, explica el por qué ocurren las cosas, cómo suceden, cuáles son sus factores determinantes, de donde proceden, cómo se transforman (Ander-Egg, 1995). Como su nombre lo indica, los estudios explicativos, por su naturaleza proporcionan entendimiento de lo indagado, responde por los errores y la causa que los origina –obstáculo–, el interés estuvo centrado en explicar el por qué ocurre ese error y cuál es el obstáculo, cómo se gesta el error y cómo se relacionan estas dos variables en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización.

Dankhe, citado por Hernández et al.(2008), afirma que en este tipo de estudio, se evalúan diversos aspectos del fenómeno. En esta investigación, se proyectó en encontrar cuestiones relacionadas a los errores y sus obstáculos a través de las estructuras cognitivas de los estudiantes, lo que permitió profundizar para llegar al posible origen del problema.

Por su parte Yin, citado por Díaz, Mendoza & Porras (2011) considera el estudio de caso una estrategia de investigación que comprende todos los métodos de la lógica de la incorporación en el diseño de aproximaciones específicas y que además, responde a ciertos tipos de interrogantes que ponen su énfasis en el

¿Qué? ¿Cómo? Y ¿Por qué? Lo anteriormente expuesto, conllevó a la adopción del diseño micro-etnográficos, para analizar las ideas de los estudiantes, aplicar técnicas para interpretarlas y explicar los significados, conocimientos y prácticas realizadas por el grupo. Estos alumnos que compartían un mismo contexto socio educativo, pertenecían a la misma clase social, cursaban la misma carrera, tenían los mismos docentes, pertenecían al mismo grupo de clase y sus edades oscilaban entre 17 y 22 años.

3.1. Rigor Científico

Con el objetivo de conservar la integridad del tratamiento cualitativo y garantizar la calidad del presente trabajo, los cánones utilizados para juzgar el mérito de los resultados, están basados en el rigor metodológico aplicado durante todo el proceso de búsqueda científica a través de los criterios de: credibilidad, trasferibilidad, dependencia y confirmabilidad (Guba, citado por Arias & Giraldo, 2011)

3.1.1. Credibilidad

Este criterio permite ver el valor del estudio, desde el consenso comunicativo de los agentes implicados. En este trabajo la credibilidad se aprecia en tres escenarios que convergen para tal fin. El primero, mediante la metodología aplicada en la recogida de los datos a través de las entrevistas a profundidad, los cuestionarios, las RAP, la triangulación, la interpretación y la sistematización de los datos. Asimismo, en la documentación e ilustración de datos. Este isomorfismo entre los datos recogidos y la realidad, hacen que los resultados de la investigación reflejen la verdad.

El segundo escenario, estuvo relacionada con la confirmación de los hallazgos. Se volvió a los informantes durante la recolección de los datos para reafirmar lo encontrado en un primer momento, para que estos descubrimientos fueran lo más creíbles y fieles. Se utilizaron técnicas para contrastar datos que permitirán corroborar afirmaciones o corregir los errores de interpretación para clarificar lo dicho por el investigador.

Los informantes son los que conocen su mundo y que probablemente este difiera significativamente del mundo del investigador, es la razón por la que el tercer escenario, fue el aval emitido por los informantes claves, a los hallazgos encontrados durante el proceso de investigación.

3.1.2. Transferibilidad

Este criterio, conocido también como aplicabilidad, se observa que los hallazgos encontrados pueden utilizarse con otros estudiantes, que estén aprendiendo los casos de factorización del Álgebra Elemental. En la contextualización del estudio se hizo una descripción densa del lugar y las características de los alumnos, para que los nuevos estudios puedan comparar los contextos de tal manera que la transferibilidad se pueda dar de forma directa, y si hay que hacer ajustes, éstos sean mínimos e imperceptibles.

Los resultados de esta investigación que pueden ser transferibles son los siguientes:

- Las redes sistémicas que reflejan los errores más frecuentes detectados en los estudiantes y sus respectivos obstáculos. Estas pueden servir de base para futuros estudios.

- Considerar como punto de partida la red asociación de Pathfinder – promedio. Esta brinda una visión general de la estructura cognitiva de los Conceptos Nucleares relacionados a los casos de factorización.

- Los Conceptos Nucleares para el estudio de los contenidos de Álgebra, segunda unidad del programa de Matemática General de la UNAN-Managua. Mismos que fueron obtenidos de las entrevistas a los coordinadores de la asignaturas y corroborados a través de un cuestionario que se aplicó a los estudiantes.

3.1.3. Dependencia

Este criterio también se conoce como consistencia. Para lograr la consistencia de los hallazgos del estudio, se realizaron las acciones siguientes:

- Valorar el proceso de recogida, análisis e interpretación de datos a través de un evaluador externo.

- Triangular los documentos curriculares para contrastar el tratamiento didáctico de la unidad de Álgebra.

- Triangular las taxonomías de diferentes autores acerca del error.

- Triangular la clasificación de los obstáculos por diferentes autores.

- Triangular los resultados del análisis documental y la entrevistas a docentes acerca de las estrategias de enseñanza orientada en los documentos curriculares y lo que se aplica en el aula en el proceso de aprendizaje de los casos de Factorización.

- Triangular los resultados del cuestionario, referido a los errores con los índices de coherencia, complejidad y similaridad de las Redes Asociativas de Pathfinder para el análisis de las causas del error desde la estructura cognitiva de los estudiantes.

3.1.4. Confirmabilidad

Este criterio hace referencia a la neutralidad. Esta se aprecia a través de la recogida de los registros, en las trascripciones textuales, en las citas directas. En el diseño metodológico, hay una descripción en detalle de todo el proceso investigativo, de manera, que cualquiera pueda seguir la ruta de lo que se hizo en el estudio. Además, en anexo se brindan los registros y documentación de las decisiones, ideas e incertidumbres que se dieron durante la investigación. Para tal efecto, se presentan evidencias como:

- Descripción del proceso de validación de los instrumentos.
- Videos, grabaciones, e instrumentos llenados por los participantes, con sus respectivas transcripciones fieles y Análisis de las mismas.
- Las parrillas del primer nivel de análisis.

3.2. Población y Muestra

La población la integraron los docentes que desarrollaron la asignatura de Matemática General a través de Conferencias Magistrales y los alumnos que cursaron esta clase, en el segundo semestre del 2016 en la UNAN-Managua.

La técnica que prevaleció en la selección de la muestra fue la no probabilística, porque no se aplicaron fórmulas estadísticas para determinar el tamaño de esta, ya que no se pretendía garantizar la representatividad de los participantes. Por tanto, los criterios de selección fueron definidos por el investigador según su conveniencia por decisión razonada.

PRIMERA ETAPA DEL ESTUDIO

- ***Entrevista a profundidad (5 docentes):***

  Se entrevistó a los directores y coordinadores de la asignatura de Matemática General del II semestre 2015, en cada recinto de la UNAN-Managua. Estos docentes se distinguieron por tener vasta experiencia en el desarrollo de la asignatura y por su formación inicial como profesores de Matemática de Educación Media.

Cabe mencionar que esta etapa se inició con el análisis documental.

SEGUNDA ETAPA DEL ESTUDIO

- ***Cuestionario con Preguntas Abiertas (30 estudiantes):***

Se seleccionó un grupo de clase de Matemática General, que recibían la Conferencia Magistral (200 alumnos), en el turno matutino durante el I semestre 2016, el cual estaba conformado por cinco subgrupos. Para efectos del estudio, convencionalmente se seleccionó uno de estos subgrupos conformado por 30 estudiantes ya que para esta investigación bastaba tomar uno de estos subgrupos, considerándose que todas las variables podían ser estudiadas a través de cualquiera de los subgrupos.

- ***Redes Asociativas de Pathfinder (30)***

En esta técnica participaron los estudiantes del subgrupo seleccionado que asistieron a todas las clases magistrales de la unidad de Álgebra, y a todas las clases de subgrupos.

Tabla 8. *Muestra del estudio*

TÉCNICA DE RECOGIDA DE DATOS	DOCENTES-CANTIDAD	ALUMNOS-CANTIDAD
Entrevista	5	0
Cuestionarios	0	30
Redes Asociativas de Pathfinder	0	30
TOTAL	**5**	**30**

La muestra quedó conformada por 5 docentes y 30 estudiantes de la UNAN-Managua. Los estudiantes que participaron en los cuestionarios y las Redes Asociativas de Pathfinder son los mismos.

3.3. Técnicas e Instrumentos de Recogida de Datos

En el estudio se utilizaron cuatro técnicas como son el Análisis Documental, la Entrevista a Profundidad, el Cuestionario y las Redes Asociativas de Pathfinder. Estas fueron aplicadas en las dos etapas en la que se desarrolló la investigación. A continuación se describe en el orden de aplicación, el tipo de información que se recopiló en cada una de estas técnicas y cuál fue la utilidad de estos datos.

1) Análisis Documental:

Los documentos constituyen la fuente más importante en una investigación cualitativa porque el contenido de éstos permite alcanzar un mayor nivel de conocimiento y nuevas fuentes de comprensión del tema objeto de estudio (Taylor & Bogdan, 1986). Por ende, la técnica de análisis documental es imprescindible en la investigación de carácter cualitativo porque el punto de entrada al proceso investigativo, es el análisis documental. Según Quintana & Montgomery (2006) esta técnica se desarrolla a través de un rastreo, inventario, selección, clasificación y lectura en profundidad de los documentos.

La aplicación de estos cinco pasos, permitió cruzar y comparar el contenido de los documentos, para formular de forma precisa y con proposiciones científicas el abordaje de los objetos matemáticos y fijar la terminología conceptual de los entes matemáticos de uso más frecuente, estudiados en la unidad de Álgebra. Los documentos analizados fueron los siguientes:

a) Modelo Educativo de la UNAN-Managua: se analizó el enfoque curricular, pedagógico y didáctico, estrategias sugeridas en el modelo y sistema de evaluación.

b) Expediente de la asignatura de Matemática General del II semestre 2015: Programa de la asignatura, plan didáctico, minutas de clase, guías de estudios, utilizados en la unidad de Álgebra. Este análisis se realizó con el propósito de describir los enfoques con los que se desarrolla la unidad, el nivel de profundidad, los materiales y recursos utilizados, las estrategias sugeridas y planificadas para el desarrollo de la misma. Además, la bibliografía recomendad a la que le se le presentó atención especial.

c) Bibliografía Sugerida: Análisis del tratamiento metodológico de los contenidos de Álgebra en los textos, definiciones utilizadas, símbolos, ejemplos, ejercicios y problemas entre otros.

d) Analizar las Taxonomías del Error y la Tipología de los Obstáculos, como base teórica para profundizar en los errores y obstáculos detectados a través del cuestionario y las Redes Asociativas de Pathfinder (estas se abordan más adelante).

2) Entrevistas a Profundidad

Dentro de los estudios cualitativos existe una variedad de técnicas que ayudan a aproximarse y comprender el fenómeno social, entre ellas se destaca la entrevista no estructurada o entrevista a profundidad (Ruiz, 2012 y Barrantes, et al., 2002). Este tipo de entrevista tiene como propósito lograr el mayor grado de comprensión de la visión, experiencias y sentimientos del entrevistado alrededor de la temática, aquí lo que interesa son las explicaciones, rastreando y detallando mediante preguntas, la información más relevante para los intereses de la investigación, y así conocer a los informantes lo suficiente para comprender qué quieren decir (Roble, 2011).

Después del análisis documental se aplicó está técnica para conocer de viva voz del informante, la metodología empleada por los docentes durante las clases. Así mismo, los errores y obstáculos en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización y los aprendizajes previos indispensables –prerrequisitos– para que los alumnos se apropien de estas identidades algebraicas. La información recopilada fue el insumo para la construcción final tanto, del cuestionario que se aplicó a los estudiantes, como para seleccionar los Conceptos Nucleares.

La guía de entrevista con preguntas abiertas se aplicó en tres sesiones. Durante la recogida de información a través de esta técnica, se estableció un clima de confianza, respeto, actitud asertiva, esto dio lugar a que el entrevistado se expresara libremente.

Primera Sesión:

Esta sesión tenía como propósito conocer la metodología empleada por los docentes en el desarrollo de la unidad de Álgebra y las estrategias metodológicas que utilizan, para enfrentar los errores y obstáculos durante el aprendizaje de dichos contenidos. Además, conocer desde la óptica del docente, cuáles son los conocimientos, habilidades, aplicaciones, etc. que los estudiantes deben dominar para aprender los casos de factorización. Esta información contribuyó a identificar los Conceptos Nucleares de las Redes Asociativas de Pathfinder.

Segunda Sesión:

Se solicitó a los docentes que argumentaran cuáles son los conocimientos necesarios para aprender los casos de factorización. Para ello se les presentó una serie de ejercicios relacionados con el lenguaje algebraico, modelos y generalizaciones y se les preguntó, cuáles eran los errores, obstáculos y tipo de razonamiento, que los estudiantes podrían utilizar al resolverlos. Además, se pidió que valorarán la pertinencia de los mismos en el cuestionario que se aplicaría a los estudiantes.

Tercera Sesión:

Se solicitó a los docentes que basándose en su experiencia identificaran los errores y obstáculos que según ellos, enfrentan los estudiantes cuando resuelven ejercicios relacionados con los casos de factorización. Esta sesión además de lo anterior, permitió concretar los Conceptos Nucleares para ingresar los términos al software GOLUCA.

3) Cuestionario: Es un conjunto de varios tipos de preguntas, preparado sistemática y cuidadosamente, sobre los hechos y aspectos que interesan en una investigación y que puede ser aplicado en formas diversas (García, 2003).

Los datos que se pueden obtener con un cuestionario pertenecen a cuatro categorías: hechos, opiniones, actitudes y cogniciones. En el presente estudio, se recogió información referida a la cuarta categoría, para conocer los errores y obstáculos al resolver ejercicios relacionados a los casos de factorización y sus prerrequisitos.

Para Murillo (2011), el cuestionario contiene preguntas que no se pueden responder de otra manera, o sea, que no se pueden conseguir por medio de otro instrumento, por tal razón, se seleccionó este tipo de herramienta.

Se aprovechó el cuestionario para hacer explícitos los significados que los estudiantes tienen en sus estructuras cognitivas sobre los conceptos prerrequisitos, la representación algebraica y geométrica de los casos de factorización a través la técnica de Asociación de Palabras. Está técnica se basa en que las palabras se almacenan según su proximidad semántica en la memoria a largo plazo, por ello las palabras que se relacionan más fuertemente en esta memoria, se emparejan más fácilmente (Casa, et al 2001). Además, para determinar los errores que cometen los estudiantes cuando resuelven ejercicios y problemas relacionados a los prerrequisitos y la aplicación de las reglas de factorización.

El cuestionario se aplicó después de abordar el tema, de forma autoadministrada, esto significa que el instrumento se proporcionó impreso directamente al informante. Con la información recogida, se elaboraron las parrillas metodológicas y las redes sistémicas (esta técnica se explica más adelante).

4) Redes Asociativas de Pathfinder. Como se ha hecho notar en otro apartado esta es una técnica valiosa para representar estructuras cognitivas, de forma gráfica. Ofrece ventajas con relación a otras, cuando queremos representar de forma espacial el conocimiento haciendo uso del principio de similaridad entre los conceptos, para mostrar patrones de relaciones entre ellos en la memoria semántica. Además, porque permite la obtención de gran cantidad de información que puede ser analizada por diferentes técnicas y con varios propósitos, sin requerir un gran esfuerzo para el investigador.

El aplicar esta técnica junto a la técnica de Asociación de Palabras, permitió conocer la estructura cognitiva de los estudiantes del subgrupo seleccionado, asociada a los casos de factorización y sus prerrequisitos. En la recopilación de los datos para las Redes Asociativas de Pathfinder se utilizó el programa informático GOLUCA, actualmente en desarrollo por el grupo de investigación en Ciberdidact de la Universidad de Estremadura, España.

En este programa se ha implementado el algoritmo que presenta al estudiante de manera aleatoria un par de conceptos (gráficos o los nombres de estos) para que puntúe la similaridad que a su juicio hay entre estos conceptos. Con los datos recogidos, el programa perfila una matriz de datos de proximidad y ofrece una representación gráfica con forma de redes de Pathfinder, aquí solo se muestran las relaciones más significativas entre los conceptos brindados al estudiante por medio del software(Casas, Luengo, Canchado y Torres, 2013).

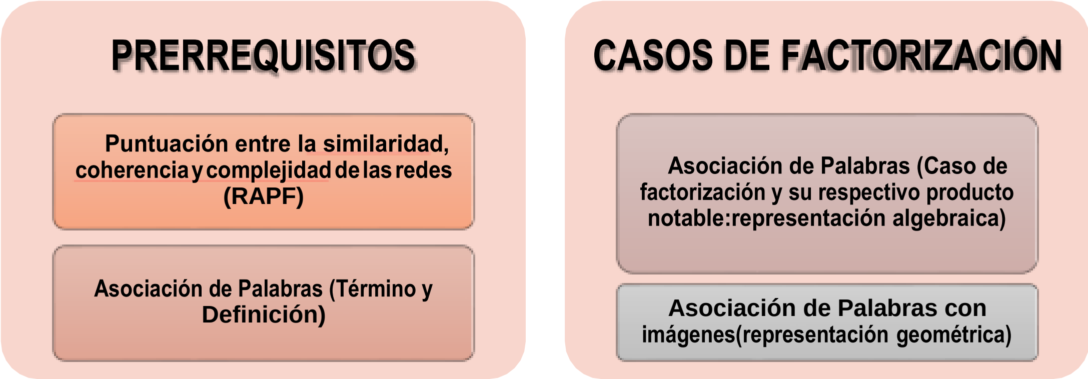


Figura 16. Técnicas para identificar la estructura cognitiva de los estudiantes relacionada a los casos de factorización y sus prerrequisitos. Elaboración propia.

En la siguiente gráfica se sintetiza el proceso metodológico que se aplicará en la recolección de los datos.

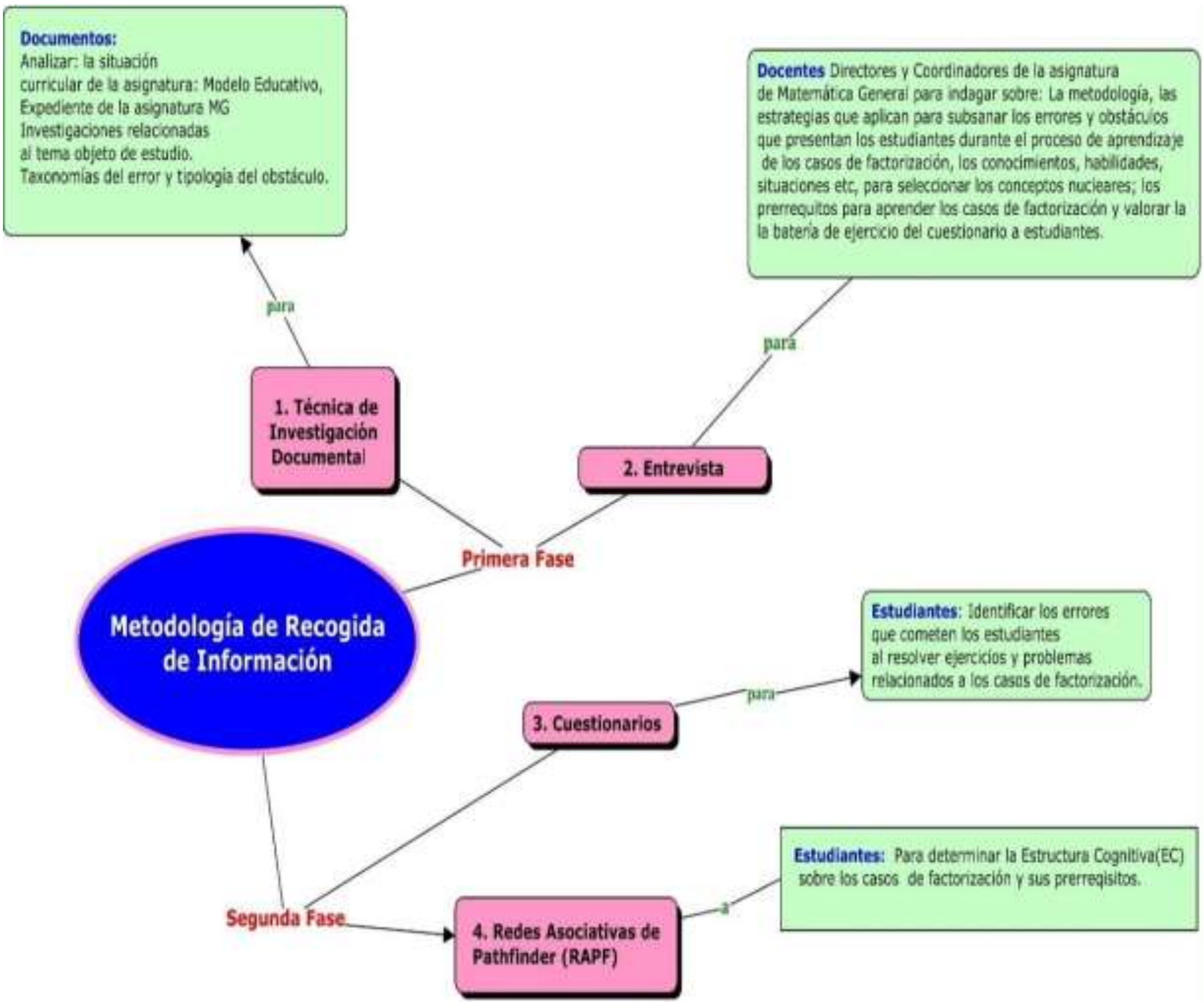


Figura N°17: Metodología para la recogida de información. (Elaboración propia, 2014)

3.4. Metodología para el Análisis de la Información

En el análisis e interpretación de los datos se realizaron tres niveles de análisis. En el primero se utilizó básicamente las parrillas metodológicas, en el segundo nivel, las redes sistémicas y en el tercer nivel, la convergencia entre los resultados de las diferentes técnicas.

3.4.1. Parrillas Metodológicas

Las parrillas o matrices son sinónimos que se utilizan para referirnos a las tablas o cuadros formados por filas y columnas. Según la finalidad de esta se encuentran varias denominaciones: Matriz Metodológica, Matriz de Congruencia y Matriz de Consistencia. En el presente estudio se utiliza el término parrillas metodológicas.

Las parrillas metodológicas permiten evidenciar el orden y secuencia de procesos posibilitando así, la evaluación del grado de coherencia y concordancia entre los componentes (García & Arce, et al., 2012). Esta técnica facilita el análisis horizontal y vertical de los resultados, aporta información y evidencias valiosas, dando así, mayor credibilidad al análisis de los resultados. Por tanto, a la hora de organizarla hay que considerar qué información deberá ir en las filas y cuál en las columnas o campos (Avendaño et al. 2003).

Atendiendo el esquema de ejecución del análisis, se describe a continuación el primer nivel a través de parrillas de doble entrada.

- **Análisis documental**: para organizar de forma paralela, los resultados. En la primera entrada, se encuentra la descripción de los documentos curriculares analizados y en la segunda entrada, las categorías de análisis. En cuanto al análisis de los errores, primera entrada autor, segunda entrada las teorías relacionadas a las tipologías y taxonomías relacionadas al error y sus causas.

- **Cuestionario**: Se elaboró una matriz de prerrequisitos, la cual tiene como primera entrada identificación del estudiante y los siguientes campos conceptos prerrequisitos y ejercicios prerrequisitos. En las celdas se marcó con una "v" si el ejercicio o concepto se respondió correctamente, con una "x" si no contestó, y si intentó resolverlo se describió el error.

- **Entrevistas a profundidad:** primera entrada, entrevistados, segunda entrada, preguntas de la entrevista. Se elaboró una parrilla por cada momento de la entrevista, en el caso del primer momento hay dos parrillas metodológicas, una para las estrategias y otra para los conceptos nucleares (ver anexo 7, 8, 9 y 10).

- **Programa GOLUCA:**

  Utilizando las herramientas del programa GOLUCA, se descargaron las tablas de índices generadas por el programa para analizar de la muestra: similaridad, complejidad y coherencia. Para esto se utilizó la parrilla que generó el programa. Asimismo, se identificaron las redes similares y redes diferentes del grupo muestra.

3.4.2. Redes Sistémicas

Las redes sistémicas son un método para organizar y analizar datos cualitativos. Son estructuras que sirven para entender las respuestas de los informantes, tomando como premisa, que detrás de cada palabra dicha o escrita en el contexto, hay un significado no directamente expresado por la palabra. A través de este método se muestran la dependencia o independencia entre las ideas que se expresan (Bliss & Ogborn, 1985).

La configuración de las redes sistémicas, son producto de la interpretación del investigador de lo que se dice o se ha escrito, por tanto, el análisis sistémico, pretende recoger todo el significado del sistema de palabras, organizados en categorías.

Por lo anteriormente expuesto, se adoptó este método para el segundo nivel de análisis de los datos recopilados.

Se diseñaron cuatro redes semánticas para profundizar en el análisis de los errores sobre:

- Asociación de conceptos prerrequisitos.
- Representación algebraica de los casos de factorización
- Representación geométrica de los casos de factorización
- Algoritmos utilizados en la resolución de ejercicios de factorización

Toda esta información fue obtenida a través del cuestionario a estudiantes.

3.4.3. La Triangulación

La triangulación se refiere al uso de varios métodos, de fuentes de datos, de teorías, de investigadores o de ambientes en el estudio de un fenómeno. Además, permite visualizar un problema de diferentes ángulos y así, las debilidades que pueda tener cada una de las técnicas de recogida de información no se sobreponen a las otras y las fortalezas de éstas se suman (Okuda & Gómez, 2005).

Otros autores como Rodríguez y otros, citado por Aguilar y Barroso (2015) la definen como: “Técnica de confrontación y herramienta de comparación de diferentes tipos de análisis de datos (triangulación analítica) con un mismo objetivo puede contribuir a validar un estudio de encuesta y potenciar las conclusiones que de él se derivan” (p. 74)

Esta técnica, constituye una de las más utilizadas para el procesamiento de datos en las investigaciones cualitativas, porque le otorga al estudio rigor, profundidad, complejidad y admite dar grados variables de consistencia a los hallazgos encontrados. También, permite reducir sesgos y aumentar la comprensión del fenómeno en estudio.

Para Donolo, citado por Aguilar et al. (2015), el aplicar esta técnica se requiere de conocimiento, de tiempo y de recursos y también, de gran agudeza para interpretar los resultados en las variadas y a veces contradictorias maneras en que estos se presentan.

En esta investigación, se utilizó la triangulación para elevar la objetividad del análisis de los datos y aumentar el rigor científico del estudio, específicamente en la validez de los resultados. Los tipos de triangulación realizados fueron los siguientes:

- **Triangulación de documentos:**

  Modelo Educativo, Normativas y Metodologías para la Planificación Curricular y Documentos del Expediente de Asignatura – específicamente el Programa de Asignatura y Planes de Clases–, para corroborar la información y determinar la coherencia entre lo que se orienta en los documentos curriculares y cómo se planifica.

- **Triangulación de teorías**:

  a) Teorías relacionadas a la taxonomía de los errores en Matemática. Para determinar la taxonomía del error, adecuada al contenido objeto de estudio y sus respectivas causas.

  b) Tipología de los obstáculos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Para identificar la tipología de obstáculo asociada a los errores cometidos por los estudiantes.

Los resultados de este análisis son la base científica con la que se argumentó el análisis de los resultados del estudio. Además, sustentan las conclusiones a las que se llegó en esta investigación.

- **Triangulación de datos**

a) Entrevista a Profundidad y Cuestionarios. Para contrastar los errores y obstáculos identificados por los docentes, con los errores cometidos por los estudiantes y los obstáculos que enfrentan en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización y sus prerrequisitos.
b) Cuestionarios y Redes Asociativas de Pathfinder(RAP). Se realizó el análisis desde los errores, obstáculos y las representaciones algebraicas y geométrica de los casos de factorización identificados en el cuestionario, con las RAP, para determinar la causa de los errores desde las estructuras cognitivas de los estudiantes.

- **Triangulaciones múltiples**:

Para cerrar el análisis se realizaron rejillas de las triangulaciones en documentos y datos, con el fin de puntualizar la relación entre la metodología con la que se enseñan los casos de factorización: estrategia de enseñanza, estrategias de evaluación, técnicas y recursos didácticos según los docentes y lo que se orienta en los documentos curriculares. (Análisis documental y entrevista).

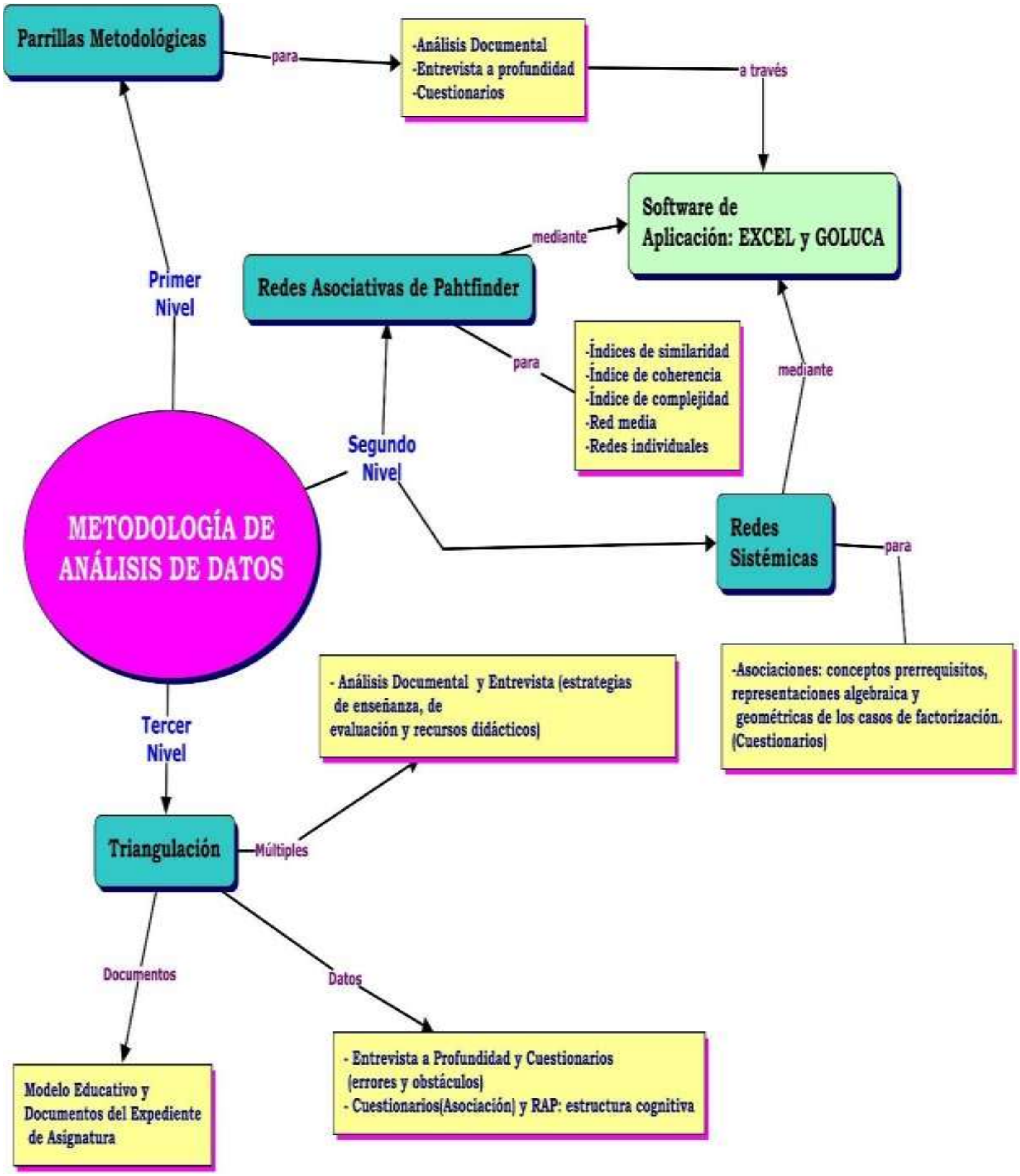


Figura 18. Metodología para el análisis de información. (Elaboración propia, 2014)

3.5. Validación de Instrumentos

El juicio de experto es un método de validación que se define como “una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones” Escobar, Pérez , Cuervo y Martínez, citado por Robles y Rojas, 2015.

La aplicación adecuada de este método, resulta de gran utilidad en la valoración de aspectos de orden radicalmente cualitativo y constituye a veces, el único indicador de validez de contenido del instrumento de recogida de datos o de información (Escobar & Cuervo, 2008). Así, la tarea del experto consiste en eliminar aspectos irrelevantes e incorporar aquellos que son imprescindibles y mejorar aquellos que lo requieran.

En la validación de los instrumentos se aplicó el método de Juicio de Expertos, considerando que se quiere validar el contenido de estos, en cuanto a su pertinencia y claridad. La pertinencia, nos indicó la correspondencia entre el contenido del ítem y la dimensión para la cual fue utilizado, de manera que, los ítems de cada dimensión, permitieran recoger suficientemente la información que se necesitaba para el estudio. La claridad, además de facilitar la comprensión del ítem por parte del informante, nos permitió pulsar el grado de precisión con que el ítem estaba formulado.

En este proceso se utilizó la mediana como estadístico, para fundamentar el consenso en cada ítem. El número nos expresa el índice con el que en cierto modo los expertos comparten sus opiniones, sin que existan discusiones ni confrontaciones directas entre ellos (Corral, 2009).

En la aplicación de este método prevaleció la técnica de Agregados Individuales (Corral, et al. 2009) ya que fueron seleccionados tres expertos, a quienes, de forma individual se les solicitó que dieran su estimación directa de los ítems del instrumento, para juzgar de manera independiente la relevancia y congruencia del contenido teórico.

En cuanto a la pertinencia, los ítems que tuvieron mediana igual al máximo puntaje, se consideró de coincidencia favorable entre los jueces y por tanto, estos ítems quedaron incluidos en el instrumento. Asimismo, los que tuvieron mediana con puntajes menores o iguales a 3, se consideró coincidencia desfavorable y se excluyeron del instrumento. Aquellos que tuvieron coincidencia parcial entre los jueces, pero que la mediana fue de 4, estos fueron nuevamente revisados y consultados directamente con los expertos.

Con relación a la claridad, los ítems que tuvieron mediana igual al máximo puntaje, se dejó tal y cual estaban. Los que tuvieron mediana con puntajes menores o iguales a 4, se reformularon y otros y fueron nuevamente consultados a los jueces.

Los instrumentos validados por experto fueron:

- La entrevista a Directores y Coordinadores de la asignatura Matemática General.

- El Cuestionario a estudiantes de primer año de la carrera de Informática Educativa de la UNAN-Managua. Cabe mencionar que una vez incorporadas las observaciones de los expertos al instrumento, se hizo un pilotaje del cuestionario con estudiantes.

3.5.1. Metodología Aplicada en la validación

Una vez definidos los instrumentos se seleccionó un docente por cada Departamento de Matemática de la UNAN-Managua y un docente de las Facultades Multidisciplinarias, tomando en cuenta los siguientes criterios: experiencia en la enseñanza de los contenidos objeto de estudio, buena reputación académica entre los profesores de Matemática de la universidad, imparcialidad, disposición y motivación en participar (Skjong y Wentworht, 2000).

La metodología aplicada en la validación fue la siguiente:

- Se reunió a los expertos para explicarles en qué consistía la investigación, porqué fueron seleccionados y que se esperaba de ellos.

- Se entregó a los expertos un dossier que contenía una introducción, los objetivos de investigación, los objetivos de cada instrumento. Además, las orientaciones de cómo llenar los espacios cuantitativos y cualitativos, sus valoraciones y juicios. Al final, se facilitó un glosario, para unificar los términos que se utilizan en los instrumentos (ver anexo N°1).
- Se orientó que de forma individual realizaran la validación de cada instrumento. Se insistió que aprovecharan el espacio de “comentarios” para sus valoraciones cualitativas en cada categoría de ítems. Además, se solicitó que en los casos que no asignaran la puntuación máxima al ítem justificaran el por qué. También, se les dijo que podían escribir sobre los ítems si observaban falta de claridad en ellos.

Capítulo 4

Resultados de la Validación de Instrumentos

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS

Los resultados de la validación se analizaron desde dos perspectivas, en la primera, se valoró el grado de pertinencia y claridad de los ítems a través de tablas en Excel. En la segunda, se analizaron las valoraciones que los expertos expresaron directamente en los instrumentos, tanto en el espacio de comentarios como lo que escribieron en la parte superior del texto de los ítems (ver anexo N° 1).

4.1. Guía de Entrevista a Profundidad a Directores y Coordinadores de la asignatura de Matemática General

El grado de consenso entre los expertos, en cuanto a este instrumento se analizó por categorías: *metodología,* esta abarcó cómo trabaja el docente la unidad de Álgebra y la identificación de los Conceptos Nucleares; con relación al *lenguaje algebraico*, este se consensuó, a través los ítems relacionado con las traducciones de lenguaje común a lenguaje algebraico y viceversa. Por último, los ítems alusivos a los *casos de factorización*, que se considerarían en el estudio.

La categoría correspondiente a METODOLOGÍA, incluía a los ítems del 1 al 7. Todos los ítems alcanzaron el puntaje máximo de pertinencia y claridad; esto significa que los ítems referidos a la categoría antes mencionada cumplen con dichos criterios. No obstante, se hicieron observaciones a los ítems 5 y 7. En el ítem 5 los expertos señalaron que se cambiara “operaciones algebraicas” por “del Álgebra” otro por “unidad de Álgebra”, la fundamentación fue que no solo las operaciones algebraicas necesitan dominar los estudiantes, para el aprendizaje de los casos de factorización. Otro sugirió que el enunciado se enfocara en “dominio de los prerrequisitos”. Considerando que los tres apuntan a contenidos de Álgebra se decidió dejar “unidad de Álgebra”. En cuanto al ítem 7, la observación consistió en que se agregara al enunciado “ejemplos, aplicaciones, etc.”, para abrir el abanico de Conceptos Nucleares.

Los expertos consideran que los Conceptos Nucleares para el aprendizaje de los casos de factorización son los siguientes:

- Ley de los signos
- Operaciones aritméticas
- Signos de agrupación
- Propiedades de los exponentes
- Términos semejantes

La categoría LENGUAJE ALGEBRAICO, abarca los ítems del 8 al 10, distribuidos en tres problemas. Para los incisos de este grupo de ítems los expertos recomendaron que se solicitara a los informantes que argumenten sus respuestas agregando al enunciado “Justifique su respuesta”, también señalaron para el problema 1, que en el inciso **a** se especifique quién hará el razonamiento. Con respecto al problema 2, considerando que no se dieron observaciones concretas, se decidió conservarlo en el instrumento, puesto que en pertinencia y claridad puntuó con la máxima calificación. En el problema 3 la mediana fue de 4, las observaciones giraron en torno a que, ni en secundaria ni en la universidad se trabaja con este tipo de ejercicio. En la segunda consulta se consensuó que se agregara otras preguntas a este problema, como “Qué tipo de respuesta podría dar el alumno y cuál sería su justificación”.

En este apartado los expertos preguntaron si los informantes –Directores y coordinadores de la asignatura de Matemática general– saben a qué se está llamando obstáculo en el estudio. Esta interrogante dio lugar a que en la invitación a participar en la entrevista se le enviara un glosario de términos –el mismo que se les dio a los expertos para que validaran el instrumento de la entrevista–.

La categoría FACTORIZACIÓN, en este grupo de ítems hubo mucha variedad en cuanto a consenso en la pertinencia. Aunque el puntaje de claridad fue de 5; los expertos valoraron que solo se deje un ejercicio de factor común –el segundo-. Además, que el ítem 14 se exprese con valores específicos –como el caso TCP-, la argumentación fue que si se deja de forma general, solo se podrá constatar que han memorizado, pero no se tendrá información si lo saben aplicar. Además, señalaron que el ítem 19, no es necesario ya que este caso, poco se utiliza. Con relación a los campos en el formato –errores, obstáculos y requisitos-, sugirieron que primero se preguntara por los requisitos “Conocimientos necesarios para aprender este caso”.

4.2. Cuestionario a Estudiantes de Primer año de la UNAN-Managua

El instrumento consta de cuatro partes: semántica, lenguaje algebraico, resolución de ejercicios y aplicación geométrica de los casos de factorización. Las observaciones y sugerencias consensuadas a este instrumento fueron las siguientes:

- **Semántica** (ítems del 1 al 6): según la puntuación de pertinencia y claridad, esta categoría posee los dos criterios. No obstante, el 100% de los expertos expresaron que los conceptos de expresiones algebraicas y término, son importantes para el estudio de los casos de factorización, pero que las definiciones que aparecen en el instrumento, no son pertinentes ni están claras. La sugerencia al respecto fue que se buscaran definiciones precisas, concisas y claras. Para la definición de Expresiones Algebraicas sugirieron “Conjunto de números y símbolos ligados entre sí por lo signos de las operaciones aritméticas.” Y para la definición de término “Es el producto de un factor numérico por una o más variables literales.”.

- **Sintaxis** (Ítems del 7 al 11). Los ítems correspondientes a esta sub categoría presentaron consensó en cuanto a la pertinencia. Con relación a la claridad solo hubo observaciones para el ítem 7, los expertos sugirieron sustituir la palabra “de” por la palabra “en”. Además, los expertos recomendaron que en el cuestionario se dieran orientaciones para la resolución de los ejercicios y además se presentara al estudiante el primer ejercicio resuelto, para guiarlo en cómo se esperaba que presentaran sus respuestas.

- **Simbología** (ítems del 12 al 16). Todos los expertos aunque manifestaron que existe claridad y puntuaron 4 en pertinencia, para los ítems 13 y 15, sugirieron que se eliminen, argumentando que la simbología no está relacionada a los casos de factorización. Además, señalaron que los símbolos involucrados en estos ejercicios, probablemente no los recuerden. Considerando que en la segunda consulta se conservaron las medianas de cuatro en pertinencia, el investigador decidió eliminar el 13 y mantener en el instrumento el ítem15, puesto que, está ligado a las aplicaciones de los casos de factorización. También señalaron, que se debería eliminar el ítem 14, aunque asignaron la máxima calificación en pertinencia y claridad, justificando que, la información que se recogerá en este, se obtiene en el ítems12, como es la lectura de exponentes, potencia y base. En cuanto al ítem 16 apuntaron que bastaba con solo uno de los miembros de la igualdad, para reconocer si los estudiantes son capaces de generalizar la expresión dada. La mayoría, recomendó además, agregar un problema de aplicación al cuestionario de los estudiantes que permitiera valorar la habilidad de interpretar el enunciado del problema y traducirlo al lenguaje algebraico.

- **Aplicación de los casos de factorización para resolver problemas de geometría, relacionados a área y volumen** (ítems del 17 al 22). Los ítems de este bloque alcanzaron el mayor puntaje en los criterios de pertinencia y claridad. Solo hubo una observación general, que se dejara de último este grupo de ejercicios en el Cuestionario. Además, que se mejorara la orientación para su resolución.

- **Resolución de Ejercicios relacionados a los Requisitos para el aprendizaje de los casos de Factorización** (ítems del 23 al 25). Estos ítems cumplen con los criterios de pertinencia y claridad, con el mayor puntaje (5). Sin embargo, los expertos sugirieron que se redujera el ítem 23, algunos de ellos también indicaron que se le agregara un coeficiente a uno de los paréntesis, para ver la aplicación de la propiedad distributiva de parte de los estudiantes, como no hubo consenso, en cuanto a las sugerencias, en esta parte solo se redujo el ejercicio. Todos sugirieron que se agregara un ejercicio que tenga que ver con la potencia de una potencia, argumentaron que esta propiedad se utiliza con mucha frecuencia al resolver ejercicios de factorización.

- **Resolución de ejercicios de casos de Factorización** (Del 26 al 30). Estos ítems obtuvieron el mayor puntaje en los criterios de pertinencia y claridad. No obstante, todos los expertos consideran que se debe agregar un ejercicio de suma o diferencia de cubos, para cubrir los casos objeto de estudio. Algunos opinaron en agregar trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ que no fuera trinomio cuadrado perfecto, esta sugerencia no se retomó puesto que, quién resuelve el ítem 29, pude resolver trinomios de este tipo. Para finalizar la mayoría de los expertos, apuntaron que se separaran los ítems-requisitos de los ítems-factorización. Esta sugerencia se plasmó en el instrumento final de forma que los requisitos se dejaron en la primera parte de test y los ejercicios de factorización se dejaron en la segunda parte.

4.3. Fichas para Análisis Documental

Las fichas curriculares para el análisis documental no se sometieron a validación ya que fueron tomadas de la investigación “Articulación de los subsistemas medio y superior para la enseñanza de la Matemática, Nicaragua, 2003”. La estructura de estas fichas fue la siguiente:

NOMBRE DEL DOCUMENTO: MATRIZ DE GUIAS DE ESTUDIO

Documento	Objetivos	Contenidos	Observaciones

MATRIZ PLANES DE CLASES

Documento	Objetivos	Contenidos	Estrategias	Evaluación	Recursos	Observaciones

Figura 19. Fichas para el análisis documental

Las fichas que se utilizaron para el análisis del Modelo Educativo y el Expediente de Asignatura, se presentan en el apartado de análisis 5.1.1. y 5.1.2.1. respectivamente.

4.4. Pilotaje del Cuestionario

El pilotaje se realizó en el II semestre del 2015, con un grupo de estudiantes de primer ingreso del Recinto Rubén Darío. Cabe recordar que el instrumento fue validado por expertos con relación a la pertinencia y claridad de los ítems. El propósito del pilotaje fue validar el grado de dificultad de los ejercicios para los estudiantes e identificar los errores que estos cometen, al resolver ejercicios relacionados a los casos de factorización y sus requisitos. Con esta información se construyeron las redes sistémicas-base para el grupo de la muestra, por tanto solo interesan las categorías y no identificar las causas del error, ni la frecuencia o porcentaje.

El cuestionario se aplicó en dos sesiones a 31 alumnos de la carrera de Informática Educativa del turno diurno, después de haber estudiado los casos de factorización. Es menester señalar, que fundamentado en el objetivo de este pilotaje al instrumento solo se le agregaron aquellas observaciones que estuvieron relacionadas a las orientaciones de los puntos II, III y VI, los ítems: 7, 13, el agregar en los ejercicios de requisitos uno relacionado a la potencia de una potencia y complementar con el caso de factorización suma y diferencia de cubos y eliminar el problema #3.

- **Errores en la identificación de los conceptos básicos del Álgebra**

Los conceptos básicos del Álgebra estudiados fueron: expresión algebraica, término, términos semejantes, monomio, polinomio y factor común. El ejercicio consistió en asociar el vocablo con la definición. La mitad de los informantes acertó en la asociación de conceptos.

La otra mitad que no logró asociar correctamente los conceptos, el mayor error de los estudiantes fue reconocer la definición de término, por la definición de expresión algebraica. Otros este mismo concepto -término- lo confunden con el de monomio.

El segundo concepto con mayor frecuencia en el que no acertaron fue el de Término Semejante, la mayoría lo identificó como Factor Común. Estos resultados sustentan la propuesta de los expertos en cambiar las definiciones por otras más sencillas para los estudiantes.

- **Errores al resolver ejercicios de prerrequisitos para los casos de factorización**

La siguiente tabla muestra una síntesis de los resultados obtenidos en la resolución de ejercicios relacionados a los prerrequisitos de casos de factorización:

Tabla 9. *Resultados de dominio de los prerrequisitos para el aprendizaje de los casos de factorización.*

RESULTADOS	LEY DE LOS SIGNOS	SIGNOS DE AGRUPACIÓN	PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE	COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE	POTENCIA DE UNA POTENCIA	CÁLCULO
Resueltos satisfactoriamente	3.23	3.23	41.94	41.94	19.35	12.90
Ejercicios dejados en Blanco	87.1	80.65	38.71	38.71	41.94	45.16

Como se puede observar un promedio mayor a la mitad dejó en blanco estos ítems, una cantidad muy pequeña los resolvió correctamente. Los prerrequisitos donde hay más problemas son la ley de los signos y los signos de agrupación. Entre los prerrequisitos que mejor trabajan pero aun así los resultados no son para alagar, están las propiedades de producto y cociente de potencias de igual base.

Los errores puntuales que cometieron los alumnos en la identificación de los Conceptos Nucleares y su intento por resolver los ejercicios relacionados a los prerrequisitos los veremos desglosados uno a uno en la siguiente red sistémica.

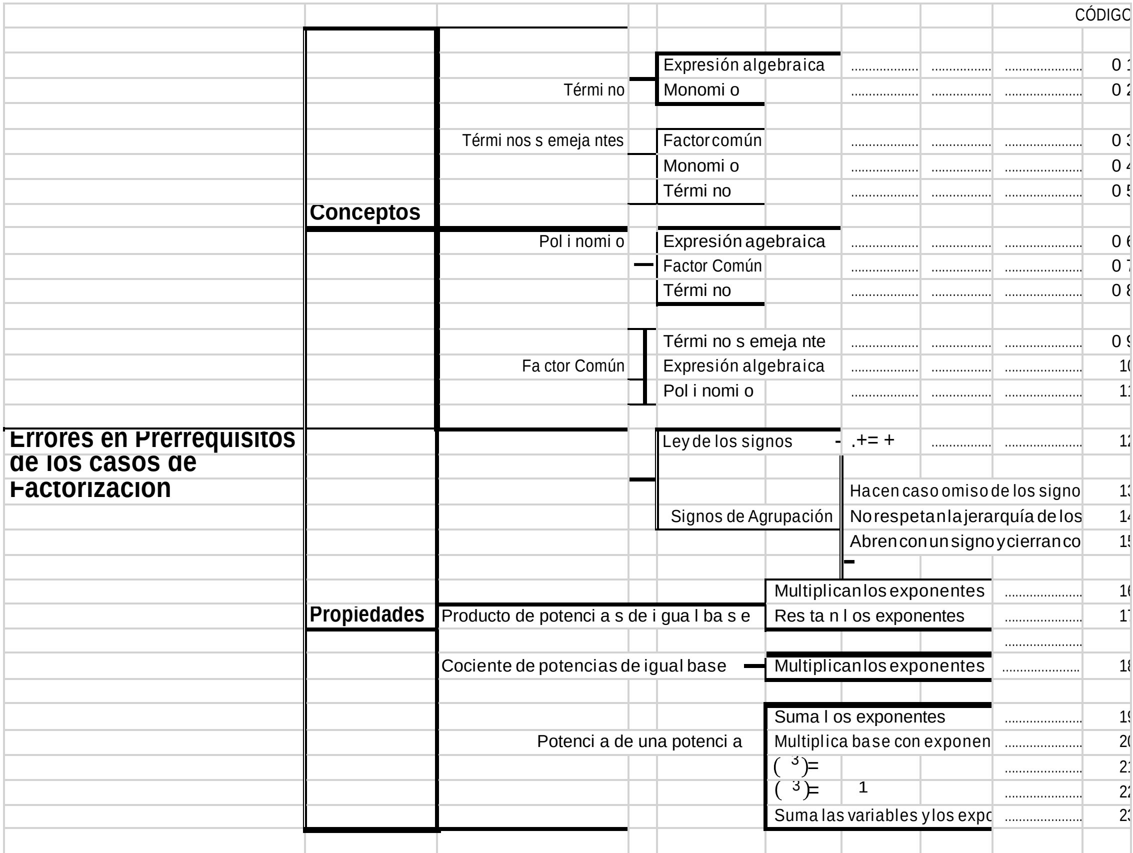


Figura 20. Red sistémica_pilotaje: Errores en prerrequisitos para el aprendizaje de los casos de factorización.

- **Errores al pasar de Lenguaje Común a Lenguaje Algebraico**

Se presentaron 5 ítems para esta categoría de la cual menos de la mitad, dejó en blanco. Una cantidad pequeña, resolvió satisfactoriamente los ítems. Los errores manifestados por más de la mitad de los alumnos restantes, al hacer la traducción de lenguaje común al lenguaje algebraico fueron los siguientes:

No identifican variables en los enunciados, por ellas escriben números específicos para representarlas.

No identifican las operaciones aritméticas en enunciados como: “aumentado en un cuarto” o el triple de” “la semisuma de” o “los cuadrados de” o “las tres quintas partes de”.

Leen las frases aumentado en un cuarto y el triple de…, como exponente. Pero además, el “un cuarto” lo interpretan como exponente 4.

No escriben en lenguaje algebraico número par, número inmediato –sucesor–.

Traducen el cuadrado de la suma por la suma de cuadrados.

- **Errores al pasar de Lenguaje Algebraico al Lenguaje Común**

En este grupo de ítems menos de la mitad dejó en blanco y una cantidad pequeña los contestó satisfactoriamente. Los errores que evidenciaron los restante son los siguientes:

La lectura es una descripción de los símbolos. No hacen una traducción Matemática. Otros lo leen como **a** factor común de **m** y **n**.

Este ítem fue el que menos resolvieron. Una cantidad ínfima de los estudiantes leen correctamente el signo “para todo” algunos lo identificaron como triángulo.

El símbolo de “pertenece” lo leen como “equivalente”.

El símbolo “distinto” lo leen como “no equivalente”.

Algunos estudiantes leyeron la expresión x^3 como: la suma de tres números, otros leen la expresión como la suma o diferencia de cubos perfectos y otros la leen como la raíz cúbica. Cabe mencionar que este ítem fue el que mejor respondieron en esta categoría.

En la ecuación logarítmica, la definición Matemática del logaritmo de un número de una base dada, nos dice que es el exponente a la que hay que elevar la base para obtener el número. Algunos estudiantes identifican la base como el número dado o identifican al número que se va a calcular el logaritmo como el exponente. Otros leen el número al cual se le va a calcular el logaritmo como fracción.

La mayoría de los estudiantes que intentó traducir de lenguaje algebraico a lenguaje común en la expresión $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, leyeron correctamente el miembro izquierdo de la igualdad pero solo describieron los símbolos del segundo miembro. Lo que significa que no hicieron una traducción correcta.

- **Errores al resolver ejercicios aplicando factorización**

En esta categoría se presentaron dos tipos de ejercicios uno relacionados con situaciones geométricas y otros con factorizar expresiones algebraicas.

Las situación geométrica, la mayoría de los estudiantes lograron asociar acertadamente con el caso de factorización fue el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

En orden descendente, casi todos los estudiantes, no logró identificar la figura geométrica asociada a la suma de cubos. Los estudiantes lo relacionaron con trinomio cuadrado perfecto y otros con diferencia de cuadrados. Además, no lograron asociar la situación geométrica con el caso que representaba fue el TCP, la mayor parte lo confundió con factor común.

En el orden, la segunda situación que no lograron asociar satisfactoriamente, fue el caso “factor común”, considerado por el gremio docente de Matemática, como el caso más fácil.

En tercer lugar, tenemos la situación geométrica que le correspondía el caso trinomio $\square^2+\square\square+\square$ Un poco más de la mitad logró asocia. Parece absurdo, que en este caso hayan tenido el mayor índice de falla y en el caso que más acierto tuvieron sea más complejo que este $ax^2 + bx + c$). Esto hace pensar que los estudiantes respondieron en base a las expresiones marcadas en la figura y no en la figura en sí.

La situación geométrica asociada al caso de factorización diferencia de cuadrados menos de la mitad de los estudiantes, la confundieron con el cuadrado de la diferencia o con factor común.

En cuanto a los ejercicios de factorización de expresiones algebraicas, la mayoría dejó en blanco la resolución de este tipo de ejercicios. Ningún estudiante resolvió ejercicios relacionados a factor común, trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ y binomio al cubo. Estos resultados son alarmante considerando que estos contenidos se estudian en toda la secundaría y se retroalimentan en la universidad.

La siguiente red sistémica refleja los errores cometidos por los estudiantes en su intento de resolver los ítems relacionados a la aplicación de los diferentes casos de factorización:

			CODIGO
Errores al resolver ejercicios aplicando Factorización	Factor Común	Solo reducen términos semejantes	0 1
		Suma los coeficientes y multiplica las variables	0 2
		Multiplica los signos de los términos semejantes	0 3
		No aplica la propiedad distributiva	0 4
		Sumó los coeficientes de los términos semejantes y multiplicó las variables iguales	0 5
	Diferencia de Cuadrados	Resta los coeficientes	0 6
		Divide los coeficientes	0 7
		Solo extraen la raíz cuadrada a ambos términos	0 8
		Al aplicar la regla omite aplicarla a la variable	0 9
	Trinomio de la forma + +	Escribe dos factores	10
		Coloca ax como primer término de los factores	11
		Suma los coeficientes de los términos en X y deja la variable al cuadrado	12
			13
	Diferencia de Cubos	Resta los coeficientes, simplifica los exponentes y multiplica la variables	14
		Solo extrae la raíz cúbica de cada término	15
	En todos los Casos	Operan la expresión como si todos fueran números enteros	16
		Aplican la propiedad de producto de potencias de igual base a la suma	17
	En Geometría	TCP por Factor Común por + +	18
		Suma de Cubos por TCP	19
		Suma de Cubos por Cubo de la Suma	20
		Trinomio de la forma, diferencia de cuadrados, suma de cubos por Factor Común	21

Figura 21. Red sistema_pilotaje: Errores en la aplicación de los casos de factorización

- **Errores al resolver los problemas de razonamiento**

Este punto estuvo conformado por dos problemas. El primer problema cuya solución en primer lugar estaba en aplicar el concepto de sucesor y simplificar. Más de la mitad respondió satisfactoriamente, pero en su argumentación utilizaron valores específicos, ninguno logro generalizar. El restante dejó en blanco.

El segundo problema en el cual se pedía traducir a lenguaje común y generalizar, una cantidad ínfima logró traducir correctamente. Ninguno pudo generalizar la expresión.

Resultados y Análisis de los Resultados

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

5.1. Resultados del Análisis Documental

Los documentos analizados fueron el Modelo Educativo –las estrategias didácticas propuestas–, el expediente de asignatura – Programa (objetivos, contenidos, estrategias metodológicas y bibliografía recomendada), Planes de Clases, Guías de Estudio. El objetivo fue conocer cómo desde el currículo se orientó el tratamiento metodológico de los casos de factorización e identificar los obstáculos didácticos inducidos por estos documentos.

5.1.1. Análisis del Modelo Educativo de la UNAN-Managua

En septiembre del año 2011, la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, inició el proceso de transformación curricular con la aprobación de su Modelo Educativo y Normativa para la transformación curricular. En este documento están plasmados el modelo curricular, el modelo pedagógico y el modelo didáctico que adoptó la institución para el desarrollo del proceso educativo.

El cómo se debe desarrollar el proceso enseñanza aprendizaje en esta alma mater, está plasmado en el Modelo Didáctico, específicamente en las estrategias didácticas sugeridas en el mismo. A través de estas se aprecia cómo se pretende llevar a cabo la relación horizontal entre el docente y los estudiantes. Cuáles serán los espacios para la recreación de las experiencias adquiridas, que sirvan de base en la retroalimentación de ambos, para favorecer el crecimiento personal y profesional de manera recíproca.

El aprendizaje significativo demanda de estrategias didácticas de construcción que además de presentar un producto, tengan un fuerte componente procedimental-actitudinal, que provoque en el aprendiz procesos metacoginitivos, para favorecer el procesamiento profundo de información, la estructuración lógica de ésta, y finalmente, crear recuerdos más efectivos sobre lo aprendido. A continuación se presenta la parrilla metodológica que refleja las estrategias didácticas que se orientan en el Modelo Educativo:

Tabla 10. *Parrilla Modelo Educativo de la UNAN-Managua*

N°				APLICABILIDAD AL TEMA EN ESTUDIO				
1	Ubicación Contextual	Aprender en un entorno contextualizado, cuyo punto de partida es el contexto personal	Conseguir que el estudiante llegue con interés causado por la incertidumbre, la necesidad y la novedad.	X				
2	Guías de Cuestionamiento de lo que se aprende	Poner en acción esquemas mentales para realizar procedimientos mediante pasos o etapas o bien valorar su relación con la asignatura y con el docente, mediante la metarreflexión sobre cómo le enseñan y la manera en que él aprende	Que el estudiante pueda reconocer o recordar información, explicar un mismo contenido en diferentes formas, interpretar el significado de alguna información, comparar o relacionar eventos y ejemplificar.			X		
3	Observación Autoreflexiva	Nace de la relación entre el ser humano y su entorno.	Para generar reflexión sobre lo que se aprende, cómo se aprende, bajo qué sistema de valores y en relación con qué segmento de la realidad.					X
4	Aprendizaje colaborativo	Promover el aprendizaje centrado en el alumno basando el trabajo en pequeños grupos.	Discutir en pequeños grupos, debates en los que se deliberar y exponer controversias, simulaciones, demostraciones, etc., que permitan llegar a conclusiones.		X		X	
5	Estudios de Casos	Promover el aprendizaje mediante una situación específica que plantea un problema, el cual debe ser comprendido, valorado y resuelto por un grupo de personas a través de un proceso de discusión.	Desarrollar habilidades para enfrentar y resolver problemas ocurridos en escenarios reales, tomar decisiones sobre bases confiables de conocimiento, aceptar varias soluciones adecuadas a un mismo problema, realizar propuestas previendo sus posibles consecuencias, desarrollar el pensamiento crítico a través de procesos de análisis, formular posibles soluciones, comparar sus propios procesos y modelos de pensamiento con el resto de la clase.	X			X	
6	Proyectos de Aprendizaje	Promover el aprendizaje con sentido y la participación activa y crítica del estudiante para que sean ciudadanos democráticos y con pensamiento científico.	Involucrar a los estudiantes en procesos de construcción significativa de conocimientos, como toma de decisiones, organización del trabajo, selección y aplicación de tecnologías adecuadas, redacción, presentación, ejecución y evaluación de los resultados e impacto del proyecto.	X	X	X	X	
7	Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas	Promover el aprendizaje cooperativo mediante la interdisciplinaridad y la integración del conocimiento fragmentado en disciplinas y materias en la búsqueda de las mejores soluciones a una situación problémica propuesta.	Intercambiar puntos de vista, generar análisis, síntesis, hacer valoraciones de las ideas del grupo, poner en funcionamiento el pensamiento crítico, identificar y resolver problemas, simular o representar alternativas de solución del problema y sus posibles consecuencias y tomar decisiones.	X	X	X	X	
8	Informe Escrito Analítico-Reflexivo	Expresar el aprendizaje analítico reflexivo.	Desarrollar habilidades de selección y evaluación de la información, organizar y pensamiento, desarrollar el pensamiento crítico y expresar con argumentos sólidos los puntos de vista.					X
9	Trabajo de Campo	Desarrollar en ambiente diferente al aula de clase los conocimientos de los estudiantes.	Poner en contacto al discente con la realidad mediante procesos cognitivos como la observación, la analogía, la descripción, el análisis, la síntesis, entre otros.					X
10	Conferencias Magistrales	presentación verbal de una información (contenidos de los programas), por un docente de vasta experiencia y con alto dominio didáctico.	Compartir el conocimiento con un enfoque analítico y crítico de los saberes que permita a los estudiantes reflexionar y reconstruir relaciones entre los diferentes conceptos.		X			

Fuente Modelo Educativo UNAN-Managua, septiembre 2011. Elaboración propia.

En la parrilla anterior se observa que el 70% de las estrategias propuestas en el Modelo Educativo son aplicables en el proceso enseñanza aprendizaje del tema en estudio y algunos casos en más de una fase.

- *Ubicación Contextual*. Es propicia para la etapa de exploración de conocimientos previos, puesto que a través de situaciones contextualizadas podemos hacer que fluyan los conocimientos previos delos estudiantes tal y como están en sus estructuras cognitivas.

- *Guías de Cuestionamiento de lo que se aprende*. La estrategia es pertinente para la fase de estructuración del conocimiento pues facilita que los estudiantes puedan reconocer, recordar, comparar, dar significado, explicar lo que han aprendido, esto contribuye al afianzamiento de conocimientos.

- *El Aprendizaje Colaborativo*. Es pertinente para la fase de aplicación de los conocimientos, lo que no significa que la podamos aplicar en la fase de introducción al concepto o procedimiento. La estrategia promueve el diálogo, el debate la exponer controversia para arribar a conclusiones. Es aplicable en combinación con otras estrategias de aprendizaje.

- *El Estudio de Casos*. Es atinada para desarrollar las fases exploración, porque permite aflorar modelos de pensamiento y poderlos comparar con el resto de la clase y tomar las decisiones pertinentes para las siguientes fase del proceso enseñanza aprendizaje. En la fase de aplicación, porque a través de esta estrategia los estudiantes tendrán un espacio para aplicar sus habilidades en enfrentar y resolver problemas y tomar decisiones.

- *El Aprendizaje por Proyecto*. Se le puede sacar el máximo provecho aplicándolo en todas las fases. Para el tema en estudio, significaría un diseño muy bien pensado y organizado, donde la construcción de cada caso sea fluida y no forzada.

- *Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas*. Al igual que la anterior, esta estrategia es aplicable a todas las fases y requiere de la selección o diseño de “un buen problema” que permita la construcción del tema objeto de estudio desde la interdisciplinariedad como dentro de la misma disciplina, de manera que los estudiantes logren Intercambiar puntos de vista, generar análisis, síntesis, desarrollar el pensamiento crítico, identificar y resolver el problema, buscar otras alternativas de solución.

- *Las Conferencias Magistrales*. Esta estrategia es aplicable a la fase de introducción al concepto o procedimiento, es una exposición verbal de información sobre algún contenido curricular. En esta estrategia la participación del estudiante es limitada.

Por la naturaleza de los casos de factorización, la aplicación de las estrategias: observación reflexiva, informes escritos analíticos reflexivos y trabajo de campo, sería forzada, lo que no tendría, ningún valor didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje del tema en cuestión.

5.1.2. Expediente de la asignatura de Matemática General

El expediente de asignatura consta de: Programa de asignaturas, planes de clase de conferencias magistrales, guías de estudio para el trabajo de subgrupo y las pruebas para evaluar el sistemáticamente el desempeño de los estudiantes.

5.1.2.1. Programa de la Asignatura

Considerando que las partes del programa que contienen el tratamiento curricular orientado al tema objeto de esta investigación son: los objetivos generales, objetivos y contenidos de unidad, orientaciones metodológicas y bibliografía recomendada, el análisis se hizo solo en estos apartados.

- **Objetivos y Contenidos**

Primer Objetivo General: En el “saber” se espera que los estudiantes analicen conceptos definiciones, propiedades y teoremas de los contenidos de Álgebra. En el “saber hacer” se pretende que apliquen esa teoría a través de diferentes métodos para la solución de problemas de la vida diaria. En el “saber ser”, se busca que los estudiantes valoren la importancia de estos contenidos como herramienta para la solución de problemas de su entorno social. Desde la visión tripartita de los objetivos, están bien formulados porque se observar claramente qué serán capaces de hacer los aprendientes, con los contenidos de Álgebra. Además, existe secuenciación vertical entre los objetivos.

Segundo Objetivo General: en el saber se espera que los estudiantes dominen el vocabulario y la notación propia del Álgebra. Este objetivo conceptual, demanda de parte de los estudiantes el dominio del lenguaje algebraico. En el saber hacer se les pide que apliquen ese vocabulario y la notación del Álgebra en la resolución de ejercicios y problemas de su entorno, estamos hablando de traducir de lenguaje común a lenguaje algebraico o viceversa, para poder resolver ejercicios. En el saber ser, el objetivo está orientado a promover el aprendizaje cooperativo entre los estudiantes a través del estudio de los contenidos algebraicos. En esta terna de objetivos hay secuenciación vertical y están muy bien formulados.

La siguiente parrilla refleja los objetivos contenidos y sub contenidos de la unidad de Álgebra, que según el programa se desarrolla en 16 horas presenciales y 32 horas de trabajo independiente. Se puede observar que el tema objeto de investigación y sus prerrequisitos se abordan en los objetivos conceptuales 1 y 2 y sus respectivos contenidos y sub contenidos –saber–. El saber hacer está reflejado en el primer objetivo, contenido y sub contenido procedimental. Por tanto, el análisis está circunscrito a estos objetivos, contenidos y sub contenidos.

Tabla 11. *Programa Matemática General: Objetivos y Contenidos*

OBJETIVOS		CONTENIDOS	SUBCONTENIDOS
Conceptuales	Comprender que el Álgebra es una generalización de la Aritmética.	Conceptualización del Álgebra como una generalización de la Aritmética	Reseña histórica del Algebra y su importancia, Definición de Álgebra; Lenguaje común y algebraico. Expresiones algebraicas. Leyes de los exponentes. Operaciones con polinomios.
	Identificar los casos de factorización de acuerdo a sus características	Casos de factorización y sus características	Productos notables. Factorización
	Dominar los distintos métodos de solución para resolver ecuaciones lineales, cuadráticas sistemas de ecuaciones Lineales y Desigualdades lineales	Métodos de solución para resolver ecuaciones lineales, cuadráticas sistemas de ecuaciones Lineales y Desigualdades lineales.	Concepto y propiedades. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Métodos para resolver sistemas de ecuaciones y desigualdades.
Procedimentales	Aplicar los conceptos, leyes y axiomas del Álgebra en la resolución de operaciones con Polinomios.	Aplicación de los conceptos, leyes y axiomas del Álgebra en la resolución de operaciones con Polinomios.	Aplicación de la definición de Álgebra; Lenguaje común y algebraico, Expresiones algebraicas, Leyes de los exponentes, Productos notables y Factorización en la resolución de operaciones con Polinomios.
	Resolver problemas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas lineales y desigualdades.	Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas lineales y desigualdades.	Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando: Los Conceptos y propiedades de las Ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
			Los Métodos de solución de sistemas de ecuaciones y desigualdades.
Actitudinales	Valorar la importancia del Álgebra, como herramienta para la solución de problemas de su entorno social.	Valoración de la importancia del Álgebra, como herramienta para la solución de problemas de su entorno social.	

El primer objetivo conceptual, pretende que los estudiantes comprendan que el Álgebra es una generalización de la aritmética. Esta situación hoy en día ha cambiado, como ya se explicó en el apartado 2.3.5.3, esta manera de enfocar los contenidos del Álgebra, limitan el desarrollo del pensamiento del estudiante, en este caso el algebraico. En cuanto a los contenidos y sub contenidos descritos, solo son el vehículo a través de los cuales se va a desarrollar esta comprensión.

El segundo objetivo conceptual, abarca el tema en estudio. Este se desarrolla en una sesión de conferencia magistral y otra en trabajo en subgrupos, lo que equivale a cuatro horas clases y ocho horas de trabajo independiente. Bajo el supuesto que este contenido los estudiantes lo trabajaron en los cinco años de secundaria, el tiempo asignado en esta unidad sería razonable, pues se trata de "refrescar" este conocimiento, puesto que lo aplicarán en los siguientes contenidos de Álgebra como en las otras unidades del programa.

Si los estudiantes logran los objetivos conceptuales 1 y 2 estarán preparados para alcanzar el primer objetivo procedimental, el cual espera que los estudiantes sean capaces de aplicar los conceptos, leyes y axiomas del Álgebra para resolver operaciones con polinomio.

Entre los objetivos y sus respectivos contenidos y sub contenidos se observa una diáfana coherencia horizontal y una fluida secuenciación vertical entre los objetivos conceptuales y procedimentales. Asimismo, su derivación de los objetivos generales del programa.

- **Recomendaciones Metodológicas**

La estrategia que predomina en la enseñanza de los contenidos de Álgebra es la Conferencia Magistral, se sugiere que estas sean participativas, se propone realizar lluvias de ideas, pruebas diagnósticas y discusiones durante el desarrollo de la unidad. Además, se recomienda promover el aprendizaje cooperativo en las clases prácticas y proponer ejercicios sencillos y contextualizados. Se menciona el uso de medios pero solo se señala la calculadora.

Como se puede apreciar, estas recomendaciones son muy escuetas, no se da un tratamiento didáctico enfocado directamente al aprendizaje del Álgebra. Tampoco se sugiere cómo se evaluará la unidad.

- **Bibliografía Recomendada**

En el programa se recomiendan cinco libros, de los cuales, solo en tres se abordan los casos de factorización. Para realizar este análisis se visitaron los departamentos docentes de Matemática para consultar los textos propuestos en la bibliografía.

- ***Definición de los Conceptos Nucleares en la Bibliografía***

En el libro de **Álgebra-Baldor**, las definiciones y propiedades son aceptables para el nivel de los estudiantes de primer ingreso, excepto la definición de "expresión algebraica" que refleja anfibología en el vocablo símbolo algebraico, ya que este es desconocido por el estudiante y no permite que el alumno comprenda la definición objeto de estudio.

Cuando el docente adopta definiciones con términos desconocidos por el estudiante le obstaculiza su aprendizaje. En cuanto a los signos de agrupación es el único texto que presenta el guion superior como signo de agrupación equivalente al paréntesis ordinario.

De este texto se tomó la definición de monomio para el cuestionario de estudiante por la claridad y sencillez del enunciado.

En la Bibliografía sugerida **Fundamentos de Matemática-Silva**, la mayoría de las definiciones presentadas en este libro son completas, tienen rigor matemático y son pertinentes para el nivel de los estudiantes, excepto "términos semejantes", el estudiante podría considerar expresiones como $3x^2y^5$ y 7 x^5y^2, como semejantes ya que satisfacen la definición: tiene las mismas variables, los mismos exponentes y solo difieren en los coeficientes. Además, la definición de potenciación, esta difiere de los otros textos, pues se muestra en términos de descomposición factorial. Se especifica que el exponente debe ser un número natural. La definición excluye aquellas expresiones donde n no es natural, entonces el estudiante cómo le llamaría a expresiones como $4^{\frac{1}{2}}$. Si el profesor se decidiera por este concepto, estaríamos ante un obstáculo didáctico.

Definición. Si n es un entero positivo, el símbolo x^n, llamado potencia n-ésima de x, es el producto de n factores, cada uno igual a x.

Esta definición nos da $x^n = \underbrace{x\,x\,x \cdots x}_{n \text{ factores de } x}$

En el símbolo x^n, a x se le llama la base de la potencia y a n su exponente.

Figura 22. Definición de Potencia de un número. Fuente Silva (2006)

También podemos señalar la existencia de vocablos básicos para el estudio de los casos de factorización que no se definen en este texto (por ejemplo el de polinomio).

Es menester señalar que de este libro se tomaron las definiciones de expresiones algebraicas y factor común para el cuestionario a estudiantes.

El tercero de los libros es el de **Algebra y Trigonometría de Sullivan**, el contenido objeto de investigación y sus requisitos son abordados en el capítulo de repaso el cual está orientado a presentar propiedades, dar ejemplos y la resolución de ejercicios y problemas. En este libro no se define expresión algebraica, no se cuida la secuenciación lógica de la disciplina (definen primero término semejante y luego término), a diferencia de los textos anteriores, se define término en función de monomio, cuando el primer concepto es más general que éste último. Se manejan los conceptos de exponente y potencia como sinónimos, esto se convierte en un obstáculo cognitivo para los estudiantes, pues los conduce a cometer errores cuando los aplican en resolución de ejercicios y problemas.

Con relación a ley de los signos, estos los presentan para el producto y el cociente pero omiten cuando ambas expresiones son positivas, pues se da por hecho que este caso ya lo dominan los estudiantes. En cuanto a los signos de agrupación, en la batería de ejercicios solo se utiliza el paréntesis, esto impide que los estudiantes se apropien del manejo de estos signos y desarrollen habilidad en la resolución de ejercicios en donde estos aparecen.

En conclusión se puede afirmar que, la bibliografía sugerida en el programa de asignatura para el estudio de los conceptos básicos de los casos de factorización, además de ser muy pobre, no es la mejor, porque en todas, se presentan situaciones que conducen al docente propiciar obstáculos, relacionados a la falta de secuenciación lógica de los contenidos, formulación incompleta de la definiciones, manejo incorrecto de conceptos; que tienen su efecto en el estudiante, puesto que a la hora de aplicarlos, los conduce al error.

En la visita que se hizo a las bibliotecas de los departamentos docentes de Matemática, se constató que en los tres departamentos se encuentra el libro de Álgebra por Aurelio Baldor, solo uno de los departamentos tiene "Fundamentos de Matemática" de Silva, y solo cuentan con una copia.

- ***Tratamiento de los Casos de Factorización***

El libro de texto que trabaja con exhaustividad todos los casos de factorización y los casos especiales a nivel reproductivo, es el Álgebra de Baldor. El resto de la bibliografía, solo trabaja los casos: factor común, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio de la forma y suma o diferencia de cubos. Dos de los tres textos que abordan el tema, no trabajan el caso de polinomio de cuatro términos, en donde dos de ellos son cubos perfectos.

La estrategia que predomina en el tratamiento que le dan dos de los libros sugeridos, está basada en la identificación de la expresión dada, en los productos notables vistos con anterioridad, de manera que el trabajo del estudiante está en comprobar la regla y ajustar la expresión al caso identificado. Además, abordan la resolución de ejercicios de factorización a través de la agrupación de términos.

Como se puede observar en la tercera hoja del anexo N° 2, los casos de factorización se resuelven aplicando reglas rígidas, los términos de las expresiones algebraicas que se van a factorizar no se pueden conmutar porque la regla ya no se cumple, pese a que la propiedad conmutativa es aplicable a cualquier polinomio, esto da lugar a que el aprendizaje del tema sea memorístico y repetitivo, desprovisto de comprensión.

Se puede concluir que las estrategias aplicadas en la bibliografía sugerida para la enseñanza de los casos de factorización, no facilitan el desarrollo cognitivo de este contenido algebraico. Se deduce además, que la enseñanza de los casos de factorización no se debe seguir enseñando separado de los productos notables. Por tanto, el diseño de estrategias que garanticen que los estudiantes aprendan estas herramientas algebraicas con comprensión y no como simple fórmulas, es un reto para el profesorado de Matemática de educación secundaria y del primer año de las carreras universitarias.

5.1.2.2. Planes de Clases y Guías de Estudio

En este apartado se analizan las minutas de las clases magistrales y las respectivas guías de estudio, misma que se entrega al finalizar la magistral para que los alumnos las resuelven en sus casas. En la planificación de la unidad de Álgebra, están contempladas cuatro conferencias magistrales y cuatro clases prácticas.

En el análisis de estos documentos se constató que hay correspondencia entre el contenido desarrollado en las conferencias magistrales y los ejercicios y problemas que se plantean en las guías de estudio. Se utiliza la reseña histórica para motivar y contextualizar los temas de Álgebra. Los contenidos, ejemplos, ejercicios y problemas propuestos tanto en el Plan de Clase como en las Guías de Estudio, responden al niveles de complejidad reflejado en los objetivos (Ver anexo N° 3 y N° 4).

El principal objetivo de analizar las Conferencias Magistrales y las respectivas Guías de Estudio es identificar los obstáculos didácticos reflejados en estos documentos. Este tipo de obstáculos son provocados por el docente cuando planifica una situación de enseñanza (Brousseau, 1986)

La Clase Magistral N°4 (ver anexo N° 5), es la primera de la unidad de Álgebra, en esta se desarrollan los prerrequisitos para el aprendizaje de los casos de factorización. En esta planificación se observa que en la definición de monomio y binomio, presentada en la diapositiva # 8 y su aplicación en la diapositiva # 20 existe contradicción, ya que en la diapositiva #8 se define con exponente natural y en la #20 llaman monomio y binomio a expresiones con exponente racional, específicamente en el estudio de la racionalización. Esta situación provoca conflicto cognitivo en los estudiantes porque les queda la duda ¿cuándo realmente tenemos un monomio o un binomio?

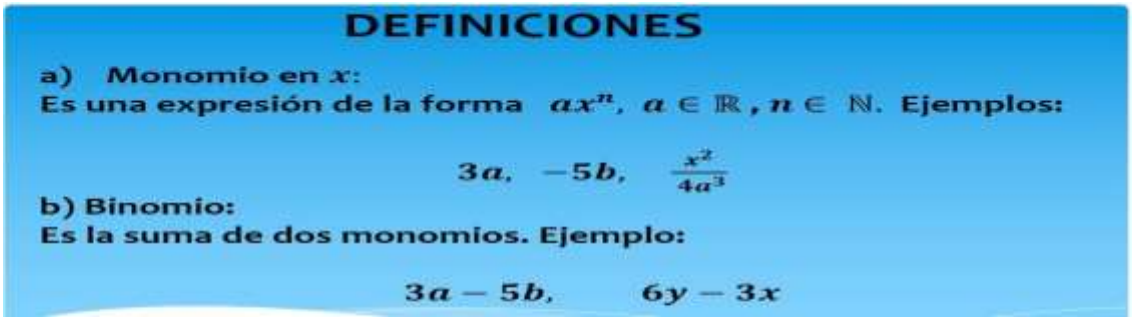


Figura 23. Conferencia Magistral # 4. Diapositiva #8 Definición de monomio.

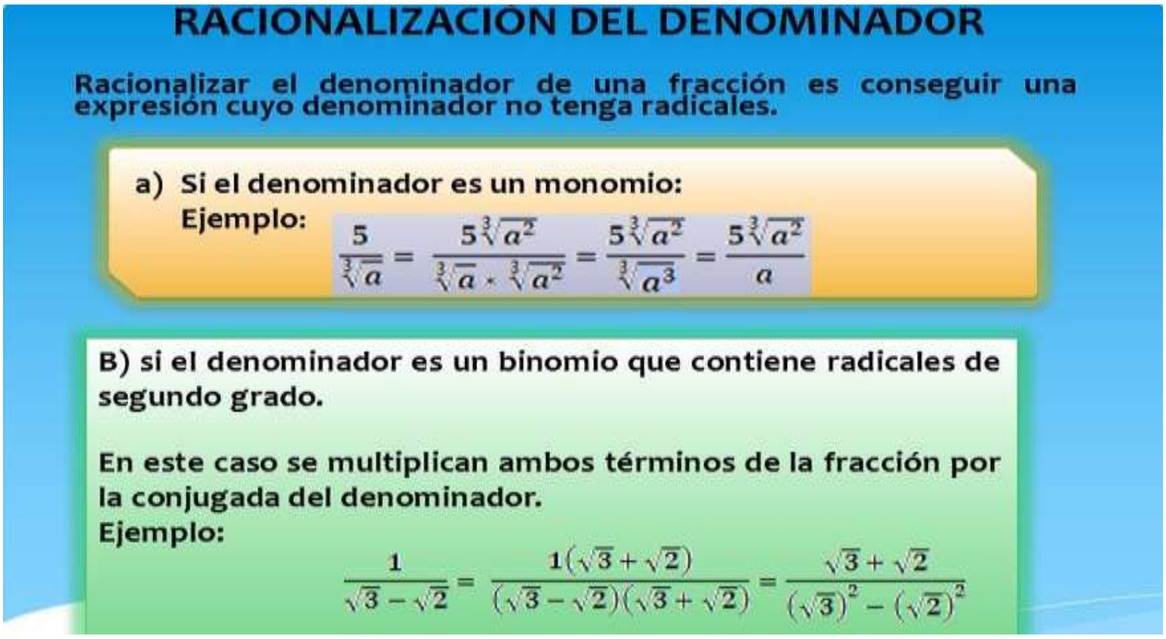


Figura 24. Conferencia Magistral # 4. Diapositiva #20. Aplicación de la definición de monomio y binomio.

Entre las funciones didácticas tenemos el aseguramiento del nivel de partida. Las definiciones de términos semejantes y potenciación, no se retroalimentan pese a que son conceptos claves para el aprendizaje de los casos de factorización. Con el hecho de no retroalimentar la definición de potenciación, se perdió la oportunidad de explicar que ésta se puede extender a números reales, y se suavizaría el conflicto relacionado a los monomios y binomio. ¿Por qué no explicamos a los estudiantes la definición de potenciación con exponentes racionales? Este también es un obstáculo didáctico.

Cuando brindamos un ejemplo a los estudiantes es para explicar un algoritmo, aplicar una definición o bien para ilustrar. Por tanto, es muy importante describir paso a paso el proceso y no dejar nada sobre entendido. El saltar uno de estos, podría provocar incertidumbre en el estudiante e impedirle que comprenda el procedimiento. Observemos el ejemplo de la diapositiva #19 de esta misma clase magistral:

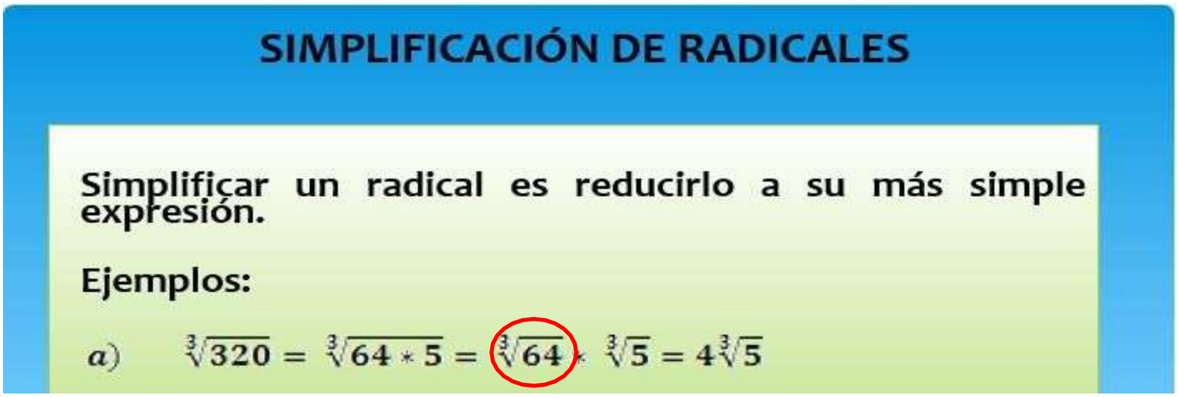


Figura 25. Conferencia Magistral # 4. Diapositiva #19. Omisión de pasos en la resolución del ejercicio.

El propósito es enseñar a los estudiantes cómo simplificar un radical a una expresión más simple. Observemos en el resultado el número 4 aparece por arte de magia, pues si en la aplicación de la propiedad de la raíz del producto es igual al producto de las raíces expresáramos en potencia de base 4 y exponente 3 el número 64, se vería claramente de donde salió el número 4. Además, que sería una buena ilustración de la simplificación de la raíz cúbica de una potencia con exponente 3. Esto mismo se repite en el inciso a de la diapositiva # 21. Esta situación es otro obstáculo didáctico, el docente descuidó el objetivo del ejemplo, porque estos son modelos para el estudiante de cómo deben simplificar expresiones con radicales.

En cuanto a la guía de ejercicios correspondiente a la Clase Magistral N° 4, el primer grupo son ejercicios que se resuelven mediante la aplicación de las propiedades de potenciación y propiedades de radicación. Se puede afirmar que estos contenidos que sirven de base para el aprendizaje de los casos de factorización, están suficientemente retroalimentados en esta guía.

El segundo bloque, tiene tres problemas de aplicación cuya solución consiste en identificar la operación algebraica y resolver. Los ejercicios 4,5 y 7 de este segundo bloque se resuelven sustituyendo el valor de los polinomios y realizando las operaciones indicadas. En cuanto al 6to ejercicio la solución tiene mayor dificultad, la que radica en "adivinar" que primero tiene que efectuar el producto del miembro izquierdo de la ecuación, después igualar cada término de la izquierda con su semejante de la derecha y luego simplificar, una vez obtenido dos de los resultados sustituir en una de las expresiones para encontrar el tercero. En este grupo de ejercicio se fijan las habilidades relacionadas a las operaciones algebraicas, otros de los Conceptos Nucleares.

Los ejercicios del bloque II se deberían presentar en el siguiente orden 4, 5,7, 6, 8,9, 1 2 y 3. La nota histórica, aparece en el III punto, no es atinada al contenido, debería estar en la guía N° 5 que aborda las ecuaciones. El punto IV, considerando que se resuelve por propiedades de radicales, debería ser el último ejercicio del primer bloque.

De lo anteriormente expuesto, se puede concluir que en la guía de clase práctica, los ejercicios no están ordenados didácticamente, de lo más sencillo a lo más complejo, se descuida este principio didáctico que facilita la comprensión del contenido. Esto se convierte en un obstáculo didáctico ya que no se está siguiendo el proceso de aprendizaje de cualquier tema.

Conferencia Magistral N° 5. En esta se desarrolla los productos notables y los casos de factorización, tema objeto de investigación. La propiedad distributiva, concepto nuclear visto en los productos notables, como el primer caso, no se trabaja, desde aquí se comienza con un obstáculo relacionado con un principio didáctico como es el aseguramiento del nivel de partida, al no garantizar el dominio de esta habilidad básica –producto de un monomio por un binomio-, para resolver otros tipos de productos. El estudio de este tema se inicia con el binomio al cuadrado, le continua el producto de la suma por la diferencia, aquí se tiene otro obstáculo didáctico, que tiene que ver con secuenciación lógica de la disciplina, se comienza con un tipo de producto que es de mayor complejidad que el siguiente, es más fácil observar en los factores dados, que son el producto de la suma por la diferencia y que entonces su producto es el cuadrado de la diferencia, a que una vez que se identifica que se tiene un binomio al cuadrado, aplicar una regla que dice: el cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo.

El tratamiento de este contenido es totalmente memorístico, los estudiantes recurren a su memoria visual para registrar la estructura de los factores para poder identificar cual será el producto, mismo que obedece a la memorización de reglas. A esta dificultad se suma el nombre que cada tipo de producto notable tiene, a (x+a)(x+b) le llaman producto de dos binomios que tienen un término común, pero también (x+a)(x+a) y (ax+b)(cx+d) tienen un término en común, y se les llama a uno el cuadrado de un binomio y al otro producto de dos binomio de la forma.

El tipo "el producto de un binomio por un trinomio" no garantiza que el estudiante al responder con la regla asociada a esta caracterización, su respuesta sea correcta, pues el nombre no le dice mucho porque podría tener $(x+y)(x^2 + x + y^2)$, si no está atento a la relación que existe entre los términos del primer factor y el segundo factor, podría aplicar una regla que no garantiza una respuesta correcta.

Los tipos de productos notables que sus nombres, realmente los representan y que una vez identificadas las características de los factores sin lugar a duda pueden aplicar la regla asociadas a estos son:

El producto de la suma por la diferencia, el binomio al cuadrado y el binomio al cubo, en tanto en cuanto los estudiantes apliquen la regla, correctamente, no habrá lugar al error. No obstante, es necesario señalar que si un estudiante domina el caso de “producto de dos binomios de la forma” es capaz de resolver el producto de dos binomios con un factor común y el cuadrado de un binomio, porque la regla es válida para estos.

Con relación a los casos de factorización, el tratamiento metodológico muy acertadamente, lo inician con el concepto, seguidamente el caso factor común, diferencia de cuadrados, trinomio x^2+bx+c, luego trinomio de la forma ax^2+bx+c, posteriormente el trinomio cuadrado perfecto. No obstante, la suma y diferencia de cubos ni el polinomio de grado 3, se abordan, pero en los ejercicios de verificación del objetivo, como en la tabla resumen en la diapositiva #18 están presentes estos casos, pese a que el desarrollo es más complejos que los casos que se abordan en detalle en esta clase magistral.

Se puede observar que en el tratamiento metodológico de los casos de factorización, existe secuenciación lógica, pero no continuidad, porque no se abordan todos los casos. También, se aprecia, la enseñanza tradicional de este contenido al igual que los productos notables, con una carga memorística, repetitiva, desprovista de comprensión. Estamos ante otro obstáculo didáctico que tiene que ver con la motivación, si el contenido no tiene significado para el estudiantes, no se logrará el aprendizaje esperado.

En la guía de estudio independiente, el primer bloque de ejercicios se trabaja con productos notables, pero no se abordan todos los casos estudiados –no se trabajó el producto de dos binomios de la forma, ni el binomio al cubo-. Además, se trabaja un caso con potencia 5 y no se estudió el binomio de Newton. Esto es un obstáculo didáctico ejercitar algo que no se ha estudiado y que tiene mayor complejidad con relación a los abordados en la conferencia magistral. También se presentan ejercicios que no son accesibles para el estudiante, por el grado de dificultad que estos presentan –ejercicios 6 y 7–.

En el bloque de ejercicios de los casos de factorización no se resuelven ejercicios de trinomio cuadrado perfecto ni de suma o diferencia de cubos. El ejercicio # 3 se resuelve por sustitución, y es accesible a los estudiantes.

De lo anterior podemos concluir que en el tratamiento de los casos de factorización hay deficiencias en el planeamiento, además que no se retroalimentan los prerrequisitos se descuida la secuenciación lógica y la complejidad de un caso a otro. Además, la guía aborda problemas que no están accesibles a los estudiantes.

El contenido de las clases magistrales 6 y 7 y sus respectivas clases prácticas se analizan con el propósito de ver la aplicación que le dan a los casos de factorización en la unidad de Álgebra.

En la conferencia # 6 se estudian las ecuaciones lineales y cuadráticas, y en la conferencia # 7, los sistemas de ecuaciones y las desigualdades. La aplicación de estos temas a situaciones de la vida diaria, tiene gran peso la traducción del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico o viceversa.

Por ejemplo, la fórmula: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, la lectura "equis más ye a la dos es igual a equis dos más dos equis ye más ye dos", es una traducción incorrecta, porque esta no es más que una descripción de cada uno los símbolos presentes en la expresión. Una traducción correcta que refleja la comprensión de cada parte de la expresión algebraica sería: un binomio al cuadro es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.

La ejemplificación anterior tiene lugar para hacer notar la importancia de cuidar el lenguaje coloquial y el lenguaje algebraico, puesto que para resolver cualquier problema de aplicación es necesario hacer la traducción. En la diapositiva #16 de la clase magistral #6 tenemos una situación que podría conllevar al estudiante a cometer error:

Figura 26. Clase Magistral #6. Diapositiva #16. Uso inadecuado del conectivo "o".

En la expresión anterior se hace alusión al lenguaje coloquial o simbólico, utilizar el operador “o”, este un error ya que le da otro significado al texto, se comprende que cuando hablamos de lenguaje coloquial estamos hablando de lenguaje simbólico. Los casos de factorización, en la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, esta se reduce a aplicar dos de los casos factor común y diferencia de cuadrados. En cuanto a los problemas de aplicación están relacionados a pasar en primera instancia, de lenguaje común a lenguaje algebraico y luego aplicar factor común. La guía de ejercicios fue estructurada en tres bloques. El primero aborda el tema de las ecuaciones lineales con ejercicios y problemas, dos de los ejercicios no están ubicados en orden de complejidad –este sería el correcto e, d y c-, aspecto que fue cuidado con los problemas. El segundo bloque es una nota histórica que debía estar ubicada en la introducción de la primera clase de Álgebra por el aporte que Diofanto dio a la nomenclatura del Álgebra.

El tercer bloque aborda el tema de ecuaciones cuadráticas. Se presentan ejercicios y problemas, en este se aprecia mejor manejo de la complejidad de los ejercicios y problemas.

En la conferencia magistral #7, se aplica uno de los Conceptos Nucleares del estudio como es la ley de los signos. Primeramente, en los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones. Esta ley en todas se aplica pero en el método de reducción de la aplicación de esta ley depende el éxito del método –diapositiva #10–, la búsqueda de los factores, se hace de forma mecánica, solo se dice “vamos a eliminar la variable x”.

De forma similar se trabaja la aplicación de esta ley al resolver desigualdades. Vemos lo que se les presenta:

Figura 27. Conferencia Magistral # 7. Diapositiva #17. Procedimiento para resolver desigualdades.

No se explica por qué se cambia el sentido de la desigualdad. Esta explicación es fácil de hacerla ilustrando la desigualdad en la recta numérica.

La guía está estructurada en dos bloques con ejercicios y problemas. Uno relacionado a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y el otro con inecuaciones lineales. Los ejercicios de sistemas de ecuaciones están de primero en la guía. No se presentan los ejercicios de lo más sencillo a lo más complejo, por ejemplo el # 1.g es más sencillo que el 1.c; el 1.a es más complejo que el 1.d. Con relación a los problemas de aplicación estos están graduados en orden de complejidad. Con relación a las desigualdades, tanto el grupo de ejercicios como los problemas están bien graduados. No obstante, hay pocos problemas de aplicación.

En general se puede afirmar que en el tratamiento de la unidad de Álgebra prevalecen tres obstáculos didácticos, el primero, no se cuida el orden de complejidad de los ejercicios, el segundo, en algunos temas hay discontinuidad en el tratamiento metodológico –no se abordan algunos contenidos ni se retroalimentan algunos prerrequisitos– y el tercero existen conceptos que se presentan con restricciones y a la hora de aplicarlos, éstas se obvian.

5.2. Análisis de Teorías

En este apartado se presenta el análisis de las teorías en la que se fundamenta el estudio: Taxonomía del error y tipología de los obstáculos.

5.2.1. Taxonomía del Error

Investigadores de los errores en el aprendizaje de la Matemática, han formulado diversas clasificaciones para tipificar las causas que los originan. El análisis realizado se enfocó en seleccionar de estas taxonomías aquellos errores y causas asociados al conocimiento algebraico. En la siguiente tabla se presentan las taxonomías de causas del error por autor, la descripción de la causa del error y cómo se manifiesta en los estudiantes.

Tabla 12. *Taxonomías de Las causas error y sus manifestaciones*

AUTOR	TAXONOMIA	DESCRIPCION	MANIFESTACION DEL ERROR
Radatz (1979)	1. Dificultad del lenguaje	1. Dificultad en el aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemático	1. Mal uso de los símbolos y términos matemáticos.
	2. Información espacial	2.Capacidad para pensar a través de imágenes espaciales o visuales	2. producción de representaciones icónicas inadecuadas.
	3. Conceptos Previos	3. Hechos, conceptos, capacidades y destrezas necesarias para el aprendizaje del nuevo contenido.	3. Mal en el manejo de conceptos, procedimientos y propiedades Matemáticas.
	4. Rigidez de Pensamiento	4. Falta de flexibilidad para codificar y descodificar nueva información.	4. Razonamiento o asociaciones incorrectas conceptos u operaciones que interfieren en otros Falla la percepción y transferencias negativas
	5. Uso de reglas y Estrategias irrelevantes	5. Procedimientos y acciones útiles en un contexto pero que fallan en otros	5. Utilizar el razonamiento por analogía que funciona en un contexto pero en otros no.
Booth(1984)	1. El símbolo y la letra	1. Recursos que permiten dotar y manipular abstracciones	No reconoce el significado y la naturaleza del símbolo lo que impide reconocer su utilidad.
	2. Actividad-Respuestas	2. Solución a Ejercicios y Problemas Algebraicos	2. Las respuestas que dan a las actividades algebraicas son únicas y numéricas.
	3. Aritmética	3. Rama de la Matemática que estudia las operaciones básicas y las propiedades con los números.	3. Interiorización de conceptos de forma inadecuada y falta de percepción.
	4. Uso de Reglas o fórmulas	4. Procedimientos que se aplican para calcular	4. Mal uso de la propiedad distributiva, uso del recíproco, la cancelación, falsas generalizaciones o bien uso de método, en s informales.

AUTOR	TAXONOMÍA	DESCRIPCIÓN	MANIFESTACIÓN DEL ERROR
Movshovitz-Hard Zaslavsky e Inbar (1987)	1. Datos mal utilizados	1. Discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno.	1. Agregan datos extraños, olvida algún dato necesario para la solución, utilizan los valores numéricos para una variable en otra.
	2. Interpretación incorrecta del lenguaje	2. Traducción incorrecta del lenguaje matemático. Hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.	2. Traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
	3. Empleo incorrecto de propiedades y definiciones	3. Deformación de los objetos matemáticos.	3. Deformación de principios, reglas, teoremas o definiciones identificables.
	4. Errores lógicos	4. Inferencias no válidas lógicamente.	4. Razonamiento incorrecto que no es causado por el contenido.
	5. Falta de verificación parciales y totales	5. No se realiza el proceso para verificar el procedimiento aplicado.	5. No constata si cada paso de la tarea realizada esta correcto.
	6. Errores técnicos	6. Errores producidos en manipulación de datos y símbolos algebraicos o bien ejecución de algoritmos.	6. Errores de cálculo, de manipulación de símbolos algebraicos, aplicación de algoritmos.
Astolffi (1999)	1. Comprensión de las instrucciones de trabajo	1. Las orientaciones para resolver los ejercicios y problemas no son claras.	1. Los términos empleados para introducir ejercicios y problemas no son transparentes del léxico de cada disciplina
	2. Testimonio de las concepciones alternativas	2. Concepciones alternativas equivocadas y resistentesque se manifiestan de forma inesperada.	2. Concepciones de los alumnos, que perduran a lo largo de la escolaridad y afloran en las producciones y respuestas de forma inesperada.
	3. Operaciones intelectuales implicadas	3. Operaciones intelectuales que el maestro asume que el alumno domina pero que realmente no es así.	3. La manifestaciones de estos errores son diversas pues depende del tipo de operaciones intelectuales que el maestro demande del estudiante y que éste no ha sido preparado

AUTOR	TAXONOMÍA	DESCRIPCIÓN	MANIFESTACIÓN DEL ERROR
Astolffi(1999)	4. Recorridos empleados	4. Aplicación de procedimientos estándar	4. El estudiante no aplica el procedimiento orientado por el maestro
	5. Sobre Carga Cognitiva	5. Capacidad de trabajo limitada	5. El alumno no logra terminar de resolver el ejercicio debido a la carga cognitiva de la actividad.

Fuente Engler, A, Gregorini Ma. I, Müller, D, Vrancken, S y Hecklein, M (2003). Elaboración Propia

Al cruzar estas taxonomías sobre las causas de los errores aplicables al Álgebra se puede identificar tres tipos de errores en el aprendizaje del Álgebra elemental. El primero está relacionado al **Lenguaje y Pensamiento Algebraico (**rosado), aquí se agrupa todo lo que tiene que ver con la *semántica* de los objetos matemáticos, tales como conceptos, definiciones, propiedades, teoremas; la *sintaxis*, de las expresiones y los *símbolos,* que según en el contexto son portadores de significados y cuando estos se desconocen conducen al error. Además, de las representaciones mentales sobre el objeto matemático.

El segundo eje está relacionado con los **Algoritmos** (verde), por ser estos, parte del conocimiento matemático, por el papel que juegan en la resolución de problemas de esta disciplina y por ser su aplicación, una de las causas de los errores en el proceso de aprendizaje.

El tercer eje, son los **Procesos Cognitivos** (celeste) la información que nos llega a través de nuestros sentidos, primero pasa por el sistema límbico o cerebro emocional antes de ser enviada a la corteza cerebral, que es la encargada de los procesos cognitivos. Estos procesos entran en juego a la hora de resolver cualquier tipo de ejercicio.

El error tiene un período de incubación en la estructura cognitiva del aprendiz. Los estudiantes tienen almacenados en su memoria conocimientos mal aprendidos, o habilidades u operaciones intelectuales no desarrolladas que cuando se aplican, se termina de gestar el error a través de las interconexiones que el alumno hace con los objetos matemáticos, en la mayoría de las veces, de forma inconsciente. Entre estas se encuentran los conocimientos previos, deformaciones de los entes matemáticos, concepciones alternativas equivocadas, inferencias no válidas, razonamientos incorrectos, entre otras.

Cuando el error se produce tiene dos representaciones: tangible y no tangible. La primera se aprecia claramente mediante el desempeño del estudiante ante situaciones Matemáticas (primer y segundo eje) y la segunda, la inferimos a través de la tangible, apoyándonos en técnicas que nos aproximen a lo que existe en la estructura cognitiva del estudiante alrededor del tema en cuestión. El tercer eje que se ha mencionado, representaría en nuestro caso la parte no tangible del error.

La taxonomía para tipificar el error en el presente estudio se denota por LAPEC: **L**enguaje **A**lgebraico, **P**ensamiento algebraico y **E**structura **C**ognitiva) y para cada subcategoría se utilizan las siglas descritas en el sistema categorial (ver p. 27).

5.2.2. Análisis de las Tipologías de los Obstáculos

En el estudio se ha considerado analizar los obstáculos, puesto que estos se manifiestan a través del error, cuando estos no son producto del azar y son persistentes y reproductibles (Palarea y Soca, 1994)

Brousseau, citado por Bohórquez y Hernández (2003) menciona una tipología acerca del origen de los obstáculos:

- Ontogenético. Resultan de las limitaciones inherentes a cada estudiante, tales como las neurofisiológicas.
- Didáctico. Son generados de una elección didáctica dentro de un proyecto o sistema educativo.
- Epistemológicos. Bachelard et al. (2000), estudió las situaciones que dan lugar a conocimientos erróneos y las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia. Introduce el concepto de Obstáculos Epistemológicos, como las limitaciones o impedimentos que afectan la

capacidad de los individuos para construir el conocimiento real o empírico y lo tilda como la causa del estancamiento científico.

Los obstáculos epistemológicos son causa de algunos de los errores en el aprendizaje por las siguientes razones:

- Se han presentado a lo largo de la historia de las ciencias y no han sido superados, todavía permanecen vigentes.
- No permiten la apropiación del nuevo conocimiento. Esta condición psicológica impiden evolucionar al espíritu científico en formación.
- El conocimiento no parte de la nada, siempre se basa en conocimientos anteriores. El conocimiento científico es construido entrando en choque con esos conocimientos previos, que en este momento se vuelven obstáculos.

Según Ruano Barreda et al. (2008) considera el obstáculo como un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos.

Existe otro tipo de obstáculo a los que algunos investigadores le han llamado obstáculo cognitivo. Tall, citado por Palarea et al. (1994), sostiene que “se puede conjeturar que los obstáculos cognitivos son producto de la experiencia previa de los estudiantes y del procesamiento interno de estas experiencias” (p.93).

Herscovics, citado por Palarea et al., en 1988, denomina por primera vez el concepto de obstáculo cognitivo en la adquisición de esquemas conceptuales y lo explica a través de la teoría del aprendizaje de Piaget, sobre el equilibrio. Su tesis plantea, que la adquisición del conocimiento es un proceso que contiene una interacción constante entre el aprendiz y el medio ambiente, entre dos mecanismos indisociable, la asimilación de las experiencias a las estructuras cognitivas existentes, y la acomodación, el cambios de la estructura cognitiva por la adquisición del nuevo conocimiento.

Esta idea fue retomada por Trujillo, Guerrero y Castro et al., (2006), quienes sostienen que los obstáculos cognitivos, son duales. Por un lado son negativos porque interfieren en lo que debe ser conocido, impiden la adquisición del nuevo conocimiento; pero a su vez es parte integrante del nuevo conocimiento, porque se da una readaptación del conocimiento que inicialmente era “obstáculo” pero que ahora es “nuevo conocimiento”.

Aunque en la base teórica de estos estudios, no se aprecia con claridad una definición, pero si se identifican las características de este tipo de obstáculos:

- Los errores que se producen no son esporádicos sino muy persistentes y resistentes a la corrección.
- El error no es idiosincrásico
- Se trata siempre de un conocimiento y no de una ausencia de conocimiento.
- Este conocimiento es producto de la educación formal o de la informal, adquirido en la vida de relación social, que le ha permitido frecuentemente al alumno producir respuestas correctas en determinados problemas o dominios de problemas.
- Es un conocimiento que genera respuestas erróneas para ciertos problemas o dominios de problemas cuando la relación con el nuevo conocimiento se establece a través de ellos.

En la primera señal de existencia de obstáculos cognitivos, se observa que el estudiante lo manifiesta con mucha frecuencia ya sea en el mismo contexto o en situaciones diferentes. Esto seguramente es lo que da lugar a la segunda señal, estos obstáculos, son difíciles de modificar, están bien arraigado en la estructura cognitiva del aprendiz. En la tercera, apunta a que no es característico de un individuo y su origen excede al propio sujeto, esto sugiere la existencia de otro tipo de obstáculo que se abordó anteriormente, como son los obstáculos epistemológicos.

Estos planteamientos acerca del obstáculo cognitivo y sus orígenes, hacen pensar que la principal causa del error es de origen cognitivo, se vislumbra que están ligados con la estructura cognitiva del que aprende y del que enseña.

5.3. La entrevista

La entrevista se aplicó a los directores de los Departamento de Matemática y a los Coordinadores de Asignatura de las Facultades Multidisciplinarias, en tres momentos, en el primero se abordó los aspectos relacionados a la metodología que los docentes aplican en el desarrollo de la unidad de Álgebra y los Conceptos Nucleares Conceptos Nucleares. El segundo, a la aplicación del lenguaje común y lenguaje algebraico en la resolución de ejercicios y problemas y el tercero a la identificación de errores y obstáculos en la resolución de ejercicios relacionados a los casos de factorización y sus requisitos.

5.3.1. Primer Momento

Este primer momento se dividió en dos partes, primero se hicieron las preguntas relacionadas a la metodología que utilizan en la enseñanza del Álgebra(ver anexo N° 7) y en la segunda parte se les pasó un gráfico impreso para que escribieran los Conceptos Nucleares (ver anexo N° 8)

Estrategias para la Enseñanza del Álgebra

Los informantes expresaron que la estrategia básica era la orientada en el Modelo Educativo, Conferencias Magistrales, Sesiones Expositivas Teóricas con ejemplos y Sesiones Prácticas donde se resuelven de ejercicios en grupos. Afirman que las sesiones teóricas se enfocan en presentar los conceptos como proceso generalizador de la aritmética. Además, destacan la importancia del estudio del Álgebra, contextualizan los contenidos con otros temas y el cálculo.

Las Sesiones Prácticas, las dedican a resolver ejercicios con valor numérico y de operaciones con signos de agrupación, a diferenciar los casos de factorización por sus características. Señalan que orientan la lectura del material de estudio, exploración de los conocimientos previos y aplican el método socrático, pasando a los estudiantes a la pizarra. Otros sostienen que aplican estrategias como lluvia de ideas, aprendizaje basado en la solución de problemas, trabajo colaborativo, exposiciones, Investigaciones, ligas del conocimiento, representaciones geométricas, observación, lectura comprensiva, crítica y reflexiva.

Se puede observar que las estrategias mencionadas son atinadas al contenido, al tipo de estudiante y que responden a lo orientado por la institución.

- **Uso de la reseña histórica**

Todos los docentes sabemos que la historia nos brinda una excelente guía para enmarcar los contenidos curriculares, en una época y en un contexto determinado, así como, comprender el origen de los conceptos importantes de la Matemática. De aquí, la enseñanza de esta ciencia no debe presentarse de forma dogmática, cerrada y terminada.

Los directores y coordinadores señalan que aprovechan la reseña histórica para destacar desde cuando se utilizan las letras que representan números y que posibilita la resolución de ecuaciones de diferentes grados. Además, para explicar el proceso de generalización. Otros expresaron que utilizan algunos métodos antiguos pero de fácil aplicación, para abordar los contenidos asociados a estos.

Se puede apreciar en las respuestas que hay poco conocimiento acerca de la utilidad didáctica de la historia de la Matemática. Por tanto, hace falta en primer lugar desarrollar conciencia en los docentes, para desmitificar que esta ciencia no es doctrina universal intemporal de verdades perpetuas.

Conocer la ciencia que se enseña con sus grandezas y debilidades, sus momentos de gloria y sus épocas de estancamiento, expresa la dinámica de la actividad científica, abierta y en cambio permanente (González et al., 2004). Para el estudiante, además, de estimular los valores científicos, despierta la curiosidad, la creatividad y los motiva a querer comprender los objetos matemáticos.

- **Recursos Didácticos**

Existen muchas definiciones sobre este término, en el estudio se entenderá por recursos didácticos, a todos aquellos productos mediadores del desarrollo del proceso enseñanza aprendizaje.

En la respuesta que dieron los informantes a la pregunta sobre los recursos didácticos que utilizan en el desarrollo de las clases de Álgebra, hicieron alusión a dos tipos de recursos, a los convencionales como la bibliografía, guías de clases prácticas, pizarra y marcadores y como audiovisuales mencionaron el data show. Otros señalaron como recurso didáctico "competencia entre equipo", "Trato hacer visualizable los conceptos", estos últimos están confundiendo estrategias didácticas con recursos didácticos.

- **Estrategias de Evaluación**

La evaluación considerada acompañante del proceso enseñanza y aprendizaje y parte del contenido curricular, demanda de la aplicación de estrategias que permitan identificar claramente cuál es el nivel de maduración alcanzado y así poder redireccionar el proceso y el tipo de interacción para alcanzar los aprendizajes deseados.

Los informantes señalan que sus estrategias de evaluación son:

- La resolución de ejercicios y problemas resueltos en clase y en casa.
- Pruebas escritas
- La participación de los estudiantes
- La elaboración de trabajos en grupos

Además, sostienen que aplican varios tipos de evaluación según el momento y agente evaluador tales como: la heteroevaluación, evaluación diagnóstica, escala de actitudes y la observación.

Se aprecia que las estrategias de evaluación aplicadas podrían brindar información para son los fines antes descritos, siempre y cuando, estas se diseñen con dichos propósitos y que los resultados no se limiten únicamente a la asignación de una calificación cuantitativa que etiquete al estudiante como "bueno" o "malo".

- **Estrategia para incitar la participación de los estudiantes**

Se pudo observar que las respuestas a esta pregunta, hacen referencia a las clases de grupo. Esto deja claro que en las conferencias magistrales no hay el mínimo espacio para que el alumno participe. Entre las estrategias mencionaron que organizan en grupos pequeños a los estudiantes para que todos participen, hacen preguntas de respuestas cortas, ante un ejercicio o problema propuesto, incentivan a los estudiantes a quien encuentre primero la respuesta y reconocimientos en públicos ante el cumplimiento de tareas.

- **Estrategias para superar el error en las operaciones algebraicas y los casos de factorización**

Como se aprecia en el subtítulo se han juntado las respuestas de dos preguntas por la proximidad de las respuestas que han dado los informantes.

Las estrategias que estos mencionan para superar el error son:

- Señalar el error en cada momento para que ellos no lo comentan. Esta acción no evitará que el estudiante vuelva a cometer el error ya que mientras no se averigüé qué lo condujo al error, es como señalar a un ciego con el dedo por dónde debe caminar.

- Corregir el error contrastándolo con la teoría estudiada. Esta situación es parecida a la anterior. No basta contrastar, puesto que si el alumno comete error, precisamente es porque no ha comprendido esa teoría, el reto está en indagar qué está impidiendo que la aprenda.

- Inducir a los estudiantes a que ellos identifiquen el error. Una de las características de los errores es que no somos conscientes de estos. Por tanto, la estrategia dará resultado siempre y cuando, comprenda lo que pide el ejercicio o problema, identifique qué es lo que tiene que hacer para resolver, maneje la teoría y tenga las habilidades que demanda la resolución.

- Incrementar la ejercitación. Aquí se está apostando, en la estrategia de enseñanza de repetición. que, mientras no vaya acompañada de preguntas de reflexión que permitan argumentar por qué apliqué tal o cual procedimiento, el aprendizaje será repetitivo, sin comprensión.

- Uso de esquemas gráficos para detectar el error en cada caso (factorización). Cuando se le solicitó que explicara, dijo que se refería a graficar en una cartulina cómo se relacionaban los términos del miembro izquierdo de la fórmula con los de la derecha. En su explicación de cómo lo usaría, dijo que lo pegaría en una esquina del aula, para cuando el estudiante no se “acordara” de la fórmula consultara los gráficos. Como se puede observar el docente está haciendo mención de un recurso, que de la forma que lo piensa usar, se vuelve un recurso estéril.

- Provocar el conflicto en la mente del alumno para buscar estrategias de solución. Al preguntársele cómo lo haría, su respuesta fue muy teórica “significa provocar el desequilibrio en las estructuras mentales del estudiante enfrentándolo con algo que no puede explicar con sus conocimientos previos”. Realmente es una buena estrategia, el reto está en cómo provocar ese conflicto.

A excepción de la última estrategia, todas apuntan a superar el error a través de actividades repetitivas, que promueven aprendizajes memorísticos.

- **Conceptos Nucleares**. En la entrevista se les proporcionó a los informantes, un gráfico para que ellos escribieran la respuesta a la pregunta "Refiera algunos conocimientos, términos, habilidades, nociones, ejemplos, aplicaciones, etc., que considere relevantes para el aprendizaje de los casos de factorización (puede agregar más elipse):"

Figura 28. Entrevista Directora Depto.

Las respuestas relacionadas a los Conceptos Nucleares de los casos de factorización se organizaron en cuatro categorías, la primera asociada a los conceptos y definiciones, la segunda a los teoremas y propiedades, la tercera a los algoritmos y la cuarta al contexto de aplicación; de estas solo se seleccionaron las respuestas comunes.

- Los Conceptos y Definiciones escritos fueron: términos semejantes, Máximo Común Divisor, signos de agrupación, factor común, cuadrado y cubo perfecto.
- Los teoremas y propiedades: Ley de los signos, propiedades conmutativa, distributiva y asociativa. Propiedades de potenciación y de los radicales.
- Los algoritmos: operaciones aritméticas, extraer raíces cuadradas, reducción de términos semejantes, las reglas de los casos de factorización.
- Contexto. En esta categoría solo encontramos el contexto algebraico y el geométrico.

Considerando que el conocimiento de los alumnos se va organizando a través de la escolaridad en torno a cada vez menos Conceptos Nucleares (Casas y Luengo, et al. 2013) y que además, los casos de factorización es un conocimiento que vienen construyendo desde la secundaria, se seleccionaron siete Conceptos Nucleares para las redes asociativas de Pathfinder: Las propiedades de los números reales, operaciones algebraicas, propiedades de potenciación, radicales, ley de los signos, signos de agrupación y casos de factorización. Estos conceptos están asociados a teoremas, propiedades y algoritmos. El resto de los conceptos –hablando en término genérico- términos semejantes, trinomio, polinomio, monomio, expresión algebraica y factor común –el concepto de Máximo Común Divisor, se analizó desde la definición de factor común–, se auscultaron a través del cuestionario aplicando la técnica de asociación de palabras y sus conceptos o imagen, otra técnica que permite conocer estructuras cognitivas.

5.3.2. Segundo Momento

La entrevista en este segundo momento, pretendía conocer desde la óptica del docente el tipo de razonamiento que hace el estudiante al enfrentarlo a situaciones en donde se tiene que utilizar el lenguaje algebraico. Además, identificar los errores y obstáculos al resolver este tipo de ejercicio (ver anexo N° 9).

- Primer Ejercicio. El enunciado del primer ejercicio fue: Decir si la proposición “Si sumo tres números naturales consecutivos y divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número”.

Razonamiento. Las opiniones fueron encontradas. Unos dicen que los estudiantes parten de valores específicos, y van probando si la proposición se cumple o no. Otros manifestaron que lo primero que harían es buscarse una expresión general y luego sustituir con valores específicos. Considero que las opiniones son posibles, pues dependerá de la habilidad que los aprendientes hayan alcanzado en traducir de lenguaje común a lenguaje algebraico y viceversa.

El primer caso, se podría presentar en alumnos que se están iniciando en el Álgebra, pues la estrategia de aprendizaje ensayo-error, no es confiable en tanto en cuanto, no lleguemos a una generalización por procesos de inducción. El segundo caso, en donde los estudiantes escriben una expresión general a partir del enunciado, estos alumnos demuestran un buen dominio de traducir de lenguaje natural a lenguaje algebraico y por ende, demuestran un pensamiento formal, más desarrollado.

Errores y Obstáculos. Entre los obstáculos los informantes señalan, que cuando los estudiantes no conocen la definición de consecutivos - aunque apuntan que en este nivel sería muy raro, puesto que desde preescolar vienen estudiando estos conceptos- o desconocen la simbolización de números consecutivos, no podrán traducir de lenguaje común a lenguaje algebraico el ejercicio. En ambos casos estamos ante un obstáculo cognitivo, en el primero no hay falta de conocimiento, sino estamos ante la existencia de un conocimiento incompleto. En el segundo caso, el estudiante no tiene bien estructurado su pensamiento formal, que le da flexibilidad para resolver problemas de razonamiento y deducir modelos. Los aprendientes, en esta situación están condenados a cometer errores en su respuesta, los que clasificaríamos semántico y simbología o sea que es de tipo Lenguaje (L) y de proceso cognitivo (PC).

- Segundo Ejercicio.

$n=1 \Rightarrow n^2 = 0^2 + 0 + 1 = 1$

$n=2 \Rightarrow n^2 = 1^2 + 1 + 2 = 4$

$n=3 \Rightarrow n^2 = 2^2 + 2 + 3 = 9$

$n=4 \Rightarrow n^2 = 3^2 + 3 + 4 = 16$

$n=5 \Rightarrow n^2 = 4^2 + 4 + 5 = 25$

Se les preguntó a los informantes que opinaran sobre los errores y obstáculos que enfrentaría el estudiante al responder las siguientes cuestiones:

-Escribe una expresión algebraica que represente las situaciones anteriores.
-Escribe en lenguaje común la expresión anterior

Errores. Los errores que señalan los informantes son: reducir la expresión a un número, los conduce a perder el patrón; aplicar mal el concepto de antecesor y sucesor; confundir un símbolo por otro. El primer error es de proceso cognitivo (PC), pensar que toda expresión se cierra en un número, manifiestan un pensamiento concreto. Los siguientes errores son de lenguaje, uno de semántica y el otro de simbología (LA).

Obstáculos. Los informantes señalaron que, el no identificar el patrón y no hacer la traducción correctamente, puede ser porque desconocen la simbología involucrada en el ejercicio, no conocen el concepto de antecesor y sucesor o también porque nunca han abordado una situación similar. Se puede observar que los dos primeros obstáculos son de tipo cognitivo –estudiante– y el tercero es didáctico –docente–, puesto que se pone al aprendiz en situaciones en donde no se le ha preparado.

Cabe destacar que en las expresiones de los docentes se notó en algún momento, confusión de los conceptos de error y obstáculos, razón por la cual se tuvo que cortar para explicarlos y volver a retomar la entrevista.

- Tercer Ejercicio. Cuya orientación "fue encuentre los valores de A,B Y C para":

		A	B	C
+		A	B	C
		A	B	C
	2	A	C	C

Se preguntó a los informantes que respondieran las siguientes preguntas:

a) ¿Puede el estudiante resolver esta tarea usando algún procedimiento algebraico?

b) ¿Qué nociones algebraicas se usaría?

c) ¿Cuáles la resolución?

d) ¿Qué dificultades puede tener el estudiante al resolver ejercicios de este tipo?

e) ¿Qué tipo de respuesta y justificación piensas que podría dar un alumno?

Sus respuestas a la primera pregunta, eliminaron las respuestas a los incisos b, c, d y e. Estas se resumieron a:

- "No están preparados para resolver este tipo de ejercicio”
- “Con los estudiantes de primer ingreso no se trabaja este tipo de ejercicio”
- “Este tipo de ejercicio no se trabaja en la universidad aunque creo que se deberían de trabajar”
- “Los estudiantes no están acostumbrados a resolver este tipo de ejercicio y puede perder interés”

Unos afirmaron que si algún estudiante lo intentara hacer lo haría por ensayo-error. Otros dicen que la respuesta que darían los estudiantes es que todas las variables son cero. De presentarse estos tipos de respuestas en ambos casos los errores sería de proceso cognitivo.

A todas luces queda claro que la asignatura Matemática General, no desarrolla en el estudiante habilidades de generalización. La función principal del Álgebra es modelizar sistemas dentro y fuera de la Matemática, por tanto, la enseñanza del Álgebra debería de promover estas capacidades en los estudiantes, en los diferentes niveles que se enseña esta asignatura. Se puede caracterizar esta situación como obstáculo didáctico.

5.3.3. Tercer Momento

En este momento de la entrevista se presentaron ejercicios de factorización para que los informantes identificaran los prerrequisitos, los errores y obstáculos que enfrentan los estudiantes cuando resuelven este tipo de ejercicio (ver anexo N° 10).

Prerrequisitos. Entre los prerrequisitos los informantes mencionaron la ley de los signos, reducción de términos semejantes, propiedad distributiva, extraer raíz cuadrada y raíz cúbica, las reglas de cada caso de factorización. Como se puede observar, todos estos prerrequisitos forman parte de los Conceptos Nucleares identificados en el primer momento de la entrevista.

Errores y Obstáculos. Los informantes señalaron que el no manejar la propiedad distributiva lo conducirá a no identificar el factor común. No manejar la ley de los signos les llevará a cometer errores en su aplicación. No saber cada una de las reglas de factorización y la relación entre sus términos, desencadenará en la no resolución del ejercicio. Como se puede apreciar, los docentes informantes perciben que los errores que pueden cometer los estudiantes es de lenguaje (ELA) y algoritmo (EAL), porque no manejan la teoría y el obstáculo que enfrentan es de orden cognitivo.

También destacaron que en algunos ejercicios de factorización se puede presentar situaciones que para resolverlos es necesario aplicar más de un caso o bien reiterar el caso –ejemplo el ejercicio 2–, afirman que generalmente, cuando se presentan estas situaciones el estudiante solo aplica uno de ellos porque piensan que este tipo de ejercicio se resuelve con una de las fórmulas estudiadas y dan por resuelto el ejercicio. Lo antes mencionado por los docentes, es un tipo de error que está asociado a procesos cognitivos (PC), primero porque no están atendiendo en su totalidad la naturaleza del ejercicio y segundo, porque el estudiante solo percibe aquello que se familiariza con sus experiencias previas. Esto manifiesta el poco desarrollo del pensamiento algebraico.

5.4. El Cuestionario

El cuestionario se aplicó en dos partes. En la primera se trabajó lenguaje algebraico y resolución de ejercicio aplicando los prerrequisitos de los casos de factorización. La segunda parte, identificación y aplicación estos casos, tanto en expresiones algebraicas como en situaciones geométricas.

Se realizaron dos niveles análisis, en el primero se identificaron los errores y se reflejaron en parrillas metodológicas de doble entrada (ver anexo N° 11, 12, 13 y 14). En el segundo, se elaboraron las redes sistémicas: los objetos matemáticos se organizaron en categorías atendiendo su naturaleza y se clasificaron los errores detectados en el cuestionario.

5.4.1. Lenguaje Algebraico

Atendiendo la taxonomía adoptada para clasificar el error, este acápite se estructuró desde la perspectiva lingüística: semántica, simbólica y sintáctica. Además, se explican las causas y meta causas de estos errores.

Cabe destacar que los porcentajes que se reflejan en las redes sistémicas se derivan del total de alumnos que cometieron errores y no del total de estudiantes de la muestra.

5.4.1.1. Semántica

En este apartado se estudian las partes del cuestionario que son exclusivamente relacionada con la identificación de la estructura cognitiva de los estudiantes. Para ello se utilizó la técnica Asociación de Palabra, para activar la memoria a largo plazo, específicamente la memoria semántica ya que este tipo de memoria como se señaló en el apartado 2.3.2.3, además de organizar toda la información que poseemos, relacionada con hechos, conceptos es necesaria para hacer uso adecuado del lenguaje.

En los ítems del 1 al 6; se analizaron los conceptos prerrequisitos, resueltos mediante la asociación del término con su concepto. Del 18 al 24, asociar las fichas productos notables con su respectivo caso de factorización y del 31 al 36 asociar fórmulas con su correspondiente figuras geométricas.

- **Asociación de Palabra-Conceptos (ítems del 1 al 6)**.

Más de la mitad de la muestra identificó el concepto de monomio, aproximadamente la misma cantidad reconoció el concepto de factor común. El concepto de polinomio fue identificado por un poco más de la mitad, pero menos de la mitad reconoció el concepto de término. La gran mayoría identificó los conceptos de expresión algebraica y el de término semejante. Como se puede apreciar en estos datos, los conceptos que los estudiantes más reconocen son término semejante y expresión algebraica. El concepto que más fallaron fue el de término. En promedio, más de la mitad de los alumnos de la muestra, manejan los conceptos prerrequisitos.

La siguiente red sistémica refleja los errores cometidos por los estudiantes de la muestra que no acertaron con sus respuestas relacionadas a los conceptos prerrequisitos para el aprendizaje de los casos de factorización:

			CÓDIGO	FRECUENCIA%
		Monomi o	0 1	16
		Expresión algebraica	0 2	26.3
	Té rmi no	pol i nomi o	0 3	21
		Fa ctor común	0 4	26.3
		térmi no s e me ja nte	0 5	10.5
		Té rmi no	0 6	10.5
	Término semejante	Fa ctor común	0 7	10.5
		Monomi o	0 8	5.26
Errores en los	xpresión algebraica	pol i nomi o	0 9	5.26
conceptos		térmi no s e me ja nte	10	5.26
prerrequisitos				
de los casos	Monomi o	térmi no	11	42
de factorización		térmi no s e me ja nte	12	5.26
		Fa ctor común	13	10.5
	Pol i nomi o	térmi no	14	10.5
		térmi no s e me ja nte	15	5.26
		Monomi o	16	36.8
		térmi no	17	15.79
		térmi no s e me ja nte	18	15.79
	Fa ctor común	pol i nomi o	19	10.5

Figura 29. Red Sistémica: Errores de los estudiantes al asociar el prerrequisito con su conceptos.

Los estudiantes que asociaron el concepto de término semejantes con el de término, manifiestan la existencia del concepto en su estructura cognitiva, pero incompleto (causa), hablando en lenguaje de Ausubel, entre ellos hay una jerarquía, el concepto de “término” es más general que el de “término semejante”. Los que lo asociaron al concepto de “factor común”, si bien este se aleja del concepto “término semejante” se presentan dos situaciones, o bien estos alumnos lo relacionaron por su similitud semántica, entre la palabra “común” y “semejante”, o por la algorítmica, están trasladando una situación que se presenta en las operaciones suma y resta –términos semejantes–, con otra que se presenta en la operación multiplicación –factor común–, estas causas del error son las meta causas y son de origen cognitivo.

Los estudiantes que asocian el concepto monomio al de término, la causa, es que estos conceptos tienen mucha fuerza en sus estructuras cognitivas, ya que todo monomio es un término. Estos aprendientes, semánticamente muestran conocimiento del concepto, pero falta dominio del objeto matemático en sí (meta causa).

Los que asociaron el concepto de factor común por el de término, es probable que esto se deba a que al extraer factor común a dos o más expresiones lo que tenemos es un término generalmente (causa). De ser así, la meta causa de este error, estaría referido a la rigidez de pensamiento.

Los estudiantes que asociaron el concepto de polinomio al de monomio, la causa es que entre estos conceptos hay fuerza semántica en su estructura cognitiva, pues la definición que se les presenta de un polinomio es: suma o resta de varios monomios.

Aquellos que confunden el concepto de expresión algebraica con el de polinomio, para estos alumnos, ambos conceptos tienen connotación de extensión –expresiones largas– en sus estructuras cognitivas y posiblemente es lo que los lleva a esta confusión (causa). No obstante, la relación semántica entre estos conceptos es lo que los conduce al error, ya que jerárquicamente el concepto de polinomio está subordinado al concepto de expresión algebraica (meta causa).

Los informantes que no reconocieron el concepto de término y lo asociaron a monomios o factor común, la justificación se dio en párrafos anteriores. En cuanto a los alumnos que lo relacionaron con expresión algebraica, muestran cierto conocimiento acerca del concepto “término” pero no en su totalidad, pues este concepto tiene especificidades que lo diferencia de otras “expresiones algebraicas”; con esta asociación los estudiantes evidencian la fuerza que tiene para ellos, ambos conceptos.

En este grupo de ítems se observa que las asociaciones incorrectas con los conceptos prerrequisitos, se debe a un aprendizaje deficiente, se aprecia falta de interiorización de los mismos (causa). Estos errores son de orden semántico-lingüístico, porque los estudiantes no comprender el significado de los signos lingüísticos utilizados en estos conceptos matemáticos, ni los significados que estos cobran en este contexto (meta causa). Esta falta de comprensión de los significados de los conceptos prerrequisitos, son un obstáculo cognitivo para el aprendizaje de los casos de factorización.

- **Asociación Productos Notables-Factorización (ítems del 18 al 24)**

Según la estructura cognitiva de los estudiantes reflejadas a través de las fichas de asociación, los casos identificados por casi todos los estudiantes en su representación algebraica fueron, factor común y trinomio de la forma $ax^2 +bx+c$.

El caso que menos identificaron fue la suma o diferencia de cubos, un poco más de la mitad, confunden este caso con el binomio al cubo y todos los alumnos que no identificaron el binomio al cubo, lo relacionan con la suma o diferencia de cubos. Una situación parecida se presenta con el trinomio cuadrado perfecto, los que no identificaron este caso (los tres cuartos de la muestra) lo asocian con la diferencia de cuadrado. Exactamente esta misma cantidad se encuentra en la diferencia de cuadrados, los estudiantes coligan la regla de este caso, con la regla del trinomio cuadrado perfecto.

			CODIGO	FRECUENCIA%
Errores al asociar los casos de factorización sus respectivas regla	Factor Común	Trinomio	0 1	66.67
		Suma o diferencia de cubos	0 2	33.33
	Diferencia de Cuadrados	Trinomio cuadrado perfecto	0 3	66.67
		Trinomio	0 4	16.67
		Producto del binomio al cubo	0 5	16.67
	Trinomio de la forma + +	Producto del binomio al cubo	0 6	66.67
		Suma o diferencia de cubo	0 7	33.33
	Diferencia de Cubos	Producto del binomio al cubo	0 8	53.84
		Trinomo cuadrado perfecto	0 9	15.38
		Trinomio de la forma + +	10	7.69
		Trinomio	11	7.69
		Diferencia de cuadrado	12	7.69
		Factor común	13	7.69
	Trinomio Cuadrado Perfecto	Trinomio	14	8.33
		Diferencia de cuadrado	15	75
		Producto del binomio al cubo	16	8.33
	Trinomio	Trinomo cuadrado perfecto	17	40
		Trinomio de la forma + +	18	20
		Diferencia de cuadrado	19	20
		Factor común	20	20
	Producto del Binomio al cubo	Suma o diferencia de cubos	21	100

Figura 30. Red sistémica errores casos de factorización-reglas.

En estas situaciones se observa que aplican la propiedad de potenciación $(ab)^n = a^n b^n$ del producto, a la suma $(a\pm b)^n = a^n \pm b^n$, situación que los conduce al error. Este error también se presentó en el pilotaje realizado en este estudio y en otras investigaciones y es reconocido como un obstáculo epistemológico (OEP).

En cuanto al trinomio x^2+bx+c, fue identificado por la mayoría de los estudiantes. De los que no pudieron reconocer, poco menos de la mitad de estos, lo ven como trinomio cuadrado perfecto. Esta asociación incorrecta se debe a la similitud de las expresiones (causa), esto evidencia falta de dominio de ambas reglas (meta causa).

En este punto se han analizado las representaciones semióticas de los caso de factorización. Los errores son de orden semántico-lógico, las asociaciones incorrectas se produjeron por la falta de análisis y síntesis para determinar la relación existente entre los elementos de los casos de factorización con sus respectivos términos del producto notable (causa). Lo anterior evidencia falta de dominio de lenguaje algebraico y poco desarrollo del pensamiento algebraico de parte de los estudiantes (meta causa).

- **Asociación de las Identidades Algebraicas y su representación Geométrica (Ítems del 31 al 36)**

Los casos que más identificaron fueron el trinomio x^2+bx+c y el trinomio de la forma ax^2+bx+c, en ambos casos por más de la mitad de la muestra. Los casos identificados por una cantidad muy pequeña de la muestra fueron, el trinomio cuadrado perfecto y factor común.

			CODIGO	Frecuencia%
Errores asociar los casos de factorización sus respectivas gráficas	Factor Común	Trinomio	0 1	**48**
		Trinomio cuadrado perfecto	0 2	**12**
		Prod. Del binomio al cubo	0 3	8
		Trinomio de la forma +	0 4	8
		Suma o diferencia de cubos	0 5	24
	Diferencia de Cuadrados	Factor común	0 6	33.33
		Trinomio cuadrado perfecto	0 7	50
		Trinomio de la forma +	0 8	5.55
		s uma o difercia de cubos	0 9	11.11
	Trinomio de la forma + +	Factor común	10	12.5
		Trinomio cuadrado perfecto	11	25
		Diferencia de cuadrado	12	12.5
		s uma o difercia de cubos	13	50
	Trinomio Cuadrado Perfecto	Trinomio	14	45.5
		Factor común	15	22.72
		Diferencia de cuadrado	16	4.5
		Producto del binomio al cubo	17	18.18
		Trinomio de la forma + +	18	9
	Trinomio	Factor común	19	8.33
		Trinomo cuadrado perfecto	20	16.67
		Trinomio de la forma + +	21	33.33
		Producto del binomio al cubo	22	33.33
		Suma de cubos	23	8.33
	Suma de cubos	Trinomo cuadrado perfecto	24	36
		Trinomio de la forma + +	25	4
		Diferencia de cuadrado	26	8
		Factor común	27	8
		Producto del binomio al cubo	28	32
		Trinomio	29	12

Figura 31. Red sistémica representación geométrica de los casos de factorización.

En la red sistema anterior, se reflejan los errores cometidos por los estudiantes al asociar las identidades algebraicas con sus respectivas figuras geométricas.

En la representación geométrica de la diferencia de cuadrados, los aprendientes asociaron la ilustración con el trinomio cuadrado perfecto y viceversa. En un mismo porcentaje también lo relacionaron al caso factor común.

Con relación a la suma de cubos, poco menos de la mitad de los que no acertaron, lo confundieron con el TCP.

Es notorio que el trinomio de la forma fue el caso que más se reconoció su ilustración geométrica, también fue el que más se reconoció su expresión algebraica. De igual manera el menos reconocido tanto algebraica como geométricamente fue el TCP. No obstante, el caso factor común uno de los más reconocidos algebraicamente, fue uno de los menos reconocido geométricamente, pese a la sencillez de la ilustración.

Los seres humanos tenemos diferencias en la capacidad de pensar cuando lo hacemos mediante imágenes ya sean estas visuales o espaciales, estas se acentúan cuando las utilizamos al realizar tareas Matemática, especialmente en Álgebra, por lo abstracto de los objetos.

Los errores cometidos por menos de la mitad de la muestra, al no asociar la expresión algebraica de cada fórmula con su respectiva representación geométrica manifiestan un error de tipo semántico filosófico –identificación del referente– y se debe a que los estudiantes no han alcanzado el grado de abstracción, necesario para identificar las expresiones algebraicas en contextos geométricos (causa), obstáculo cognitivo asociado al poco desarrollo del pensamiento algebraico (meta causa).

5.4.1.2 Simbología y Sintaxis

Como se dijo anteriormente, el lenguaje algebraico además de ser lógicamente perfecto se compone de reglas sintácticas estrictas, de manera que para desarrollar este lenguaje se requiere del dominio semántico de los símbolos y la sintaxis que lo conforman.

Si bien es cierto que en todo el instrumento se utilizan símbolos, el estudio se realizó en los ítems del 7 al 12 y el 17, mismos que abordan la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa.

Cabe mencionar que el análisis estuvo enfocado en la lectura de conceptos requisitos como potenciación, radicales, operaciones algebraicas, signos de agrupación y en la habilidad de traducir hasta llegar a la generalización.

- **Potencia (ítems 8, 10 y 12).** La mayoría de los estudiantes de la muestra dominan el significante de cada término de la potenciación, o sea que identifican la base y el exponente. Pero menos del 30% maneja el significado, con este bajo porcentaje se observa problema, porque los estudiantes solo están leyendo los símbolos –equis a la m por equis a n es igual a equis a la m más n– pero no traducen la sintaxis de la expresión, lo que significa que no están haciendo una lectura lógica, con sentido, no están leyendo Matemáticamente –el producto de potencias de igual base, es igual a la base elevada a la suma de los exponentes–. Por tanto, según Moreira et al. (2002), este objeto matemático no tiene sentido para la mayoría de la muestra, ya que carecen del significado de la sintaxis del concepto de potenciación (causa). El tipo de error es de orden sintáctico (ESI) y la meta causa está asociada al desconocimiento de la naturaleza y el significado de los símbolos y letras involucradas en la sintaxis del concepto de potenciación.

- **Radicales (ítem 8)**. Gran parte del grupo muestra conoce el significante del símbolo de radical y un poco más de la mitad maneja el significado. A esto le sumamos el referente, que es el objeto en sí, solo una cantidad muy pequeña de estudiante han interiorizado los radicales como objeto matemático. Esto significa que son muy pocos los que muestran dominio semántico-filosófico. El resto de los estudiantes evidencia falta de dominio sintáctico (causa) por el poco desarrollo del lenguaje algebraico (meta causa), esta carencia es un obstáculo cognitivo.

- **Operaciones Algebraicas (ítems 9, 11 y 17).**

  En los ítems 9 y 17, la operación algebraica involucrada en la traducción era la diferencia, esta fue reconocida por menos de la mitad de la muestra. El resto de los que no resolvieron, la tradujeron por suma o cociente en el ítem 9 y suma o producto en el ítem 17. Es importante destacar que en ambos ítems se presentaron los mismos porcentajes de estudiantes que fallaron en la traducción y los mismos porcentajes en leer otras operaciones. Este tipo de error es semántico-lingüístico y fue producto del desconocimiento de la relación de los significados de las palabras “diferencia” y “disminuido” con la operación resta (causa), esto evidencia un vocabulario pobre relacionado a las operaciones algebraicas (meta causa).

  En el ítem 11, desconocen la relación entre el logaritmo y la potenciación, esta situación los conduce a cometer error al hacer la traducción ya que no identifican los términos de un logaritmo. Entre ellos se destacan leer al número dado como el exponente de la base (un poco más de la mitad de los estudiantes) y traducir como el producto de dos logaritmos uno con base 2 y otro con base 8 (28.57%).

  Todos los que contestaron conocen el símbolo de logaritmo – significante–, pero la gran mayoría desconoce el significado de la sintaxis del logaritmo. Como los estudiantes desconocen la relación que existe entre cada signo de esta estructura fracasan en la traducción. Por lo anterior, este error se clasifica de orden sintáctico y la causa se deriva del mal uso de los símbolos cuando se encuentran dentro de una estructura debido a un aprendizaje deficiente (meta causa).

- **Signos de Agrupación (ítems 13 y 16).** En ambos ejercicios se esperaba que los estudiantes simplificaran las expresiones dadas.

  Solo el 6% de la muestra utilizó correctamente los signos de agrupación en el ítem 13. Los que fallaron en la resolución del ejercicio, operan haciendo caso omiso de estos signos. El error es de orden sintáctico, a pesar que hay conocimiento de cada uno de estos signos –significante–, la causa de este error, es producida porque desconocen cómo funcionan, cuando estos se encuentran juntos en una expresión algebraica, se aprecia rigidez de pensamiento al momento que no descodifican estos signos en la solución del ejercicio (meta causa).

En el ítem 16, poco menos de la mitad de la muestra no intentó siquiera resolverlo, solo una pequeña parte utilizó correctamente los signos de agrupación. El resto que intentó resolverlo, los cambiaron de lugar, los sacaron del proceso de solución, los juntaron y al final colocaron los exponentes, entre otras cosas. El error es sintáctico, puesto que desconocen el papel que juegan estos signos en una expresión algebraica (causa) y la meta causa es la ausencia de sentido que estos signos tienen para los estudiantes, en la solución del ejercicio.

- **Generalización (ítems 7, 8 y 9)**. Muy pocos estudiantes resolvieron correctamente los ejercicios de generalización. Cabe mencionar que nadie resolvió correctamente el ítem 7.

  En los tres ítems más de la mitad de los estudiantes no pueden trabajar con letras, fuerzan la respuesta a un valor numérico, se les hace difícil manipular una expresión algebraica que no se pueda cerrar. Ellos suponen que las tareas algebraicas exigen una solución única y además, numérica como en la Aritmética. Estos errores son semántico-lógico, se aprecia en estos alumnos rigidez de pensamiento (causa) que no les ha permitido alcanzar el grado de abstracción que exigen los procesos de generalización debido al poco desarrollo del pensamiento variacional.

  Algunos de los estudiantes que intentaron resolver el ítem 8, escriben los enunciados como una ecuación lineal e intentan resolverla. Estos asocian la expresión a una ecuación, seguramente por las siguientes razones: primero porque visualizan la existencia de variables, como símbolos que se sustituyen a los números, en este sentido, el significado que tienen de variable es de representación de valores específicos. Segundo, porque en el proceso de generalización, ellos son más eficaces utilizando símbolos, lo que facilita la construcción de ecuaciones. Este grupo de estudiantes, manifiestan tener un razonamiento algebraico evidentemente más desarrollado, pero de igual manera, la tipología del error y su causa son las mismas que el anterior, solo que en menor intensidad.

En cuanto al ítem 7, para que los estudiantes pudieran hacer la traducción al lenguaje algebraico, tenían que saber las definiciones de número: par, impar, inmediato y el triple de un número. Esta situación no les permitió acercarse a la sintaxis de estas definiciones, o sea, escribirlas algebraicamente (causa), el error se tipifica de orden semántico-lingüístico y la meta causa, es el poco desarrollo de lenguaje algebraico.

5.4.2. Algoritmos

Este apartado se enfoca al análisis de los errores que cometen los estudiantes a la hora de resolver ejercicios y problemas a través de algoritmos. En esta categoría se analizan los errores cometidos en procedimientos, fórmulas, propiedades, reglas, errores de cálculo y aplicación de las unidades de medidas.

El análisis se realizó con los ejercicios: el 13 y 17; del 14 al 16 y del 25 al 30, para ello se seleccionaron las siguientes ejes de análisis: operaciones algebraicas, propiedades de potenciación y reglas de los casos de factorización.

- **Operaciones Algebraicas (ítems 13 y 17).**

  Cantidades ínfimas de la muestra resolvió correctamente los ítems 13 y 17 respectivamente.

  Los errores más frecuentes en el procedimiento que aplicaron para resolver ítems 13, estuvieron relacionado con los signos de agrupación. En aritmética se les enseña a los estudiantes que cuando van a resolver ejercicios con operaciones combinadas utilizando signos de agrupación, se van eliminando de adentro hacia afuera, respetando la jerarquía, primero el paréntesis, luego el corchete y seguidamente las llaves. Aplicar esta jerarquía cuando resolvemos operaciones algebraicas combinadas y querer eliminar paréntesis, los estudiantes suman variables con números, generalmente, este error es causado por el docente, al aplicar la misma jerarquía de los signos de agrupación cuando trabajamos con expresiones algebraicas. Esta situación es un obstáculo para el aprendizaje del tema en estudio y se identifica como obstáculo didáctico.

Otra causa del porqué los estudiantes no resuelven operaciones algebraicas es la falta de dominio de los significados de términos semejantes y término independiente en una expresión algebraica, los conduce a aplicar incorrectamente el algoritmo para sumar expresiones algebraicas.

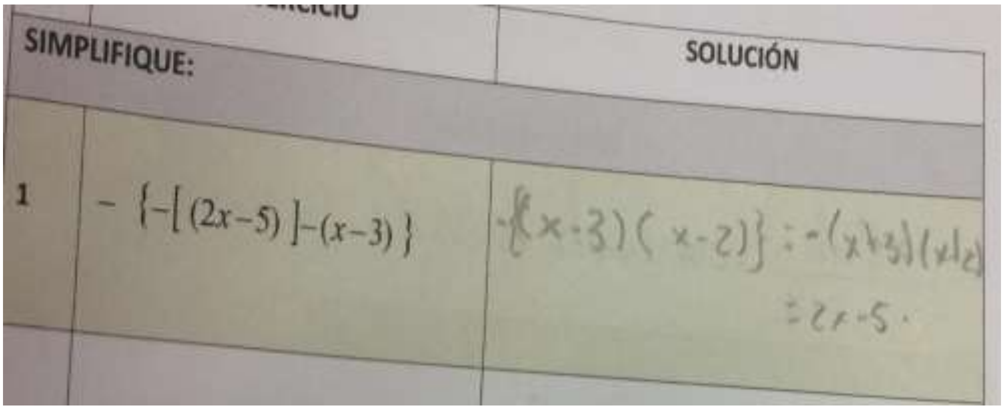


Figura 32. Errores con operaciones algebraicas 1

Otros alumnos transforman el ejercicio en un trinomio de la forma ax^2+bx+c.En sus intentos de eliminar paréntesis convierten operaciones de suma o resta en producto, la causa de este error es porque aplican incorrectamente la ley de los signos, semánticamente aplican bien las reglas, pero sintácticamente no.

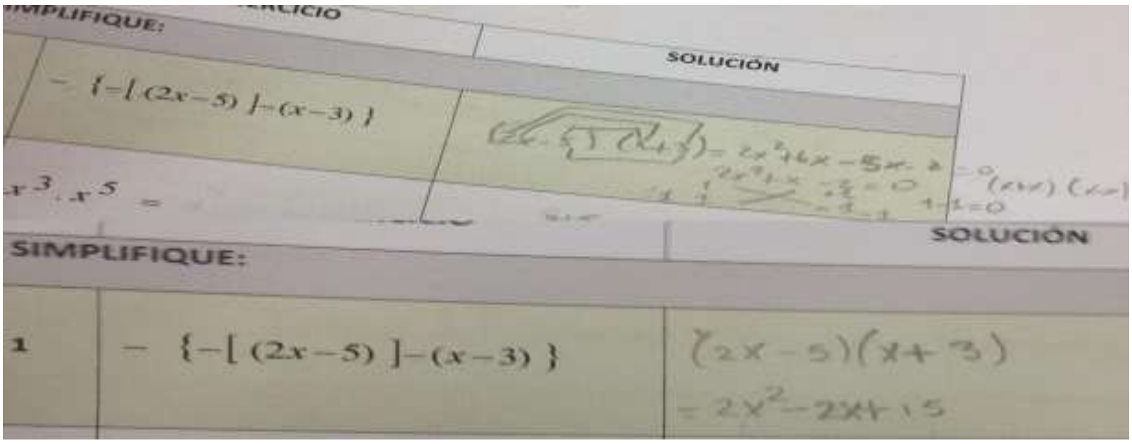


Figura 33. Errores con operaciones algebraicas 2

Otros, alumnos simplifican la expresión resolviendo una ecuación. Después que tienen una expresión más sencilla, plantean la solución de una ecuación, en donde se observan errores en el uso de los signos al transponer o despejar la variable. Estos manifiestan un pensamiento de clausura, en la solución de expresiones algebraicas.

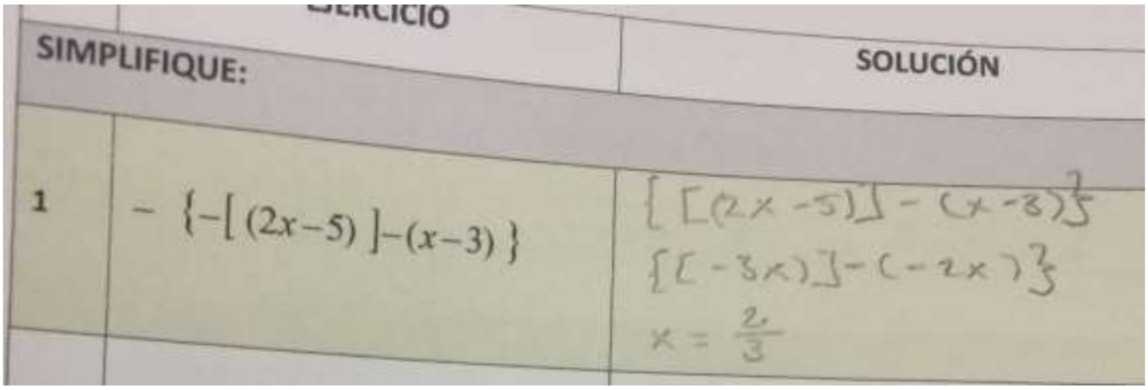


Figura 34. Errores con operaciones algebraicas 3

En cuanto a la resolución del ejercicio 17, los estudiantes tenían que aplicar el algoritmo de la resta, el 56.6% identificó los datos. De los que fallaron en su intento por resolver el ejercicio, una parte pequeña del grupo aplicó como procedimiento de solución una ecuación lineal, igualando el minuendo al sustraendo, la causa de este error es la búsqueda de una solución numérica, un valor concreto, estos alumnos tienen un pensamiento de clausura sobre la solución del ejercicio– estos alumnos no son los mismos que trabajaron el ejercicio 13 como ecuación–.

Otros alumnos a pesar que identificaron la operación diferencia, como algoritmo de solución, solo afectan al primer término del sustraendo por el signo menos, se considera que el error fue causado por no utilizar signo de agrupación para separar el minuendo del sustraendo. El 12.77% que reconoció como procedimiento de solución la operación diferencia, pero falló al no colocar correctamente los término debajo de sus semejantes, estos aprendientes muestran falta de dominio en el algoritmo para restar expresiones algebraicas (causa).

También en este mismo porcentaje, en otros alumnos se observó falta de dominio en este tipo de algoritmo al sumar expresiones con signos contrarios, en el resultado dejaron el signo del producto de los signos de las expresiones ($8x^2 – 3x^2 = -5x^2$).

- **Propiedades de Potenciación (ítems 14, 15 y 16)**

En este acápite se analizan los errores cometidos al aplicar las propiedades producto y cociente de potencias de igual base y potencia de una potencia. Entre los errores más frecuentes:

- Producto de potencias de igual base. La mayoría de los que intentaron resolver este ejercicio aplicaron la propiedad de potencia de una potencia, trasladando, la operación indicada en las bases a los exponentes. El resto (16.67%) suman las bases y suman los exponentes, la causa del error se debe a un conocimiento incompleto de la propiedad.

- Cociente de potencias de igual base. Los errores cometidos en el proceso de resolución de este ejercicio fueron variados. El 36.36% iguala la expresión a "y", no hay ningún procedimiento que permita analizar de dónde salió esta respuesta. El 18.18% aplica la propiedad del producto de potencias de igual base, estos mismos estudiantes al resolver el ejercicio, aplican la propiedad potencia de una potencia, y el ejercicio de potencia de una potencia ni lo intentan resolver. Los procedimientos que los alumnos aplicaron fueron los siguiente: Poner la misma base y dividir los exponentes ($x^{7/4}$), multiplicar la base por el cociente de los exponentes ($\square \frac{7}{4}$), sumar las potencias de la expresión dada ($x^7 + y^4$), base sobre base (y/y), en estos errores se nota falta de dominio de la propiedad.

Otros estudiantes aplicaron procedimientos irrelevantes, que seguramente tuvieron éxito en otros contexto(9.1%).

- Potencia de una potencia. La mitad del grupo no resolvió el ejercicio. Los que intentaron resolverlo aplicaron procedimientos variados. Menos de la mitad de estos, escribió como respuesta “Z” no hay desarrollo en el ejercicio que permita analizar la causa del error. Una pequeña parte de los estudiantes aplicó la propiedad una vez, este error se tipifica como lógico, pues a pesar que domina la propiedad, su razonamiento falla al no visualizar que puede aplicar la regla nuevamente, para concluir la solución del ejercicio. Este mismo porcentaje se obtuvo con alumnos que en vez de multiplicar los exponentes los sumó, la causa de este error falta de dominio de la propiedad, ya que aplicó la propiedad de producto de potencias de igual base.

  Otros escribieron como procedimiento de resolución nuevamente el ejercicio, dividió los exponentes entre cuatro, simplificó los cuatro, escribieron como respuesta tres. La causa de estos errores es la aplicación de estrategias irrelevantes que fueron útiles en otras situaciones.

Se puede observar que los errores cometidos con las propiedades de potenciación en su mayoría de los casos los estudiantes utilizaron una propiedad por otra, la causa de estos errores es falta de interiorización del conocimiento. No obstante, aquellos errores que manifiestan deformaciones de las reglas, la causa es porque tienen un aprendizaje incompleto de las propiedades de potenciación.

- **Reglas de los casos de Factorización (ítems del 25 al 30)**

La red sistémica que registra los errores cometidos por los estudiantes a la hora de resolver ejercicios de factorización (ver anexo N° 14) se presenta a continuación de manera fragmentada a fin de reflejar el análisis de cada caso.

- *Factor Común (ítem 25).* El 10% de la muestra resolvió correctamente este ejercicio y el 26.67% no intentaron resolverlo. Los errores más frecuente de los estudiantes que intentaron resolver el ejercicio fueron:

		Código	Frecuencia %
	Reducen términos semejantes	0 1	45
Factor Común	Escriben solo respuesta: 3x o x o xy 0 3(x+y)	0 2	20
	Multiplica las variables	0 3	15
	Al factorizar deja como exponente las variables	0 4	5
	Factoriza y Cambia de signo los términos	0 5	10
	Saca factor común los coeficientes de	0 6	10
	Error de cálculo al sumar los coeficientes de los términos semejantes	0 7	10

Figura 35. Subred Factor común

- Solución incompleta. En el procedimiento de solución de este ejercicio los que intentaron resolverlo, solo reducen términos semejantes, a estos alumnos la falta de manejo de la propiedad distributiva, les llevó a no visualizar que la solución del ejercicio estaba incompleta.

- Error de cálculo, decir que 6x+3x=11x o 6y+3y=11y. este error, es debido a la falta de dominio de las tablas de la suma.

- Multiplican las variables de la expresión dada. Estos alumnos suman bien los coeficientes de los términos semejantes pero multiplican las variables. La causa de este error probablemente se debe a que desconoce el algoritmo para reducir términos semejantes.

- No encuentran el factor común de la expresión. Estos alumnos fallan al aplicar procedimientos erróneos porque no dominan la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

- Errores asociados con los signos + o -: Los alumnos cometen este error al momento de sacar factor común, posiblemente la causa de este error se deba a un despiste o bien a una fijación de la operación suma, producto de la forma en la que generalmente se presenta la propiedad distributiva –concluye con 9x-9y=9(x+y) –.

- No utilizar signos de agrupación. El no utilizar los signos de agrupación los induce a cometer error a la hora de sacar el factor común de la expresión dada, quedándoles por resolver un producto.

- *Diferencia de Cuadrados (ítem 26).* El 16.67% resuelve correctamente el ejercicio y exactamente este mismo porcentaje deja en blanco el ítem. El 66.67% de la muestra que intentó resolver el ítem cometieron los siguientes errores:

			Código	Frecuencia %
Diferencia de Cuadrados	Aplican otros algoritmos	TCP	0 8	5
		Factor común	0 9	5
		Suma de cubos	10	5
		Ecuación	11	5
	Porcedimiento incomplet	Solo extrae raíz cuadrada a ambos términos	12	20
		Escribe solo un factor	13	25
		Extrae raíz cuadrada solo a uno de los términos o solo a los coeficientes	14	15
	Omiten los exponentes de las variables al factoriza		15	10
	Error de cáculo		16	5

Figura 36. Subred Diferencia de Cuadrado

- Aplica la regla de otros casos de factorización. Como se observa en la red, unos aplican la fórmula para el factor común, otros la del trinomio cuadrado perfecto y otros regla de la diferencia de cubos. En los tres casos, la causa del error es la falta de dominio de la regla correspondiente a la diferencia de cuadrado, pero en la segunda y tercera situación además, están transfiriendo propiedades de potenciación de producto a la diferencia –como $a^nb^n=(ab)^n$ entonces $a^n - b^n =(a-b)^n$–. Esto es una evidencia de que el conocimiento no ha sido adquirido completamente.

- Aplicación incompleta de la regla. Realmente, este no es un error, pero es una manifestación de aprendizajes incompletos. Un buen porcentaje aplicó correctamente la primera parte de la regla –extraer la raíz cuadrada a los términos de la diferencia–, otros lograron escribir el primer factor sin paréntesis. Estos alumnos dan por terminada la solución del ejercicio, la causa de este error es la misma que el error del párrafo anterior –no dominan la regla–, con la diferencia que, en este grupo de alumnos se aprecia un aprendizaje más avanzado de la regla pero incompleto.

- Despejar la variable. Algunos estudiantes ven el ejercicio como una ecuación, la causa de este error posiblemente sea la necesidad de dar una respuesta única y la orientación es irrelevante para ellos o bien, desconocen que significa factorizar una expresión algebraica.

- Cambia la variable del ejercicio**.** Los alumnos que expresan la solución en términos de x siendo la variable z, muestran una rigidez de pensamiento pues para ellos las variables solo se denotan con la letra x.

- No extraer raíz cuadrada a las variables. Los estudiantes que solo extraen raíces cuadradas al término independiente, escriben el producto por la diferencia pero omiten el exponente del término en z; la causa de este error probablemente sea por el poco desarrollo del pensamiento algebraico alcanzado.

- Expresar en potencias. El procedimiento de solución que aplicó el 10% fue escribir en forma de potencia los términos de la expresión dada. En este se aprecian indicios del algoritmo, ya que expresar en potencias cuadradas los términos dados, podría ser el primer paso del algoritmo para luego extraer raíz cuadrada. La causa de este error se debe a un aprendizaje incompleto.

- *Trinomio Cuadrado Perfecto (ítem 27).* El 3% resolvió correctamente el ejercicio. El 23.33% dejó en blanco el ítem. Los errores que cometieron los estudiantes que intentaron resolver el TPC fueron los siguientes:

			Código	Frecuencia %
Trinomio cuadrado perfecto TPC	Aplican otros algoritmos	Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$	17	36.36
		Factor comú	18	22.72
		Suma coeficientes y/o multiplica variables	19	9
		Extrae ráices a los términos cuadros y extrae la mitad al tercer término.	20	4.5
	Porcedimiento incompleto	Extrae raíz cuadrada a los términos cuadrados perfectos	21	4.5
		Solo extrae raíz cuadrada a un término	22	4.5
		Solo prueban que es TCP	23	4.5
	Omiten la variable **n** al factorizar		24	31.81
	Error de signos		25	13.63

Figura 37. Subred TCP

- No identifican el TPC. Como se aprecia en la red, un buen porcentaje fallaron en su intento de resolver el ejercicio mediante la aplicación la regla del trinomio de la forma ax^2 +bx +c y factor común, pese a que a través de estas reglas era posible factorizar el TCP. En los que identificaron un trinomio de la forma, se detectó que unos no concluyeron el ejercicio, porque les faltó aplicar la propiedad de potencias de igual base. Si observamos no hay error, sino un procedimiento inconcluso. La causa de no terminar el ejercicio se debe a que los estudiantes tienen una fijación, que los factores de un trinomio de la forma son dos, esta situación no les permite visualizar la presencia de la propiedad de potenciación.

  Otros omitieron colocar la variable **n** del segundo término, la causa de este error es producto de la fijación que tienen de la regla, pues en esta no aparecen variables en el tercer término.

  Los que resolvieron por factor común, el error que cometieron fue no descomponer el término del centro, para sacar los factores adecuados – en $-6m^3n$ y $-6m^3n$- . La causa de este error es la falta de habilidad de estos alumnos en descomponer en términos que les facilitara sacar el factor común.

- No aplicaron todos los pasos del algoritmo. Los que aplicaron al menos uno de los pasos del algoritmo, unos solo verificaron que el trinomio era cuadrado perfecto, otros sacaron los términos de los factores, algunos de estos últimos cometieron error al aplicar la regla relacionada con los signos que separan los términos en cada factores –el primer factor lleva el signo del segundo término y el segundo factor lleva el signo producto del signo del segundo término por el signo de tercer término–, y otros escriben multiplicación de cuatro monomios. La causa de estos errores se debe a que este grupo de alumnos tienen un aprendizaje incompleto de la regla.

➢ Aplicación de estrategias irrelevantes. Entre las respuestas que se lograron interpretar tenemos que algunos de ellos aplicaron el algoritmo para reducir términos semejantes y otros escribieron dos factores con tres términos cada uno, de manera que al multiplicar término a término se obtiene el trinomio dado. Además, se evidencia falta de dominio del algoritmo de la multiplicación de expresiones algebraicas. Estos errores carentes de lógica, se originan por la interferencia de otros procedimientos involucrados en el procedimiento inicial de la regla de este caso de factorización.

- *Trinomio de la forma* $ax^2 + bx + c$ *(ítem 28)*. El 13.33% resolvió correctamente el ítem. Los errores que se detectaron en aquellos que intentaron resolver el ejercicio son los siguientes:

			Código	Frecuencia
Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$	Aplican otros algoritmos	Descomponen en factores cada término de la expresión dada.	26	4.7
		Suma los coeficientes, término independiente y los exponentes	27	19
		Suma los coeficientes y multiplica las variables expresa el resultado en un solo término.	28	9.4
		Encuentra los factores y luego, mutiplica los primeros y segundos términos de cada factor y suma este producto=8r	29	9.4
		regla TCP y resuelve como ecuación	30	9.4
		Suma los coeficientes de los terminos con variable y suma el término independiente.	31	4.7
	Porcedimiento incompleto	Escriben dos pares de paréntesis	32	4.7
		Faltó dividir entre 3	33	14.28
		Identifican los número pero no los colacan correctamente en los factores	34	42.85
		Solo escribieron un factor correctamente	35	9.4

Figura 38. Subred trinomio de la forma

- Aplican algunos pasos del algoritmo. Las causas de aplicar el procedimiento incompleto fueron diversas. Como se aprecia en la red, un buen porcentaje identifican los números que satisfacen la regla, pero no los colocan correctamente en los factores, esto se debe a que no tienen el hábito de verificar la solución. A un porcentaje mínimo le faltó aplicar el último paso, que consiste en dividir la expresión por el coeficiente del término de grado 2.

- Operan expresiones algebraicas como que fueran números. Estos alumnos no pueden operar con expresiones algebraicas y trasladan el algoritmo de la suma de números, sumando los coeficientes y los exponentes de los términos de la expresión dada, seguramente porque no saben que son términos semejantes y cómo se reducen o bien porque no saben que significa factorizar.

- Resuelven como ecuación. Un bajo porcentaje. Eleva al cuadrado el coeficiente del primer y el término independiente e iguala a cero y despeja. Aunque el procedimiento aplicado es irrelevante a la solución, se evidencia una necesidad del alumno de dar una solución numérica al ejercicio, esto podría significar poco desarrollo del pensamiento algebraico.

- *Producto del binomio al cubo (ítem 29).* Poco menos de la mitad dejó en blanco el ítem y solo una pequeña parte lo resolvió correctamente. El restante intentó resolverlo pero cayeron en los siguientes errores:

			Código	Frecuencia %
Producto de un binomio al cubo	Aplican otros algoritmos	Diferencia de cuadrado	36	8.33
		Factor comı	37	50
		Descompone en factores cada término de la expresión dada	38	8.33
		suma los coeficientes y multiplica las variables, resultando un solo término como	39	16.67
	Procedimiento incompleto	solo identifica los términos del binomio	40	8.33
		Identifica el caso pero no los términos	41	8.33

Figura 39. Subred Factor producto del binomio al cubo.

- Aplicaron otra regla. El 50% extrajo un factor común para toda la expresión, el ejercicio no permitía tal cosa. Otros asociaron términos, pero no sacaron correctamente el factor común, estos alumnos de haber manejado la propiedad distributiva, pudieron haber llegado a un feliz término. Otros alumnos, identifican los términos del primer factor, pero completan la regla aplicando la del caso diferencia de cuadrados. Este error es producto de la interferencia de otro aprendizaje.

- Suman los coeficientes y multiplica las variables. El 16.67% comete este error porque está operando expresiones algebraicas aplicando procedimientos propios de cálculos numéricos y de la propiedad de potencia de una potencia en la expresión dada. Este error se produce por la falta de dominio de cómo reducir expresiones algebraicas, pero además, desconocimiento de lo que significa factorizar o falta de atención a la orientación del ejercicio.

- Aplican procedimientos irrelevantes a la solución. El 16.67% de los que intentaron resolver este ítem, se inventan procedimientos que no calzan con los algoritmos matemáticos. Unos tomaron los coeficientes de los términos, sacaron factor común y formaron un primer factor, esto mismo hicieron con las variables, de tal forma que el resultado es el producto de dos factores, uno numérico y otro con sumas de variable. Otros, descomponen cada término de la expresión en dos factores, estos alumnos tienen una vaga idea de que la solución está expresada en dos factores.

- Forzar la solución del ejercicio. Esta situación se da cuando de antemano se conoce la solución. El 8.33% identificó el caso pero lo forzó a la regla general del producto del binomio al cubo. Pese a que las condiciones del ejercicio cambiaron, para hacerlo calzar con la fórmula, sacaron un factor común que no existía en la expresión –el coeficiente del primer término– Como podemos observar estamos ante una rigidez de pensamiento, estos alumnos están perseverando en la aplicación rígida de una regla que les está inhibiendo el procesamiento de nueva información.

- *Suma o Diferencia de cubos (ítem 30).* El 20% de la muestra resolvió satisfactoriamente el ítem y el 16.67% dejó en blanco. Entre los errores que los alumnos cometieron en sus intentos de resolver el ejercicio se tiene:

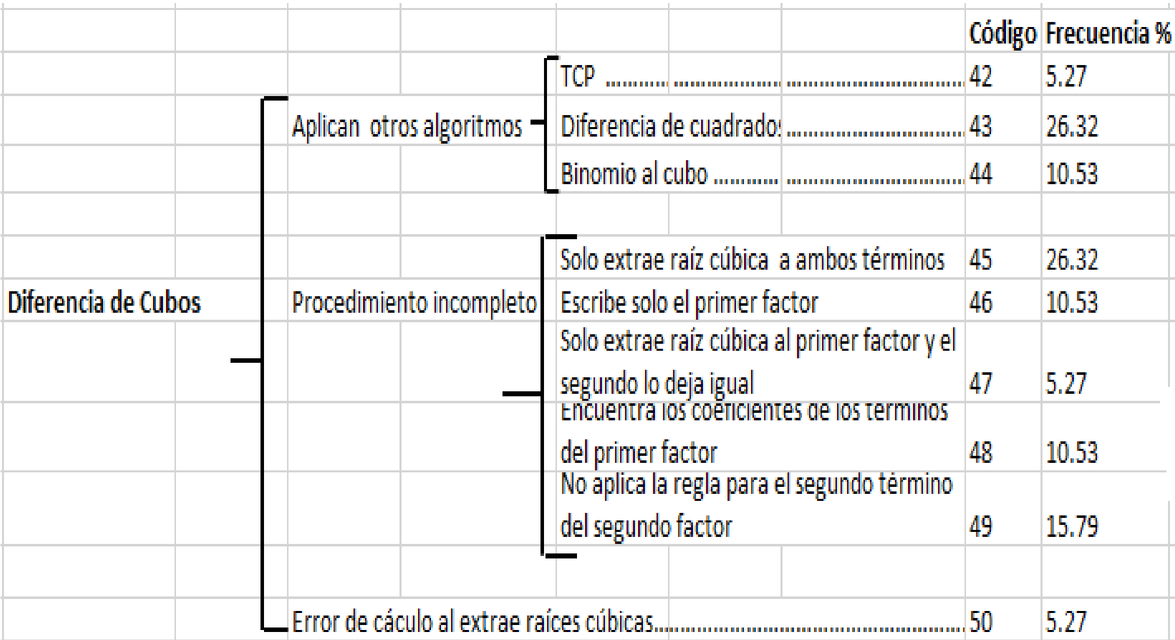


Figura 40. Subred Diferencia de cubos

- Aplicación incorrecta de la regla. Los errores están asociados a la búsqueda de los factores. Las causas de los errores relacionados al primer factor son: extraen raíz cúbica ya sea solo a los coeficientes o solo a la variable del primer término o bien, solo extraen raíz cúbica al primer término de la expresión dada.

  Los que lograron encontrar los términos del primer factor y fallaron en la aplicación de la regla en el segundo factor, las causas de los errores son: omitieron las variables **s** o **t** en el segundo o tercer término –en el caso de la "s" también la omiten en el primer término–, no colocan los signos correctos del segundo término y errores de cálculo al elevar al cuadrado los términos del primer factor, al multiplicar los términos de primer factor, se puede percibir que todos esto es producto del aprendizaje deficiente en el manejo de la regla.

- Aplican otras reglas. Utilizan la regla del trinomio cuadrado perfecto o la diferencia de cuadrados o bien la del binomio al cubo. En el caso de los que aplican la regla del TPC, es porque hay interferencia de ésta por lo parecido con la regla de este caso para encontrar el segundo factor. En el caso de los que aplican la regla de diferencia de cuadros se nota una fijación de esta regla por el parecido que tiene con la expresión analítica dada –la diferencia es que esta son cubos–, lo que manifiesta rigidez de pensamiento.

  En el caso de los que resolvieron aplicando la regla del binomio al cubo, la causa de este error es porque están aplicando la propiedad del producto de potencias de igual base a la suma de dos potencias, esto alumnos hacen asociaciones incorrectas debido a su incapacidad de pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas.

La causa principal de los errores asociados con los algoritmos es porque no manejan las reglas y los conceptos involucrados en estos algoritmos, ya sea porque el conocimiento está incompleto o el aprendizaje fue deficiente (meta causa). Como se puede observar son diversas las razones por las que el alumno no termina de aprender estos procedimientos.

5.5. Redes Asociativas de Pathfinder

El análisis de las representaciones gráficas de la estructura cognitiva de los estudiantes a través de las Redes Asociativas de Pathfinder se enfocó en el índice de complejidad (ICOM), índice de coherencia (ICOH) e índice de similaridad (SIMI).

- **Índice de Complejidad (ICOM)**. Este índice nos permite cuantificar lo que la inspección visual no alcanza. Un poco menos de la mitad de las redes tienen el mismo ICOM: 2.91545189504373, las redes de este grupo de alumnos, tienen un nodo múltiple con tres enlaces. El 20% con ICOM 3.887269193, también tienen un nodo múltiple pero con cuatro enlaces, la diferencia entre estos dos grupos es que este último, el nodo múltiple tiene más relaciones en la estructura cognitiva de estos alumnos lo que hace más fuerte la red.

  El 10% de los estudiantes tiene ICOM igual a cero, la representación gráfica de las estructura cognitiva de los que están en esta situación es que los Conceptos Nucleares se encuentran alineados. Según Quillian, citado por Martínez (2015), el significado de las palabras se deriva de una estructura jerárquica en la que los niveles de organización se extienden desde más generales a los más específicos y entre éstos hay niveles intermedios. La información que nos brindan estas redes es que tenemos una arista inicial, que es el concepto más general (si la red es descendente) o es el más específico (si la red es ascendente).

  Cabe mencionar que la red media del grupo es lineal. Observemos que para el grupo muestra el concepto más general es “signos de agrupación” el más específico es “radicales” en el centro Propiedades de potenciación y los intermedios: el concepto operaciones algebraicas, casos de factorización, ley de los signos y propiedades de los números reales.

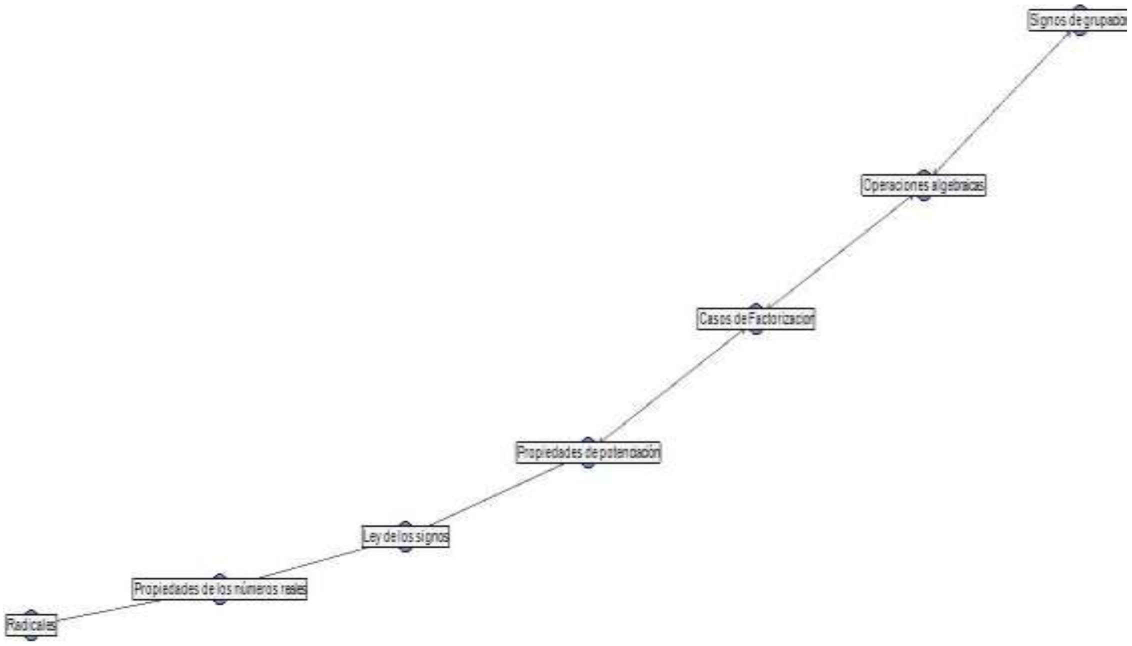


Figura 41. Red media del grupo muestra

En general se puede afirmar que las redes del grupo-muestra, reflejan fuerza con sus conceptos enlaces.

- **Índice de Coherencia (ICOH)**. En las redes de los estudiantes de la muestra, los índices de coherencia oscilan entre -0, 58 y 0,73; lo que significa que las redes son consistentes, puesto que se encuentran en el rango entre -1 y 1. La interpretación de esta información se corresponde al grado de experiencia o grado de aprendizaje que los estudiantes tienen sobre los casos de factorización y sus prerrequisitos.

- **Índice de Similaridad (ISIMI).** La estructura cognitiva entre los sujetos varía, asimismo, las relaciones que estos establecen entre los conceptos. Por tanto, difícilmente vamos a encontrar dos redes exactamente iguales, lo que si encontramos es similitud, la cual se determina a partir del número de enlaces comunes, dividido por el número de enlaces de las dos redes. Si nos encontráramos con dos redes iguales estas tendrían similaridad 1 y aquellas que no comparten enlaces, la similaridad es cero. En el estudio, el 46.67% de la muestra tiene al menos una red con la cual no hay enlace en común.

Además, se observa que solo el 23.33% de las redes tiene un índice promedio de similaridad del 0.333 con la red del docente, este dato es importante puesto que si el conocimiento se organiza de distintas manera durante el desarrollo del individuo y este va alcanzando mayor conocimiento, se espera que la estructura cognitiva del novato a medida que va evolucionando se va acercando a la del experto.

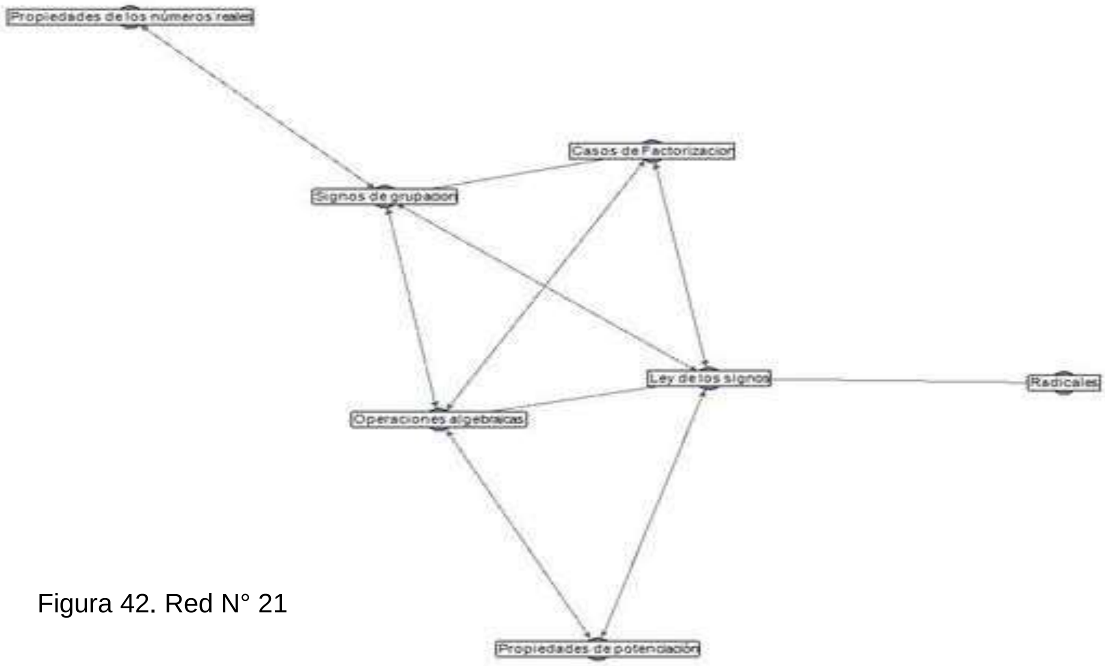


Figura 42. Red N° 21

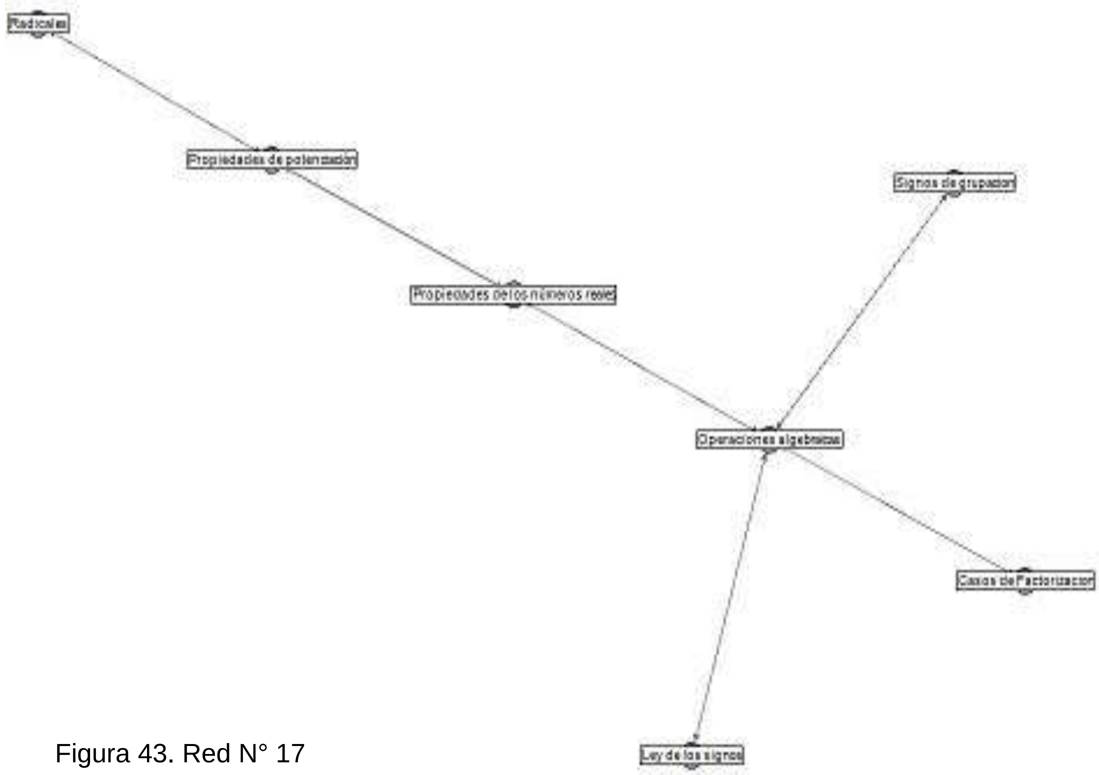


Figura 43. Red N° 17

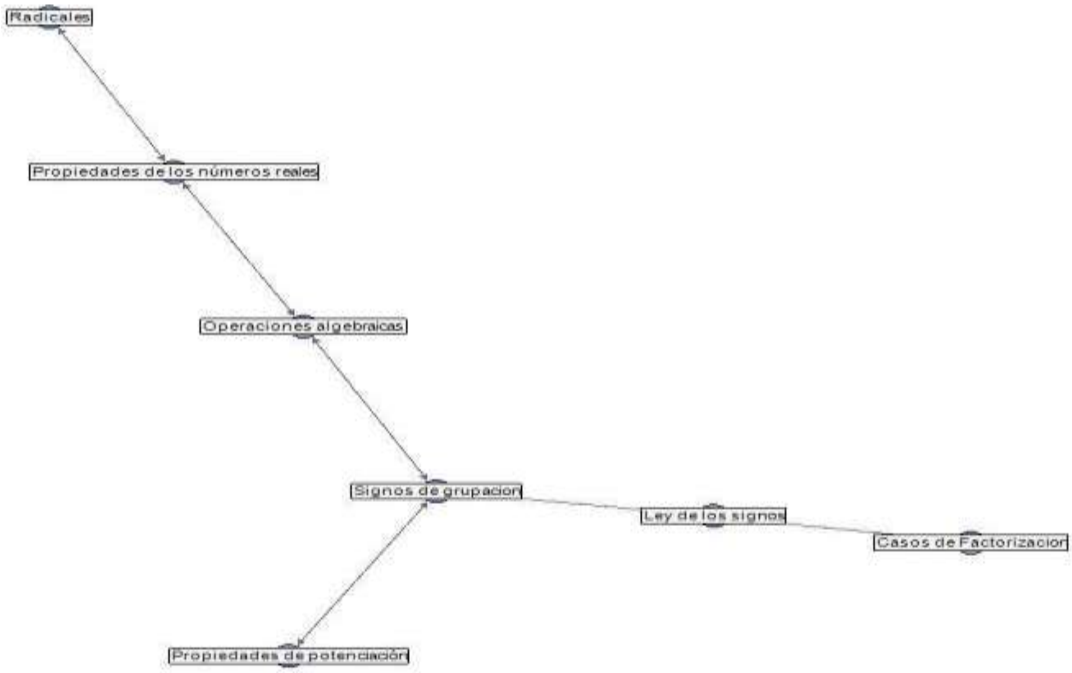


Figura 44. Red Experto

En el estudio, la red 17 y la red 21, tiene 0.5 y 0,2307 de similaridad con la red del experto respectivamente en mayor y menor grado respectivamente.

Se observa que los enlaces correspondientes al nodo “signos de agrupación” en la red del experto y en las 17 y 21, coinciden en los enlaces operaciones algebraicas y ley de los signos, este último enlace, a su vez, coincide con el enlace casos de factorización.

La diferencia del índice de similaridad radica en la longitud de los senderos, que unen estos conceptos. En las gráficas de la red del experto y la red 17 se aprecia que estas distancias son cortas y las estructuras de las redes son parecidas, tienen 4 aristas comunes (ver los conceptos que estas en las ramas de los nodos).

Después de analizar los índices que permiten interpretar la representación gráfica de las EC de los estudiantes, se profundizó en los enlaces más significativos, mismos que se reflejan en la red a través de los nodos múltiples y la fuerza que estos tienen con relación a otros. Nos interesa identificar cuáles son las relaciones significativas que los estudiantes establecen entre los casos de factorización y sus requisitos. Además, cuáles son los Conceptos Nucleares anclados significativamente en la estructura cognitiva.

El 66.67% de las redes solo tienen un nodo múltiple. El nodo múltiple con mayor frecuencia fue “casos de factorización”, estos mismos coincidieron en uno de sus enlaces con el concepto de “Propiedades de Potenciación”. Es notorio que las redes que tienen como nodo las “Propiedades de Potenciación” uno de sus enlaces es “Casos de Factorización”, para estos grupos de estudiantes en su estructura cognitiva estos conceptos tienen mucha relación, aunque para unos sea más importante “casos de factorización” y para otros “Propiedades de potenciación”.

EL 13.33% de las redes tienen 3 nodos múltiples. Los nodos en los que más coincidieron, fue en los “Casos de Factorización” y “Operaciones Algebraicas”. Los conceptos que siguieron en frecuencia de coincidencia fueron: Ley de los signos, signos de agrupación y radicales. El promedio de fuerza de estas redes fue de 9.4.

En las redes de complejidad cero y por tanto redes lineales, los Conceptos Nucleares más destacados para estos alumnos son los que se encuentran al inicio de la red o final de la red, en dependencia de la gráfica (si esta es ascendente o descendente), los menos destacados son los que están al final de la red y los de importancia intermedia los que están entre las extremidades de la red.

El 6.7% de la redes tienen dos nodos múltiples. Los conceptos con mayor significado son la ley de los signos, signos de agrupación, operaciones algebraicas y propiedades de potenciación. Este grupo de redes no coincidieron en ninguno de sus nodos múltiples.

Solo el 3.3% de las redes tienen cuatro nodos múltiples, esto significa que hay mucha fuerza entre los nodos de estas redes. El nodo múltiple con más fuerza es la ley de los signos (5 enlaces), operaciones algebraicas y signos de agrupación (4 enlaces) y casos de factorización (3 enlaces), este último es el CN, menos significativo para este grupo de estudiantes.

En la siguiente tabla se resumen la fuerza que tienen los Conceptos Nucleares en la estructura cognitiva de los estudiantes del grupo de muestra:

Tabla 13. *Frecuencia de la fuerza de los Conceptos Nucleares entre los estudiantes*

Conceptos Nucleares	**N° Redes**
Casos de Factorización	11
Ley de los signos	8
Operaciones algebraica	7
Propiedades de potenciación	5
Signos de agrupación	4
Propiedades de los números reales	3
Radicales	3

Como se puede apreciar el concepto-nodo múltiple con mayor frecuencia que aparece en las redes es el de caso de factorización, lo que significa que para el grupo muestra este concepto es el que tiene más significancia. Los de menor frecuencia las propiedades de los números reales y los radicales, esto significa que el concepto con menos importancia para la muestra son los últimos mencionados. Además, se observa que los conceptos más cercanos a los casos de factorización en la estructura cognitiva de los estudiantes son: la ley de los signos y las operaciones algebraicas. No obstante, según la lógica de la disciplina deberían estar primero las operaciones algebraicas.

5.6. Convergencias de los Resultados entre los Distintos Instrumentos

En este acápite se presenta la discusión entre los puntos de coincidencia de los resultados del análisis documental realizado y los resultados de los instrumentos aplicados.

5.6.1. Análisis Documental

Existe coherencia horizontal entre el Modelo Educativo, Normativa y Metodología para la Planificación Curricular; Programa de Asignatura, Plan Didáctico Semestral y Plan de Clase, esto se traduce a que existe una derivación clara entre el macro, messo y micro planeamiento (Molina, 2006). La estructura del programa responde a la orientada en el Modelo Educativo; las estrategias metodológicas que se aplican para el desarrollo de las clases de Matemática General, se derivan del Programa de Asignatura y estas del Modelo. Asimismo, los objetivos y contenidos de las clases de Matemática General, se derivan del Plan Didáctico Semestral y este del Programa de Asignatura. En este último se observa además, secuenciación vertical entre los objetivos, contenidos y sub contenidos desde la visión tripartita –conceptual, procedimentales y actitudinales–.

A pesar que el 70% de las estrategias didácticas propuestas en el Modelo Educativo, Normativa y Metodología para la Planificación Curricular son adaptables al tratamiento de los contenidos de la unidad de Álgebra, tanto en el Programa de Asignatura como en los Planes de Clases, solo se aplican el 20% de estas.

Las recomendaciones metodológicas para la enseñanza del Álgebra, que se presentan en el Programa de Asignatura son muy generales y lacónicas, no se aprecian recomendaciones al tratamiento de los contenidos desde las diferentes fases del proceso enseñanza aprendizaje del tema. Además, en el micro planeamiento, no se observan los diferentes momentos de una clase ya que el "Plan de Clase", de las conferencias magistrales se reduce a las actividades de desarrollo presentadas en Power Point y cuando es clase de subgrupo, este plan es un listado de ejercicios o sea la guía de clase práctica.

Entre los recursos sugeridos que se mencionan en el programa están las guías de trabajo independiente, guías de trabajo de grupo, los libros de texto, los medios audiovisuales y mencionan el uso de TIC. No obstante, los "Planes de Clase" no presentan los recursos, se supone que se utilizan medios audiovisuales para mostrar las diapositivas. Se asume, que las guía de Clase Práctica o Guía de Aprendizaje, son las guías de trabajo independiente, no existen guías de grupo.

Con relación a la evaluación de los aprendizajes, en ninguna unidad se presenta cómo ésta se evalúa. Esto se traduce, que el programa no refleja la evaluación de proceso. Si bien es cierto que, al final del programa existe un apartado llamado "sistema de evaluación" en este solo se menciona que se aplicarán dos pruebas cortas, dos trabajos de grupo y un examen al finalizar el semestre.

Considerando que son 15 semanas de clases estas evaluaciones salen a razón de una por mes aproximadamente, esto significa que no haya exigencia para el docente a través del programa, el monitoreo del aprendizaje de los estudiantes, ni se aprecia en los "Planes de Clases" cómo se realiza la evaluación de proceso puesto que solo tienen las actividades de desarrollo –como se mencionó anteriormente–, se podría inferir que el termómetro para ir midiendo el aprendizaje adquirido son las guías de clase práctica, este sería un buen instrumento, siempre y cuando el alumno la desarrollara de forma individual antes de ir a la clase de grupo y el maestro la revisara y retroalimentara de forma individual.

En general a través del análisis de los documentos se pudo observar coherencia, secuenciación y derivación, uno de otro según su jerarquía. No obstante, se aprecian debilidades en el contenido de los Programas de Asignatura y Planes de Clases, en cuanto a la información que brinda cada uno de los apartados que componen a estos documentos que son de mucha utilidad para el docente a la hora de realizar el micro planeamiento y la evaluación de los aprendizajes.

5.6.2. Entrevista a Profundidad y Cuestionarios

El cruce de información que se presenta a continuación se refiere a los errores y obstáculos identificados en la solución de ejercicios de factorización en los resultados obtenidos en el tercer momento de la entrevista y la segunda parte del cuestionario punto II.

- Factor Común. Los docentes señalan como errores más frecuentes, el mal uso de la ley de los signos y los signos de agrupación, afirman que los alumnos omiten la existencia de este último, situación que los conduce a cometer errores tales como: no afectar la expresión que está dentro del signo de agrupación, cuando este último lo antecede un signo menos, considerar factores expresiones que son términos, esto les obstaculiza el encontrar el MCD. Este error se manifestó en los alumnos MA-8, MA-15, MA-19, MA-22, MA-25, MA-27, MA-29 Y MA-30.

- Diferencia de Cuadrados. Los docentes sostienen que el error con mayor frecuencia se produce al momento de extraer las raíces cuadradas a los términos, o solo le extraen raíz al coeficiente, o solo a las variables, o bien solo al primer término. También se presentan errores de cálculo. Estos errores se logran ver en los estudiantes: MA-9, MA-12, MA-17 Y MA-30. En segundo lugar mencionan que los alumnos solo escriben un factor o bien no ubican correctamente los términos en los factores, específicamente el factor de la diferencia. Estos errores se observaron en los estudiantes: MA-1, MA-5, MA-6, MA-18, MA-25 Y MA-28. Como se puede observar hay coincidencia entre los errores que mencionan los docentes y los errores de los alumnos cuando resuelven este tipo de ejercicios solo que estos últimos se presentan con más frecuencia en los estudiantes. Como obstáculos los maestros señalan la falta de manejo de la regla y de habilidad para extraer raíces cuadradas, esto se termina de corroborar en los estudiantes:MA-7, MA-12, MA-13, MA-17, que solo aplican una parte de la regla.

- Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP). En este caso todos los docentes señalaron que el error más frecuente en este tipo de ejercicio, es que no identifican el TCP y resuelven aplicando otra regla o se inventan un procedimiento para resolver el ejercicio dado. Esto fue observado en los estudiantes: MA-1, MA-7, MA-9, MA-11, MA-12 y MA-15. Otro error que mencionan es que los aprendientes que identifican el caso, no prueban la regla para el tercer término, que es el doble producto de la raíz del primer término por la raíz del segundo término, los alumnos MA-6 y MA-30, evidencian lo dicho por los docentes.

- Trinomio de la Forma $ax^2 + bx + c$, con $a=1$ y $a \neq 1$. Los docentes no hacen alusión al manejo de la regla, manifiestan que los errores que más cometen los estudiantes están ligados a la búsqueda de los números que cumplen la regla, otro error es que no colocan los números encontrados en el factor que corresponde, o bien no colocan el signo que corresponde a cada factor. Detrás de este error están, la falta de habilidad en la descomposición de un número en sus factores primos, la ley de los signos, operaciones de suma y resta de monomios, como se puede observar, estos obstáculos son la causa de que los alumnos no aprendan a resolver estos casos de factorización. Los estudiantes que reflejan estos errores son: MA- 6, MA-9, MA-11, MA-12, MA-16, MA-18, MA-22 a la 25, MA-28 a la 30.

- Diferencia de Cubos. En este caso los docentes señalan dos tipos de errores, uno de ellos es que los alumnos aplican el caso del producto del binomio al cubo, otros lo confunden con la diferencia de cuadrados, otro error que los docentes mencionan es en la construcción del segundo factor y por último señalan, los errores de cálculo al extraer las raíces cúbicas a los términos de la expresión dada. Los estudiantes que coinciden con estos errores son: MA-12, MA-22, MA-24, MA-25, MA-30. Las causas de estos errores los profesores la tildan como "falta de dominio en la regla".

Como se pudo apreciar hay convergencia entre los errores y obstáculos detectados por los docentes y los identificados en el cuestionario aplicado a los estudiantes.

5.6.3. Cuestionario y Redes Asociativas de Pathfinder

En este apartado se presenta la triangulación de los resultados obtenidos del cuestionario, referidos a la explicitación de las estructuras cognitivas de los estudiantes mediante asociación de palabra, los errores y obstáculos identificados en la resolución de ejercicios relacionados a los casos de factorización y sus prerrequisitos y los resultados de las representaciones gráficas de las estructuras cognitivas, a través de las Redes Asociativas de Pathfinder, con el fin de contrastar las causas de los errores y obstáculos en el aprendizaje de los casos de factorización con la estructura cognitiva de los estudiantes.

5.6.3.1. Nodos de los Casos de Factorización

Las redes de los estudiantes que tienen uno de sus nodos los casos de factorización (CF) son: MA-4, MA-6, MA-7, MA-14, MA-15, MA-16, MA-17, MA-20, MA-21, MA-23 y MA-30. Como se mostró en la tabla N° 10, es el concepto-nodo múltiple que más se presenta en las redes, esto quiere decir que el concepto- casos de factorización en la estructura cognitiva de los estudiantes de la muestra es el más significativo, el más destacado con relación al resto de los Conceptos Nucleares (CN).

La mayoría tiene fijado en su mente la representación algebraica, por tanto se aprecia un dominio semántico y sintáctico –significado y significantes–, pero solo el 30% reconoce la representación geométrica, aquí se evidencia falta de interiorización de estos casos, Ana Sfard, señala que cuando se tiene interiorizado un concepto –hablando en término genérico- este se reconoce en nuestro alrededor con una simple mirada.

Solo una pequeña parte de este grupo, resuelve exitosamente ejercicios de factorización. Se puede concluir que los estudiantes que tiene en sus estructuras cognitivas el concepto de CF como el más significativo, les falta desarrollo cognitivo tanto en el referente del concepto, como en el algoritmo de estas identidades algebraicas.

Los enlaces más significativos del nodo casos de factorización, según se muestran en las RAP en orden de prioridad son: propiedades de potenciación, operaciones algebraicas y ley de los signos. No obstante, más de la mitad de este grupo de alumnos no dominan las propiedades de potenciación, pese a que estas la consideran muy cercanas a los CF y se aplican en la solución de cualquier ejercicio de factorización.

Con relación a las operaciones algebraicas. La mayor evidencia de la comprensión de un enunciado matemático es la identificación de la o las operaciones involucradas en dicho enunciado. En los ítems en donde se tiene que traducir de lenguaje común a lenguaje algebraico del cuestionario, se observó que los estudiantes no identifican la operación diferencia, por ella reconocen la suma o el producto. Además, a pesar que el 91% de estos alumnos dominan el concepto de términos semejantes –concepto clave en la resolución de operaciones algebraicas–, solo el 45.5% puede reducir términos semejantes, los errores que más se hicieron notar fueron: operar variables con término independiente y error de cálculo al sumar.

En el proceso de resolver operaciones algebraicas se encuentran otros conceptos como, la ley de los signos, las propiedades de los números reales, signos de agrupación y radicales. El 81.8% de estos alumnos no aplican correctamente la ley de los signos –error algorítmico–, el 72% domina conceptualmente las propiedades de los números reales –dominio semántico–, el 54.5% omite los signos de agrupación al resolver operaciones algebraicas –error sintáctico–, solo el 27.3% identifica el término de radicales en enunciados –semántico– y el 54.5 extrae correctamente raíces cuadradas y cúbicas en la resolución de ejercicios de factorización –dominio de algoritmo–.

En el análisis realizado, se pudo apreciar que los estudiantes de la muestra presentan los tres tipos de errores semánticos: lingüístico, filosófico y con poca frecuencia el lógico. Este último se asoció a los procedimientos aplicados en la resolución de ejercicios relacionados a los casos de factorización que carecían de sentido. Los errores sintácticos que se aprecian están referidos en algunos casos al colocar las variables como exponentes, en otros, omisión de los exponentes o de las variables y otros, no colocan los términos en los factores que corresponden.

Las causas de los errores y obstáculos mencionados anteriormente, son diversas, por un lado, los estudiantes no manejan la regla de cada una de las identidades algebraicas, esto no les permite identificar el caso, ni mucho menos establecer las relaciones entre los términos de estas identidades –obstáculos cognitivos–.

Por otro lado, tenemos que según las estructuras cognitivas de los alumnos, el concepto-enlace que se presenta con mayor frecuencia en las redes de este grupo de alumnos son las propiedades de potenciación, entre las cuales tenemos el producto de potencias de bases distintas y exponentes iguales –$(ab)^n = a^n b^n$–, misma que los estudiantes transfieren a la suma y diferencia de potencias –$(a \pm b)^n = (a)^n \pm (b)^n$– y la aplican al resolver los casos de diferencia de cuadrados, suma o diferencia de cubos, trinomio cuadrado perfecto y producto del binomio al cubo –obstáculo epistemológico–.

Con relación a las RAP de este grupo de estudiantes, se presenta la siguiente tabla los índices de similaridad (ISIMI):

Tabla 14. *Similaridad de las redes con nodo común casos de factorización*

Sujeto 1	Sujeto 2	Nº aristas comunes	Similaridad CF
MA4	MA21	7	0.583333333
MA7	MA17	4	0.5
MA15	MA20	5	0.555555556
MA17	Experto	4	0.5
MA23	MA30	5	0.625

La mayoría de este grupo de estudiantes, sus redes presentan un ISIMI mayor o igual a 0,5. Las parejas de redes MA-15 Y MA-20 versus las redes MA-23 Y MA-30, ambas parejas tienen 5 aristas en común pero la similaridad varía.

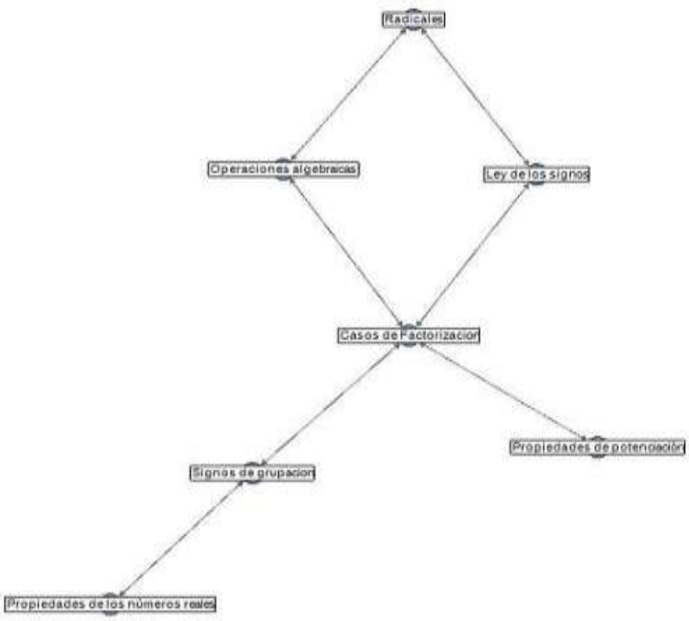


Figura 45. Red N° 15

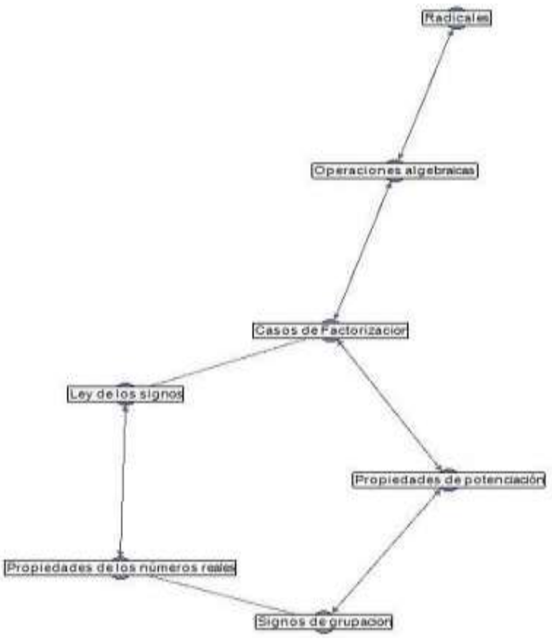


Figura 46. Red N° 20

Se observa en las aristas ley de los signos, propiedades de potenciación y operaciones algebraicas, que estas salen directamente de los nodos; pero las aristas signos de agrupación y propiedades de los números reales, en la Red 20, no sale directamente del nodo casos de factorización.

En cambio en las redes 23 y 30, las aristas signos de agrupación, radicales, propiedades de los números reales y de esta última, las operaciones algebraicas, las gráficas tienen los mismos senderos, esta es la diferencia con las redes anteriores. Por tanto, entre estas redes hay más similitud que en las redes 15 y 20.

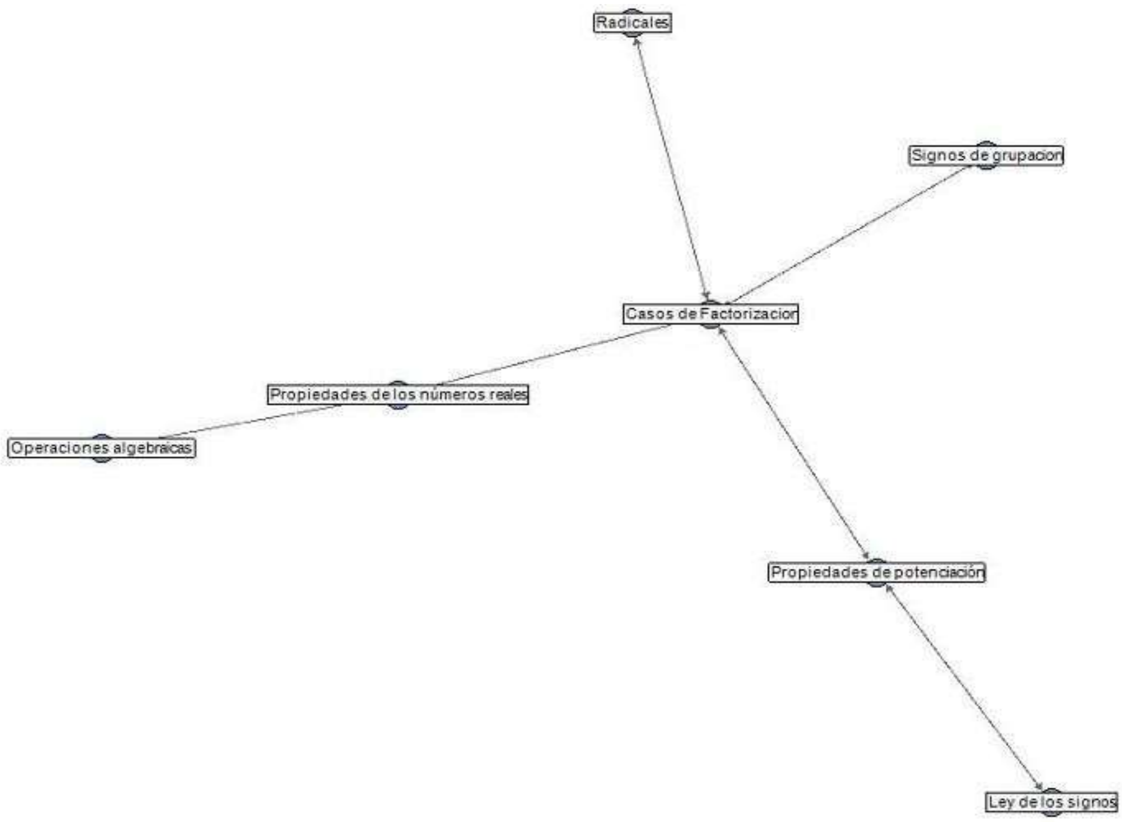


Figura 47. Red N° 23

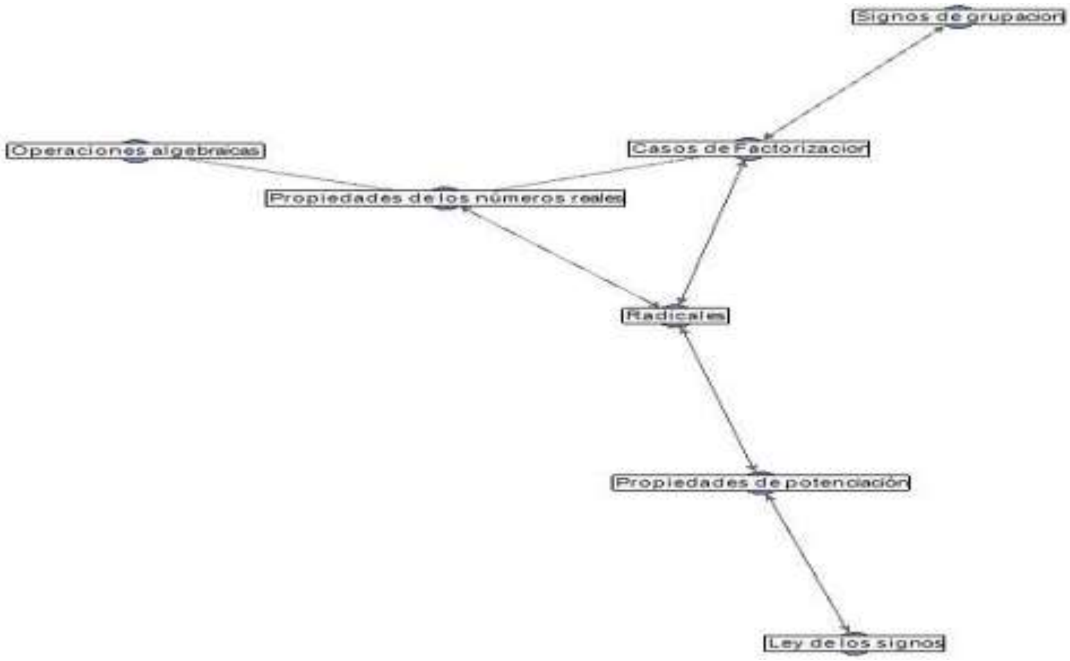


Figura 48. Red N° 30

De lo anteriormente expuesto, se concluye que los estudiantes con nodo múltiple en los casos de factorización (CF), sus redes presentan un SIMI significativo. No obstante, aunque los CF es el concepto más significativo, estos alumnos presentan serias dificultades tanto en el concepto mismo como en los conceptos enlaces. Por tanto, para que haya movilidad en la estructura cognitiva y lograr el desarrollo cognitivo en los casos de factorización, es necesario trabajar con ellos los obstáculos asociados a los enlaces cercanos a este nodo y darle seguimiento a los errores para monitorear la superación del obstáculo.

5.6.3.2. Nodos Conceptos Nucleares Prerrequisitos con Enlaces en los casos de Factorización

En este apartado se triangulan el resto de los Conceptos Nucleares que son nodos múltiples. Tomando en cuenta la frecuencia con la que estos aparecen en las redes de los estudiantes de la muestra en orden descendente: Ley de los signos, operaciones algebraicas y propiedades de potenciación, el análisis se hizo desde el enlace “casos de factorización”.

- **Ley de los signos (LS).** Los estudiantes de la muestra que tienen como nodo la ley de los signos son: MA-3, MA-5, MA-8, MA-9, MA-12, MA-14, MA-21 y MA-26. El MA-12, 14 y 21, tienen nodos múltiples, o sea que estas redes presentan otros nodos múltiples diferentes al de la LS y por consiguiente son redes más fuertes.

  Los estudiantes cuyas redes tienen el nodo LS y enlace con los CF, el 68.78% y el 43.75%, tienen en su estructura cognitiva la representación algebraica – significado y significante – y geométrica –referente– respectivamente; pero solo el 16.67% resuelve los CF, el resto cometen error al aplicar la regla.

  Lo anterior significa que, cuando se active el nodo LS, enviará información a los enlaces más cercanos por medio de un proceso de propagación de la activación, esta viajará de un nodo, hacia otro (Quillian et al. 2015). Como consecuencia, esta activación de las relaciones más cercana con el nodo LS, nos dan una posible ruta de aprendizaje de los enlaces de este nodo múltiple, por ejemplo los CF, que siguiendo la lógica de la ciencia Matemática, la ley de los signos es un conocimiento previo necesario para el aprendizaje de los casos de factorización.

  Por otro lado, analizando la similaridad entre estas redes, solo el 50% tienen 0,5% similitud, curiosamente, estas son redes que solo tienen un nodo.

Tabla 15. *Similaridad de las redes con nodo común Ley de los Signos*

Sujeto 1	Sujeto 2	Nº aristas comunes	Similaridad (LS)
a3	a26	4	0.5
a5	a9	4	0.5

Observemos que en estas redes de un solo nodo no está la MA-8, lo que significa que entre la MA-3,5, 9 ,26 y esta, hay poca similaridad.

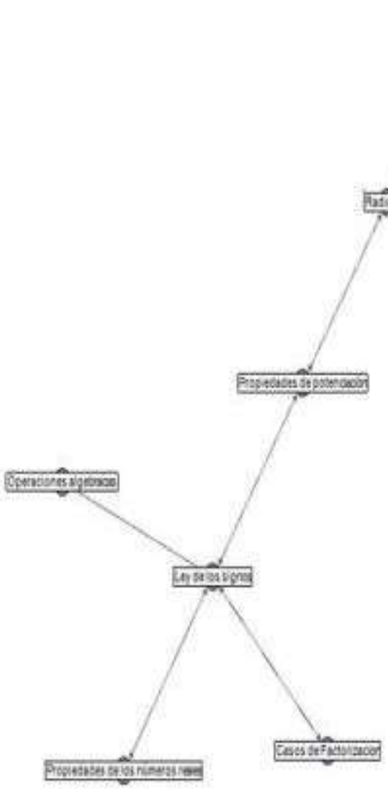


Figura 49. Red N° 3

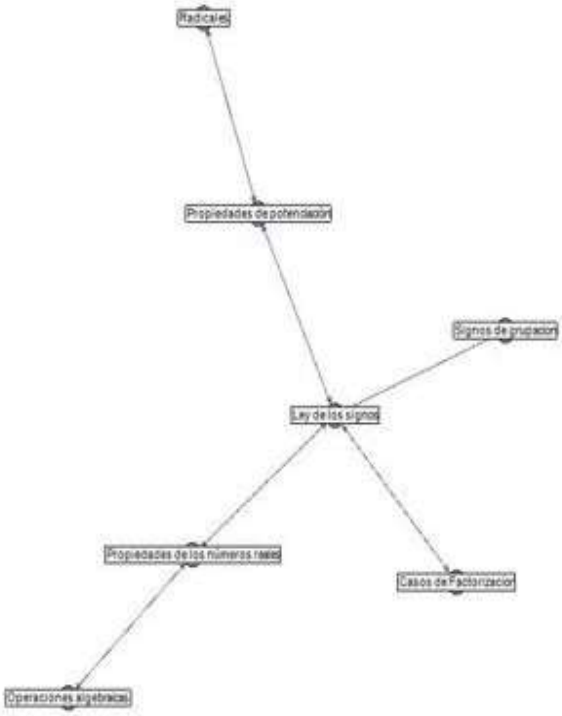


Figura 50. Red N° 26

Observemos que estas redes comparten cuatro aristas: propiedades de los números reales, casos de factorización, propiedades de potenciación y de esta la arista radicales.

Las redes 5 y 9, también comparten cuatro aristas, estas son: signos de agrupación, operaciones algebraicas, propiedades de potenciación y esta arista comparten la arista propiedades de los números reales.

Estas cuatro redes tienen un solo nodo –LS–, comparten cuatro aristas entre ellas y ambas parejas tienen el mismo índice de similaridad, pero las aristas que comparten entre las parejas de redes no son las mismas, esto significa que parejas de redes que tengan el mismo índice de similaridad no necesariamente las aristas son las mismas.

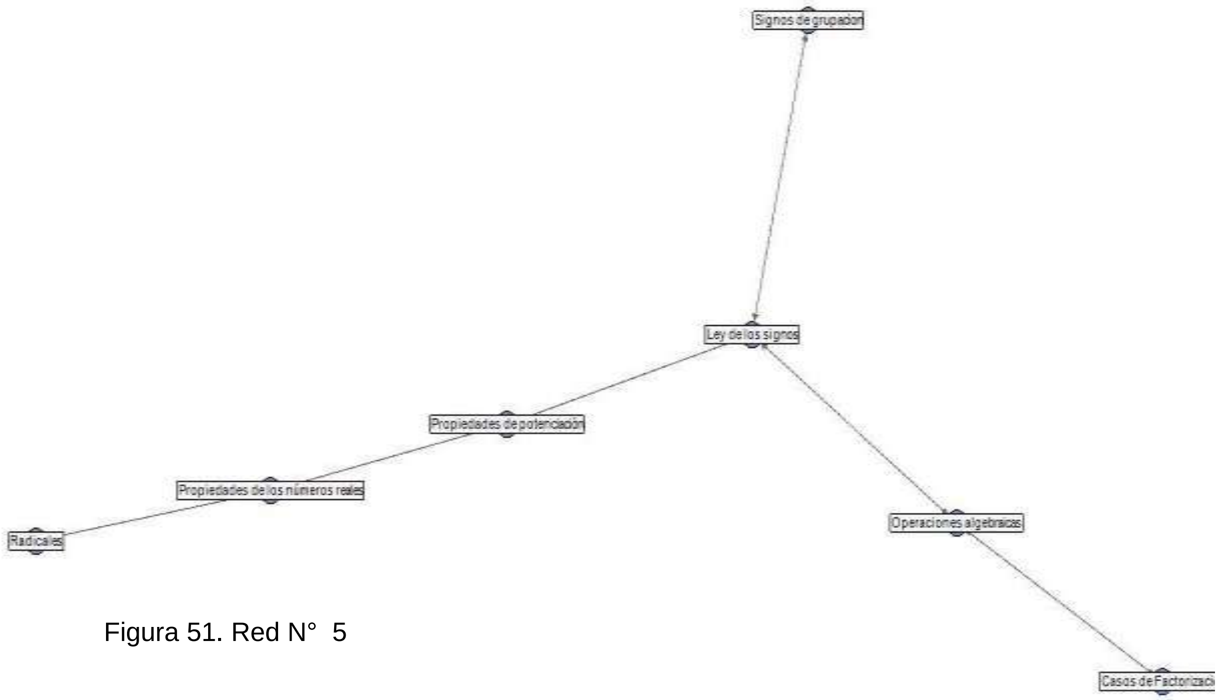


Figura 51. Red N° 5

El conocer el índice de similaridad, tiene su valor didáctico porque nos da información sobre cómo podemos agrupar a nuestros estudiantes. Además, nos facilita identificar, los nodos múltiples más cercanos que debemos activar, para que el conocimiento caiga dentro de la Zona de Desarrollo Próximo (Enrique et al. 2016). Recordemos, para que un saber enseñado pueda ser aprendido debe ser

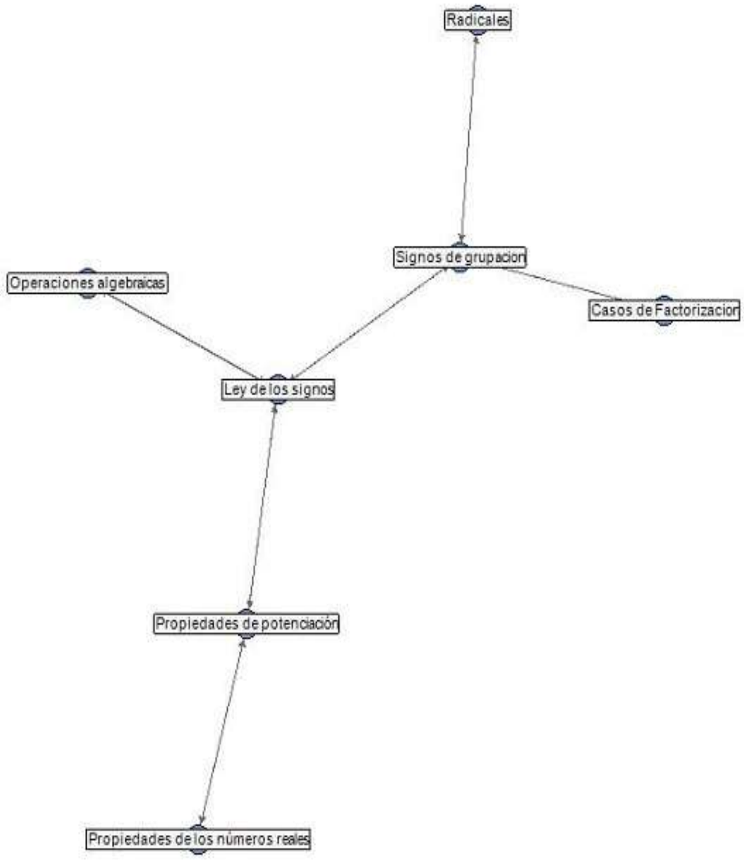


Figura 52. Red N° 9

incorporado en la estructura cognitiva del que aprende.

- **Operaciones algebraicas (OA)**. Las operaciones algebraicas constituyen una habilidad clave en el aprendizaje de los casos de factorización. Los estudiantes que tienen como nodo múltiple las OA son los siguientes: MA-4, MA-6, MA-11, MA-12, MA-14, MA-21 Y MA-25 –esta última solo tiene un nodo múltiple–. Los enlaces del nodo OA, que aparecen con mayor frecuencia en las redes son: CF, LS Y PP; con menor frecuencia SA, PNR y RAD.

  Las relaciones Operaciones Algebraicas y Casos de Factorización de las redes MA-4, MA-6, MA-21, se analizaron desde el nodo CF. Por tanto, solo nos queda estudiar esta relación en las redes MA-11, MA-12 y MA-25.

  El 66,67 % y 33.337% de estos alumnos, reflejan
  en sus estructuras cognitivas falta de dominio del significante y el referente (expresiones algebraicas y geométricas) respectivamente, tienen enlaces comunes en PP, PNR Y LS.

  Además, entre estas redes solo hay significancia en el índice de similiridad entre la red MA-4 y MA-21 con un índice de 0,5833333333.

  .

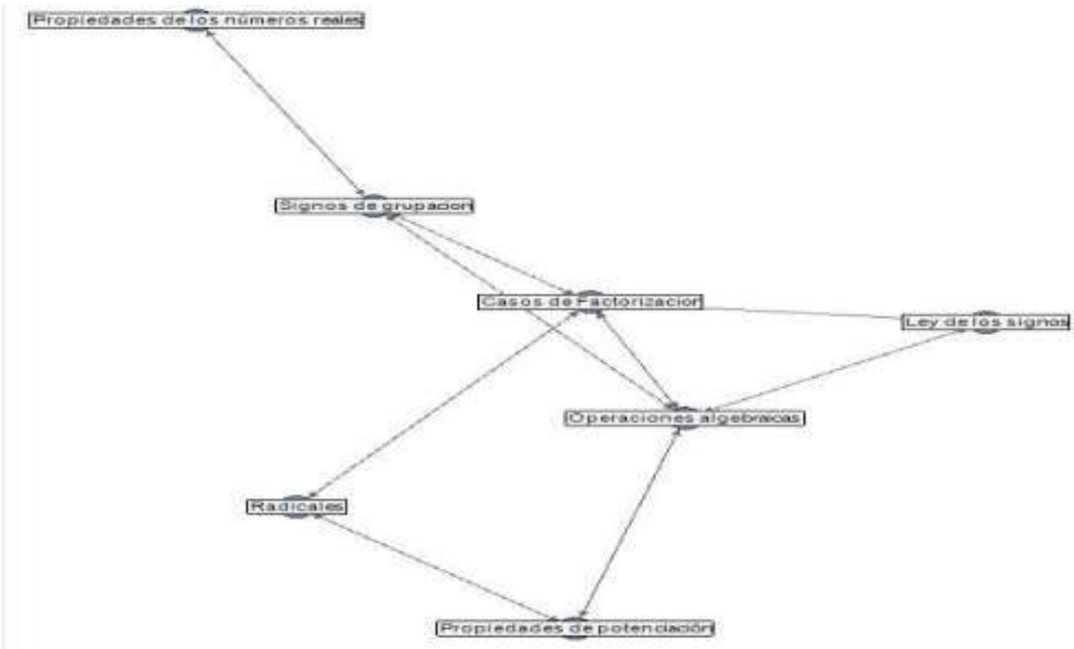


Figura 53. Red N° 4

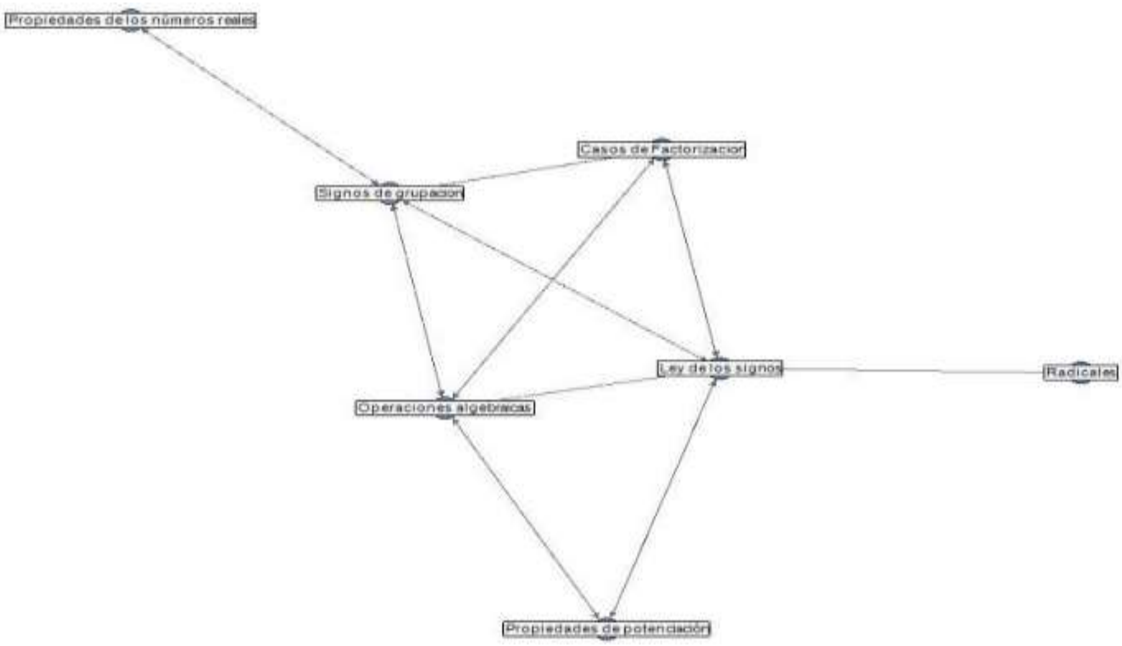


Figura 54. Red N° 21

Lo similar en estas redes son los nodos múltiples SA, CF y OA, de esta última comparte las aristas que van de las OA a las PP y de los CF a la LS. Además, en ambas redes se observa mucha fuerza entre sus nodos múltiples.

- **Propiedades de Potenciación (PP).** Los alumnos que tiene uno de sus nodos las PP son: MA-6, MA-11, MA-18, MA-22 y MA-27. Los enlaces con mayor frecuencia son: CF, OA, LS y SA. El enlace de menor frecuencia RAD. Esta propiedad en las redes MA-6, fue analizada desde el nodo factorización. Por tanto queda excluida del análisis en este ítem.

  El 54.33 no aplica correctamente las propiedades de potenciación y solo el 30% logra traducir de lenguaje común al lenguaje algebraico, expresiones que involucran a estas propiedades. Estas redes comparten los enlaces OA, SA, LA y RAD.

  Con relación al enlace CF el 26.7% no reconocen la representación algebraica, el 20% no reconoce su representación geométrica y el 84% no resuelven ninguno de los casos de factorización. Esto significa que en la estructura cognitiva de estos alumnos, los CF y PP, están muy cercanos pero con deficiencias en el dominio de los CF.

En cuanto al índice de similaridad, solo las redes MA-18 y MA-27, tienen un ISIM significativo de 0,71428571.

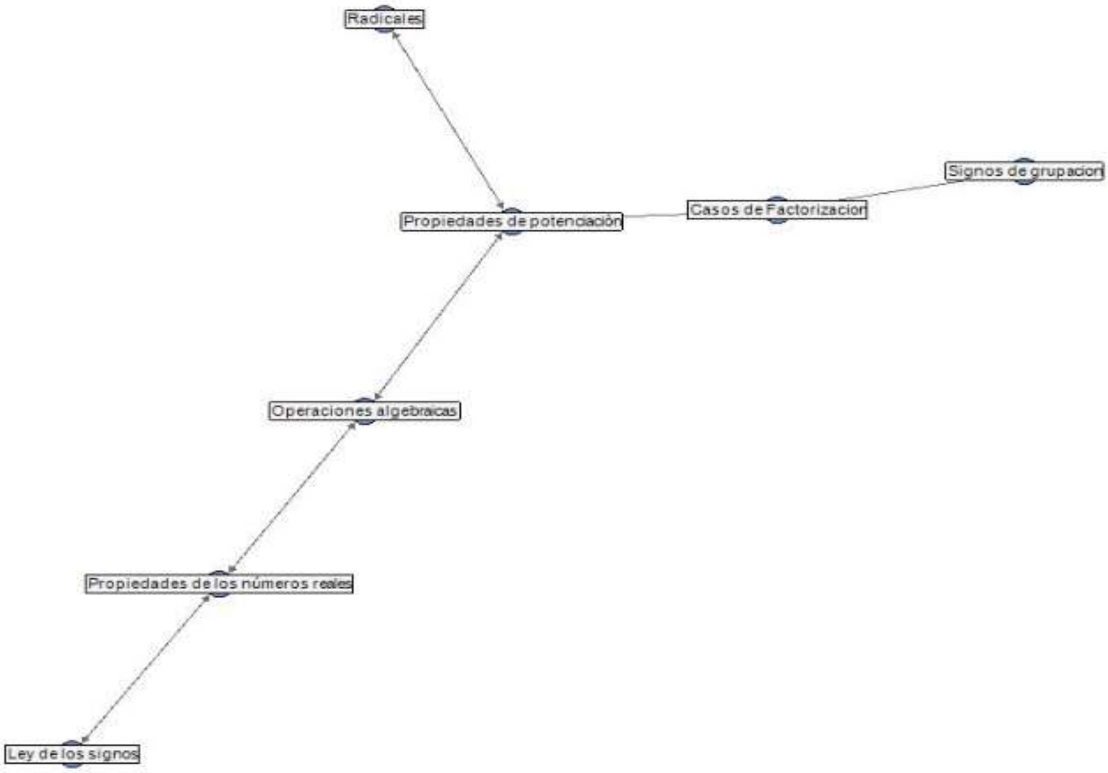


Figura 55. Red N° 18

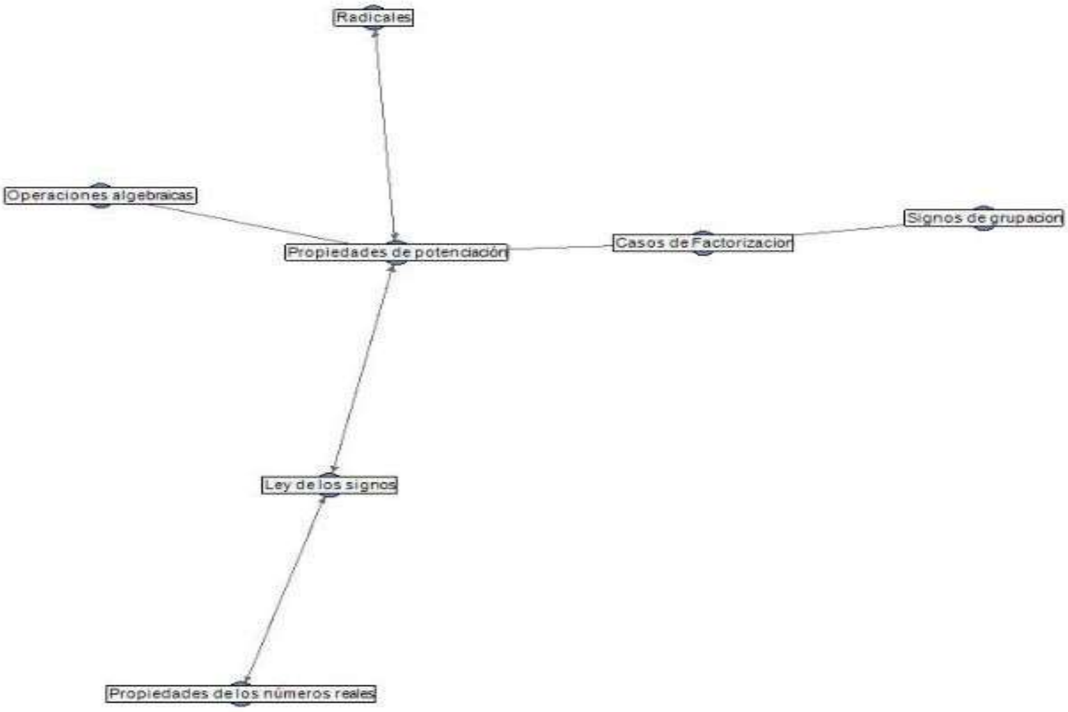


Figura 56. Red N° 27

Se observa gran similitud en la estructura cognitiva estos estudiantes, en lo único que difieren es que el alumno de la red 18 tiene 3 enlaces y la del alumno de la red 27, 4 enlaces.

- **Signos de agrupación (SA).** Los estudiantes cuyas redes tienen como nodo múltiple los SA son: MA-4, MA-9, MA-21 y MA-24. A diferencia de los nodos anteriores, los enlaces que presentan los nodos de estas redes, todos tienen cercanía significativa, o sea que la frecuencia en la que estos aparecen en las redes es mayor o igual al 50%. Es notorio que, en estas redes para el nodo SA, no existen enlace PP. El nodo SA, fue estudiados a través del nodo CF o LS, excepto en la MA-24 (mono_nodo), este alumno no resolvió el ejercicio que involucraba a los SA.

  El enlace CF de las redes MA-4 y MA-21, ya fueron estudiados anteriormente. Por tanto, solo se refleja el análisis de las redes MA-9 y MA-24. No identifican las representaciones algebraicas ni geométricas de los casos de factorización y ninguno resuelve un solo CF. En la estructura cognitiva de estos alumnos los SA y los CF están muy cercanos, probablemente esta sea la causa del aprendizaje deficiente de estos casos, porque siendo los SA el concepto con mayor significancia para este grupo de alumnos, según la lógica de disciplina Matemática, los SA no es un concepto determinante en el aprendizaje de los CF.

Las redes con ISIMI significativo fueron de los alumnos MA-4 y MA-21, este análisis ya se realizó en el nodo OA.

- **Propiedades de los números reales (PNR**). Los alumnos cuyas redes tienen este nodo múltiple son: MA-2, MA-13 y MA-30. Este nodo múltiple es el que tiene menos frecuencia en las RAP de los estudiantes muestra.

La red 30 ya fue estudiada en otros CN. Por tanto, el análisis se dirigió a los hallazgos de las redes MA-2 y MA-13. Con relación a los CF, solo el trinomio de la forma en su expresión algebraica lo reconocen los dos estudiantes, el resto de los casos solo uno de ellos los identifica (MA-13). En la representación geométrica, ninguno reconoce el caso factor común, TCP y la suma de cubos; el resto de los casos, solo uno de ellos lo reconoce (MA-13) y en la resolución de ejercicios de CF, no resuelven ningún caso, excepto el trinomio de la forma (MA-13).

Esto significa que las estructuras cognitivas por un lado reflejan dominio del significante de los CF, por otro, reflejan deficiencia en el referente de los CF. A esto le se le agrega, la falta de dominio en la regla. Estos alumnos muestran deficiencias en el aprendizaje de los CF.

En cuanto al ISIMI de las redes de este grupo, las redes MA2 y MA-13, tienen un ISIMI de 1, lo que significa que las redes son iguales:

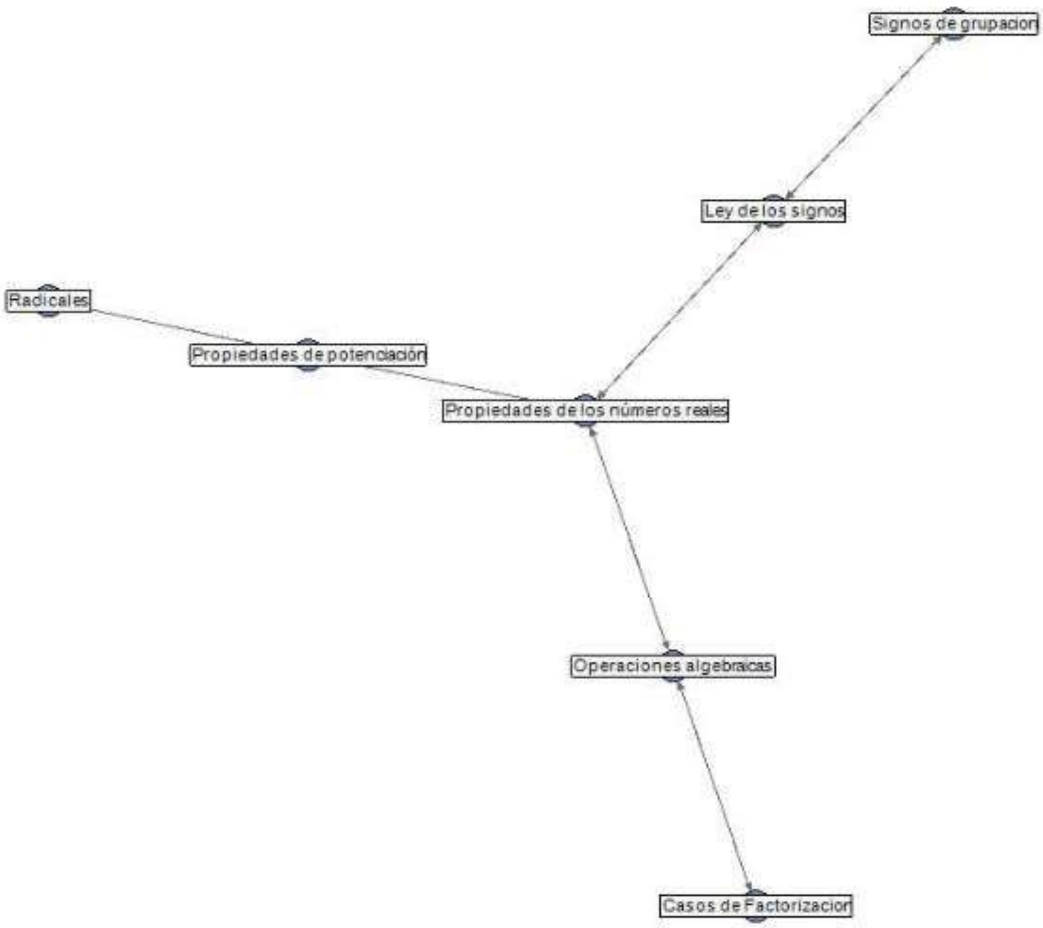


Figura 57. Red N° 2 y red N° 13

Contrastando el ISIMI con los errores y obstáculo, de estos alumnos, se notó mucha coincidencia. Asimismo, en los aciertos de ambos, referidos a los CF y OA. No obstante, encontramos situaciones en las que solo uno de ellos resuelve o identifica las representaciones algebraicas y geométricas. Esto se podría traducir en lo siguiente, los estudiantes cuyas redes son iguales no necesariamente tienen el mismo índice de complejidad y coherencia. También se podría decir que existe un isomorfismo entre la coherencia de la red y el aprendizaje.

- **Radicales (RAD).** Los estudiantes cuyas redes tienen uno de sus nodos múltiples en los RAD son: MA-10, MA-12 y MA-30. el nodo RAD tiene como enlaces cercanos: PNR, SA y CF. Los enlaces con menos significancia, LS, PP y OA.

Las redes con nodo múltiple RAD y enlace CF son MA-10 y MA-30, en esta última el enlace CF fue estudiado desde la posición de nodo múltiple (apartado 5.6.4.1). El estudiante MA-10, solo reconoce la representación algebraica y geométrica del trinomio de la forma $ax^2 +bx +c$, no resuelve ejercicios de factorización.

En cuanto al ISMI, no hay significatividad en el índice de similaridad de estas redes.

La confrontación de estos resultados nos permite hacer las siguientes afirmaciones:

- El hecho que un nodo múltiple, tenga relación con otros nodos o tenga varios enlaces, no significa que los estudiantes con estas estructuras cognitivas tengan dominio científico ni del nodo ni de sus enlaces. También se puede traducir que un nodo múltiple puede ser movilizador u obstáculo de aprendizaje.

- Conocer los errores, los obstáculo, la tipología de estos y la estructura cognitiva de los estudiantes podemos activar los nodos múltiples y los enlaces que son prerrequisitos a través de actividades que conlleven a superar los obstáculos y por ende los errores y poner en equilibrio al estudiante para el nuevo aprendizaje.

- Conocer los nodos múltiples –conceptos más significativos para los estudiantes- nos da una ruta para desarrollar procesos de aprendizajes que se almacenen en la memoria a largo plazo de los alumnos.

- Tener información de la representación gráfica de la estructura cognitiva, los errores y obstáculos que tiene el estudiante sobre los prerrequisitos, nos orienta cómo organizar a los estudiantes que se encuentran tanto en la misma zona de desarrollo próximo como aquellos que tienen las mismas dificultades.

- Al contrastar las respuestas de los estudiantes MA-5, MA-14 y MA-15, con ICOH: 0.7347, 0.6 y 0.6465, respectivamente, se observó que el desempeño de estos alumnos se corresponde a estos índices, lo que quiere decir que los estudiantes que tiene índices más cercanos a uno, tienen mayor dominio de los Conceptos Nucleares (CN). Así mismo, los estudiantes que están más a la izquierda de cero, MA-19, MA-8 y MA-23, demuestran menos dominio de los CN.

5.6.4. Análisis Documental y Entrevista

Este cruce de información se hizo con las variables estrategias de enseñanza, estrategias de evaluación y recursos didácticos para la enseñanza de la unidad de Álgebra.

En cuanto a las estrategias de enseñanza, ambas técnicas coinciden en que las estrategias que prevalecen en la enseñanza del Álgebra son: las Conferencias Magistrales y las sesiones prácticas. Divergen en la entrega anticipada de la guía de clase práctica, en la contextualización de los contenidos del Álgebra con otros temas de la asignatura de Matemática General, en la utilización de técnica de lluvia de ideas para identificar conocimientos previos y en promover el trabajo colaborativo, estas estrategias solo se mencionan en la entrevista .

Las estrategias de evaluación en las que coinciden los resultados de estas técnicas son las que se explicitan tanto en el Modelo Educativo, Normativa y Metodología para la Planificación Curricular y el Programa de Asignatura. No obstante, en la entrevista a profundidad se mencionan la aplicación de otros tipos de evaluación según la función que esta cumple y quien evalúa, también señalan actividades evaluativas como: la participación de los estudiantes, la elaboración de trabajos en grupos y escala de actitudes a través de la observación.

Con relación a los recursos, tanto en los documentos curriculares analizados, como en la entrevista, se pudo identificar que los docentes hacen uso de la reseña histórica como información anexa al contenido de la clase de Álgebra, utilizan medios audiovisuales para las Conferencias Magistrales y los medios clásicos, pizarra, marcadores y borrador. Además, se menciona como recurso didáctico la bibliografía y las guías de clase práctica.

Capítulo 6

Conclusiones

6. CONCLUSIONES

En este capítulo se exponen las principales conclusiones de la investigación y los problemas abiertos para futuras investigaciones que se derivan de los resultados obtenidos. En la tesis se plantearon seis objetivos, para conseguirlos se desarrollaron las siguientes acciones:

Para establecer el Estado del Arte se realizó una revisión de los resultados de las investigaciones relacionadas con los errores que los alumnos cometen durante el aprendizaje del Álgebra, estudios acerca de la estructura cognitiva sobre conceptos matemáticos a través de las RAP y sobre Neurociencia y Matemática.

El interés que se plasmó en los objetivos sobre los errores y obstáculos que se presentan en el aprendizaje de los casos de factorización y sobre la estructura cognitiva de los alumnos acerca del tema antes mencionado, demandó de un constructo teórico que fundamentara el estudio, el proceso metodológico y la aplicación de técnicas que facilitaran la identificación de las estructuras cognitiva de los estudiantes, lo que permitió hacer un análisis exhaustivo y argumentado, sobre las redes de Pathfinder, Asociaciones de Palabras y el manejo del softlaware GOLUCA.

También, se han analizado los casos factorización, desde su representación algebraica y geométrica hasta los algoritmos, pasando por los errores y obstáculos que los estudiantes enfrentan en el proceso de aprendizaje de estas herramientas algebraicas. Los hallazgos encontrado se han triangulado con las estructuras cognitivas identificadas a través de las técnicas aplicadas. Lo anterior permitió verificar lo complejo del tema y el alcance, que los resultados pueden tener tanto en la enseñanza del Álgebra Elemental como en otras ramas de la Matemática. Asimismo, se considera que la información obtenida en el estudio proporciona pautas para otras investigaciones relacionadas con el tema.

Con los resultados del estudio se ha diseñado una propuesta de ruta metodológica para la enseñanza de los contenidos del Álgebra Elemental.

6.1. Conclusiones Referidas a los objetivos

- **Identificar y clasificar los errores en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización.**

➢ **Errores de Lenguaje Algebraicos**

- Errores semánticos (ESE). Estos errores están referidos a la representación semántica de la estructura cognitiva de los estudiantes. El que más se presentó fue el error *semántico-lingüístico*. Los alumnos no asocian los prerrequisitos con sus respectivos conceptos. También, se detectaron errores *semántico-lógicos*, manifestados a través de las asociaciones incorrectas entre los caso de factorización con sus respectivos producto notable (representación algebraica). Además, se identificaron errores de tipo *semántico-filosófico*, estos errores se evidencian cuando los aprendices asocian de forma incorrecta la expresión algebraica (significado) con su representación geométrica (referente).

- Errores de tipo sintáctico (ESI). Los estudiantes al traducir a lenguaje algebraico, no siguen la sintaxis descrita del enunciado en lenguaje común en correspondencia con la ciencia Matemática. Además, los alumnos hacen caso omiso de los signos de agrupación, cuando estos se encuentran juntos en una expresión algebraica. Cometen error al escribir expresiones con radicales, colocan el índice al final del símbolo de radical o lo escriben como factor o bien lo omiten.

- Errores de tipo simbólico (ESM). En el estudio no se detectaron errores significativos de este tipo.

- **Errores de Tipo Algorítmico (EAL):**

- Errores relacionados con las reglas de los Casos Factorización. Los estudiantes intentan resolver el ejercicio aplicando otras reglas de factorización, o aplican solo una parte del algoritmo o bien resuelve como si fuera una ecuación.

- Errores relacionados con las Operaciones Algebraicas. Los alumnos suman y restan expresiones algebraicas como si fueran números. También, consideran factor las expresiones que están entre los signos de agrupación. Además, cometen errores de cálculo.

- Errores relacionados con las Propiedades de Potenciación. Los aprendices aplican una propiedad por otra. Además, transfieren la propiedad $(\square^{\square}\square^{\square}) = (\square\square)$ para resolver ejercicios de la forma: $(\square \mp \square) = \square^{\square} \mp \square^{\square}$.

- Errores relacionados con la Propiedades de los Números Reales. Los dicentes no colocan correctamente los términos de los factores dentro de los paréntesis y aplican la propiedad distributiva del producto respecto a la suma cuando tienen que aplicarla a la diferencia.

- Errores Relacionados con Radicales. Los alumnos solo extraen raíces a los coeficientes de los términos obviando las variables. Cometen error de cálculo al extraer raíces cuadradas y cúbicas.

- **Identificar y clasificar los obstáculos que se presentan en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización.**

Para identificar las causas y meta causas de aquellos errores que no son producto del azar, que son sistémico y persistentes, que no son ni fugaces ni intermitentes, el análisis se hizo a través de los obstáculos de tipo cognitivo, epistemológicos y los didácticos.

- **Obstáculos Cognitivos**. Falta de comprensión del significado de los signos lingüísticos utilizados en los conceptos prerrequisitos, esta causa es de los errores de tipo semánticos lingüísticos.

  La búsqueda de soluciones únicas y numéricas en las tareas algebraicas, se debe a una rigidez del pensamiento aritmético, el poco desarrollo del lenguaje y el pensamiento algebraico, no permite que los estudiantes alcancen el grado de abstracción para realizar generalizaciones. Estas son las principales causas de los errores de cálculo y errores sintácticos respectivamente.

  La falta de análisis y síntesis para determinar la relación existente entre los elementos de los casos de factorización con sus respectivos términos del producto notable, la poca capacidad de pensar cuando lo hacen mediante imágenes visuales o espaciales impiden al estudiante, identificar las expresiones algebraicas, en contextos geométricos, estas son las principales causas de los errores de tipo semántico lógico y semántico filosófico respectivamente.

  Obstáculos Epistemológicos. Solo se identificó un obstáculo de este tipo, en la propiedad $(□^{□}□^{□}) = (□□)^{□}$ El error que cometen los estudiantes al transferir la propiedad $(□^{□}□^{□}) = (□□)^{□}$ en la solución de ejercicios de la forma: $(□ \mp □)^{□} = □^{□} \mp □^{□}$, se debe a la falta de interiorización de la propiedad, esto □ausa estancamiento en el aprendizaje de los casos de factorización: suma o diferencia de cubos, diferencia de cuadrados y el producto del binomio al cuadrado cuyo resultado es un TCP. Por tanto, la propiedad es un obstáculo epistemológico, cuando queremos resolver situaciones del tipo: $(□ \mp □) = □^{□} \mp □^{□}$, tanto aritméticas como algebraicas.

- **Obstáculos Didácticos**. Este tipo de obstáculo se detectó en los Planes tanto de las Clases de las Conferencias Magistrales y en las Guías de Clases Prácticas como en la Bibliografía recomendada.

- Conferencias Magistrales: se descuida el aseguramiento del nivel de partida, función didáctica indispensable para el aprendizaje del nuevo contenido. Otro obstáculo de este tipo se observa en algunas prerrequisitos para el aprendizaje de los casos de factorización, se definen bajo unos criterios y se aplican con otros. También se observa que dan por sentado algunos pasos del algoritmo que se está enseñando. En la planificación de esta estrategia se aprecia una enseñanza tradicional, con una carga memorística, repetitiva, desprovista de comprensión, que termina siendo un obstáculo en el estudiante, cuando se quiere alcanzar aprendizaje significativo.

- Guías de Clases Prácticas. Los ejercicios en las guías de clase práctica, no están ordenados didácticamente, de lo más sencillo a lo más complejo. Otro obstáculo de este tipo, se refleja en estas guías al tratar de desarrollar habilidades en un tema cuando no se ha estudiado la teoría correspondiente.

- Bibliografía Recomendada. La bibliografía sugerida en el programa de asignatura Matemática General, para el estudio de los conceptos básicos de los casos de factorización, es muy poca y no es la mejor. En todas se presentan situaciones que conducen al docente propiciar obstáculos, relacionados a la falta de secuenciación lógica de los contenidos, formulación incompleta de ciertas definiciones y manejo incorrecto de algunos conceptos.

- **Determinar la representación gráfica de la Estructura Cognitiva de los estudiantes en los casos de factorización y sus prerrequisitos.**

En la representación gráfica de la estructura cognitiva de los estudiantes se aprecia por un lado, que según los índices de coherencia y complejidad las redes de la muestra son consistentes y en general los nodos de las redes tienen mucha fuerza. Además, se identificó que los Conceptos Nucleares (CN) que tienen más significancia para los estudiantes, son en primer lugar los casos de factorización (CF), en segundo, la ley de los signos (LS), en tercero, las operaciones algebraicas(OA) y en cuarto, las propiedades de potenciación. Por otro lado, los CN que menos significado tienen son: signos de agrupación (SA), propiedades de los números reales (PNR) y radicales (RAD).

Las RAP con nodo múltiple en los casos de factorización, los enlaces más significativos en la estructura cognitiva (EC) de los estudiantes son: propiedades de potenciación, operaciones algebraicas y la ley de los signos. No obstante, se aprecia poco desarrollo cognitivo, tanto en el referente –representación gráfica de los CF–, como en la aplicación del algoritmo de los CF.

Las RAP que presentan nodos múltiples, no significa que los estudiantes con estas estructuras cognitivas, tengan dominio o mayor dominio científico del nodo ni de sus enlaces. Lo que se puede inferir es que estos nodos y su relación con los enlaces son cercanas.

Se observó en las Redes Asociativas de Pathfinder de los estudiantes de la muestra con índices de similaridad igual a uno, también comparten buena parte de los errores y obstáculos. Además, se percibe un isomorfismo entre el desarrollo cognitivo y la coherencia de la red.

Se comprobó la información que brinda el índice de coherencia. Los estudiantes de la muestra cuyo índice de coherencia cercanos a 1, tuvieron mejor desempeño en el cuestionario. De igual manera los alumnos que sus índices de coherencia cercanos a -1, no tuvieron buen desempeño.

- **Contrastar los errores y obstáculos en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización con la representación gráfica de la estructura cognitiva de los estudiantes.**

Al contrastar los errores y los obstáculos que los estudiantes enfrentan en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización y sus prerrequisitos, con las representaciones gráficas de la estructura cognitiva de los alumnos entorno a estos temas se puede afirmar que podemos desarrollar procesos de aprendizajes más efectivos partiendo de la superación de los errores y obstáculos que cometen los estudiantes en los nodos múltiples prerrequisitos; o sea iniciar con el desarrollo cognitivo mediante el equilibrio interno entre la acomodación y la asimilación de los conceptos prerrequisitos más significativos del estudiante.

Además, ante la enseñanza de un nuevo tema, la experiencia del docente cuenta, ya que él sabe cuáles son los errores que los estudiantes cometen y los obstáculos que enfrentan los estudiantes al aprender un nuevo tema. Por tanto, esta información, junto con el índice de complejidad y similaridad, el maestro tiene las herramientas necesaria para orientar las siguientes fases del proceso de enseñanza de este nuevo tema y cómo organizar a los estudiantes que se encuentran tanto en la misma zona de desarrollo próximo como aquellos que tienen los mismos errores y obstáculo.

6.2. Problemas Abiertos para Nuevas Investigaciones

Este trabajo responde a una de las líneas actuales de investigación en Didáctica de las Matemáticas: el estudio sobre análisis, causas, elementos y taxonomías de clasificación de los errores. No obstante, los resultados obtenidos dan pautas para abordar otras de las líneas de investigación como:

- Profundizar en los errores y obstáculos de los estudiantes cuyos índices de similaridad en las Redes Asociativas es igual a 1 e índice de coherencia diferentes.

- Determinar cómo podemos trabajar didácticamente, los Conceptos Nucleares con los estudiantes cuyas RAP tienen índice de complejidad igual a cero.

- Profundizar en el desarrollo cognitivo de los estudiantes alrededor de los contenidos matemáticos que presentan más dificultades de aprendizaje, mediante la comparación de los resultados un pre-test y las RAP de cada alumno antes de la intervención didáctica y un pos-test con su respectiva

RAP después de la enseñanza del tema objeto de estudio.

- Comparar los resultados de la técnica RAP con otras técnicas aplicadas a los mismos objetos del presente estudio.

- Verificar a través de la técnica RAP, si la estructura cognitiva del experto se corresponde con la lógica de la ciencia Matemática.

6.3. Observaciones a la Tesis y Mejoras

El diseño metodológico aplicado en el estudio está bien argumentado, detallado, se observa lógica en el proceso, se ilustró mediante un mapa conceptual y se aplicó fielmente. Sin embargo, en el desarrollo de la investigación se identificaron aspectos que se deben mejorar:

- Recogida de la información:

  - Docentes: En las investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje hay poca disposición por parte de los profesores de colaborar. Por tanto, es mejor trabajar el tema con la metodología investigación-acción.

  - Estudiantes. Muestran mejor desempeño en los test cuando se le asignan puntos para su calificación y si este se aplica durante la sesión de clase. De lo contrario, hay poca asistencia, si llegan están cansados y no muestran interés en el llenado del instrumento.

  - Técnica de Asociación de Palabras. Se pudo haber sacado mayor provecho a esta técnica, si esta se aplicará alumno por alumno, para ir registrando, tiempos, titubeos y azares. Además, se evitaría la copia entre alumnos
.

Capítulo 7

Recomendaciones

7. RECOMENDACIONES

Las recomendaciones que se brindan a continuación están dirigidas a:

- **Docentes de Matemática**

  - Para lograr el desarrollo cognitivo y por ende aprendizajes significativos en los temas de Matemática, es necesario trabajar con los obstáculos asociados a los enlaces cercanos al nodo del tema objeto de estudio (TOE). Al activar este nodo se envía información a los enlaces más cercanos, de manera que esta activación de las relaciones más cercanas que los alumnos establecen con el nodo TOE, nos dan una posible ruta para promover el aprendizaje del concepto-nodo siguiendo la estructura cognitiva de los estudiante y lógica esta disciplina.

  - En el seno del colectivo de asignatura revisar y ajustar el programa de Matemática General en lo concerniente a las recomendaciones metodológicas: la forma de evaluar los contenidos y la bibliografía recomendada. Asimismo, replantear las estrategias metodológicas que se utilizan en el desarrollo del programa de Matemática General.

  - Revisar exhaustivamente la planificación. En las diapositivas de las Clases Magistrales, analizar las definiciones y la aplicación de estas. En las Guías de Clase Práctica, ordenar los ejercicios de los más sencillos a los más complejos.

- **Directores de Departamentos de Matemática y Coordinadores de Asignatura**

  - Propiciar espacios para compartir buenas prácticas entre los colectivos de asignatura para el mejoramiento de la calidad educativa.

  - Promover encuentros con los docentes para el desarrollo de Clases Demostrativas en temas de asignaturas en los se han detectado dificultades tanto científicas como metodológicas, a cargo de los especialistas del Departamento de Matemática o invitado externo.

- Validar la propuesta de la ruta metodológica producto de los resultados de esta investigación para la enseñanza del Álgebra Elemental (ver anexo 15).

- Dirigir algunos trabajos de graduación que den respuestas a los problemas abiertos para nuevas investigaciones, propuestos en las conclusiones del presente estudio.

- Dar seguimiento y acompañamiento pedagógico a los colectivos de asignatura con el fin de mejorar la calidad educativa de la UNAN-Managua.

- Promover espacios de reflexión con los docentes de Matemática para innovar en las prácticas pedagógicas.

- **Ministerio de Educación Cultura y Deporte**

  - En las jornadas de capacitación nacional para profesores de Matemática considerar los tópicos:

    ✓ Aprendizaje de la Matemática a partir de los errores.

    ✓ Estructura Cognitiva y Aprendizaje

    ✓ Neurociencia y el Aprendizaje de la Matemática.

    ✓ Técnicas para estudiar estructuras cognitivas

  - Incorporar en los materiales didácticos para los docentes, información relacionada con:

    ✓ La detección de errores y obstáculos en temas de Matemática, que son reconocidos por el gremio de docentes como difíciles de aprender.

    ✓ Aplicación de técnicas para determinar la estructura cognitiva de los estudiantes de algún objeto matemático.

    ✓ Evaluar el aprendizaje de los estudiantes a partir de los errores y obstáculos.

- Orientar cursos para todos los docentes del MINED relacionados con Neurociencia, Neurociencia Cognitiva y Neuroeducación.

- **Facultades de Educación**

  - Revisar y actualizar los programas de asignatura del área psicopedagógica con temas relacionados a la Neurociencia, Neurociencia Cognitiva y Neuroeducación.

  - Capacitar a los docentes sobre Neurociencia, Neurociencia Cognitiva y Neuroeducación.

  - Impulsar talleres de capacitación sobre técnicas que permitan indagar las estructuras cognitivas de los estudiantes.

Bibliografía

8. BIBLIOGRAFÍA

- Abrate, R.; Pochulu, M. & Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo. Recuperado de http://unvm.galeon.com/Libro1

- Aguilar, S & Barroso, J. (2015).La Triangulación de Datos Como Estrategia en Investigación Educativa. *Revista de Medios y Educación*. Nº 47, p. 73-88, Julio. ISSN: 1133-848.

- Ander-Egg, E. (1995). Técnicas de Investigación Social. Buenos Aires Argentina, Editorial LUMEN, 24ª edición.

- Albert, M.J. (2007). La Investigación Educativa. Claves Teóricas. Madrid. MCGraw-Hill.

- Alcalá Hernández, Manuel. (2002). La construcción del lenguaje matemático. Barcelona: Graó. INSS 9788478272808.

- Almeida, C., Casas, L. & Luengo González, R. (2004). Una aplicación de la Teoría de los Conceptos Nucleares al estudio de la estructura cognitiva de los estudiantes de 9º y 12º años de escolaridad de Portugal sobre el concepto de probabilidad. *Campo Abierto, Vol. 33, Nº 1. pp 13-35.*

- Almeida, C. (2014). Estudio de la estructura cognitiva de los estudiantes de 9° y 12° cursos sobre el concepto de probabilidad: La teorías de los Conceptos Nucleares y de los conceptos ThresHold. Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y las Matemática.

- Anderson, J., Rader, L. & Lebiere, C. (2009). Working Memory: Activation Limitations on Retrieval. Carnegie Mellon University. Cognitive Psychology 30, 221–256.

- Anguera, Ma. T.(1995). Método de investigación en psicología. Editorial SÍNTESIS Madrid. Cap. 18, 19 y 20. Recuperado de: http://www.franciscohuertas.com.ar/wp-content/uploads/2011/04/IT_Anguera_.pdf

- Aragón, E., Castro C., Gómez, B. & González, R.(2009). Objetos de aprendizaje como recursos didácticos para la enseñanza de lasMatemáticas. Apertura. Vol. 1, octubre. Universidad de Guadalajara México. Redalyc

- Aravena, M. , Kimelman, E., Micheli, B., Torrealba & R., Zúñiga, J. (2006). Investigación Educativa I. Registro Propiedad Intelectual Nº 152.529 ,Chile.(Recuperado en http://jrvargas.files.wordpress.com/2009/11/ágs.igación-educativa.pdf)I.S.B.N. 956-8114-64-5 (Chile)

- Arias, Ma. M. & Giraldo C. (2011). El rigor científico en la investigación cualitativa. *Investigación y Educación en Enfermería .Vol. 29, Nº. 3, 2011, p. 500-514*. ISSN 0120-5307.Redalyc.

- Astolfi, J. P. (1999). El "error", un medio para enseñar. Díada Editora Sevilla.

- Auqué, M.D. (2004). El papel de la inteligencia y la metacognición. Tesis Doctoral. Universitat Rovira i Virgili. Tarragona.

- Ausubel, D.; Novak, J.D. y Hanesian, H. (1990). Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.

- Avendaño, M. & Collado, N. & Valverde I. (2003). Articulación de los subsistemas medio y superior para la enseñanza de la Matemática. Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua yBID.

- Azcárate, C.(1995). Sistemas de Representaciones. UNO. *Revista de Didáctica de las Matemáticas 4, p 53-61.*

- Bachelard, G.(2000).La formación del espíritu científico. Contribución a un piscoanálisis del conocimiento objetivo. XXIII edición. México: Siglo XXI.

- Bailey, K. (1990).The use of diary studies in teacher education programs. En Richards and Nunan eds.), Second Language Teachers Education, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 215-226

- Baldor, A. (2002). Álgebra. Vigésima edición. Publicaciones Cultura. México Distrito Federal.

- Barrantes, H.(2006). Los Obstáculos Epistemológicos*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* Universidad de Costa Rica. Portal de Revistas Académicas.

- Benander, Lynn; Clement, John(1985). Catalogue of Error Patterns Observed in Courses on Basic Mathematics. Working Draft. EXXON Education Foundation, New York, N.Y.; Fund for the Improvement of Postsecondary Education (ED),Washington, DC. Recuperado(http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED287672.pdf).

- Benedet, Ma. Jesús (2002). Neuropsicología Cognitiva. Aplicaciones a la clínica y a la investigación, Fundamentos teóricos y metodológicos. 1° edición. Ed. Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales.

- Bliss, J & Ogborn, J. (1985). The analysis of qualitative data. *European Journal of Sciencia Education. Vol 1 (4) , 427-440.*

- Bohórquez, H. & Hernández, A. (2003).El razonamiento común: un obstáculo epistemológico en geometría. Revista de Pedagogía. Vol. 24 n.69 Caracas, Venezuela, enero. versión impresa ISSN 0798-9792.

- Bolívar, A. y Salvador Mata, F. (2003). “Conocimiento didáctico”, en Fco. Salvador Mata, J.L. Rodríguez Diéguez y A. Bolívar (dirs): Diccionario Enciclopédico de Didáctica. Archidona (Málaga): Aljibe, vol. I, 195-215.

- Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemáticas. (Recuperado: http://www.fractus.mat.uson.mx/papers/Brousseau/ObstaculosBrousseau.htm

- Brousseau, G. (1986): Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches. Didactique des Mathématiques. Vol 7, Nº 2, pp. 33-115.
- Burga, A. (2005). La Unidimensionalidad de un instrumento de medición. Perpectiva factorial. Ministerio de Educación. Unidad de Medición de la Calidad Universidad Peruana Cayetano Heredia Facultad de Psicología.

- Casos de Factorización. Recuperado de: http://www.fisicanet.com.ar/matematica/factoreo/tp04_factoreo.php. Enero 2015.
- Casas, M. (1997). De la Semasiología a la Semántica: breve panorama historiográfico. Actas del I Congreso Internacional de Historiografía Lingüística Española 18-21 de febrero, La Coruña. Recuperado en http://www.udc.es/dep/lx/sehl/casas.html

- Casas, L. (2002). Aportaciones a la investigación sobre la estructura cognitiva de los alumnos a través de Redes Pathfinder. Un estudio de exploratorio en Geometría. (Tesis Doctoral). Universidad de Extremadura. Departamento de Didáctica de la Matemática. Badajoz.

- Casas, L.M, Luengo, R., Canchado, M. & Torres, J.L. (2013).Una experiencia de representación del conocimiento en Educación Infantil mediante el uso de Redes Asociativas Pathfinder. RED. Revista de Educación a Distancia N° 36. Marzo.

- Chomsky, N. (1975). Aspectos de la teoría de la Sintaxis. Madrid, Aguilar Editores.

- Córdobas Navas, D. (2011). Desarrollo Cognitivo, Sensorial y Psicomotor en la Infancia. Ed. Innovación y Cualificación S.L. Antequera, Málaga. Libros Google.

- Corral, Y. (2009). Validez y Confiabilidad de los instrumentos de Investigación para la recolección de datos. *Ciencias de la Educación*. Vol. 19, N° 33, enero-junio. Valencia, España.

- Cubero, M. & Ramírez J.D. (2015). *Visgostky en la psicología contemporánea*. Editorial Miño y Dávila. España. Dialnet.

- Cundín, M. (2000). Aproximación al diccionario de la negación. Serie tesis doctorales. Universidad del país Vasco. Google.Boock

- De la Torre, S.(2004). Aprender de los errores. El tratamiento didáctico de los errores como estrategias innovadoras.

- Díaz, C. (2007). Construcción de instrumentos de Investigación. Algunas sugerencias para su diseño y validación. Recuperado de:http://blog.pucp.edu.pe/media/1551/20080902-construccion%20de%20instrumentos.pdf [Consulta: 2014, Marzo 25).

- Díaz, S., Mendoza, V. & Porras, C.(2011). Una guía para la elaboración de estudios de casos. *Razón y Palabra.* N° 75. Recuperado www.razonypalabra.org.mx/N/N75/varia_75/01_Diaz_V75.pdf

- Donoso, Ma. I. (2012). La Teoría Cognositiva de Piaget. Psicología Parvularia. Recuperado en http://psicousfq.blogspot.com/2012/12/teoria-cognoscitiva-de-jean-piaget.html.

- Dodera, G., Bender, G., Burroni, E. & Lázaro, Ma.P.(2014). Errores, actitud y desempeño matemático del ingresante universitario. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. ISSN: 1815-0640. N° 38.

- Domene, J.F.(2010). Lingüística y Matemática. Publicaciones de la universidad de Alcante. ISBN 978-84 19717 087-1

- Drouhard, J. & Teppo, A. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra –The 12th ICMI Study (pp. 225-264). Nueva York, Estados Unidos: Springer.

- Enciclopedia Autodidáctica(1986). OCEANO Tomo 3. Barcelona España

- Engler, A, Gregorini Ma. I, Müller, D, Vrancken, S y Hecklein, M. (2003). Los errores en el aprendizaje de la Matemática. Recuperado el 10 de octubre de 2014. http://www.soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf

- Enrique Grigioni, R. (2016). Neurociencias y obstáculos cognitivos: desestructurar lo sabido para poder aprender. Red Iberoamericana de comunicación y divulgación científica – IBERDIVULGA. Enero. http://www.oei.es/historico/divulgacioncientifica/?Neurociencias-y-obstaculos.

- Escobar, J. & Cuervo, A. (2008). Validez de Contenido y Juicio de Experto. Una aproximación a su utilización. Avances en medición *6, 27–36, 2008.* Universidad el Bosque, Colombia y Universidad. Artículo descargado noviembre 2016 http://www.humanas.unal.edu.co/psicometria/files/7113/8574/5708/Articulo3_Juicio_de_expertos_27-36.pdf

- Estévez, A., García, C & Junqué, C.(1997). La atención: una compleja función cerebral. Revista de Neurología. Departamento de Psiquiatría y Psicología Clínica. Universidad de Barcelona.

- Fernández, J. (2010). Neurociencia y Enseñanza de la Matemática. Revista Iberoamericana de Educación. *La Ciencia y la Cultura. N° 51. Enero*.

- Fonseca, J. & Sánchez, B. (2010). Algunas relaciones entre algoritmos y resolución de problemas.*TEA Tecné, Episteme y Didaxis*. *N° 28, p. 73-87*

- Galagovsky, L. (2004). Del aprendizaje significativo al aprendizaje sustentable. parte 2: derivaciones comunicacionales y didácticas. *Enseñanza de las Ciencias, 22(3), 349–364.*

- Gaonac´h, D. & Golder, C. (2005). Manual de Psicología para la Enseñanza. Ed. Siglo XXI. Buenos Aires, Argentina.

- García, S. & Arce, R. (2012). La matriz metodológica y el uso de recursos tecnológicos para el diseño de investigación cualitativa. Universidad de Costa Rica http://es.slideshare.net/randalarba/matrz-metodolgica

- García, B., Granier, M., Moreno, G., Ochoa, I., Ramírez, N., Sequeira, N. & Zuvia, M.(2003). Formación de docentes en el uso de recursos didácticos para construir conceptos. *EDUCERE.* Vol.6 pp. 100-106.

- García, C., Segovia, I. & Lupiáñez, J. (2012). Antecedentes y fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas. *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 139-148). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia y SEIEM.

- García, T. (2003). El cuestionario como instrumento de investigación y evaluación. cvonline.uaeh.edu.mx . Recuperado en http://personal. telefonica. terra. es/

- Gavilán, B (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al Álgebra escolar ¿Puede ayudar el aprendizaje cooperativo? *Investigación en la Escuela*. N° 73, p. 95-108. ISSN 0213-7771. Dialnet.

- Gazzaniga, M. (1977). Review of the split brain. En: M. C. Wittrock (Ed.) The Human brain. Englewood Cliffs: PrenticeHall, Inc.

- Gluck, M., Anderson, J. & Kosslyn, S. (2004). Memory and Mind. A Festschrift for Gordon H. Bower. Carnegie Mellon University. Cap VI.

- Godino, J. & Batanero, C. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.(Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/)

- Godino, J. D. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-7-0. [61 páginas; 1,8 MB] (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/)

- Godino, J. D& Aké, L.P &, Contreras, A y otros (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. Enseñanza de las Ciencias, 33.1 (2015): 127-150 Proyecto Vrae (Mineco), Universidad De Granada. http://dialnet.unirioja.es/revista/497/V/33

- Gómez, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. Comunicación, Lenguaje y Educación. CL& E, Barcelona. Dialnet.

- Gómez, C. (2004). Neurociencia Cognitiva y Educación. Fondo Editorial FACHSE, Ciudad Universitaria de Lambayeque, Perú. Primera Edición.

- González, A. & Ramos, J.(2006). La atención y sus alteraciones: Del cerebro a la conducta. Instituto de Neurociencia, universidad de Guadalajara México. Ed. Manual Moderno.

- Guillen, J. (20 de marzo de 2012). Matemática y Neurociencia. Escuela con cerebro [Mensaje en un blog]. Recuperado de https://escuelacerebrowordpress.com/2012/03/20/matematicas-y-neurociencia/

- Guiraud, P (1994). La Semántica. Editorial Eviarios. *Fondos de Cultura Económica. Vol. 143.*

- Guiraud, P (2004). La Semiología. XXIV edición. Editorial Siglo XXI, Argentina S.A.

- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2008). Metodología de la Investigación. Mc Graw Hill. Quinta Edición.

- Hitt, F.(2000). Construcción de Conceptos Matemáticos y de Estructuras Cognitivas. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

- Jaramillo, F.J.(2011). Cuestionarios y Escalas de Actitudes. Universidad de Madrid. Facultad de Formación de Profesorado y Educación. Recuperdado: https://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/Met_Inves_Avan/Materiales/Apuntes%20Instrumentos.pdf

- Kieran, C.y Filloy, E. (1989). El Aprendizaje del Algebra Escolar desde una Perspectiva Psicológica.*Investigación y Experiencias Didácticas. 7 (3),* 229-240.

- Konic, P.M.(2011). Evaluación de Conocimientos de Futuros Profesores para La Enseñanza de los Números Decimales. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática.

- Kunh, T.S. (1971). La estructura de las revoluciones científicas. Fondo de Cultura Económica. BREVIARIOS

- Lacruz de Diego, Ma. E. (2006). *Estudio Neurofisiológico de la Memoria Declarativa en el Hombre. Departamento de Fisiología.* (Tesis Doctoral), Facultad de Medicina Universidad Complutense de Madrid.

- Luengo, R. (2013). La Teoría de los Conceptos Nucleares y su Aplicación en la Investigación de Didáctica de la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. N° 34, junio p. 9 -36

- Marquina, J., Moreno, G. & Acevedo, A.: (2014). Transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico en educación general. E*ducere.* Vol 14 N° 59. P. 119-132*.* Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela. ISSN 1316-4910. Redalyc

- Martínez Cuitiño, M.(2015). Teorías de organización y procesamiento de la memoria semántica. *Perspectivas en psicología.* vol 12 , Nº 2 . Pp. 67 – 76. Dialnet

- Martínez Fernández, R.(2004).Concepción de aprendizaje, metacognición y cambio conceptual en estudiantes universitarios de psicología. Facultad de Psicología, Departamento de Psicología Básica. Universidad de Barcelona. Tesis Doctoral

- Mason, J. (1996). El futuro de la aritmética y del Álgebra: utilizar el sentido de generalidad. UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas. Nº 9, pp. 15-22.

- Maya Elcarte, N. y Rivero Rodrigo, S.(2010). Conocer el cerebro. Para la excelencia en la educación. Editorial Inno basque Agencia Vasca de la Innovación. España

- Melo Florián, A. (2011). Cerebro Mente y Conciencia. Un enfoque multidisciplinario. Internet Medical Publishing.

- Mendoza,J. (2001). Hemisferios Cerebrales. PersonArte. recuperado el 2de enero 2015. http://www.personarte.com/hemisferios.htm.

-

- Mogollón, E. (2010). Aportes de las neurociencias para el desarrollo de estrategias de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Universidad Dr. Rafael Belloso Chacín. Maracaibo, Venezuela (artículo aprobado 3 de nov 2010)

- Molina Bogantes, Z. (2006). Planeamiento Didáctico: Fundamentos, principios, estrategias y procedimientos para su desarrollo. Edit. Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica. ISBN 9977-64-935-9

- Mora, C. (1999). Concepción Integral para el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática en los diferentes niveles del sistema educativo. *Paradigma Vol. XX, Nº1, junio* p. 1-14.

- Moreira, M.A. (2002).La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. Instituto de Física, Universidad Federal de Rio Grande Sul. Puerto Alegre, Brasil.

- Morris, Ch.(1998). Fundamentos de la teoría de los signos. México, Editorial Grijalbo.

- Noguero, F.(2002). *El análisis de contenido como método de investigación*. *Educación. 4 p. 167-179.* Universidad de Huelva.

- Olivas, Ma. A. (2013). Neuroscience and education: teaching strategies, keys to learning. From disabilities to giftednessIES Los Alcores

- Novak, J. y Gowin, J (1984). Aprendiendo a Aprender. Editorial Morata

- ORGANIZACIÓN PARA LA COOPERACIÓN Y EL DESARROLLO ECONÓMICOS (2009). La Comprensión Del Cerebro. El nacimiento de una ciencia del aprendizaje. Universidad Católica Silva Henríquez (UCSH). Ediciones Universidad Católica Silva Henríquez. ISBN 978-956-7947-92-8

- Okuda, M. & Gómez, C. (2005). Métodos en Investigaciones Cualitativas: Triangulación. *Revista Colombiana de Psiquiatría.*Vol. 34 N° 1, febrero. Bogotá. INSS 00347450. Realdyc. Recuperdo: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=80628403009

- Palarea Medina, M., Soca Raboyna, M.M. (1994). Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguajes algebraico. I seminario nacional sobre lenguajes y Matemática. (Recuperado http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/091-098.pdf)

- Panchansky de Bosh, L. (2004). El Nivel Inicial. Estructuración. Orientaciones para la Práctica. Nuevos Caminos en Educación Inicial. Ediciones Colihue, Buenos Aires Argentina. Libros de Google.

- Peat, D. (1990). *Mathematics and the Language of Nature in Mathematics and Sciences*, Ed. Ronald, E. Mickens. Red maestros de maestros (2011), recuperado el 1 de julio de 2011 de:http://www.rmm.cl/index_sub.php?id_contenido=9997&id_seccion=2374&id_portal=369

- Piaget, J. (1973). Estudios de Psicología Genética. EMECÉ Editores. Buenos Aires Argentina.

- Pizano Chávez, G. (2007). *La Neurociencia y los Siete Saberes: La Fuerza del Futuro. Neurociencia y educación*. Investigación Educativa.vol. 11 N.º 20, 21 – 32.Julio-Diciembre 2007.

- Prieto, Ma.A. & Marcha, J.C.(2002). Paso a paso en el diseño de un estudio mediante grupos focales. . Aten Primaria. 15 de abril. 29 (6): 366-373.

- Quintana, A. y Montgomery, W. (2006). Psicología: Tópicos de actualidad .Lima: UNMSM. Recuperado http://es.scribd.com/doc/3634305/Metodologia-de-Investigacion-Cualitativa-A-Quintana

- Rico, L. (1995). Errores y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas. Resolución de problemas. Evaluación. Historia (pp. 69-108). Bogotá Colombia. Recuperado http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF

- Rivas, N.(2008). Procesos Cognitivos y Aprendizaje Significativo. Subdirección General de Inspección Educativa de la Viceconsejería de Organización Educativa de la Comunidad de Madrid Comunidad de Madrid.

- Robles, B. (2011). *La entrevista a profundidad: una técnica útil en el campo antrofísico*. Cuicuilco. Vol 18 , N° 52, páginas 39-49. Escuela Nacional de Antropología e Historia. México. INSS 1405-7778 (Recuperado en http://www.redalyc.org/pdf/351/35124304004.pdf)

  ○

- Robles Garrote, P. & Rojas, M.(2015).*La validación por juicio de expertos: dos investigaciones cualitativas en Lingüística aplicada.* Revista Nebrija. Nª 18. ISSN 1699-6569.

- Rodríguez Palmero, Mª L; Moreira, M. Caballero Sahelices, Mª & Greca, I.(2008). La teoría del aprendizaje significativo desde la perspectiva de la Psicología Cognitiva. Ed. Octaedro S.L. Barcelona, España.

- Romero, S., Ponsoda, V. & Ximénez, C. (2006). Validación de la Estructura Cognitiva del test de signos mediante modelos de ecuaciones estructurales. Psicothema. Vol n° 4, p. 835-840. Universidad de Madriz, España. INSS 0214-9915.

- Rojas, P. & Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. Educación Científica y Tecnológica. Revista Científica / ISSN 0124 2253. Octubre Edición Especial. Bogotá, P. 760-766. Recuperado diciembre 2015 http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/Vergel/Rojas%20&%20VergelProcesos%20Generalizacion.pdf)

- Ruano Barrera, R., Socas Robayna, M. & Palarea Medina, M. (2001). Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico. El Guiniguada, ISSN 0213-0610, Nº 8-9, 1999, págs. 319-336. Dialnet

- Ruano Barrera, R., Socas Robayna, M. & Palarea Medina, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por los alumnos de secundaria en el proceso de sustitución formal, generalización y modelización en Álgebra. REDINED-UNIVERSIA. Granada vol 2. Enero, P. 61-74. Id.: 53371835

- Ruiz Olabuénaga, J.I. (2012). Metodología de la investigación cualitativa. Bilbao: Universidad de Deusto

- Sanmartí, N.(2012). 10 ideas clave. Evaluar para aprender, España. Editorial GRAÓ.

- Skjong, R. & Wentworth, B. (2000). Expert Judgement and risk perception. Recuperado el 15 de Enero de 2006, de http://research.dnv.com/skj/Papers/SkjWen.pdf

- Tall, D. & Vinner, S.(1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, p. 50-151.

- Tamayo Alzate, O. (2001). Evolución Conceptual, desde una perspectiva multidimensional. (Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona). Dialnet.

- Taylor, S. & Bogdan, R. (1987). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados". Editorial Paidós Básica. 1987 de todas las ediciones en castellano. pp. 100-132.

- Thompson, P. W., & Sfard, A. (1994). Problems of reification: Representations and mathematical objects. In D. Kirshner (Ed.) Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education — North America, Plenary Sessions Vol. 1 (pp. 1-32). Baton Rouge, LA: Lousiana State University. Recuperado: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.330.4388&rep=rep1&type=pdf

- Torres, J.L. & Luengo, R. & Casas, L. & Mendoza, M.(2012). Estudio de la estructura cognitiva:mapas conceptuales versus redes asociativas pathfinder. Conference on Concept Mapping. Valletta, Malta. ARTICULO

- Trujillo, M. & Guerrero, J. & Castro, N. (2006). Obstáculos asociados al aprendizaje del concepto de función real. *IIEC, Volumen 1, N°. 2, 2006: 29-32.Redalyc*

- Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-Managua (2011). Impacto de las Conferencias Magistrales en la UNAN-Managua. Material no publicado.

- Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-Managua (2011). Modelo Educativo, Normativa y Metodología para la Planificación Curricular. Recuperado de: http://www.unan.edu.ni

- Universidad Particular de Lojan (Tzaban, Nechama).(2009) Teoría de la modificabilidad cognitiva estructural. Video conferencia https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=xKtUZz2d-WM

- UNOBRAIN(2012). BRAIN FITNESS. La ciencia de los cerebros en forma. www.unobrain.com

- Velázquez, B., Calle, Ma. G. & Remolina, N. (2006). Teorías Neurocientíficas del aprendizaje y sus implicaciones en la construcción del conocimiento de los estudiantes universitarios. Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca. Tabula Rasa N° 5: 229-245. Bogotá Colombia. INSS 1794-2489.

- Vila Chaves, J. (2011). *Memoria Operativa, Inteligencia Y Razonamiento. La Necesidad de Medidas Contextualizadas del Componente de Memoria Operativa a Largo Plazo.* Doctorado. Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación Facultad de Psicología Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

- Villa, J.A. (2006). El Proceso de Generalización Matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación. *Revista Tecnológica*. N° 16 p. 140-151.

- Villalobos, L. (2013). Una visión sobre el método fenomenológico. Universidad Fermin Toro. Venezuela.

- Wittgenstein, L. (1999). Investigaciones Filosóficas. Editorial Crítica, Quinta Edición. Madriz

- Woolfolk, A.(2007). Psicología Educativa. Universidad de Ohaio. Novena Edición. Pearson. Boock, Google.

9. Anexos

9. ANEXOS

	NOMBRE DEL ANEXO
1	Dossier para la validación de los instrumentos
2	Parrilla Metodológica de Programa de Asignatura
3	Parrilla Metodológica de Las Guías de Clase Práctica
4	Parrilla Metodológica Conferencias Magistrales
5	Instrumentos Entrevista a Docentes
6	Plan de Clase: Conferencia Magistral 4
7	Parrilla Metodológica: Entrevista Primer Momento Estrategias de Enseñanza.
8	Parrilla Metodológica: Entrevista Primer Momento Conceptos Nucleares
9	Parrilla Metodológica: Entrevista Segundo Momento: Lenguaje Algebraico
10	Parrilla Metodológica: Entrevista Tercer Momento
11	Parrilla Metodológica: Estructura Cognitiva Conceptos Prerrequisitos
12	Parrilla Metodológica: Estructura Cognitiva Representación Algebraica
13	Parrilla Metodológica: Estructura Cognitiva Representación Geométrica
14	Parrilla Metodológica: Aplicación de las Reglas de los Casos de Factorización
15	Propuesta de la Ruta Metodológica para la Enseñanza del Álgebra Elemental
16	Redes Asociativas de Pathfinder de los estudiante de la muestra
17	Instrumento: Cuestionario aplicado a los estudiantes

ANEXO N° 1

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA,MANAGUA
UNAN-MANAGUA

DOSSIER PARA LA VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS

"Estudio de la Estructura Cognitiva de los Errores y Obstáculos de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de los casos de factorización del Álgebra, II segunda unidad del programa de Matemática General, UNAN-Managua, 2016".

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN EDUCACIÓN E INTERVENSIÓN SOCIAL

Autora: Maribel del Carmen Avendaño

Tutora: Dra. Martha Roxana Mendieta

Managua, Julio 2015.

VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS

Estimado(a) maestro(a) usted ha sido seleccionado(a) para validar los instrumentos que se van a aplicar en el estudio de los Errores y Obstáculos en el aprendizaje de la matemática, específicamente en los casos de factorización. Con los resultados obtenidos a través de estos instrumentos se estudiará la estructura cognitiva de los estudiantes mediante técnicas apoyadas en software.

La población en estudio está conformada por los estudiantes de primer año y los docentes que desarrollan la asignatura de Matemática General en la UNAN-Managua, en el segundo semestre 2016.

Pertinencia: Correspondencia entre el contenido del ítems y la información que se pretende recoger a través de él.

Claridad: Nivel de claridad y precisión con la que está redactado el ítems de manera que permite la comprensión del informante.

A continuación se explica lo que se pretenden con cada instrumento.

ENTREVISTA:

Primera Sesión: Valorar si las preguntas permiten conocer la metodología, empleada por los docentes en la enseñanza de la unidad de álgebra y si ésta se han formulado correctamente. Además, valorar si en el enunciado para el llenado del gráfico -concepto nucleares-, están explícitos los aspectos relevantes para el aprendizaje de los casos de factorización.

Segunda Sesión: Se necesita conocer cómo el maestro resuelve este tipo de problemas para determinar el desarrollo de las estructuras cognitivas de los estudiante a partir del experto. Asimismo, valorar la redacción de las preguntas relacionadas a la identificación de errores, obstáculos y dificultades, en este tipo de ejercicios.

Tercera Sesión: Para cada caso de factorización, valorar si las expresiones que están en el instrumento facilitan la identificación de los conocimientos necesarios para aprender el caso de factorización indicado, los errores y obstáculos que se presentan al aprender dicho caso.

DIAGNÓSTICO:

En esta prueba se pretende recoger información de los estudiantes sobre los errores y obstáculos relacionados al lenguaje algebraico, la semántica y sintaxis algebraica. Para ello se han formulado una variedad de ejercicios.

Observe en cada tipo de ejercicio si a través de estos es posible identificar los errores y obstáculos relacionados al lenguaje algebraico, la semántica y sintaxis.

DATOS DEL EVALUADOR(A)	
Facultad a la que Pertenecen	
Educación e Idiomas ☐	FAREM-Matagalpa ☐
Ciencias e Ingeniería ☐	FAREM-Chontales ☐
Ciencias Económicas ☐	FAREM-Carazo ☐
FAREM-Estelí ☐	
Años de Experiencia Docente ________________	
Categoría Docente __________________________	

Al finalizar rubricar cada instrumento.

Gracias por su participación

ENTREVISTA

Estimado profesor(a), la presente entrevista tiene como fin conocer cuáles son los errores y obstáculos que los estudiantes presentan durante el aprendizaje de los casos de factorización, contenido de la unidad de Álgebra, del programa de Matemática General. Así mismo, identificar las posibles causas. La información será de mucha importancia para el desarrollo de esta investigación.

La entrevista se realizará en tres sesiones y será filmada. Para su comodidad solo se grabará lo que usted escriba en la pizarra, si así lo prefiere.

Primera Sesión

Metodología empleada en la enseñanza de la unidad de Álgebra

N°	DIMENSIÓN	PREGUNTA	PERTINENCIA					CLARIDAD				
			1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Primera Parte	Estrategias de Enseñanza	1. ¿En general, que estrategias utiliza durante el desarrollo de la unidad de Álgebra?										
		2. ¿Cómo utiliza la reseña histórica del Álgebra en la enseñanza de los contenidos de esta unidad?										
		3. ¿Qué recursos didácticos utiliza durante el desarrollo de la unidad de Álgebra?										
		4. ¿Cómo evalúa los contenidos de la unidad de álgebra?										
		5. ¿Qué estrategias metodológicas ha utilizado para superar los errores cometidos durante el aprendizaje de las operaciones algebraicas?										
		6. ¿Qué Estrategias Metodológicas ha implementado para superar los errores cometidos por los estudiantes en los casos de factorización?										
	Conceptos Nucleares	7. Refleje algunos conocimientos, términos, habilidades, nociones que considere relevante para el aprendizaje de los casos de factorización.										
Comentarios:												

Segunda Sesión

Lenguaje Algebraico

N°	DIMENSIÓN	PREGUNTA	PERTINENCIA					CLARIDAD				
			1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
		1) La siguiente proposición es verdadera o falsa:										
Segunda Parte	**Errores y Obstáculos**	«Si sumo tres números naturales consecutivos y divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número». a) ¿Cuál es el razonamiento que necesito hacer para justificar la respuesta?										
		b) ¿Qué errores puede cometer el estudiante a la hora de resolver ejercicios de este tipo?										
		c) ¿Qué obstáculos enfrenta el estudiante a la hora de resolver ejercicios de este tipo?										
		2) Dada la siguiente situación:										
		$n=1 \Rightarrow n^2 = 0^2 + 0 + 1 = 1$ $n=2 \Rightarrow n^2 = 1^2 + 1 + 2 = 4$ $n=3 \Rightarrow n^2 = 2^2 + 2 + 3 = 9$ $n=4 \Rightarrow n^2 = 3^2 + 3 + 4 = 16$ $n=5 \Rightarrow n^2 = 4^2 + 4 + 5 = 25$ a) Escriba una expresión algebraica que represente las situaciones anteriores.										
		b) Escriba en lenguaje común la expresión anterior?										
		c) ¿Cuáles son los posibles errores que pueden cometer los estudiantes a la hora de resolver este ejercicio?										
		d) ¿Cuáles son los obstáculos que pueden enfrentar los estudiantes a la hora de resolver este ejercicio?										
		3) Considerando que cada letra tiene un valor distinto:										
		A B C + A B C A B C 2 A C C a) ¿Puede el estudiante resolver esta tarea usando algún procedimiento algebraico?										
		b) ¿Cuál es la resolución y qué nociones alge¬braicas se usaría?										
		c) ¿Qué dificultades puede tener el estudiante al resolver ejercicios de este tipo?										

Tercera Sesión

Factorización

N°	DIMENSIÓN	PREGUNTA	PERTINENCIA					CLARIDAD				
			1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Segunda Parte	**Errores y Obstáculos**	**Determine los errores y obstáculos que enfrentan los estudiantes al factorizar y los requsitos para aprender los siguientes casos:**										
		Factor común: $ax + bx$										
		Factor común por agrupación: $ax+bx-ay-by$										
		Diferencia de Cuadrados: $x^2 - y^2$										
		TPC: x^2+6x+9										
		Trinomio de la forma: $x^2 + bx + c$										
		Trinomio de la Forma: $ax^2 + bx + c$										
		Cubo Perfecto de un Binomio: $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$										
		Suma o Diferencia de cubos: $x^3 \pm y^3$										
		Suma o Diferencia de dos Potencias Iguales: $x^5 \pm y^5$										

Comentarios:

DIAGNÓSTICO

Estimado alumno(a), el presente test tiene como fin conocer cuáles son los errores y obstáculos que presentan durante el aprendizaje de los casos de factorización y sus requisitos. Así mismo, identificar las posibles causas. La información que nos brinden será de mucha importancia para el desarrollo de esta investigación.

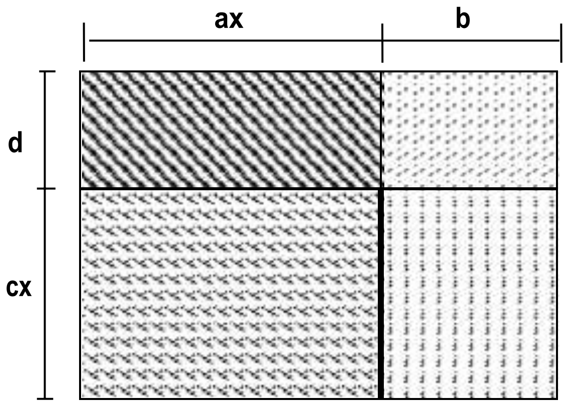
Semántica

Lee detenidamente el contenido de cada columna antes de asociar. Coloca en la columna de la derecha la letra que le corresponde de la columna izquierda:		Pertinencia					Claridad				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
a) Expresión Algebraica	_____Son aquellos que tienen la misma parte literal afectada por los mismos exponentes.										
b) Término	_____ Es aquel que consta de un solo término.										
c) Término Semejante	_____Es el que está formado por el máximo común divisor de los coeficientes de todos los términos y además la letra o letras que se repite en todos los términos con el menor exponente.										
d) Monomio	_____ Suma o resta indicada de varios monomios.										
e) Polinomio	_____Es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.										
f) Factor Común	_____Expresión algebraica que consta de uno o varios símbolos, no separados entre sí por el signo + o -.										
Comentarios:											

<table>
<tr><th rowspan="2">N°</th><th rowspan="2">LENGUAJE NATURAL</th><th rowspan="2">LENGUAJE ALGEBRAICO</th><th colspan="5">PERTINENCIA</th><th colspan="5">CLARIDAD</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td colspan="13">De lenguaje común a lenguaje algebraico</td></tr>
<tr><td>1</td><td>¿Cuál es el número que disminuido de 20 da por diferencia 7?</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Las tres quintas partes de un número aumentado en un cuarto.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>La suma de número par y el triple de su impar inmediato</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>La semi suma de dos números multiplicado por la suma de los cuadrados de ambos números.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>La raíz cúbica del cuadrado de la suma de dos números.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="13">Comentarios:</td></tr>
<tr><td colspan="13">De lenguaje algebraico al lenguaje común</td></tr>
<tr><th rowspan="2">N°</th><th rowspan="2">LENGUAJE ALGEBRAICO</th><th rowspan="2">LENGUAJE COMÚN</th><th colspan="5">PERTINENCIA</th><th colspan="5">CLARIDAD</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\forall a \in \mathrm{R},\ a \neq 0;\ a^0 = 1$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>$x^3 = 343$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\log_2 8$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="13">Comentarios:</td></tr>
</table>

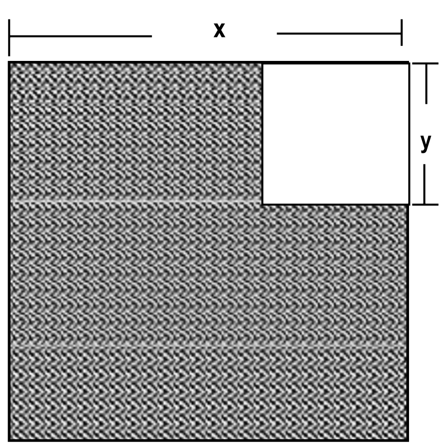
Dada la siguiente figura identifica la fórmula que refleje el área total sombreada.

a) $a(x+y) = ax + ay$
b) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
c) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
d)
e) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
f)
g) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
h) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + b$
i) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$
j)



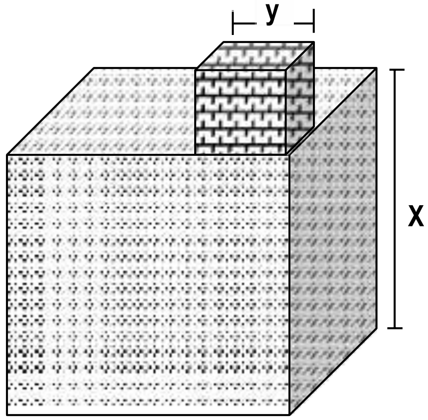
1

R:____



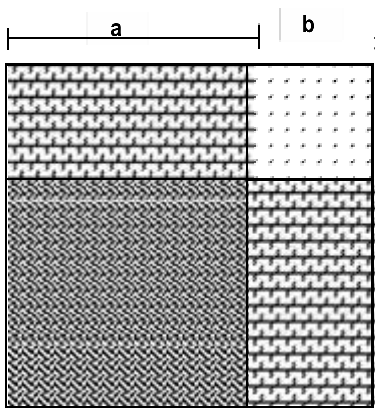
2

R:____



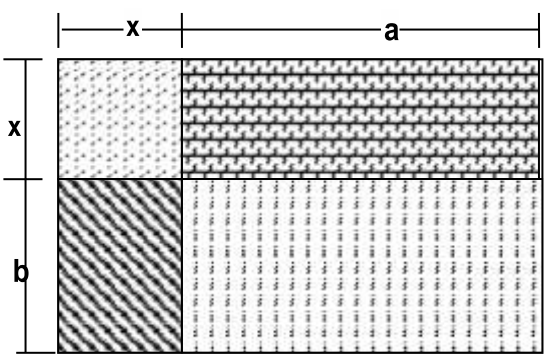
3

R:____



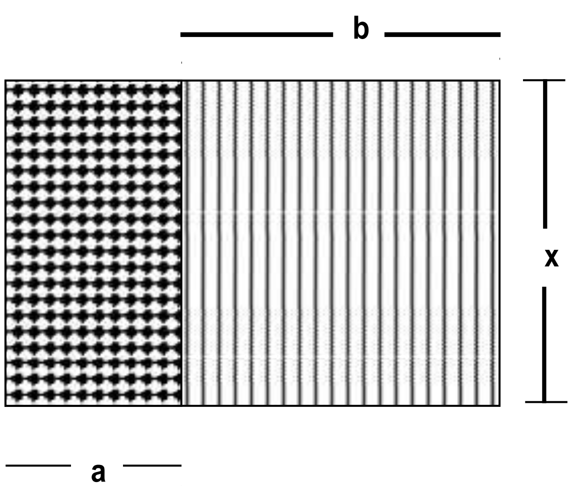
4

R:____



5

R:____



6

R:____

N°	REPRESENTA A:	PERTINENCIA					CLARIDAD				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	Trinomio de la Forma: $ax^2 + bx + c$										
2	Diferencia de Cuadrados: $x^2 - y^2$										
3	Suma de cubos										
4	Trinomio Cuadrado perfecto TCP: $x^2+2xy+y^2$										
5	Trinomio de la forma: $x^2 + bx + c$										
6	Factor común monomio										

Comentarios:

Resuelve los siguientes ejercicios

N°	EJERCICIO	SOLUCIÓN	PERTINENCIA					CLARIDAD				
			1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Simplifique:												
1	$-\{[(2X+5)-(7X+1)]-[8X-3]\}$											
2	$x^3 . x^5 =$											
3	$\frac{y^7}{y^4} =$											
Factorice:												
4	$7xy+28y=$											
5	$16z^4-25=$											
6	$m^6-12m^3n+36n=$											
7	$3r^2+8r+5=$											
8	$8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$											

Comentarios:

ANEXO 2

N°	BIBLIOGRAFÍA	EXPRESION ALGEBRAICA	TÉRMINO
1	Baldor, A. (2007). Álgebra (2 da ed.). México: Grupo Editorial Patria.	Es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.	Es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o varios símbolos, no separados entre si por el signo + o -.
2	Hemmerling, E. M. (2008). Geometría Elemental. México: Limusa.	No aborda el contenido objeto de estudio	
3	Silva, J. M. (2008). Fundamentos de Matemática (7 ta ed.). México: Limusa.	Es una combianación de números variables(símbolos) y operaciones como la suma, la resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.	Se llama términos de una expresión algebraica a las partes de esta que se encuentran separadas por un signo de más o menos.
4	Sobel, M. A. (2006). Precálculo. México: Pearson Educación.	No trabaja el contenido objeto de estudio	
5	Sullivan, M. (2006). Álgebra y Trigonometría (7 ta ed.). México: Pearson Educación.	No la definen	Los monomios que forman un polinomio se llaman términos. Primero se define término semejante y hasta después la def de término -obstáculo didáctico-

ANEXO 2

N°	TÉRMINO SEMEJANTE	MONOMIO	POLINOMIO
1	Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal, o sea cuando tienen iguales letras afectadas de iguales exponentes.	Expresión algebraica que consta de un solo término.	Expresión algebraica que consta de más de un término.
2	No aborda el contenido objeto de estudio		
3	Son aquellos términos que solo difieren en sus coeficientes numéricos.	Es la expresión algebraica de un solo término.	No lo definen, pero se utiliza el término.
4	No trabaja el contenido objeto de estudio		
5	Dos monomios con la misma variable elevada a la misma potencia se llaman términos semejantes.	Un monomio en una variable es el producto de una constante por una variable elevada a una potencia entera no negativa.	Un **polinomio** en una variable es una expresión algebraica de la forma $$\boxed{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \quad (1)}$$ donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son constantes,* llamadas **coeficientes** del polinomio, $n \geq 0$ es un entero y x es una variable. Si $a_n \neq 0$, recibe el nombre de **coeficiente principal** y n se llama **grado** del polinomio.

ANEXO 2

N°	FACTOR COMÚN	LEY DE LOS SIGNOS Y SIGNOS DE AGRUPACIÓN	DEF Y PROPIEDADES DE POTENCIACIÓN	OBSERVACIÓN
1	No se define	Se trabaja la ley de los signos. En cuanto a los de agrupación se mencionan como paréntesis ordinario, paréntesis angular(corchete), las llaves y el guión. Símbolo equivalente en jararquía al paréntesis ordinario.		En este libro las definiciones y propiedades son aceptables para el nivel de los estudiantes de primer ingreso, excepto la definición de "expresión algebraica" que refleja cierta anfibología al utilizar el vocablo símbolos algebraicos.
2	No aborda el contenido objeto de estudio			
3	Es el que está compuesto por el máximo común divisor de los coeficientes de los términos del polinomio multiplicado por las variables comunes con menor exponente.	La ley de los signos se utiliza en la resolución de ejercicio y es hasta en la página 171 que se formaliza. En cuanto a los signos de agrupación los utilizan todos y se explica la jerarquía de estos (Pág 169)	La definición presentada está en términos de la descomposición factorial de la expresión xn.	Las definiciones presentadas en este libro son pertinentes para el nivel de los estudiantes, excepto el de términos, pues no está completa ya que el estudiante podría considerar expresiones como 3x2y5 y 7 x5y2, semenjantes. Además, existen vocablo que son básicos para el estudio de los casos de factorización que no se definen:polinomio.
4	No trabaja el contenido objeto de estudio			
5	No se define. Solo se presenta y ejemplifica la propiedad distributiva	La **ley de los signo**s la presenta para el producto y el cociente. No consideran cuando ambas expresiones son positivas. Signos de agrupación solo se utiliza el paréntesis.	En la definición de potenciación al exponente le llaman potencia, este vocablo interfiere en la comprensión de la definición puesto que la potenciación tiene dos términos una base y un exponente, la palabra potencia está más asociada a la física. Por tanto, además de incorrecta es contraproducente utilizar como sinónimos estos términos.	El contenido objeto de investigación y sus requisitos son abordado en el capítulo de repaso el cual está orientado a presentar propiedades, dar ejemplos y la resolución de ejercicios.

ANEXO 2

N°	BIBLIOGRAFÍA	FACTOR COMÚN	DIFERENCIA DE CUADRADOS
1	**Baldor, A. (2007). Álgebra (2 da ed.). México: Grupo Editorial Patria.**	1. Aplicación de la propiedad distributiva	3. Verificación a través de una regla si es TPC . Luego formar dos factores binomios cuyos términos son las raíces cuadradas de los términos cuadrados perfectos, separados uno por el signo + y el otro por el signo -.
2	**Hemmerling, E. M. (2008). Geometría Elemental. México: Limusa.**	NO trabaja el contenido objeto de estudio	
	Silva, J. M. (2008). Fundamentos de Matemática (7 ta ed.). México: Limusa.	1. Aplicación de la propiedad distributiva y propiedad de simetría de la igualdad.	3. Se colocan los paréntesis, se factoriza el primer término, en un factor se coloca el signo + en el otro factor el signo menos -o viceversa- se factoriza el último término.
4	**Sobel, M. A. (2006). Precálculo. México: Pearson Educación.**	Los contenidos de álgebra están realacionados a ecuaciones y sistemas de ecuaciones. No aborda los casos de factorización.	
5	**Sullivan, M. (2006). Álgebra y Trigonometría (7 ta ed.). México: Pearson Educación.**	1. Ejercicios de factor común.	2. Una vez identificado que los términos son cuadrados perfectos aplicar la fórmula vista en Poductos Notables(PN)

ANEXO 2

N°	Trinomio cuadrado perfecto	□² + □□ + □ Trinomio:	□□² + □□ + □ Trinomio:
1	2. Verificación a través de una regla si es TPC. Luego formar dos factores binomios cuyos términos son las raíces cuadradas de los términos cuadrados perfectos, separados por el signo que lleva el término que es el doble producto de las raíces cuadradas.		5. NO define una regla general, explica a través de un ejercicio concreto la regla. Esta difiere del caso anterior porque el primer término de cada factor es el coeficiente del término que tiene la variable al cuadrado multiplicado por la raíz cuadrada de dicha variable. Estos factores se divide por el coeficiente del término que tiene la variable al cuadrado. En adelante se aplica la regla anterior. Una vez se tienen los número se extrae factor común hasta eliminar el denominador.
2	No trabaja el contenido		
	2. El procedimiento orientado consiste en comprobar si el trinomio cumple la regla del binomio al cuadrado.(pag 180)	Procedimiento factorización por agrupación.	Procedimiento factorización por agrupación.
4	Los temas de Álgebra que se trabajan son relacionados a ecuaciones y no a factorización		
5	4. Una vez identificado que se identifican que el primer y tercer términos son cuadrados perfectos y que el término medio es el doble producto de las raíces cuadradas de los términos extremos aplicar la fórmula vista en Productos Notables(PN)	5. el algoritmo que proponen es primero determinar todos los enteros cuyo producto es el término independiente. Luego calcular la suma de éstos. Si la suma es el coeficiente del término medio, estos son los términos independiente de los factores.	6. el algoritmo que proponen es el mismo al caso anterior hasta encontrar los números cuya suma es el coeficiente del término medio. En la expresión dada se descompone el término medio en dos monomio cuyo coeficientes sean los números encontrados y por agrupación y factor común terminamos de factorizar.

ANEXO 2

N°	Suma o diferencia de cubo	Polinomio de cuatro términos dos de ellos cubos perfectos.	Observación	UBICACIÓN
1	7. Se identifica el caso de producto notable asociado. Se despeja la expresión de suma o diferencia.	6. Le llaman cubo perfecto de binomio. Este nombre le corresponde al producto notable. La regla consiste en verificar si cumple con el producto notable asociado. De cumplir los términos del binomio al cubo son las raíces cúbicas de los términos que son cubos perfectos separado por el signo del segundo término.		http://saber9y11.edu.co/recursos/algebrabaldor.pdf
2	No aborda el tema en estudio			
	Expresan en potencia los términos de la expresión algebraica, para reconocer la fórmula y por simetría de la igualdad forman dos factores y colocan los	No lo trabajan	solo la identificación del caso en base a las reglas de los productos notables. Al final del capítulo abordan la factorización por agrupamiento pero	https://books.google.com.ni/books?id=TyRUwQ4pKLMC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false
4	No aborda el tema en estudio			
5	3. Una vez identificado que los términos son cubos perfectos aplicar la fórmula vista en Poductos Notables(PN)	No lo trabajan	El texto orienta que cuando se factorice un polinomio, primero hay que verificar los monomios factores comunes. Luego ver si se podría usar una de las fórmulas de productos notables estudiadas en la sección anterior. Al nombrar algunos casos de factorización mencionan el producto notable asociado.	.ni/books?id=44-YnoUhxOoC&pg=PR6&dq=sullivan+s%C3%A9ptima+edici%C3%B3n:+algebra+y+trigonometr%C3%ADa&hl=es-419&sa=X&ved=0ahUKEwip1tzOg9zRAhVs5oMKHXq-BeMQuwUIHDAA#v=onepage&q=sullivan%20s%C3%A9ptima%20edici%C3%B3n%3A%20algebra%20y%20trigonometr%C3%ADa&f=false

ANEXO 2

OBJETIVOS		CONTENIDOS	SUBCONTENIDOS
Conceptuales	Comprender que el Álgebra es una generalización de la Aritmética.	Conceptualización del Álgebra como una generalización de la Aritmética	Reseña histórica del Algebra y su importancia, Definición de Álgebra; Lenguaje común y algebraico. Expresiones algebraicas. Leyes de los exponentes. Operaciones con polinomios.
	Identificar los casos de factorización de acuerdo a sus características	Casos de factorización y sus características	Productos notables. Factorización
	Dominar los distintos métodos de solución para resolver ecuaciones lineales, cuadráticas sistemas de ecuaciones Lineales y Desigualdades lineales	Métodos de solución para resolver ecuaciones lineales, cuadráticas sistemas de ecuaciones Lineales y Desigualdades lineales.	Concepto y propiedades. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Métodos para resolver sistemas de ecuaciones y desigualdades.
Procedimentales	Aplicar los conceptos, leyes y axiomas del Álgebra en la resolución de operaciones con Polinomios.	Aplicación de los conceptos, leyes y axiomas del Álgebra en la resolución de operaciones con Polinomios.	Aplicación de la definición de Álgebra; Lenguaje común y algebraico, Expresiones algebraicas, Leyes de los exponentes, Productos notables y Factorización en la resolución de operaciones con Polinomios.
	Resolver problemas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas lineales y desigualdades.	Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas lineales y desigualdades.	Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando: Los Conceptos y propiedades de las Ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
			Los Métodos de solución de sistemas de ecuaciones y desigualdades.
Actitudinales	Valorar la importancia del Álgebra, como herramienta para la solución de problemas de su entorno social.	Valoración de la importancia del Álgebra, como herramienta para la solución de problemas de su entorno social.	

MATRIZ DE GUIAS DE ESTUDIO (ANEXO N° 3)

Documento	Objetivos	Contenidos	Observaciones
Guía de estudio 4	▪ Emplear las propiedades de exponentes para reducir expresiones algebraicas. ▪ Aplicar el algoritmo que corresponde para realizar operaciones con polinomios	Simplificación de expresiones algebraicas. Operaciones con exponentes racionales. Suma, resta, multiplicación y división de polinomios. División sintética o regla de Ruffini.	Hay correspondencia entre la CM y el TSG. El primer grupo son ejercicios que se resuelven mediante la aplicación de las propiedades de potenciación y propiedades de radicación. El segundo bloque, tiene tres problemas de aplicación cuya solución consiste en identificar la operación algebraica y resolver. Los ejercicios 4,5 y 7 de este segundo bloque se resuelve sustituyendo el valor de los polinomios y realizando las operaciones indicadas. En cuanto al 6to ejercicio la solución tiene mayor dificultad, la que radica en "adivinar" que primero tiene que efectuar el producto del primer término de la igualdad y después igualar cada término de la izquierda con su semejante de la derecha y luego simplificar, una vez obtenido dos de los resultados sustituir en una de las expresiones para encontrar el tercero. Se puede observar que los ejercicios no están didácticamente presentados de lo más sencillo a lo más complejo. Los ejercicios del bloque III se deberían presentar en el siguiente orden 4, 5, 7, 6, 8, 9, 1 2 y 3. La nota histórica debería estar en la introducción y el punto cuatro, considerando que se resuelve por propiedades de radicales, dejarlo como último ejercicio del primer bloque.
Guía de estudio 5	• Aplicar el algoritmo correspondiente para desarrollar productos notables. • Implementar el procedimiento que corresponde para factorizar expresiones algebraicas.	Productos notables. Factorización de un polinomio	El primer bloque de ejercicios Se trabaja con productos notables, pero no se abordan todos los casos estudiados –no se trabajó trinomios de la forma ni cuatrinomio de grado tres. Además, se trabaja un caso con potencia 5 y no se estudió el binomio de Newton. Esto es un obstáculo didáctico ejercitar algo que no se ha estudiado. También se presentan ejercicios que no son accesibles para el estudiante, por el grado de dificultad que estos representa: 6 y 7. En el bloque de ejercicios de los casos de factorización no se resuelven ejercicios de trinomio cuadrado perfecto ni de suma o diferencia de cubos. El ejercicio # 3 se resuelve por sustitución, y es accesible a los estudiantes. De lo anterior podemos concluir que en el tratamiento de los casos de factorización hay deficiencias en el planeamiento pues además que no se retroalimentan los prerrequisitos se descuida la secuenciación lógica y la complejidad de un caso a otro. Además, la guía borda problemas que no están accesibles a los estudiantes.
Guía de estudio 6	• Resolver ecuaciones lineales con una variable. • Resolver ecuaciones cuadráticas con una variable. • Resolver problemas de aplicación de ecuaciones lineales y cuadráticas.	Ecuaciones lineales. Ecuaciones cuadráticas. Problemas de aplicación	La guía fue estructurada en tres bloques. El primero aborda el tema de las ecuaciones lineales con ejercicios y problemas, los ejercicios dos de los ejercicios no están ubicados en orden de complejidad –e, d y c-, aspecto que fue cuidado con los problemas. El segundo bloque es una nota histórica que debía estar ubicada en la introducción de la primera clase de álgebra por el aporte que Diofanto dio a la nomenclatura del álgebra. El tercer bloque aborda el tema de ecuaciones cuadráticas. Se presentan ejercicios y problemas, en este se aprecia mejor manejo de la complejidad de los ejercicios y problemas.
• **Guía de estudio 7**	• Dominar los distintos métodos para resolver	• Sistema de ecuaciones lineales. Desigualdades	La guía está estructurada en dos bloques con ejercicios y problemas. Uno relacionado a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y el otro con desigualdades lineales. Los ejercicios de sistemas de ecuaciones están de primero en la guía. No se presentan los ejercicios de lo más sencillo a lo más

	sistemas ecuaciones lineales con dos variables y desigualdades lineales en una variable. • Resolver problemas de la vida cotidiana utilizando sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y desigualdades en una variable.	lineales con una incógnita. Aplicaciones.	complejo, por ejemplo el # 1.g es más sencillo que el 1.c; el 1.a es más complejo que el 1.d. Con relación a los problemas de aplicación estos están graduados en orden de complejidad. Con relación a las desigualdades, tanto el grupo de ejercicios como los problemas están bien graduados. NO obstante hay pocos problemas de aplicación.

MATRIZ PLANES DE CLASES (ANEXO N° 4)

Documento	Objetivos	Contenidos	Estrategias	Evaluación	Recursos	Observaciones
Plan de clase 4	▪ Explicar la importancia del álgebra como una generalización de la aritmética. ▪ Comprender los conceptos de expresión algebraica y polinomio. ▪ Comprender el algoritmo correspondiente para realizar operaciones entre polinomios.	▪ Reseña histórica del álgebra ▪ Expresiones algebraicas ▪ Operaciones algebraicas con polinomios ▪ Leyes de los radicales	▪ Ejemplos	No hay actividades para evaluar	Equipo multimedia Micrófonos	Se trabaja como prerrequisitos: expresión algebraica, monomio, polinomio, operaciones con expresiones algebraicas y las propiedades de los radicales. Se identificaron los siguientes obstáculos didácticos: En la definición de monomio presentada en la diapositiva # 8 y su aplicación en la diapositiva # 20 existe contradicción. Se define con exponente natural y se aplica con exponente racional. Se utilizan las definiciones de términos semejantes y las propiedades de potenciación y éstos no se retroalimentan. En la diapositiva #21 se contradice con la definición de las propiedades de potenciación pues en esta solo se consideran exponentes naturales y aquí se aplican las propiedades con exponentes racionales. Se utiliza el símbolo * como símbolo de multiplicación, mismo que en la actualidad este solo se acepta en el ámbito informático. Ejemplos incompletos: El ejemplo de la diapositiva #21, se escribe la potencia de 4^5, en vez de descomponer $(4^2)(4^2)(2^2)$, esto hace que el número 32 aparezca mágicamente. (Triangulación): Solo uno de los libros recomendados en la clase magistral se corresponde a la bibliografía recomendada en el programa de asignatura.
Plan de clase 5	▪ Identificar los casos de productos notables en expresiones algebraicas. ▪ Determinar productos notables por simple inspección. ▪ Factorizar expresiones	▪ Productos Notables ▪ Factorización ▪ Productos Notables Y Factorización	▪ Ejemplos ▪ Asociaciones ▪ Resumen	No hay actividades para evaluar	Equipo multimedia Micrófonos	No se trabaja la propiedad distributiva como primer caso de producto notable, se inicia con el binomio al cuadrado, se continua con la diferencia de cuadrados, posteriormente con $(x+b)(x+d) = x^2 +(b+d)x+ b.d$, le sigue el $acx^2 + (ad+bc)x + b \cdot d = (ax + b)(cx + d)$, luego con el binomio al cubo y terminan con un binomio por un trinomio . En el aprendizaje de los productos notables desde el inicio los estudiantes comienzan con una dificultad, al no garantizar el dominio de una habilidad básica –factor común- para resolver los casos cuyos resultados son trinomio. Además, no hay una secuenciación lógica, se debe de iniciar con los casos más sencillos –factor común, diferencia de cuadrados-e ir elevando el nivel de

MATRIZ PLANES DE CLASES (ANEXO N° 4)

	algebraicas de los casos más usuales.					complejidad. Este es un obstáculo didáctico. En el abordaje de los casos de factorización, para el estudiante es más fácil aprender primero el TCP que el trinomio de la forma ax^2+bx+c. Pero no trabajan la suma y diferencia de cubos ni el polinomio de grado 3.
Plan de clase 6	▪ Resolver Ecuaciones Lineales En Una Variable ▪ Resolver ecuaciones cuadráticas en una variable ▪ resolver problemas de aplicación de ecuaciones lineales y cuadráticas.	▪ Ecuaciones lineales en una variable ▪ Ecuaciones cuadráticas en una variable	▪ Ejemplos	No hay actividades para evaluar	Equipo multimedia Micrófonos	Obstáculo didáctico: Se define ecuación, ecuación polinomial y ecuación lineal. En la explicación para pasar de lenguaje común a lenguaje algebraico, utilizan el operador “o”por “y” ver diapositiva #16. Resuelven ecuaciones lineales y cuadráticas usando los casos factor común, diferencia de cuadrados y discriminante. Los problemas de aplicación están relacionados a pasar LC a LA y se resuelven aplicando factor común.
Plan de clase 7	▪ Describir el procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y desigualdades lineales con una variable ▪ Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y desigualdades lineales con una variable representando las soluciones adecuadamente.	▪ Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. ▪ Métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.	▪ Ejemplos ▪ Gráficas	No hay actividades para evaluar	Equipo multimedia Micrófonos	El obstáculo didáctico presente en esta clase fue el no explicar por qué cuando se multiplica la desigualdad por un número negativo se invierte el sentido de la misma.

ANEXO N° 5

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN-MANAGUA

Matemática General

Conferencia Magistral 4

Unidad II: Álgebra

OBJETIVOS

- Explicar la importancia del álgebra como una generalización de la aritmética.
- Comprender los conceptos de expresión algebraica y polinomio.
- Comprender el algoritmo correspondiente para realizar operaciones entre polinomios.

CONTENIDOS

- Reseña histórica del álgebra
- Expresiones algebraicas
- Operaciones algebraicas con polinomios
- Leyes de los exponentes

¿QUÉ ES EL ÁLGEBRA?

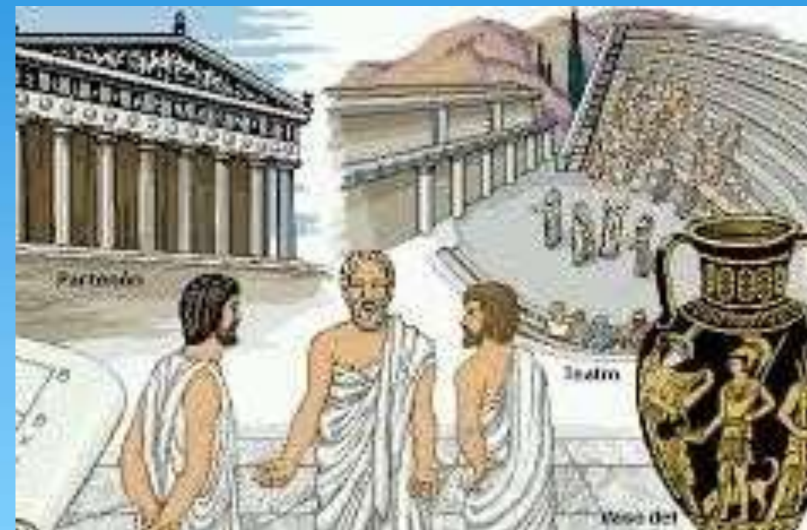
La palabra «álgebra» proviene del vocablo árabe الجبر *al-ŷabar* , que se traduce como “restauración” o “reponimiento”, “reintegración”.

Esta rama de la matemática se caracteriza por hacer implícitas las incógnitas dentro de la misma operación; ecuación algebraica.

se ocupa de estudiar las propiedades generales de las operaciones aritméticas y los números.

¿CÓMO SE ORIGINÓ EL ÁLGEBRA?

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, donde se resolvieron expresiones como: □□ = □ y □□□ + □□ = , así como ecuaciones indeterminadas como □□ + □□ = □□



En el siglo IX, Al-Khwarizmi elaboró uno de los primeros documentos de álgebra, fue una exposición sistemática de la teoría básica de ecuaciones, con ejemplos y pruebas.

¿Por qué el Álgebra es una generalización de la Aritmética?

El concepto de cantidad en Álgebra es más amplio que en aritmética, porque se representan por medio de letras.

En general se usan las últimas letras del alfabeto

□, □, □: para variables

□, , : para constantes.

VARIABLE: una letra o símbolo que representa cualquier elemento de un conjunto.

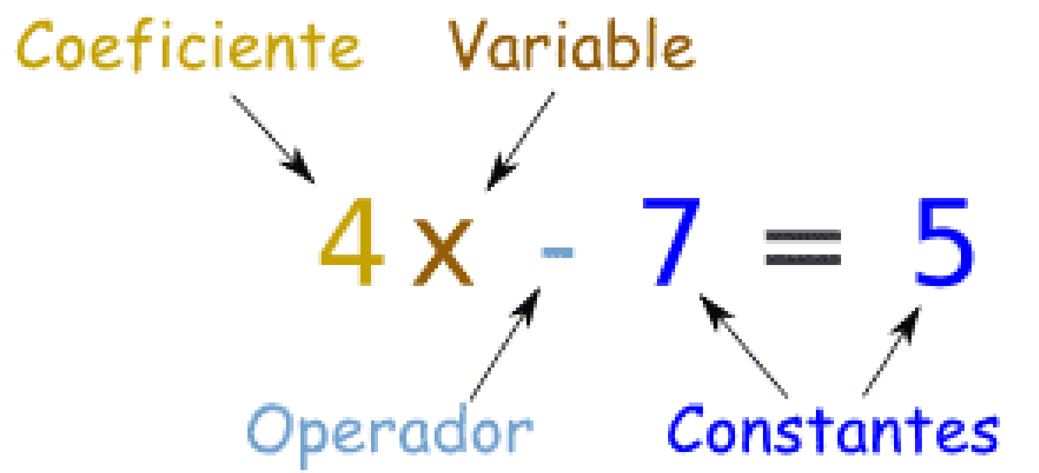
Ejemplo: x denota cualquier número real

CONSTANTE: Una letra o símbolo que representa un elemento específico de un conjunto. <u>Ejemplo:</u> 2 , e , $\sqrt{2}$

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Una expresión algebraica es una combinación de letras y números ligadas por los signos de las operaciones adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Ejemplo:



DEFINICIONES

a) Monomio en $\square$:

Es una expresión de la forma $\square\square^{\square}$, $\square \in \mathbb{R}$, $\square \in \mathbb{N}$. Ejemplos:

$$\square\square,\ -\square\square,\ \frac{\square^{\square}}{\square\square^{\square}}$$

b) Binomio:

Es la suma de dos monomios. Ejemplo:

$$\square\square - \square\square,\qquad \square\square - \square\square$$

c) Trinomio:

Es la suma de tres monomios. Ejemplo:

$$\square\square + \square\square + 4$$

POLINOMIO

Un polinomio en □ es una suma de la forma

$$\square_{\square}\square^{\square} + \square_{\square-\square}\square^{\square-\square} + \cdots \square_{\square}\square + \square_{\square}$$

Donde □ es un entero no negativo y cada coeficiente $\square_{\square}$ es un número real. Si $\square_{\square} \neq \square$ se dice que el polinomio es de grado □.

EJEMPLO	COEFICIENTE PRINCIPAL	GRADO
$\square\square^{\square} + \square\square + \square$	$\square$	$\square$
$-\square\square + \square$	$-\square$	$\square$
$\square$	$\square$	$\square$

CASOS EN QUE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA NO ES UN POLINOMIO

Si una expresión algebraica contiene divisiones o raíces que incluyen una variable $\square$, entonces no es un polinomio en x.

* Ejemplos:

a) $\frac{\square}{\square} + \square\square$

b) $\frac{\square - \square}{\square^{\square} + \square}$

c) $\square\square^{\square} + \sqrt{\square} - \square$

OPERACIONES CON POLINOMIOS
SUMA DE POLINOMIOS

En la práctica, suelen colocarse los polinomios debajo del otro, de modo que los términos semejantes queden en columna; se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

$$\begin{array}{rrrr} x^3 & +2x^2 & -5x & +7 \\ 4x^3 & -5x^2 & & +3 \\ \hline 5x^3 & -3x^2 & -5x & +10 \end{array}$$

RESTA DE POLINOMIOS

En la práctica se escribe el sustraendo con sus signos cambiados debajo del minuendo, de modo que los términos semejantes queden en columna y se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

De $11x^5 + 31x^3 - 8x^2 - 19x + 5$ **restar** $x^5 - 9x^3 + 6x^2 - 4x + 31$

$$
\begin{array}{rrrrr}
11x^5 + 31x^3 & - 8x^2 & - 19x & + 5 \\
-x^5 + 9x^3 & - 6x^2 & + 4x & - 31 \\
\hline
10x^5 + 40x^3 & -14x^2 & -15x & -26
\end{array}
$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Colocar un polinomio debajo del otro, dejando espacios para las potencias de x que tengan coeficientes 0.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2x^3 & +0x^2 & +3x & -1 \\
 & & & x^2 & +5x & -4 \\
\hline
2x^5 & & +3x^3 & -x^2 & & \\
 & 10x^4 & -8x^3 & +15x^2 & -5x & \\
 & & & & -12x & +4 \\
\hline
2x^5 & +10x^4 & -5x^3 & +14x^2 & -17x & +4
\end{array}$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

División de un polinomio entre un monomio

$$\frac{6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy}{2xy} =$$

$$= \frac{6x^2y^3}{2xy} + \frac{4x^3y^2}{2xy} - \frac{10xy}{2xy}$$

$$= 3xy^2 + 2x^2y - 5$$

División de un polinomio entre otro polinomio

Dividir $m^6+m^5-4m^4-4m+m^2-1$

Entre m^3+m^2-4m-1

Ambos polinomios NO están ordenados descendentemente con relación a m.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
m^6 & +m^5 & -4m^4 & & +m^2 & -4m & -1 & m^3+m^2-4m-1 \\
\cline{8-8}
-m^6 & -m^5 & +4m^4 & +m^3 & & & & m^3+1 \\
\cline{1-4}
 & & & m^3 & +m^2 & -4m & -1 & \\
 & & & -m^3 & -m^2 & +4m & +1 & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

División sintética O REGLA DE RUFFINI

El método de división sintética simplifica el trabajo de dividir un polinomio por el binomio. Se trabaja sólo con los coeficientes así:

Dividir $x^3 - 3x^2 + x + 5 \div x - 2$

$$x^2 - 3x^2 + x + 5$$

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & -3 & +1 & +5 & +2 \\ \cline{5-5}
 & 2 & -2 & -2 & \\ \hline
1 & -1 & -1 & 3 &
\end{array}$$

COEFICIENTES DEL POLINOMIO COCIENTE

RESIDUO

$$x^2 - x - 1$$

EXPONENTES RACIONALES

POR DEFINICIÓN $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

$a)\ \sqrt[5]{x^3} = x^{3/5}$ $b)\ \sqrt[3]{a^4} = a^{4/3}$

$c)\ m^{5/7} = \sqrt[7]{m^5}$ $d)\ 11^{1/5} = \sqrt[5]{11}$

LEYES DE LOS RADICALES

LEY	EJEMPLOS
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{50} = \sqrt{25 * 2} = \sqrt{25} * \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2(3)]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Simplificar un radical es reducirlo a su más simple expresión.

Ejemplos:

$$a)\quad \sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{64 * 5} = \sqrt[3]{64} * \sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$$

$$b)\quad \sqrt[3]{16x^3y^8z^4} = \sqrt[3]{(2^3x^3y^6z^3)(2y^2z)}$$

$$= \sqrt[3]{(2xy^2z)^3(2y^2z)} = 2xy^2z\sqrt[3]{2y^2z}$$

$$c)\quad \sqrt{3a^2b^3} * \sqrt{6a^5b} = \sqrt{3a^2b^3 * 6a^5b} = \sqrt{(3^2a^6b^4)(2a)}$$

$$= \sqrt{(3a^3b^2)^2 * (2a)} = \sqrt{(3a^3b^2)^2} * \sqrt{2a} = 3a^3b^2\sqrt{2a}$$

RACIONALIZACIÓN DEL DENOMINADOR

Racionalizar el denominador de una fracción es conseguir una expresión cuyo denominador no tenga radicales.

a) Si el denominador es un monomio:

Ejemplo:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{a}} = \frac{5\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \frac{5\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{5\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

B) si el denominador es un binomio que contiene radicales de segundo grado.

En este caso se multiplican ambos términos de la fracción por la conjugada del denominador.

Ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

SIMPLIFICACIÓN DE POTENCIAS

Simplificar:

SOLUCIÓN a)

a) $(-27)^{1/3} * (4)^{5/2}$

$$= \sqrt[3]{-27} * \sqrt{4^5}$$

$$= \sqrt[3]{(-3)^3} * \sqrt{1024}$$

$$= -3(32) = -96$$

SOLUCIÓN b)

b) $\left(\frac{2x^{2/3}}{y^{1/2}}\right)^2 \left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)$

$$= \left(\frac{4x^{4/3}}{y}\right)\left(\frac{3x^{-5/6}}{y^{1/3}}\right)$$

$$= \frac{12x^{1/2}}{y^{4/3}}$$

1. Baldor, A. (2002). *Álgebra*. Publicaciones cultural décima séptima reimpresión.

2. Swokowski , E. (2009). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. México: Cengage Learning.

3. Zill, G. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. México: McGraw Hill.

¡Muchas Gracias!

ANEXO N° 6

ENTREVISTA

Estimado(a) profesor(a), la presente entrevista tiene como fin conocer cuáles son los errores y obstáculos que los estudiantes presentan durante el aprendizaje de los casos de factorización y sus posibles causas. Asimismo, identificar conceptos nucleares para la elaboración de las Redes Asociativas de Pathfinder por parte de los estudiantes. La información será de mucha importancia para el desarrollo de esta investigación.

La entrevista se realizará en tres momentos y será filmada. Para su comodidad solo se grabará lo que usted escriba en la pizarra o en el papel.

Primer Momento

Metodología empleada en la enseñanza de la unidad de Álgebra

1) ¿En general, que estrategias utiliza durante el desarrollo de la unidad de Álgebra?

2) ¿Cómo utiliza la reseña histórica del Álgebra en la enseñanza de los contenidos de esta unidad?

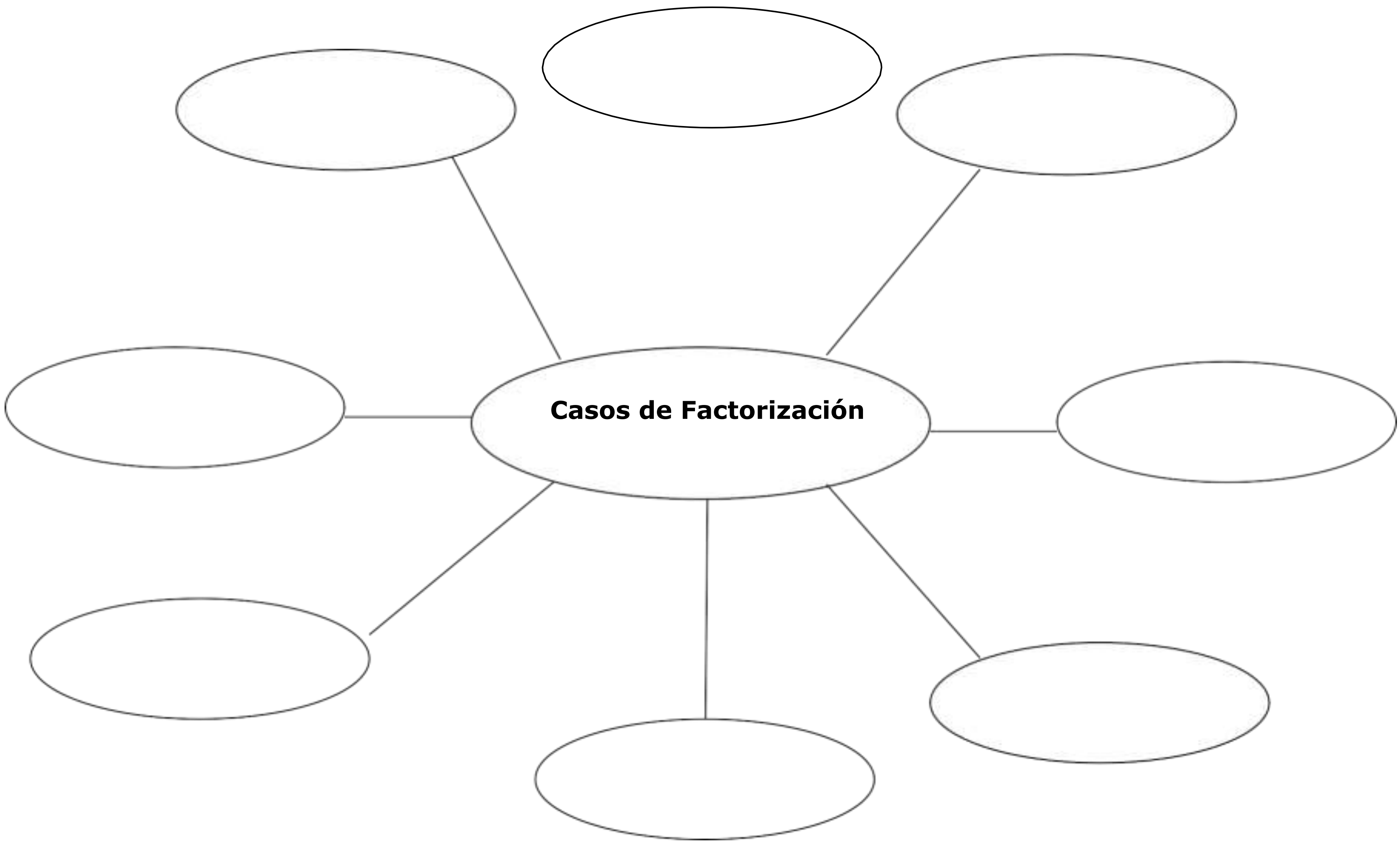
3) ¿Qué recursos didácticos utiliza durante el desarrollo de la unidad de Álgebra?

4) ¿Cómo evalúa los contenidos de la unidad de álgebra?

5) ¿Qué estrategias utiliza para lograr la mayor participación de sus estudiantes?

6) ¿Qué estrategias metodológicas ha utilizado para superar los errores cometidos durante el aprendizaje de la unidad de álgebra?

Refiera algunos conocimientos, términos, habilidades, nociones, ejemplos, aplicaciones, etc., que considere relevantes para el aprendizaje de los casos de factorización (puede agregar más elipse):



Segundo Momento

Lenguaje Algebraico

1) Si le presentamos este ejercicio a un alumno:

¿La siguiente proposición es verdadera o falsa? Justifica tu respuesta.
«Si sumo tres números naturales consecutivos y divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número».

a) ¿Cuál es el razonamiento que necesita hacer el estudiante para justificar la respuesta?

b) ¿Qué errores puede cometer el estudiante a la hora de resolver ejercicios de este tipo?

c) ¿Qué obstáculos podría enfrentar el estudiante a la hora de resolver ejercicios de este tipo?

2) Dada la siguiente situación a un estudiante:

Observa el siguiente comportamiento:

$n=1 \Rightarrow n^2 = 0^2 + 0 + 1 = 1$

$n=2 \Rightarrow n^2 = 1^2 + 1 + 2 = 4$

$n=3 \Rightarrow n^2 = 2^2 + 2 + 3 = 9$

$n=4 \Rightarrow n^2 = 3^2 + 3 + 4 = 16$

$n=5 \Rightarrow n^2 = 4^2 + 4 + 5 = 25$

- **Escribe una expresión algebraica que represente las situaciones anteriores.**
- **Escribe en lenguaje común la expresión anterior**

a) ¿Cuáles son los posibles errores que pueden cometer los estudiantes a la hora de resolver este ejercicio?

b) ¿Cuáles son los obstáculos que pueden enfrentar los estudiantes a la hora de resolver este ejercicio?

3) Si le presentamos la siguiente situación al estudiante:

Encuentra el valor de A, B y C. Considerando que cada letra tiene un valor distinto:

		A	B	C
+		A	B	C
		A	B	C
	2	A	C	C

.a) ¿Puede el estudiante resolver esta tarea usando algún procedimiento algebraico?

b) ¿Qué nociones algebraicas se usaría?

c) ¿Cuál es la resolución?

d) ¿Qué dificultades puede tener el estudiante al resolver ejercicios de este tipo?

e) ¿Qué tipo de respuesta y justificación piensas que podría dar un alumno

Tercera Parte

Factorización

Identifique los prerrequisitos, los errores y obstáculos que enfrentan los estudiantes al factorizar los siguientes casos:

N°	CASO	CONOCIMIENTOS NECESARIOS PARA APRENDER ESTE CASO	ERRORES	OBSTÁCULOS
1	Factor común por agrupación: $4x+2x-3y-6y$			
2	Diferencia de Cuadrados: $16x^4 - 25y^4$			
3	Trinomio Cuadrado perfecto TCP: $x^2+12xy+36y^2$			
4	Trinomio de la forma: $x^2 + 5x + 6$			
5	Trinomio de la Forma: $2x^2 + 7x + 5$			
6	Cubo Perfecto de un Binomio: $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$			
7	Suma o Diferencia de Cubos: $27s^3 \pm 64t^3$			

PROCESAMIENTO DE LA ENREVISTA REALIZADA A LOS DIRECTORES DE DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DE LA UNAN-MANAGUA

PRIMER MOMENTO (ANEXO N° 7)

DIRECTOR	Estrategias para la enseñanza del Álgebra	Uso de la reseña histórica	Recursos Didácticos	Estrategias de Evaluación	Estrategia de participación	Estrategia Para superar el error(operaciones algebraicas)	Estrategia Para superar el error(casos de factorización)
Ciencias Económica	Explicar los conceptos como proceso generalizador de la aritmética. Resolver ejercicios con valor numérico y de operaciones con signos de agrupación. Diferenciar los casos de factorización por sus características.	Para destacar la introducción de las letras que representan números lo que posibilita la resolución de ecuaciones de diferentes grados. Para explicar el proceso de generalización	Básicamente la bibliografía, data show, guías de clases prácticas, pizarra.	Ejercicios y problemas para resolver en clase y en casa. Además, pruebas escritas.	Incentivando a quien encuentre primero la respuesta, trabajo en grupos de tres. Tareas en casa	Provocar el conflicto en la mente del alumno para buscar estrategias de solución. Señalar el error en cada momento para que ellos no lo comentan	Provocar el conflicto en la mente del alumno para buscar estrategias de solución.
Educación	Lectura del material de estudio. Aplicación del método socrático, pasar al estudiante a la pizarra, exploración de los conocimientos previos.	Para utilizar algunos métodos antiguos pero de fácil aplicación	Trato hacer visualizable los conceptos		Formar grupos con estudiantes de mayores capacidades con otros con capacidades en potencias. Propiciar clima de atención y respeto.	Corregir el error contrastándolo con la teoría estudiada	Corregir el error contrastándolo con la teoría estudiada
Ciencias e Ingeniería	Conferencia:Exposición teórica y ejemplos, resolución de ejercicios en grupo	Para introducir el concepto o propiedades	Pizarra marcadores, textos recomendado, guías de ejercicios por cada clase teórica	Participación de los estudiantes, elaboración de trabajos en grupos y pruebas cortas	Preguntas cortas, y través del aprendizaje colaborativo.	Resolución de ejercicios	Uso de esquemas gráficos para detectar el error en cada caso.
FAREM-CHONTALES	Destacar la importancia del estudio del álgebra, contextualizar los contenidos con otros temas y el cálculo						
FAREM-ESTELÍ	Lluvia de ideas, Aprendizaje basado en la solución de problemas, trabajo colaborativo, Exposiciones, Investigaciones, Ligas del conocimiento,	Contextualizando en comparación al tiempo que surgió el álgebra, relacionando esta con situaciones del entorno,	Juegos, data, marcadores, Documentos de apoyo, Hoja con batería de ejercicio, guía de auto aprendizaje, puzzle, competencia entre equipo	Participación en clase, pruebas escritas, trabajo en tríos, Heteroevaluación, evaluación diagnostica, escala de actitudes observación	Trabajo en tríos y/o parejas, tareas individuales, preguntas dirigidas, participación voluntaria, reconocimientos públicos ante el	Análisis de los errores, induciéndole a que ellos lo identifiquen Incrementar la ejercitación con el debido acompañamiento de padrinos	Análisis de los errores, induciéndole a que ellos lo identifiquen Incrementar la ejercitación con el debido acompañamiento de padrinos

DIRECTOR	Estrategias para la enseñanza del Álgebra	Uso de la reseña histórica	Recursos Didácticos	Estrategias de Evaluación	Estrategia de participación	Estrategia Para superar el error(operaciones algebraicas)	Estrategia Para superar el error(casos de factorización)
	representaciones geométricas, observación, lectura comprensiva, crítica y reflexiva				cumplimiento de tareas, apadrinamientos,	Aclaraciones directas antes, durante y después de las sesiones de clases a las consultas que ellos/as realizan Recordar con mayor detenimiento leyes de los signos Recordar propiedades de la potenciación	Aclaraciones directas antes, durante y después de las sesiones de clases a las consultas que ellos/as realizan Reforzar el estudio de los productos notables Elaborar esquema con ayuda de ellos con las características de cada caso.

PROCESAMIENTO DE LA ENREVISTA REALIZADA A LOS DIRECTORES DE DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DE LA UNAN-MANAGUA

PRIMER MOMENTO: CONCEPTOS NUCLEARES (ANEXO N° 8)

DIRECTOR	CONCEPTOS Y DEFINICIONES	TEOREMAS Y PROPIEDADES	ALGORITMOS	CONTEXTO
CIENCIAS ECONÓMICA	Máximo Común Divisor, términos semejantes.	Ley de los signos, propiedad conmutativa, ley distributiva, asociativa	Máximo común divisor, signos de agrupación, extracción de raíces	Ejercicios variados
EDUCACIÓN	Concepto de polinomio, variable, grado de la variable, Máximo Común Divisor, cuadrado perfecto, cubo perfecto.	Ley de los exponentes, ley de los signos, ley conmutativa de la multiplicación, ley distributiva.	Descomposición prima, operaciones aritméticas, Máximo Común Divisor, productos notables, uso de los signos de agrupación, Extraer raíces cuadradas y cúbicas, división de un monomio por otro. División de polinomios	Lenguaje Algebraico
CIENCIAS E INGENIERÍA	Factor primo, conceptos geométricos básicos: cuadro, rectángulo, área del rectángulo, área del cuadrado, volumen de un prisma.	Propiedades de los exponentes, propiedades de campo en R, ley de los signos	Operaciones aritméticas, signos de agrupación, productos notables	Geométrico
FAREM-CHONTALES	Factor común, Máximo Común Divisor, signos de agrupación.	Ley distributiva, ley de los signos	Reducción de términos semejantes, uso de los signos de agrupación, cálculo del Máximo Común Divisor, reglas de los casos de factorización, Operaciones aritméticas,	Lenguaje Algebraico
FAREM-ESTELÍ	Términos semejantes, Grado de un término, Máximo Común Divisor. cuadrado perfecto y Radicales	Ley de los signos, Leyes de potenciación y radicales, Propiedad distributiva	Productos notables, regla de cada caso de factorización, División sintética, Máximo Común Divisor, Operaciones básicas con enteros y fracciones, Signos de agrupación, descomponer en factores primos.	Lenguaje Algebraico

PROCESAMIENTO DE LA ENREVISTA REALIZADA A LOS DIRECTORES DE DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DE LA UNAN-MANAGUA

SEGUNDO MOMENTO (ANEXO N° 9)

DIRECTOR	¿La siguiente proposición es verdadera o falsa? Justifica tu respuesta. «Si sumo tres números naturales consecutivos y divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número»	Observa el siguiente comportamiento: $n=1 \Rightarrow n^2 = 0^2 + 0 + 1 = 1$ $n=2 \Rightarrow n^2 = 1^2 + 1 + 2 = 4$ $n=3 \Rightarrow n^2 = 2^2 + 2 + 3 = 9$ $n=4 \Rightarrow n^2 = 3^2 + 3 + 4 = 16$ $n=5 \Rightarrow n^2 = 4^2 + 4 + 5 = 25$	Encuentra el valor de A, B y C. Considerando que cada letra tiene un valor distinto: $\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & A & B & C \\ & A & B & C \\ \hline 2 & A & C & C \end{array}$
Ciencias Económica	ERRORES: Solo considere lo números naturales no consecutivos, no pueda simbolizar los números naturales consecutivos, no se maneje el lenguaje simbólico. OBSTACULOS Que no sepa distinguir los sistemas de numeración	OBSTÁCULO: Que no pueda entender la simbología, que no comprenda la secuencia. ERRORES: Al no entender la simbología no podrá leer correctamente y esto le impedirá encontrar la expresión general	El ejercicio puede entenderse de varias maneras. Hay que dar las orientaciones precisas. Los alumnos no están preparados para resolver este tipo de ejercicio.
Educación	ERRORES: Al expresar algebraicamente los tres números consecutivos, al resolver la ecuación. Trasladar de lenguaje común a lenguaje algebraico. OBSTÁCULOS: Desconocimiento de la simbolización de números consecutivos, no reconoce que el planteamiento del problema es una ecuación lineal en una variable y	ERRORES: Reducir la expresión a un número, esto le conduce a perder el patrón. OBSTÁCULO: Desconocimiento del símbolo de implicación, representar el patrón de forma algebraica	Con los estudiantes de primer ingreso no se trabaja este tipo de ejercicio
Ciencias e Ingeniería	ERRORES: Resolver el problema con números naturales particulares, obviar el denominador. OBSTÁCULO: Falta de comprensión lectora o el desconocimiento de alguno de los conceptos involucrados.	ERRORES: Usar incorrectamente los signos de agrupación y la notación del cuadrado de un número. OBTÁCULO: Falta de dominio del concepto de sucesión	La mejor respuesta que podrían dar nuestros estudiantes a este tipo de ejercicio es que no hay solución o que todas las variables son cero.
FAREM-CHONTALES	ERRORES: Tratar de resolver el ejercicio por tanteo. Simbolizar con la misma letra los tres números consecutivos. OBSTÁCULOS: La mala transición de la aritmética al álgebra.	ERRORES: No reconocer que en la expresión están involucrados el concepto de sucesor y antecesor. OBSTÁCULO: No dominan el concepto de sucesor y antecesor. No practicar este tipo de ejercicio con los estudiantes.	Este tipo de ejercicio no se trabaja en la universidad aunque creo que se deberían de trabajar. El estudiante lo resolvería por ensayo y error.
FAREM-ESTELÍ	ERRORES: No escribir correctamente la expresión algebraica, No aplicar correctamente la potenciación Problemas de redacción al escribir en lenguaje común la expresión dada, No logra visualizar la secuencia de los números.	ERRORES: No escribir correctamente la expresión algebraica, No aplicar correctamente la potenciación. Problemas de redacción al escribir en lenguaje común la expresión dada	Los estudiantes no estar acostumbrado a resolver este tipo de ejercicio y puede perder interés

DIRECTOR	**¿La siguiente proposición es verdadera o falsa? Justifica tu respuesta.** **«Si sumo tres números naturales consecutivos y divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número»**	**Observa el siguiente comportamiento:** $n=1 \Rightarrow n^2 = 0^2 + 0 + 1 = 1$ $n=2 \Rightarrow n^2 = 1^2 + 1 + 2 = 4$ $n=3 \Rightarrow n^2 = 2^2 + 2 + 3 = 9$ $n=4 \Rightarrow n^2 = 3^2 + 3 + 4 = 16$ $n=5 \Rightarrow n^2 = 4^2 + 4 + 5 = 25$	**Encuentra el valor de A, B y C.** **Considerando que cada letra tiene un valor distinto:** $\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & A & B & C \\ & A & B & C \\ \hline 2 & A & C & C \end{array}$
	OBSTÁCULOS: La falta de lectura comprensiva, no poder traducir al lenguaje algebraico.	No logra visualizar la secuencia de los números OBSTÁCULOS: Falta de comprensión del enunciado, No haber abordado nunca una situación similar y por lo tanto no tienen idea de cómo hacerlo Revelarse y preguntarse porque tanta vuelta y no escribir el numero directamente al cuadrado no puede razonar	

PROCESAMIENTO DE LA ENREVISTA REALIZADA A LOS DIRECTORES DE DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DE LA UNAN-MANAGUA

TERCER MOMENTO (ANEXO N° 10)

DIRECTOR	$4x+2x-3y-6y$	$16x^4 – 25y^4$	$x^2+12xy+36y^2$	$x^2 + 5x + 6$	$2x^2 + 7x + 5$	$8a^3 + 12 a^2 b + 6ab^2 + b^3$	$27s^3 \pm 64t^3$
Ciencias Económica	ERRORES: No respetan el signo de agrupación, principalmente cuando lo antecede un signo menos. OBSTÁCULOS: No reconocer la importancia de los signos de agrupación en la solución de expresiones algebraicas	ERRORES: De cálculo al sacar las raíces cuadradas a los términos. O bien solo sacan raíces a los coeficientes o a las variables OBSTÁCULOS: Procedimiento para extraer raíz cuadrada a cantidades grandes.	ERROR: No verificar el cumplimiento de la regla. OBSTÁCULO: no maneja la regla.	ERRORES: No encuentran los números que satisfacen la regla, no aplican la regla que indica cómo encontrar los signos que separan los términos de los factores. OBSTÁCULOS: Falta de habilidad en descomponer en factores primos el término independiente	ERRORES: No encuentran los números que satisfacen la regla, no aplican la regla que indica cómo encontrar los signos que separan los términos de los factores. OBSTÁCULOS: Falta de habilidad en descomponer el producto del coeficiente de la variable que está al cuadrado por el término independiente en sus factores primos.	ERRORES. Aplican la regla de la suma o diferencia de cubos. OBSTÁCULO: No manejan la regla	ERRORES. Aplican la regla del producto del binomio al cubo. En la construcción del segundo factor desconocen la relación de los términos del primer factor con los términos del segundo factor. OBSTÁCULO: No manejan la regla
Educación	ERRORES: Aplicación incorrecta de la ley de los signos, omisión de los símbolos de las operaciones, cálculo equivocado del MCD. OBSTÁCULOS: Identificación de la expresión común que hará el papel de factor común.	ERRORES: NO ubican correctamente los términos en los factores, específicamente el de la diferencia. OBSTÁCULO: No se saben la regla	ERRORES: Extracción incorrecta de la raíz cuadrada. Aplicación incorrecta de la ley de los exponentes. OBSTÁCULO: Procedimiento para extraer raíz cuadrada a cantidades grandes.	ERRORES: Cálculo equivocado de los factores de un número, o del producto de dos polinomios. OBSTÁCULO: Reconocimiento del modelo. Cuando la variable x está representada por un binomio.	ERRORES: Cálculo equivocado de los factores de un número, o del producto de dos polinomios. OBSTÁCULO: No Reconocen el caso.	ERRORES: Al extraer la raíz cúbica, al ordenar la expresión algebraica, aplicación incorrecta de la regla. OBSTÁCULO: Falta de dominio de la regla de este caso.	ERRORES: Al extraer la raíz cúbica, al ordenar la expresión algebraica, aplicación incorrecta de la regla. Fallan en los cálculos a la hora de extraer raíces cúbicas. OBSTÁCULO: Falta de dominio de la regla de este caso.

DIRECTOR	4x+2x-3y-6y	$16x^4 - 25y^4$	$x^2+12xy+36y^2$	$x^2 + 5x + 6$	$2x^2 + 7x + 5$	$8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$	$27s^3 \pm 64t^3$
Ciencias e Ingeniería	ERRORES: Aplicación incorrecta de la ley de los signos y de los signos de agrupación cuando van antecedidos por un signo menos. OBSTÁCULOS: No se saben el procedimiento para calcular el MCD	ERROR: No identifican los términos de los factores OBSTÁCULO: Lo expresan como binomio al cuadrado porque no se saben la regla	ERRORES: Al comprobar la regla para el tercer término. Aplicación incorrecta de la ley de los exponentes. OBSTÁCULO: Falta de dominio del caso TCP.	ERRORES: No encuentran los números que satisfacen la regla, no aplican la regla que indica cómo encontrar los signos que separan los términos de los factores. No colocan los números encontrados en el factor que corresponde. OBSTÁCULOS: Descomposición factorial, ley de los signos	ERRORES: No encuentran los números que satisfacen la regla, no aplican la regla que indica cómo encontrar los signos que separan los términos de los factores. OBSTÁCULOS: Descomposición factorial, ley de los signos	ERRORES: No identifican el caso OBSTÁCULO: Falta de comprensión de la regla, en cuanto a la relación de los términos al desarrollar del binomio.	ERRORES: al aplicar la regla de la diferencia de cuadrados
FAREM-CHONTALES	ERRORES: Mal uso de la ley de los signos y los signos de agrupación. Aplicación del procedimiento para calcular el MCD OBSTÁCULO: No manejar los prerrequisitos	ERROR: No descomponen los factores por segunda vez OBSTÁCULO: Habilidad de aplicar los radicales.	ERRORES: NO identificar el TCP, Descomposición de números. Mala aplicación de la ley de los signos. Solo busca que se cumpla uno de los términos el segundo o el tercer término. OBSTÁCULOS: No manejar el caso, no manejar estrategias para encontrar los números que satisfagan la regla.	ERRORES: NO identificar el TCP, Descomposición de números. Mala aplicación de la ley de los signos. Solo busca que se cumpla uno de los términos el segundo o el tercer término. OBSTÁCULOS: No manejar el caso, no manejar estrategias para encontrar los números que satisfacen la regla.	ERRORES: Descomposición de números "Los obstáculos prácticamente son los mismos para todos los casos"	ERRORES: aplicación incorrecta de la regla casi siempre la de suma o diferencia de cubos. .	ERRORES: aplicación incorrecta de la regla. Errores de cálculo al extraer las raíces cúbicas. En la construcción del segundo factor, aplican la regla del TPC .

DIRECTOR	$4x+2x-3y-6y$	$16x^4 – 25y^4$	$x^2+12xy+36y^2$	$x^2 + 5x + 6$	$2x^2 + 7x + 5$	$8a^3 + 12 a^2 b + 6ab^2 + b^3$	$27s^3 \underline{+} 64t^3$
FAREM-ESTELÍ	ERRORES: Cuando el signo de agrupación está precedido por el menos No reconocer el mcd OBSTÁCULOS: No visualizar correctamente los que deben agruparse Falta de identificación del caso	ERRORES: Al extraer la raíz cuadrada de la parte literal No expresar el producto de la suma por la diferencia. OBSTÁCULOS: Falta de identificación del caso	ERRORES: No comprobar que el segundo término sea el doble del producto de las raíces Extraer raíz a un número negativo, en el caso de que el tercer término sea una raíz exacta pero esta precedido del – Al calcular las raíces del primer y tercer término. OBSTÁCULO: Falta de identificación del caso Cuando aparecen números racionales Cuando no lo dan en el orden que siempre aparecen Cuando en los términos van compuestos de binomios	ERRORES: Al aplicar la regla. Buscar los dos números que multiplicados den el tercero y sumado el del centro, tienden a pensar que multiplicados del centro y sumado el último. OBSTÁCULO: Falta de identificación del caso Cuando el tercer número es muy grande en su valor Que no estén ordenados.	ERRORES: En el proceso de convertirlo a un trinomio de la forma x^2+bx+c OBSTÁCULO: Falta de identificación del caso	ERRORES: Confunden este caso con la suma o diferencia de cubos. No aplican correctamente el algoritmo OBSTÁCULOS: No identifican el caso.	ERRORES: Confunden este caso con la suma o diferencia cuadrados. No aplican correctamente el algoritmo OBSTÁCULOS: No identifican el caso.
PRERREQUISITOS	Ley de los signos, Signos de agrupación, reducción de términos, MCD	Raíz cuadrada, La regla de factorización. Producto notable	Ley de los signos, la regla de factorización, Producto notable	La regla de factorización. Producto notable	La regla de factorización. Producto notable	La regla de factorización	. Producto notable. La regla de factorización

ANEXO N° 11: ESTRUCTURA COGNITIVA DE LOS CONCEPTOS RERRQUIISTOS

Estudiante	PRERREQUISITOS-CONCEPTOS					
	Término semejante	Monomio	Factor Común	Polinomio	Expresión algebraica	Término
M-A1	c	d	f	e	a	c
M-A2	c	b	f	d	a	e
M-A3	c	f	b	e	c	a
M-A4	c	f	e	d	a	b
M-A5	c	d	f	e	a	b
M-A6	c	b	e	d	a	f
M-A7	c	d	f	b	a	e
M-A8	b	c	c	c	d	a
M-A9	c	b	f	d	e	a
M-A10	c	d	b	e	a	f
M-A11	c	d	f	b	e	a
M-A12	b	d	f	e	a	c
M-A13	x	d	c	x	a	f
M-A14	c	d	f	e	a	b
M-A15	f	b	f	d	x	a
M-A16	c	d	f	e	a	b
M-A17	c	d	f	e	a	b
M-A18	f	d	c	e	a	b
M-A19	c	d	f	e	a	b
M-A20	c	d	b	e	a	f
M-A21	c	d	f	e	a	b
M-A22	c	b	f	e	a	d
M-A23	c	b	f	e	a	d
M-A24	c	d	f	e	a	d
M-A25	c	b	f	d	a	e
M-A26	c	d	f	e	a	b
M-A27	c	d	b	e	a	f
M-A28	c	d	f	e	a	b
M-A29	c	b	f	d	a	e
M-A30	c	d	f	e	a	b
	25	19	21	19	25	11
	80.65	61.29	67.74	61.29	80.65	35.48
	19.35	38.71	32.26	38.71	19.35	64.52

ANEXO N° 12: ESTRUCTURA COGNITIVA REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA DE LOS CASOS DE FACTORIZACIÓN

Estudiante	Trinomio $(x+a)(x+b)$	Trinomio de la forma $(ax+b)(cx+d)$	Suma o diferencia de cubos $(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)$	Factor común	TPC	diferencia de cuadrado	Polinomio de grado 3 $(x\pm y)^3$
M-A1	v	v	$x^3\pm3x^2y+3xy^2\pm y^3$	v	v		Escribe suma o diferencia de cubos
M-A2	TPC	v	$x^2+x(a+b)+ab$	v	Diferencia de cuadrados	$x^3\pm3x^2y+3xy^2\pm y^3$	Escribe suma o diferencia de cubos
M-A3	Trinomio de la forma	$x^3\pm3x^2y+3xy^2\pm y^3$	$ax+ay$	$x^2+x(a+b)+ab$	Diferencia de cuadrados	TPC	Escribe suma o diferencia de cubos
M-A4	v	v	$x^3\pm3x^2y+3xy^2\pm y^3$	v	v	v	Escribe suma o diferencia de cubos
M-A5	v	v	v	v	v	v	v
M-A6	v	v	v	v	v	v	v
M-A7	v	v	v	v	v	v	v
M-A8	v	v	v	v	v	v	v
M-A9	Diferencia de cuadrados	v	TPC	v	$x^2+x(a+b)+ab$	$x^3\pm3x^2y+3xy^2\pm y^3$	Escribe suma o diferencia de cubos
M-A10	TPC	v	$x^3\pm3x^2y+3xy^2\pm y^3$	v	Diferencia de cuadrados	$x^2+x(a+b)+ab$	Escribe suma o diferencia de cubos
M-A11	v	v	v	v	v	v	v
M-A12	v	Escribe suma o diferencia de cubos	x	v	v	v	v
M-A13	v	v	v	v	v	v	v
M-A14	v	v	$x^3\pm3x^2y+3xy^2\pm y^3$	v	v	v	Escribe suma o diferencia de cubos
M-A15	v	v	v	v	v	v	v
M-A16	v	v	Trinomio cuadrado perfecto	suma o diferencia de cubos	x	v	v

M-A17	v	v	v	v	Diferencia de cuadrados	TPC	v
M-A18	v	v	v	v	v	v	v
M-A19	v	v	Diferencia de cuadrados	v	$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	TPC	Escribe suma o diferencia de cubos
M-A20	v	v	v	v	v	v	v
M-A21	v	v	v	v	v	v	v
M-22	$ax + ay$	v	$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	$x^2 + x(a+b) + ab$	Diferencia de cuadrados	TCP	Escribe suma o diferencia de cubos
M-A23	v	v	$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	v	Diferencia de cuadrados	TPC	Escribe suma o diferencia de cubos
M-A24	v	v	v	v	Diferencia de cuadrados	TPC	v
M-A25	v	$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	Trinomio de la forma	v	Diferencia de cuadrados	TPC	Escribe suma o diferencia de cubos
M-A26	v	v	$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	v	v	v	Escribe suma o diferencia de cubos
M-A27	v	v	v	v	v	v	v
M-A28	v	v	v	v	v	v	v
M-A29	v	v	v	v	v	v	v
M-A30	v	v	v	v	Diferencia de cuadrados	TPC	v
	25	27	16	27	18	18	18
	0	0	1	0	1	0	0

ANEXO N° 13: ESTRUCTURA COGNITIVA REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

Estudiante	Aplicación Geométrica de los casos de factorización					
	Diferencia de Cuadrado	Suma de Cubos	TCP	Trinomio □^{2} + □□ + □	Factor Común	Trinomio de la Forma □□^{2} + □□ + □
M-A1	b	a	c	e	g	h
M-A2	a	g	b	h	d	c
M-A3	a	d	g	h	c	j
M-A4	b	e	g	g	g	h
M-A5	b	j	g	g	g	h
M-A6	c	d	x	g	x	h
M-A7	i	j	g	g	g	h
M-A8	a	h	c	f	g	h
M-A9	x	x	x	g	g	h
M-A10	j	b	f	a	g	h
M-A11	d	e	g	f	i	h
M-A12	b	c	f	g	a	h
M-A13	b	e	a	g	i	h
M-A14	b	f	g	g	a	c
M-A15	d	e	g	x	i	h
M-A16	b	a	c	g	j	h
M-A17	c	b	a	j	g	h
M-A18	c	d	x	g	x	h
M-A19	b	j	d	c	g	h
M-A20	h	c	a	g	f	i
M-A21	d	e	a	g	j	h
M-22	b	g	h	e	i	a
M-A23	c	d	a	g	e	h
M-A24	b	g	h	d	c	i
M-A25	a	j	e	h	g	b
M-A26	b	c	d	g	g	h
M-A27	c	e	g	g	h	h
M-A28	c	d	g	x	a	h
M-A29	a	e	g	h	g	h
M-A30	a	d	f	g	h	i
	11	**4**	**3**	**16**	**3**	**22**

ANEXO N° 14: APLICACIÓN DE LAS REGLAS DE FACTORIZACIÓN

Estudiante	Ejercicios/Factorización					
	$6x + 3x + 3y - 6y=$	$16\square^{4} - 25=$	$m^6 - 12m^3n + 36n^2 =$	$3r^2 + 8r + 5 =$		$27s^3 - 64t^3=$
M-A1	x	Solo escribe el primer factor (el de la diferencia)	extrajo las raíces a los términos cuadrados perfectos escribio dos pares de paréntesis pero los términos de los factores en vez de separarlos con los signos + y - utilizó el producto.	escribe dos factores uno de ellos es la suma de los números que resuelven	x	Encuentra los coeficientes de los términos del primer factor.
M-A2	x	x	x	x	x	x
M-A3	x	Reseuelve como ecuación	NO visualiza que tiene dos factores iguales y que puede seguir factorizando	Solo le faltó dividir entre 3	x	Solo encuentra los términos del primer factor
M-A4	x	x	x	x	x	x

M-A5	suma los ´terminos semejantes pero no saca factor común. Error de cálculo 3+6=11	Solo escribe el primer factor (el de la diferencia)	NO visualiza que tiene dos factores iguales y que puede seguir factorizando	Solo le faltó dividir entre 3	x	le faltó elevar al cuadrado la variable del segundo término del primer factor
M-A6	suma los terminos semejantes pero no saca factor común.	Solo escribe el primer factor (el de la diferencia)	solo extrae raíces cuadrada a los términos que son cuadrados perfectos	Identifica los números pero no los coloca correctamente en el factor que le corresponde	x	Al segundo término del segundo factor le hizo falta la variable t
M-A7	Factorizó la expresión pero separó los términos con el esigno +	Solo extrea las raíces cuadradas	Solo sacó factor común del segundo y tercer término	solo escribió 3 r al acubo +5	x	extrajo raíz cúbica a cada término y luego escribió tres factores con estos térmios los que significa que la suma de cubos es el binomio al cubo.
M-A8	v	Lo resolvió pero cambió la variable por X.	Factorizó pero a los facatores no les colocó la variable n. Además, no multiplicó los signos para encontrar el signo del segundo factor.	v	v	extrajo raíz cúbica a cada término pero no encontró los dos últimos términos del segundo factor.
M-A9	x	escribió los factores de la suma por la diferencia, pero no extraajo raíz cuadrada al coeficiente del primer término.	Intenta sacar factor común a todos los términos. Cosa que no es posible en este ejercicio.	Encontró los número, pero no los supo ubicar en los paréntesis. Además sumo los números y al final la respuesta fue 8r. Lo resuelve como ecuación.	Intenta sacar factor común a todos los términos. Cosa que no es posible en este ejercicio.	extrajo raíz cúbica a cada término pero no encontró los dos últimos términos del segundo factor.
M-A10	x	x	x	x	x	x

M-A11	Saca para todos los términos factor común 3x	v	Intenta sacar factor común a todos los términos. Cosa que no es posible en este ejercicio.	Identifica los números pero no los coloca correctamente en el factor que le corresponde	v	v
M-A12	Sumo los coefcientes de los términos semejantes y multiplicó las variables	solo extrajo las raices a los términos. Error de la raíz cuadrada de 16 puso 2.	Intenta sacar factor común a todos los términos. Cosa que no es posible en este ejercicio.	Identifica los números pero no los coloca correctamente en el factor que le corresponde	Intenta sacar factor común a todos los términos. Cosa que no es posible en este ejercicio.	Escribe la expresión como un binomio al cubo e intenta desarrollarlo
M-A13	A los términos en x suma los coeficientes y multiplica la variable. A los términos en y los resta y le quita la variable.	solo extrajo las raices a los términos.	x	v	x	Solo encuentra los términos del primer factor. Error al extraer la raíz cúbica del segundo término escribe 2 en vez de 4
M-A14	v	x	x	x	x	x
M-A15	A los térmios positivo sumo los coeficientes y los puso como exponentes y a los términos negativos, restó los coeficientes y los puso como expoente. Errores de cálculo	Sacó factor común 8. Procedimiento incorrecto	Sacó dos factores, no extrajo raíz cuadrada al primer término, no multiplicó los signos para sacar el signo del segundo factor, no colocó la varible del segundo término cuadrado perfecto	v	v	v

M-A16	No sumó los coeficientes y tuvo error en el signo que separa a los términos	extrajo las raices, con estas escribió un binomio al cuadrado.	NO visualiza que tiene dos factores iguales y que puede seguir factorizando	Identifica los números pero no los coloca correctamente en el factor que le corresponde	Intenta sacar factor común a todos los términos. Cosa que no es posible en este ejercicio.	Extrae raíz cúbica solo al primer término y aplica la regla para el segundo factor correctamente
M-A17	Saca para todos los términos factor común x	Saca raíz cuadrada a ambos términos y forma el primer factor y en el segundo aplicar la regla para la diferencia de cubos	Prueba que es un TCP pero no indentifica los factores	Desconpone en factores cada término de la expresión	Desconpone en factores cada término de la expresión	Factoriza pero al el primer término de cada factor comete error, en el primero escribe el exponente 3 y en el segundo omite la variable.
M-A18	Solo suma los términos semejantes	Solo escribe el primer factor (el de la diferencia)	NO visualiza que tiene dos factores iguales y que puede seguir factorizando	Identifica los números pero no los coloca correctamente en el factor que le corresponde	x	v
M-A19	Los términos en X suma los coeficientes y multiplica la variable en y reduce término semejante.	v	Suma los coeficientes y las variables más el término independiente y le da como resultado un solo término	Suma los coeficientes y multiplica las variables y le da como resultado un solo término	Suma los coeficientes y multiplica las variables y le da como resultado un solo término	Extrae las raíces cúbica y escribe bien el primer factor, pero en el segundo aplica la regla del TCP
M-A20	x	x	x	x	x	x
M-A21	v	v	v	v	v	v

M-22	reduce términos semejantes pero saca como factor común xy	saca los factores pero no coloca el cuadrado a la variable	NO visualiza que tiene dos factores iguales y que puede seguir factorizando. Omite la variable n en los factores	Identifica los factores. Pero luego multiplica los términos del primer factor con el primer término del segundo factor los suma y le da al final 8r	Intenta sacar factor común a todos los términos. Cosa que no es posible en este ejercicio.	Solo extrae raíz cubica a los coeficiente y forma el producto de la suma por la diferencia de cubos
M-A23	Solo suma los términos semejantes	extrajo las raices cuadradas del primer término y escribio la diferencia de este con el cinco al cuadrado.	NO visualiza que tiene dos factores iguales y que puede seguir factorizando. Omite la variable n en los factores	Identifica los números pero no los coloca correctamente en el factor que le corresponde	Agrupa los términos de grado dos y tres y luego intenta sacar factor cumún.	v
M-A24	Saca factor común de los términos en x e y.	factoriza pero no le pone el exponente a la variable z.	factoriza pero omite la variable n del segndo término de cada factor. Además no visualiza que puede seguir factorizando.	Identifica los factores. Pero luego multiplica los términos del primer factor con el primer término del segundo factor los suma y le da al final 8r	x	escribe el producto de la suma por la diferencia de las raíces cúbicas de los coeficientes de los términos dados.
M-A25	Reduce términos semejantes	Escribe el primer factor, pero no extrajo raíz cuadrada a la varible	Escribe un trinomio cuyos términos son las raíces cuadradas de los términos cuadrados perfecto y el tercer término es la mitad del ejercicio dado.	Identifica los números pero no los coloca correctamente en el factor que le corresponde	saca factor común de los términos de grado dos y de grado tres.	escribe el producto de la suma por la diferencia de las raíces cúbicas de los coeficientes de los términos dados.

M-A26	x	Aplicó la formula para el TCP e igualó la expresión a cero. Ve la expresión como ecuación.	x	Aplicó la formula para el TCP e igualó la expresión a cero. Ve la expresión como ecuación.	x	Extrajo raíz cúbica a los coeficientes de la expresión dada y escribió el producto de la suma por la diferencia pero conservando el exponente de la variable de la expresión inicial.
M-A27	Redujo término semejantes	v	suma los coeficientes de los términos que tienen variable	suma los coeficientes de los términos que tienen variable y deja el término independiente.	suma los coeficientes de los términos que tienen variable y deja el término independiente.	v
M-A28	Redujo término semejantes. Error de cálculo 3+6=11	solo escribió los términos del primer factor	NO visualiza que tiene dos factores iguales y que puede seguir factorizando. Omite la variable n en los factores	Identifica los números ý escribe correctamente uno de los factores	x	Al segunto término del segundo factor le hizo falta la variable t cuadrada
M-A29	No hay procedimiento solo una respuesta 3(x+y)	v	NO visualiza que tiene dos factores iguales y que puede seguir factorizando. Omite la variable n en los factores	Identifica los números pero no los coloca correctamente en el factor que le corresponde	identifica los términos pero trabaja el caso como una diferencia de cuadrado	Identifica el primer factor. Pero falla en el primer término del segundo factor.
M-A30	Saca factor común de los términos en x e y.	Saca correctamente la raíz del primer término	extrajo las raíces a los términos cuadrados perfectos escribio dos pares de paréntesis pero los términos de los factores en vez de separarlos con los signos + y - utilizó el producto.	Identifica los números pero no los coloca correctamente en el factor que le corresponde	identifico que es un binomio al cubo pero no determinó los términos del mismo	extrajo la raíz cúbica de los coeficientes. Escribió el producto de la suma por la diferencia.

ANEXO N° 15

RUTA METODOLÓGICA PARA EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL A PARTIR DE LA ESTRUCTURA COGNITIVA, ERRORES Y OBSTÁCULOS

Con los resultados del presente estudio no se ha completado el constructo teórico sistemático, que permita a los docentes de Matemática clasificar, interpretar, predecir y superar los errores y obstáculos para alcanzar aprendizajes de calidad en nuestros estudiantes.

Tradicionalmente, la enseñanza de la Matemática por un lado, se ha desarrollado teniendo como protagonista al docente, con actitud impositiva, sabedor absoluto de lo que enseña, inspirando en sus alumnos miedo y ansiedad. Por otro lado, los contenidos objeto de aprendizaje de esta ciencia, por su naturaleza, son abstractos y en el currículo se presentan de forma academicista, descontextualizados e irrelevantes, ambas situaciones propician un ambiente desfavorable para el aprendizaje de los contenidos matemáticos, ya que dificultan la atención sostenida del estudiante.

Aunque falte mucho por conocer acerca del funcionamiento del cerebro, los estudios en Neurociencia, cuyo objeto de investigación es el sistema nervioso, especialmente, cómo la actividad cerebral, se relaciona con la conducta y el aprendizaje. Estos estudios han demostrado la importancia que tiene las emociones positivas en el aprendizaje, porque además que facilita la memoria, mantienen la curiosidad, sirven para comunicarnos, son imprescindible tanto en los procesos de razonamiento como en la toma de decisiones (Guillén, 2012).

Esta preponderancia de las emociones se debe a que la información que percibimos por medio de los sentidos, pasa por el sistema límbico antes de ser enviada a la corteza cerebral, que es la encargada de los procesos cognitivos. Por tanto, el promover en el aula actividades placenteras de aprendizaje, estamos creando ambientes emocionalmente positivo para que el cerebro aprenda.

Por lo anteriormente expuesto, se ha pensado en una Ruta Metodológica para el aprendizaje del Álgebra Elemental que se fundamenta en el Modelo Didáctico Alternativo, porque:

- Considera el currículo, como una interacción entre investigación-acción.
- Retoma la práctica pedagógica para replantear el currículo.
- Pretende desarrollar valores educativos: autonomía, respeto a la diversidad, igualdad, solidaridad y cooperación.
- Va tras el desarrollo cognitivo del alumno.
- La evaluación se centra en el seguimiento del desarrollo cognitivo de los alumnos y del desempeño del docente.

La aplicación de esta ruta, está orientado evitar o mitigar los errores y obstáculos de manera que estos puedan ser superados antes de iniciar el proceso de aprendizaje de un objeto matemático, para darle sentido a los objetos y al pensamiento matemático, creando un clima de actitudes afectivas y emocionales positivas hacia la Matemática. Está pensado desde la práctica educativa centrada en el aprendizaje. Por ende, es necesario que se considere como punto de partida, conocer las estructuras cognitivas erróneas relacionadas a los conocimientos previos, intervenir con estrategias didácticas que permitan asegurar, que los estudiantes estén en equilibrio con relación a los prerrequisitos para el aprendizaje del nuevo objeto matemático.

Para echar andar esta Ruta Metodológica es necesario que los docentes tengan además de capacidad creativa y responsabilidad social, conocimientos básicos sobre:

- Neurociencia, en aspectos relacionados al aprendizaje, la atención y las emociones.
- Estructuras cognitivas. Conceptos, características y técnicas para determinarlas.
- Estrategias para identificar clasificar los errores y obstáculo en el proceso de aprendizaje de los objetos matemáticos.

Además, dominio de los contenidos curriculares sobre Matemática y su didáctica. Un pensamiento crítico y reflexivo para articular estos conocimientos en pro de una enseñanza de calidad.

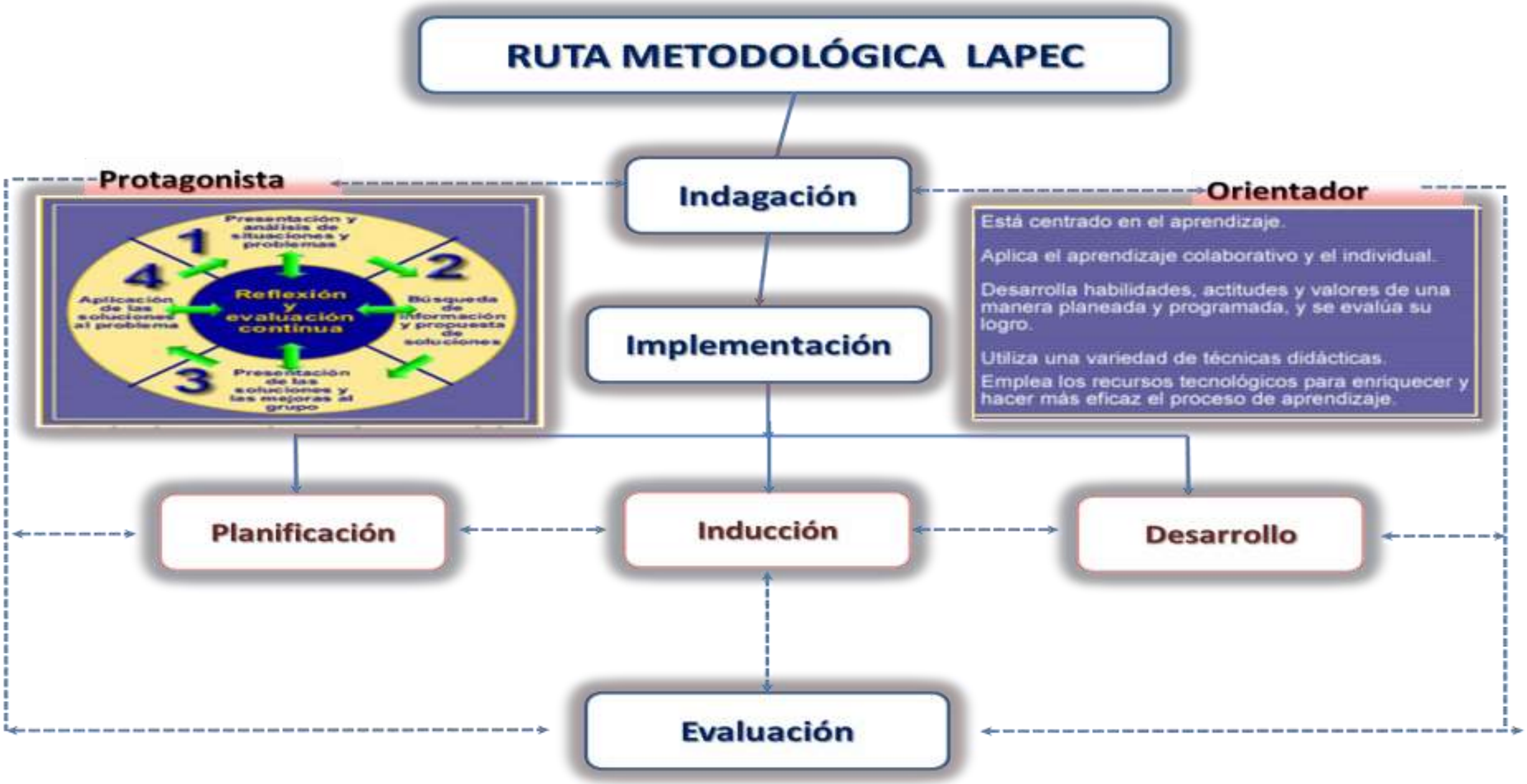


Figura1. Ruta Metodológica LAPAC. Elaboración propia. Fuente de imagen protagonista-orientador: El Aprendizaje Centrado en el Estudiante. Septiembre 2003. Boletín N° 7. Tecnológico de Monterrey.

La ruta metodológica se ha denominado LAPEC, porque se pretende que a través de esta se desarrolle el lenguaje y pensamiento algebraico partiendo de la estructura cognitiva del estudiante alrededor de unos conceptos relevantes o Concepto Nucleares (CN) de un tema objeto de estudio (TOE).

La ruta se ha estructurado en tres fases: Indagación, Implementación y Evaluación.

Indagación. En esta fase el docente identificará las estructuras cognitivas erróneas del sus estudiantes relacionadas a los conocimientos previos, tanto en los prerrequisitos (CN) como en el conocimiento que tengan sobre el tema objeto de estudio:

1. Identificar los Conceptos Nucleares alrededor del TOE. En esta fase la mayor dificultad se presenta en la selección de los contenidos relevantes al Tema Objeto de Estudio (TOE). Por tanto, se recomienda que primero el docente desde su experiencia con el TOE, realice una revisión bibliográfica, analice la ubicación del TOE en el programa de asignatura y segundo, consulte a sus colegas sobre aquellos contenidos, habilidades, propiedades, imágenes, ejemplos, etc., que están relacionados con el TOE, para seleccionar los CN.

2. Atendiendo la característica de los Conceptos Nucleares, seleccionar la o las técnicas adecuada para determinar la Estructura Cognitiva de los estudiantes alrededor de los CN (en estos se incluye el TOE). Las características a las que nos referimos son del tipo de objeto matemático (significado, significante y referente) y el algoritmo asociado (si es que existe). Aplicar la o las técnicas al grupo de estudiantes antes de iniciar el estudio del TOE.

3. Procesar en EXCEL los resultados anteriores. Colocando para cada alumno el CN más significativo en orden descendente. Esto significa, por ejemplo que el concepto de mayor significancia para el alumno1 no es el mismo para el alumno 2 y 3. Por tanto se recomienda poner clave a cada CN. Retomando el TOE del estudio.

ID	CN1	CN2	CN3	CN4	CN5	CN6	CN7
EST1	CF	OA	LS	PP	RAD	PNR	SA
EST 2	LS	LS	PP	OA	SA	RAD	PRN
EST 3	OA	SA	LS	PP	PNR	SA	RAD
….							
TOTAL							

De la fila TOTAL, se podrá identificar cuáles es CN con mayor significancia para los estudiantes y agruparlos.

4. Determinar desde su práctica docente, los errores y obstáculos cognitivos que los estudiantes enfrentan en el TOE. Tanto, en el tema como en los Conceptos Nucleares. Para ello se debe diseñar un test dirigido a los estudiantes, que con base al resultado anterior, permita identificar los errores y obstáculos cognitivos relacionados a los CN de mayor significancia y procesar la información, a través del llenado de una parrilla taxonómica (PT).

5. Elaborar la Parrilla Taxonómica (PT), considerando los resultados anteriores. Inicialmente, seleccionar de los resultados de la técnica aplicada, los alumnos que tienen los mismos CN con mayor significancia y agruparlos (los que se encuentran en la primera columna de la primera tabla). En un libro en EXCEL, asignar una hoja a cada CN y llenar la parrilla.

ID	Concepto Cercanos	errores que cometieron en cada concepto cercano	Tipo de Error	Obst-cognitivos	Observaciones
EST1	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.
EST 15	1.	1.	1.	1.	1.

	2. 3.	2. 3.	2. 3.	2. 3.	2. 3.
EST 22	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.
….					
Primer concepto cercado	=CONTAR. SI				
Segundo Concepto cercano	=CONTAR. SI				
tercer Concepto cercano	=CONTAR. SI				
…..					

Iniciar el llenado de la primera columna con el código del estudiante. En la segunda columna, en orden descendente colocar los conceptos cercanos para cada alumno (utilizar las claves asignadas a cada CN). Se sugiere para separar entre los más cercanos y los más lejanos tomar como referente el 50%, o sea si los conceptos son 8 (incluyendo el TOE) seleccionar los cuatro primeros concepto más cercanos para cada estudiante y en ese orden escribirlos en la PT. Para conocer el segundo concepto de mayor significancia, en la última fila al final de la columna, conceptos-cercanos, introducir la fórmula contar.si, para ver cuál de estos tiene mayor frecuencia (de la misma manera para conocer el tercer y cuarto lugar).

En la tercera columna, para cada concepto-cercano, analizar en el test si lo trabajó bien (colocar una V) o si tuvo errores, describir el error y tipificarlo en la cuarta columna según la taxonomía LAPEC. En la siguiente columna conservando el lugar que ocupó en la columna anterior, describir el obstáculo. En la última columna escribir observaciones que considere a bien.

6. Procesar los resultados sobre las EC y triangular con los datos de la PT. De este procesamiento obtendremos las siguiente información:

- Los CN más cercanos al TOE. Estos son los CN que más se relacionan con el TOE según la estructuras cognitivas de los estudiantes y con esto, los errores y obstáculos de los CN cercanos al TOE.
- Para algunos estudiantes, el concepto de mayor significancia no sea el TOE, sino otro de los CN. De igual manera, en la tabla 2, tenemos también, los errores, tipología y obstáculos de estos alumnos.

7. Con los datos anteriores se organizan los estudiantes con estructuras cognitivas similares, para iniciar el proceso de aprendizaje del nuevo objeto matemático.

Implementación. Esta fase corresponde al tratamiento didáctico, tanto de los obstáculos cognitivo que conducen a los errores en cada uno de los conceptos nucleares como al tratamiento del tema objeto de estudio. Esta fase se subdivide en tres momentos:

a) **Planificación:** Con base a los resultados de la fase de indagación se planifica el proceso de aprendizaje de los estudiantes sobre el TOE. En esta fase se recomienda diseñar dos bases de datos. Una con los campos: Concepto Nuclear (excepto el TOE), Errores -organizarlos en la base de datos según la tipología-obstáculos, actividades de retroalimentación con sus respectivos recursos didácticos. Las actividades propuestas deben estar orientada desde la Neurociencia a superar los obstáculos identificados en cada uno de los errores asociados a los CN más cercano al TOE.

   La segunda base de datos es para el tratamiento del TOE. Considerando, que por experiencia del docente, este maneja cuáles son los errores que cometen los estudiantes al utilizar el TOE –resultados del punto 4 de la fase de indagación–, se proponen los siguientes campos para dicha base: contenido del TOE, errores, tipología, área del cerebro que se activará –según contenido que el estudiante va aprender y competencia que se pretende desarrollar–, actividades de aprendizaje, fundamentas en Neurociencia –consecuentes con la columna anterior y con la estrategia adoptada, estas deberán enfocarse a evitar que el estudiante cometa error cuando se aplique el TOE–, recursos didácticos y actividades de evaluación.

b) **Inducción:** En esta etapa se desarrollan las actividades planificadas en la base de datos para retroalimentar los prerrequisitos. Los estudiantes se organizan según su estructura cognitiva relacionada al CN más significativo. Los alumnos que su concepto más significativo es el TOE, se ubican según su segundo concepto más cercano al TOE. Este proceso de inducción es para lograr el equilibrio en los estudiantes sobre los CN para el aprendizaje del TOE.

c) **Desarrollo**. La Neurociencia nos ayuda a entender mejor los procesos de aprendizaje del estudiantado y por ende, a enseñarles de forma más oportuna, efectiva y agradable, algunas de los descubrimientos más destacados apuntan a que: El Aprendizaje cambia la estructura física del cerebro; El Aprendizaje organiza y reorganiza el cerebro; diferentes partes del cerebro pueden estar listas para aprender en tiempos diferentes; el cerebro es un órgano dinámico, moldeado y flexible, en gran parte, por la experiencia; la organización funcional del cerebro depende de la experiencia y se beneficia positivamente de ella; el desarrollo no es sólo un proceso biológico sino que es también un proceso activo experiencial (Olivas, 2013).

Considerando que esta ruta metodológica pretende promover una educación de calidad a través de la exploración del pensamiento alternativo, las respuestas múltiples y la autoconciencia creativa y que está fundamentado en el Modelo Alternativo, se propone la estrategia Aprendizaje Basado en Problemas. El cómo aplicar esta estrategia, se muestra a través de ejemplos en la siguiente dirección: http://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/viewFile/8341/5539

En esta estrategia, la memoria de trabajo es muy importante porque nos permite ser consciente de lo que hacemos y reflexionar sobre ello, debido a que podemos combinar la información que manipulamos con los conocimientos que tenemos almacenados en la memoria a largo plazo. Para Guillén et al., es imprescindible en tareas cotidianas como mantener una conversación, sumar números o leer una frase Este tipo de memoria se ubicada en la corteza prefrontal.

Fase de Evaluación.

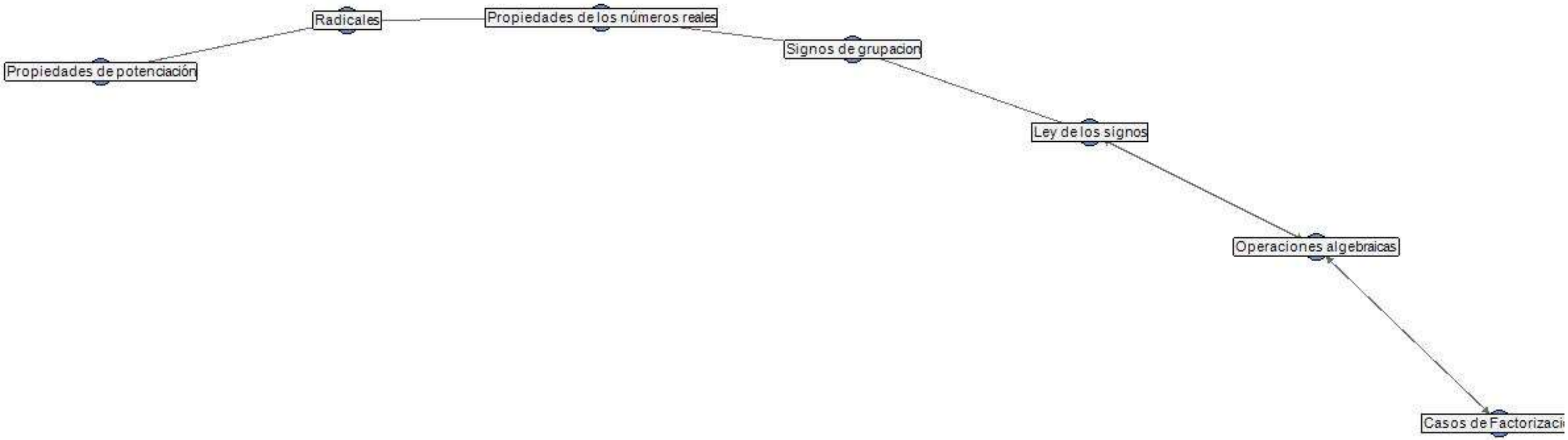
Los resultados del aprendizaje son tan importante como el mismo proceso de aprendizaje. Evaluar el proceso desarrollado y tomar decisiones que lo redirijan, en caso de ser necesario, mediante prácticas de autoevaluación, evaluaciones compartidas y coevaluaciones, es una tarea constante. En el artículo "La evaluación orientada al aprendizaje en un modelo de formación por competencias en la educación universitaria" del sitio http://red-u.net/redu/files/journals/1/articles/144/public/144-130-2-PB.pdf, se presenta una reflexión sobre el cambio de paradigma educativo que supone la formación por competencias y, sus repercusiones en la evaluación para promover el aprendizaje y para constatar la calidad del mismo, en el encontrará estrategias evaluativas que hacen posible el desarrollo de competencias, la autoevaluación o la evaluación de compañeros, y estrategias evaluativas de las competencias. Además, se analiza la importancia de las rúbricas para lograr una evaluación educativa de calidad.

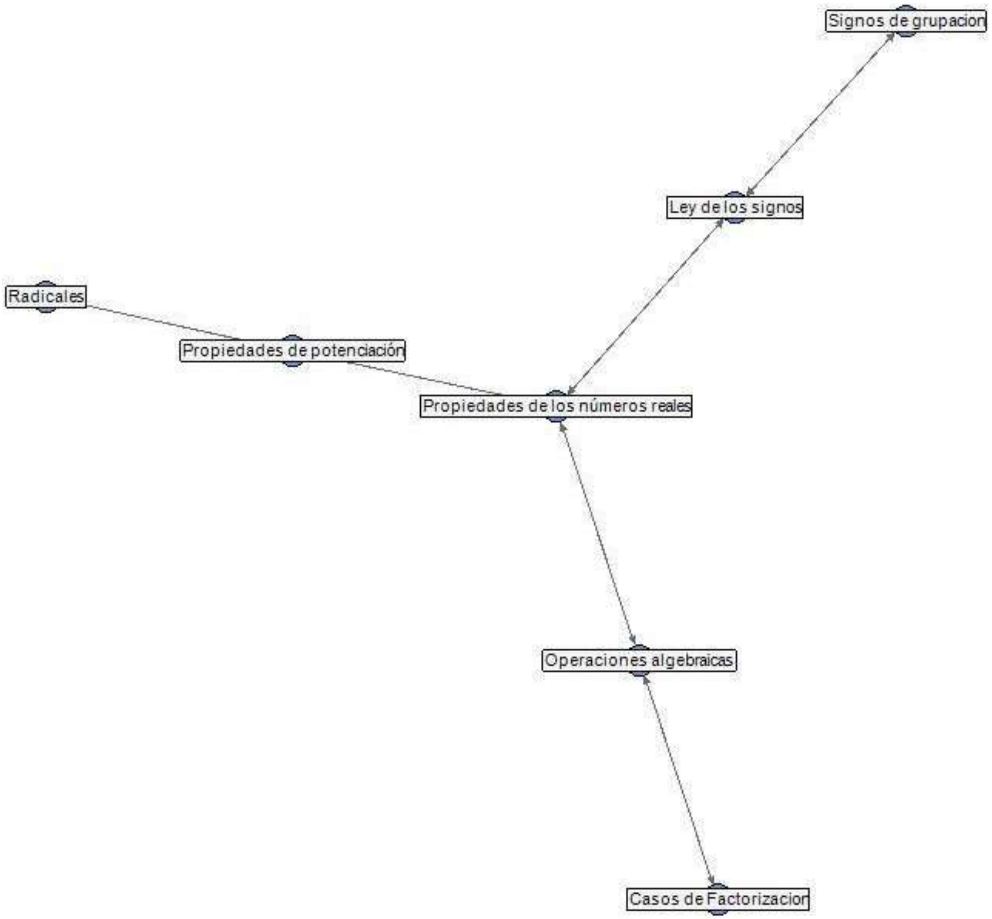
ANEXO N° 16

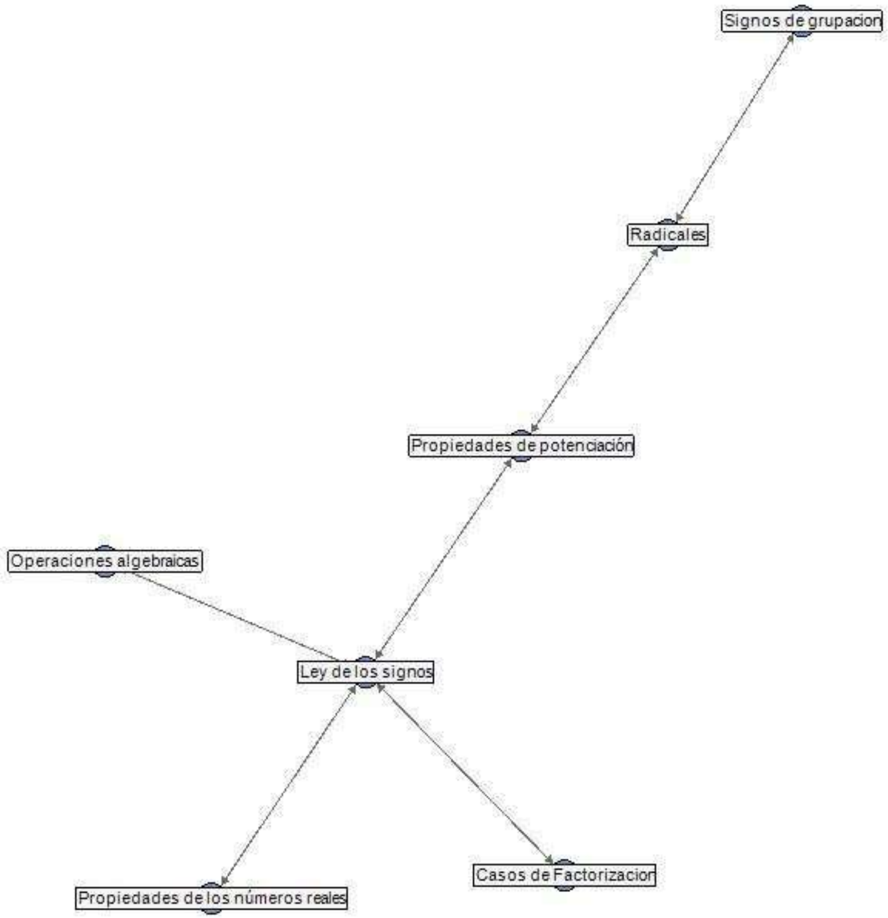
ESTRUCTURAS COGNITIVAS

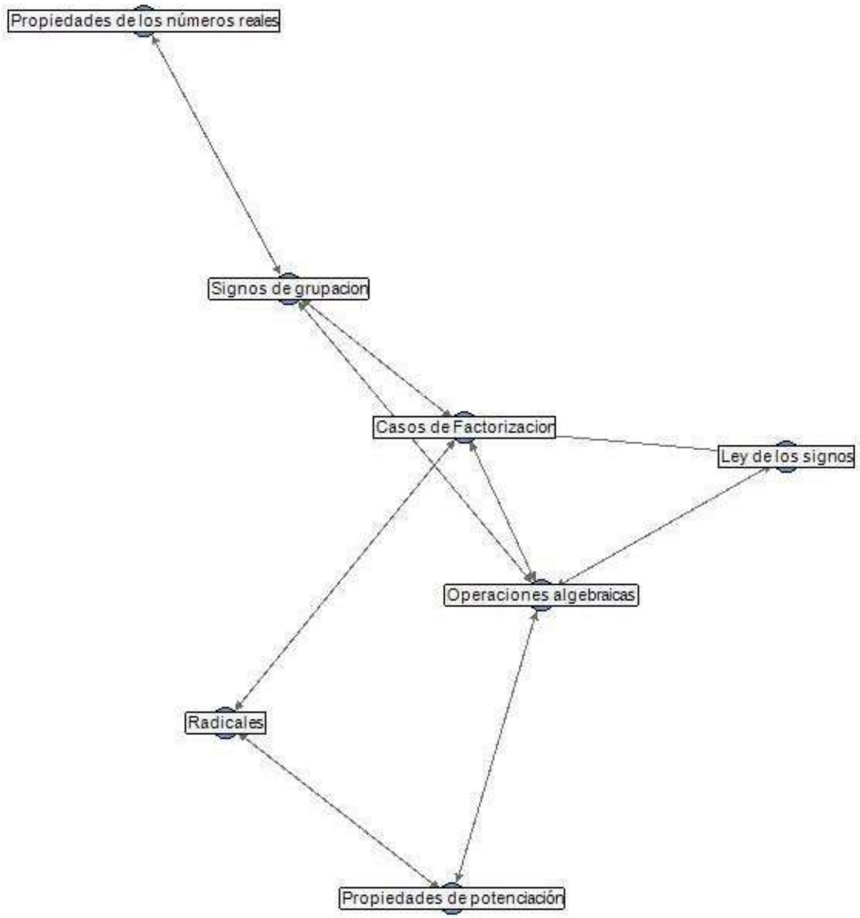
Redes Asociativas de Pathfinder alumnos de la muestra

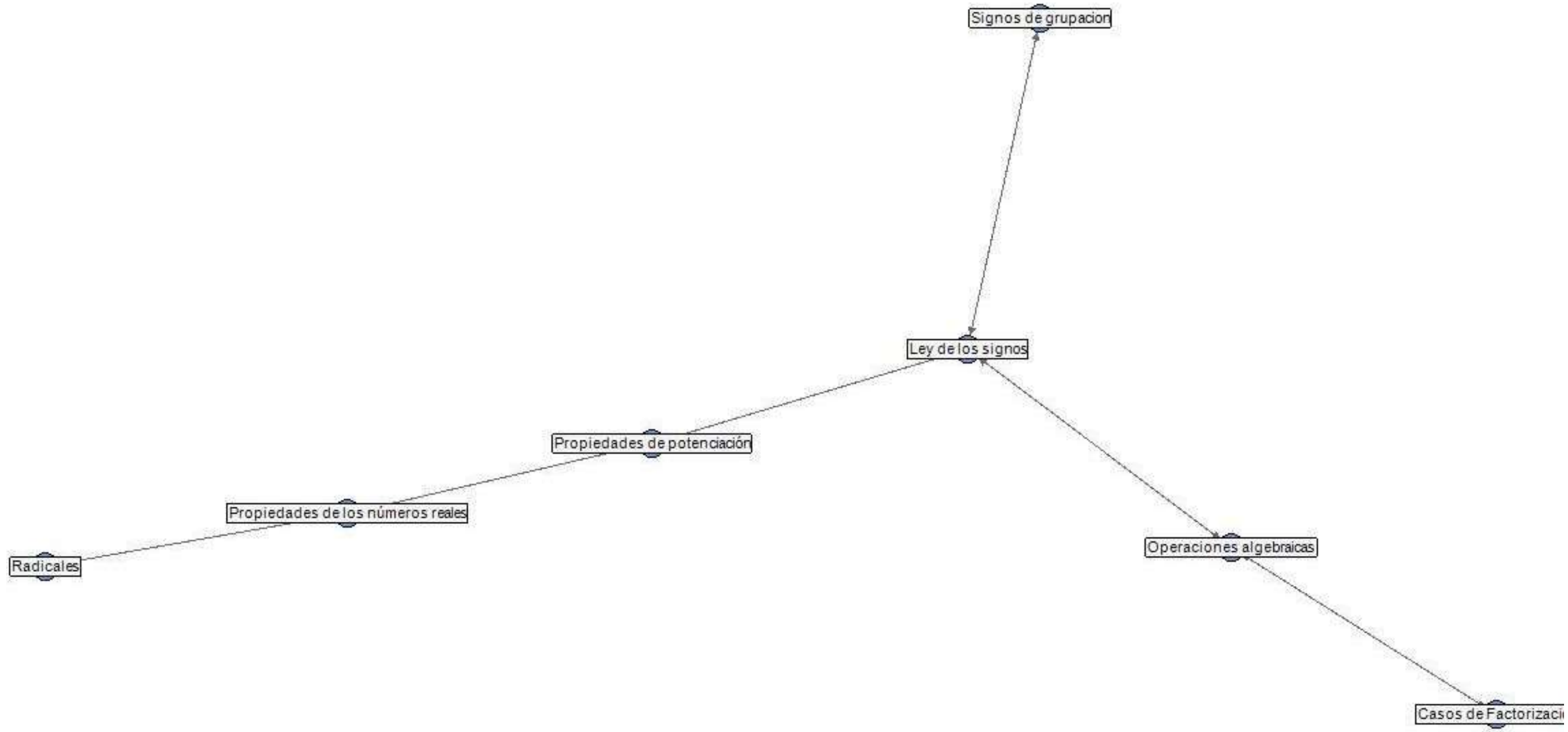
1

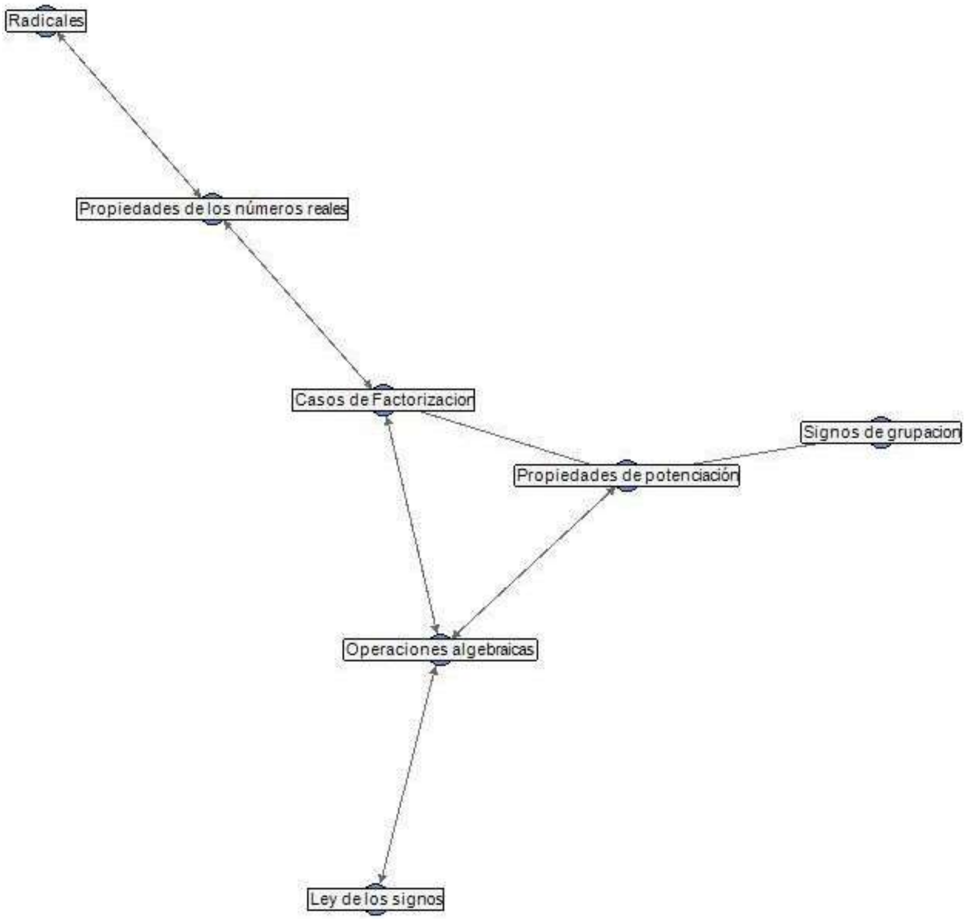

Propiedades de potenciación
Radicales
Propiedades de los números reales
Signos de grupacion
Ley de los signos
Operaciones algebraicas
Casos de Factorizaci

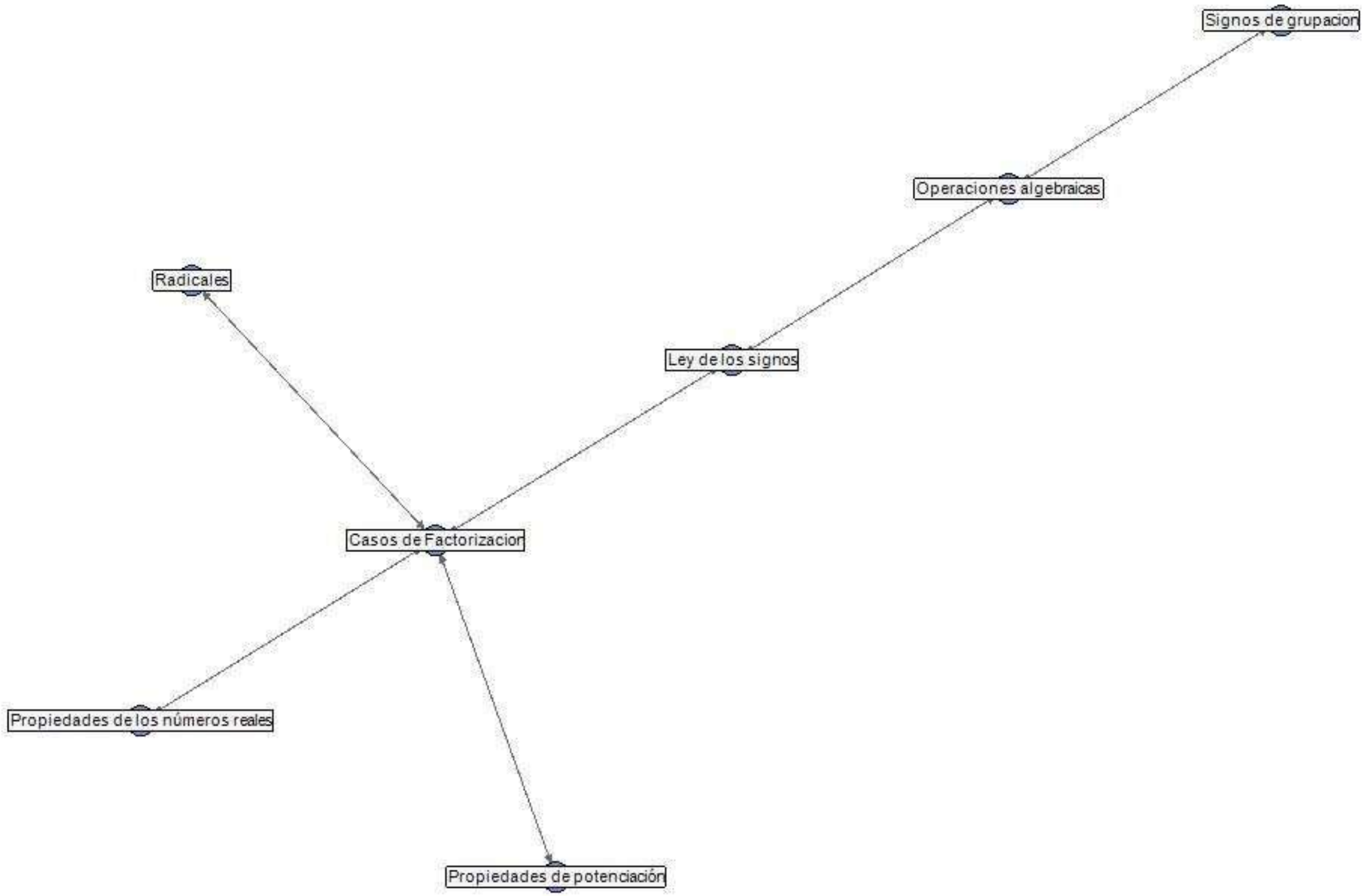

Signos de grupacion
Ley de los signos
Radicales
Propiedades de potenciación
Propiedades de los números reales
Operaciones algebraicas
Casos de Factorizacion

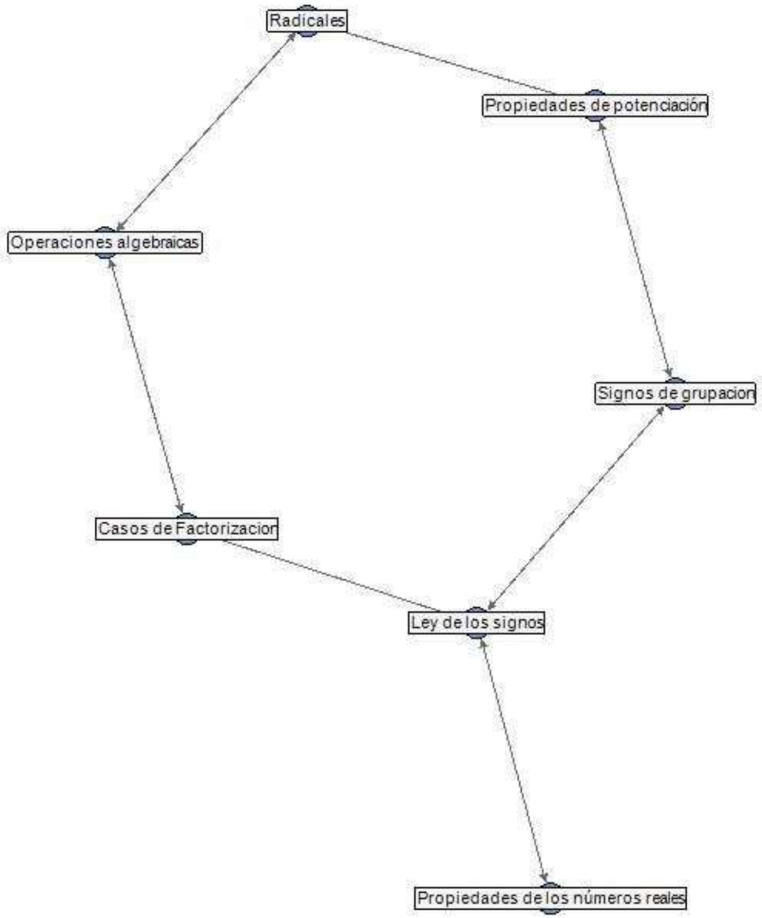

Signos de grupacion
Radicales
Propiedades de potenciación
Operaciones algebraicas
Ley de los signos
Casos de Factorizacion
Propiedades de los números reales

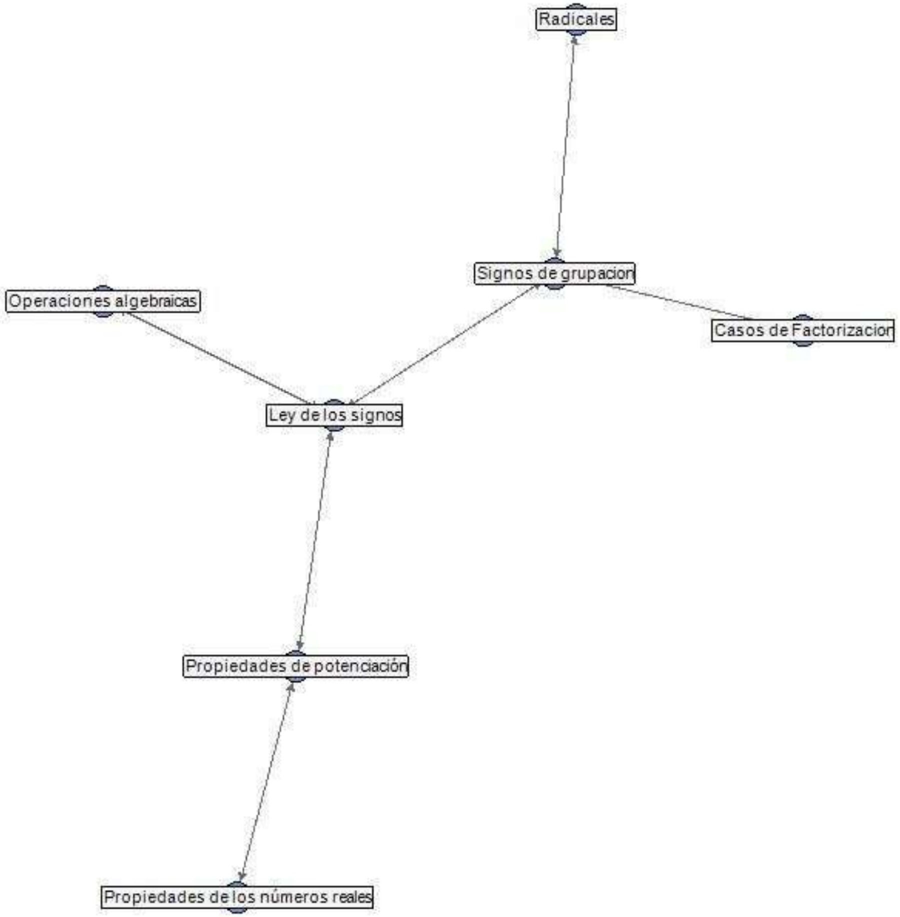

Propiedades de los números reales
Signos de grupacion
Casos de Factorizacion
Ley de los signos
Operaciones algebraicas
Radicales
Propiedades de potenciación

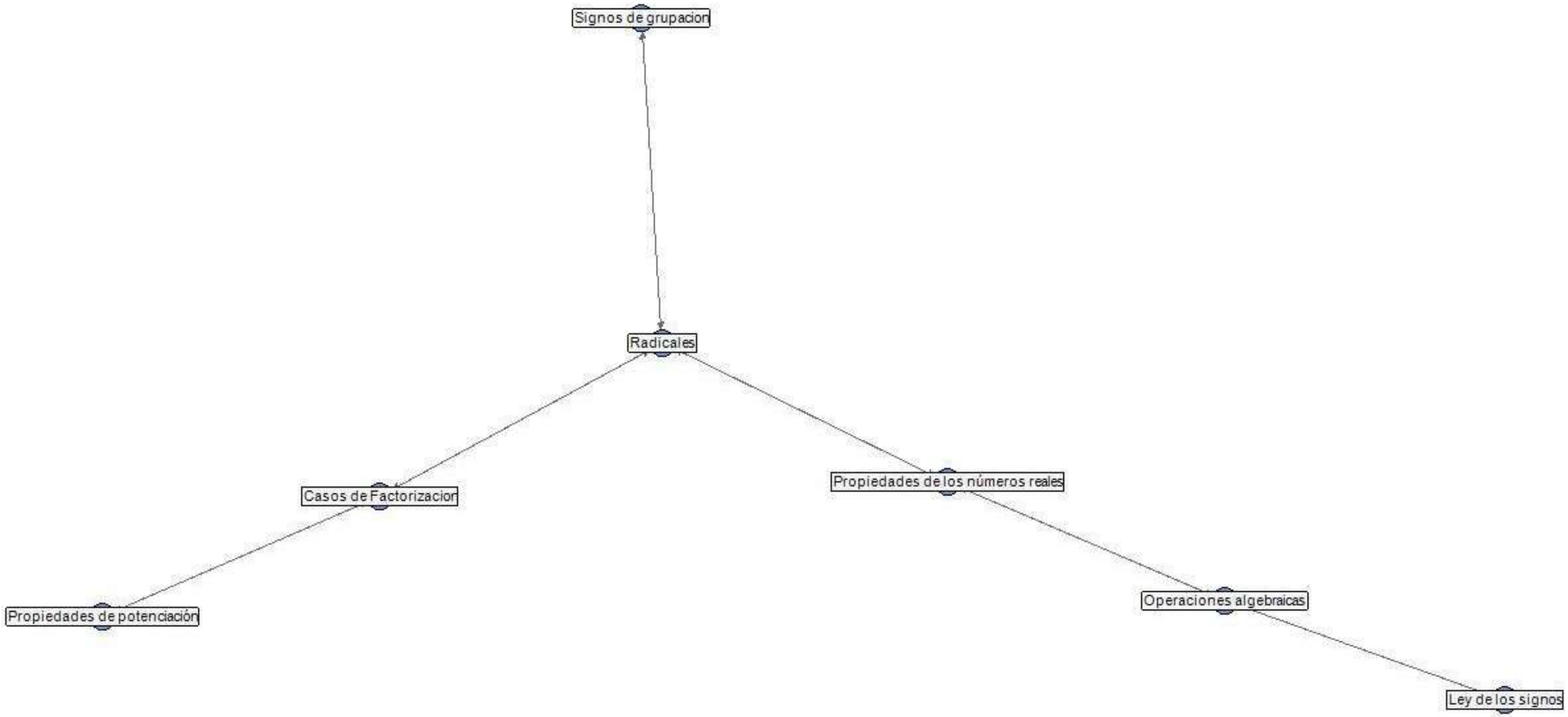

Signos de grupacion
Ley de los signos
Propiedades de potenciación
Propiedades de los números reales
Radicales
Operaciones algebraicas
Casos de Factorizaci

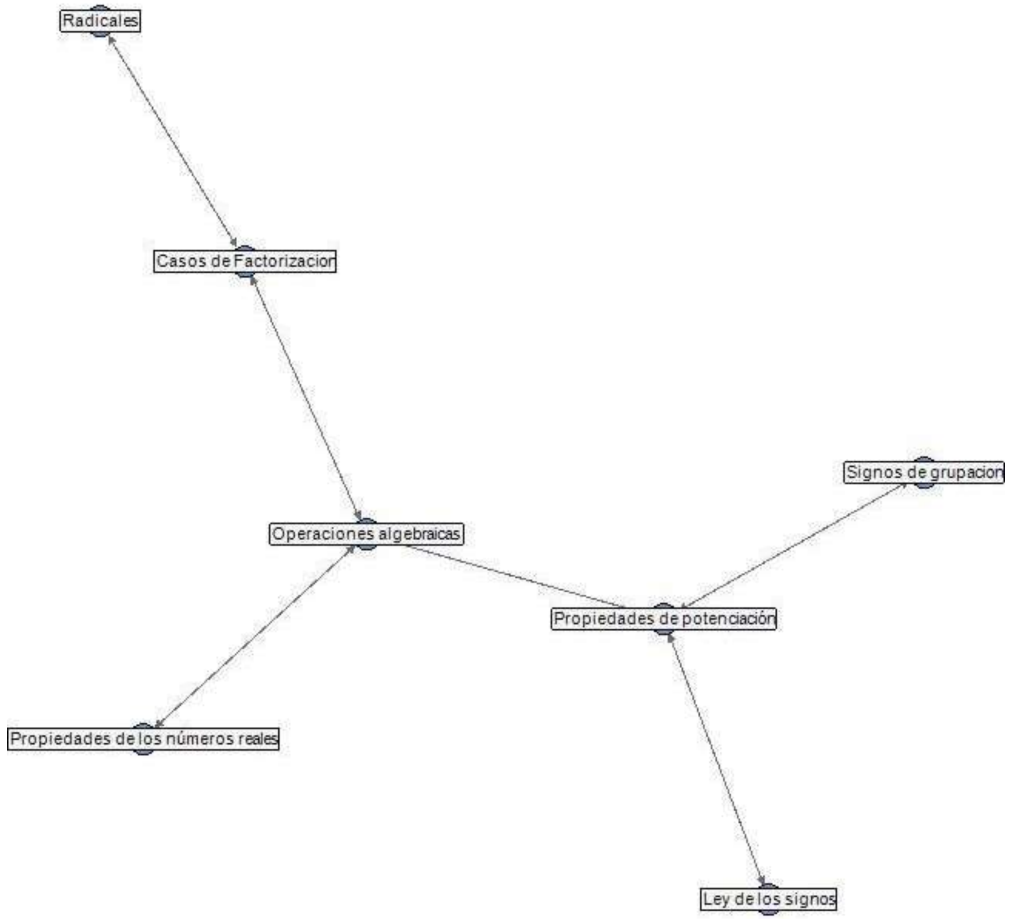

Radicales
Propiedades de los números reales
Casos de Factorizacion
Signos de grupacion
Propiedades de potenciación
Operaciones algebraicas
Ley de los signos

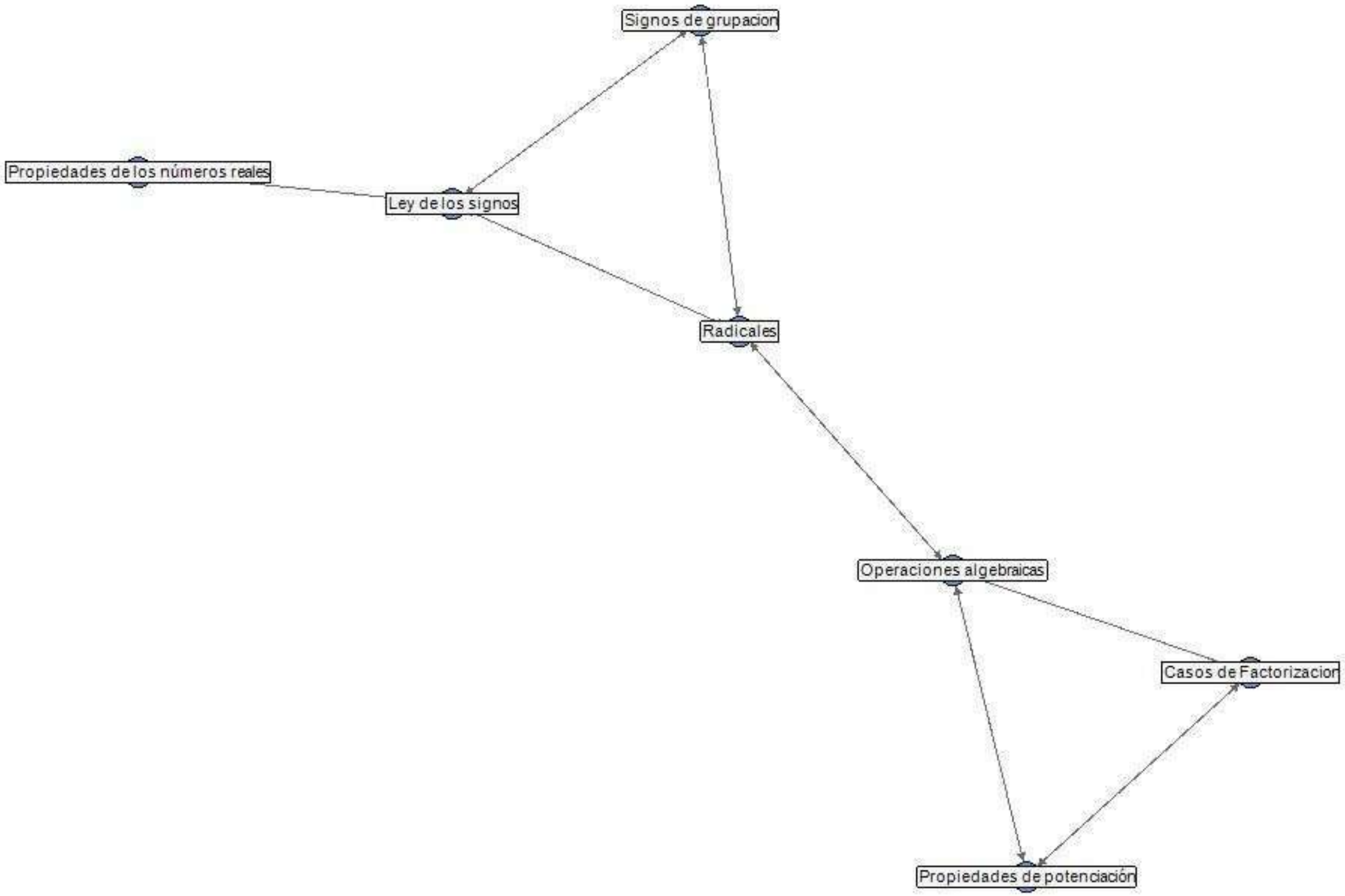

Signos de grupacion
Operaciones algebraicas
Radicales
Ley de los signos
Casos de Factorizacion
Propiedades de los números reales
Propiedades de potenciación

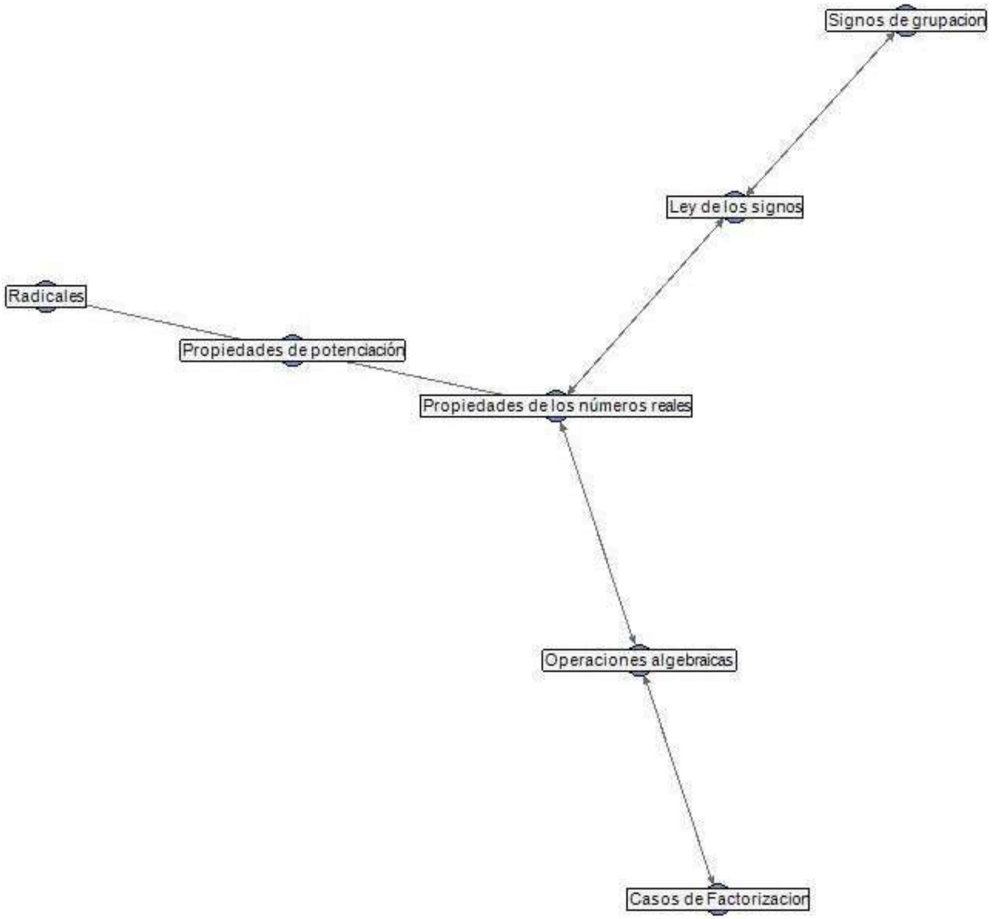

Radicales
Propiedades de potenciación
Operaciones algebraicas
Signos de grupacion
Casos de Factorizacion
Ley de los signos
Propiedades de los números reales

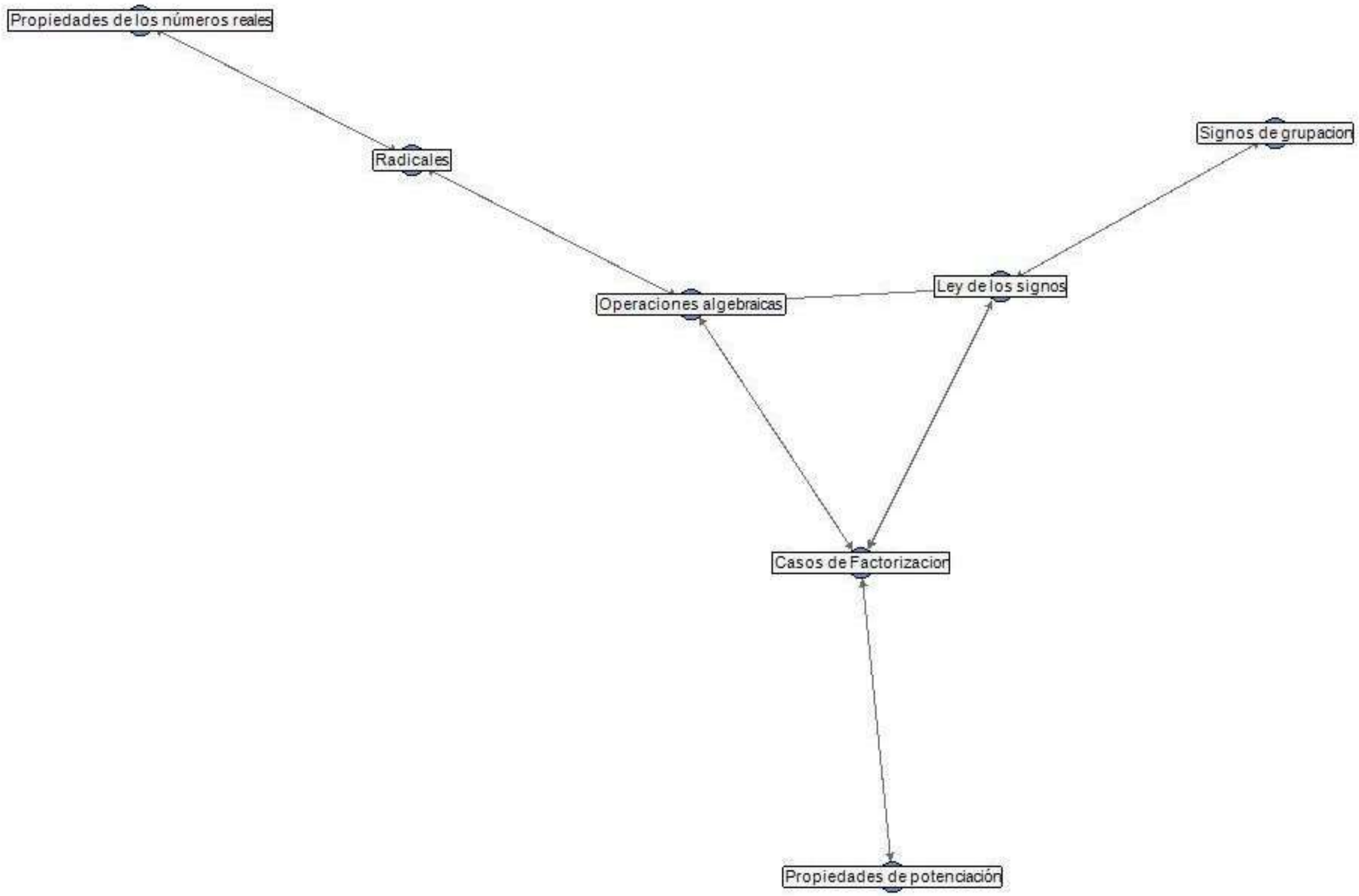

Radicales
Signos de grupacion
Operaciones algebraicas
Casos de Factorizacion
Ley de los signos
Propiedades de potenciación
Propiedades de los números reales

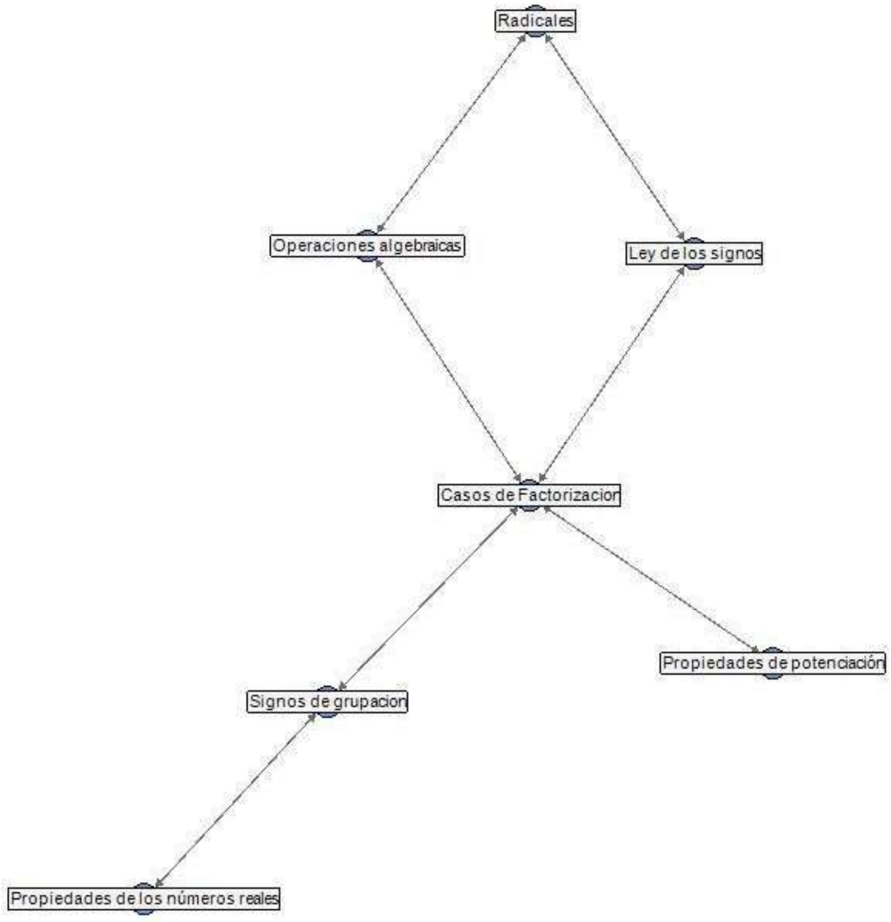

Signos de grupacion
Radicales
Casos de Factorizacion
Propiedades de los números reales
Propiedades de potenciación
Operaciones algebraicas
Ley de los signos

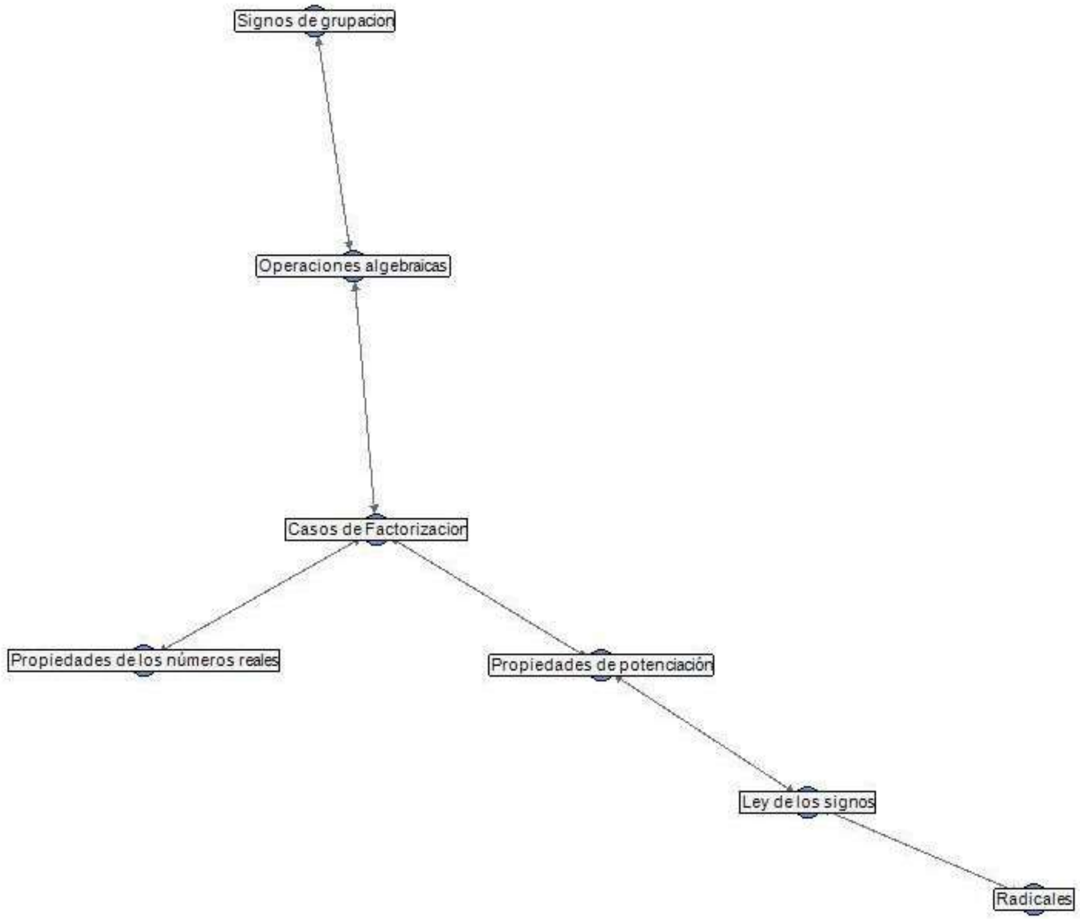

Radicales
Casos de Factorizacion
Signos de grupacion
Operaciones algebraicas
Propiedades de potenciación
Propiedades de los números reales
Ley de los signos

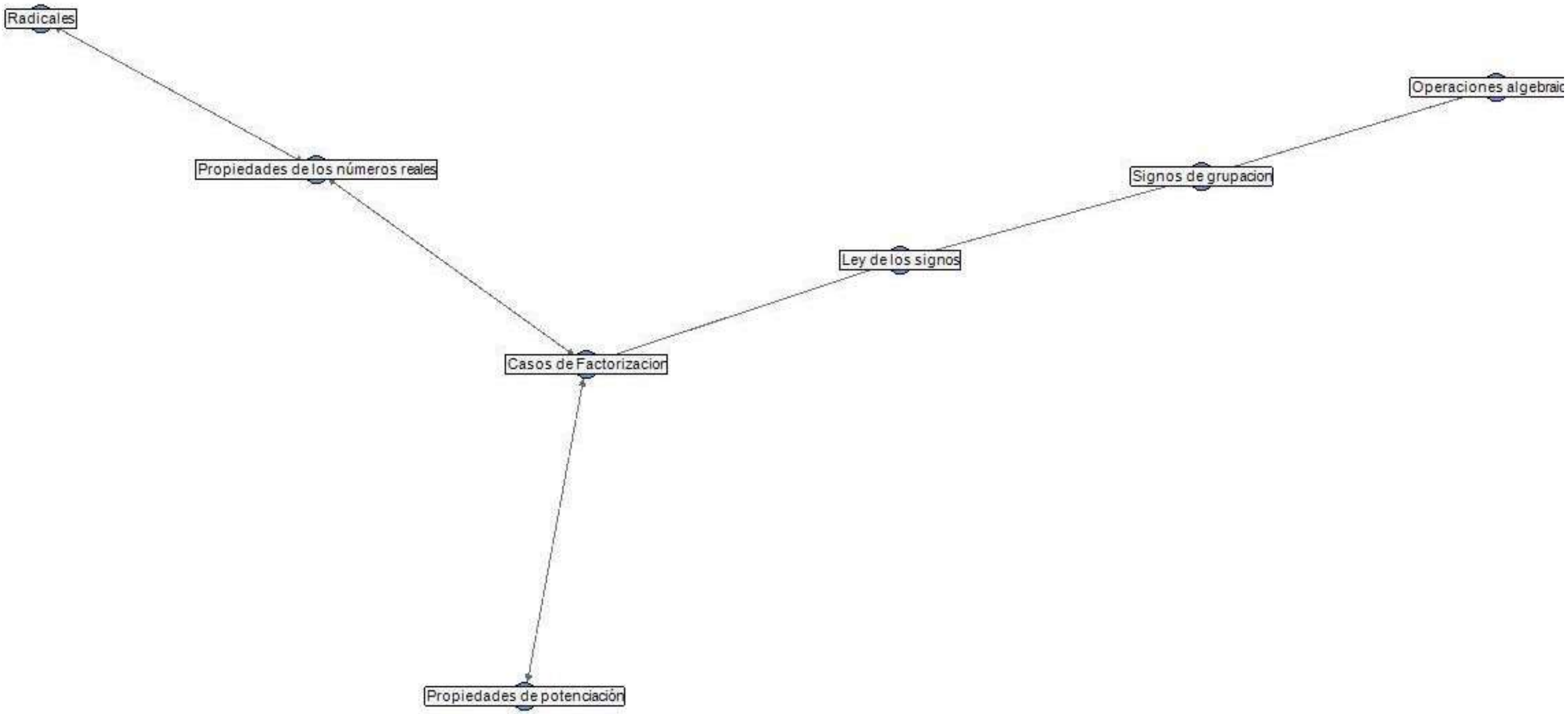

Signos de grupacion
Propiedades de los números reales
Ley de los signos
Radicales
Operaciones algebraicas
Casos de Factorizacion
Propiedades de potenciación

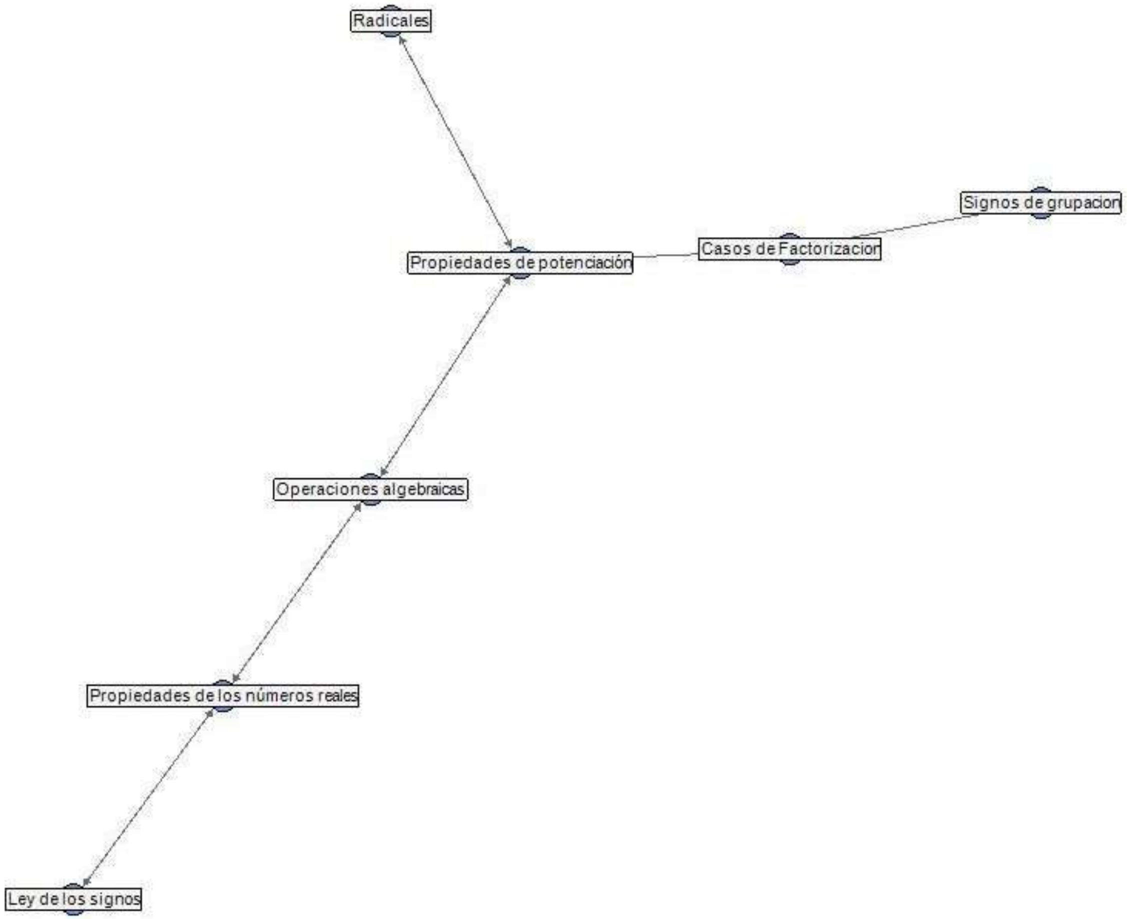

Signos de grupacion
Ley de los signos
Radicales
Propiedades de potenciación
Propiedades de los números reales
Operaciones algebraicas
Casos de Factorizacion

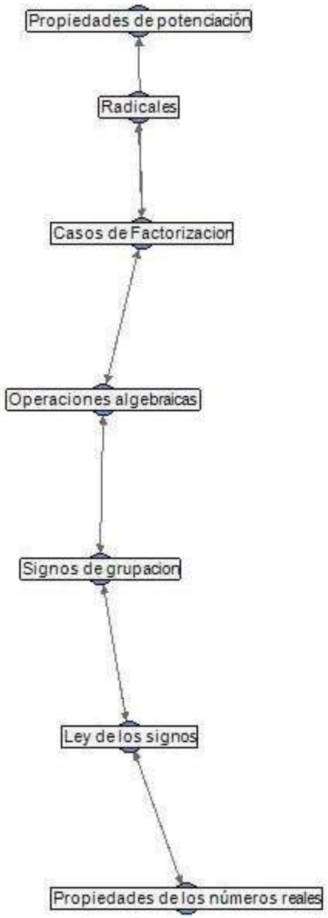

Propiedades de los números reales
Radicales
Signos de grupacion
Ley de los signos
Operaciones algebraicas
Casos de Factorizacion
Propiedades de potenciación

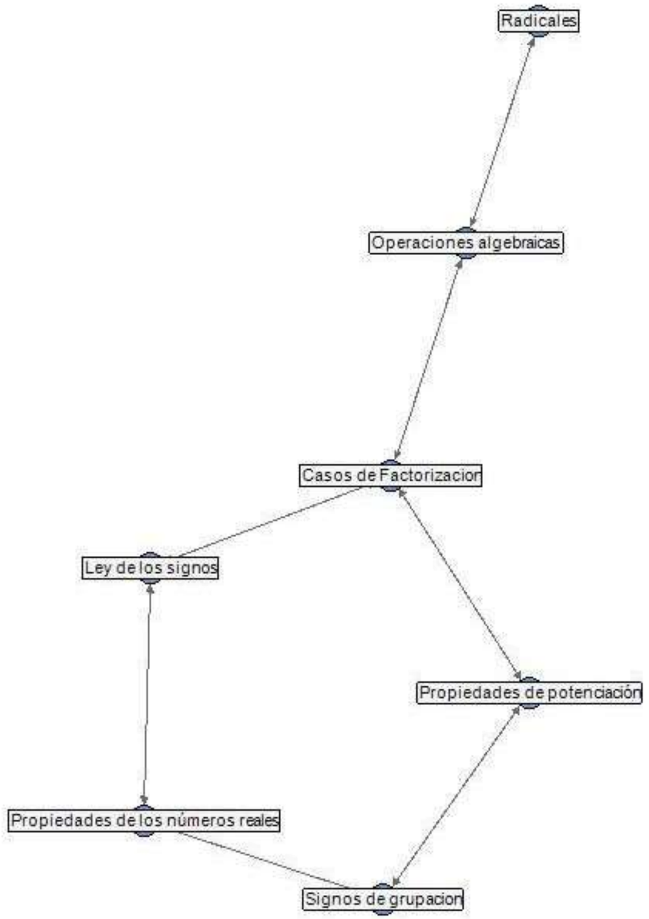

Radicales
Operaciones algebraicas
Ley de los signos
Casos de Factorizacion
Propiedades de potenciación
Signos de grupacion
Propiedades de los números reales

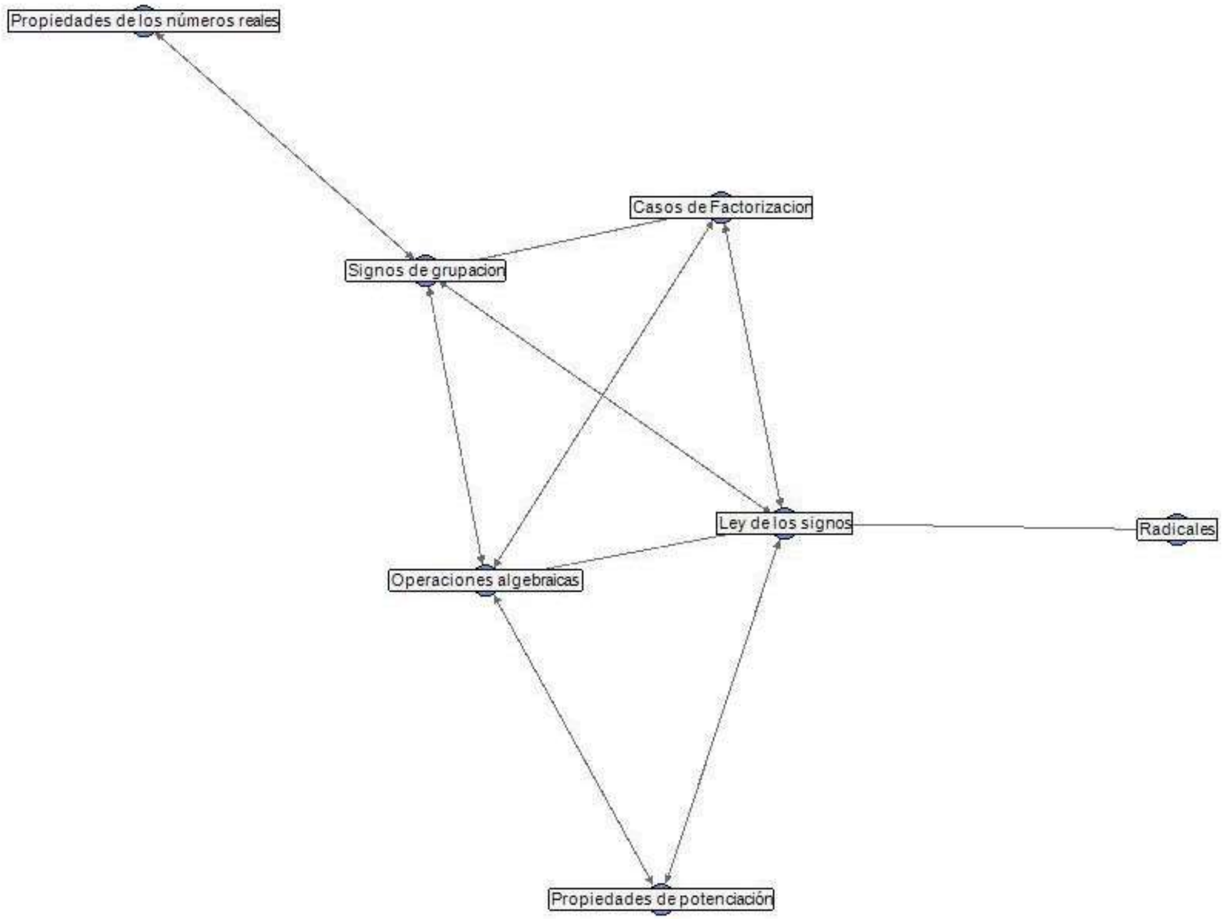

Signos de grupacion
Operaciones algebraicas
Casos de Factorizacion
Propiedades de los números reales
Propiedades de potenciación
Ley de los signos
Radicales

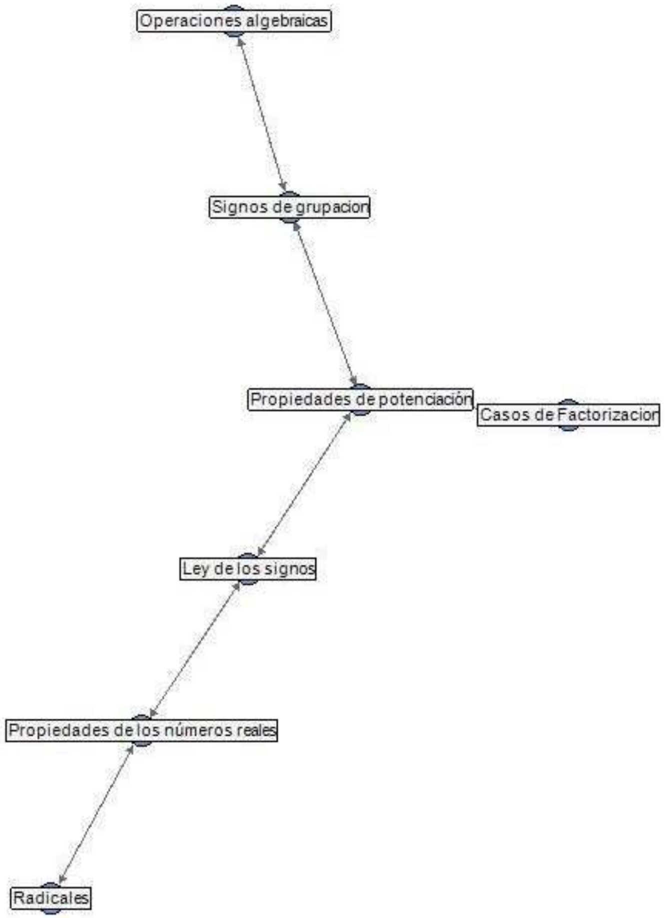

Radicales
Operaciones algebraic
Propiedades de los números reales
Signos de grupacion
Ley de los signos
Casos de Factorizacion
Propiedades de potenciación

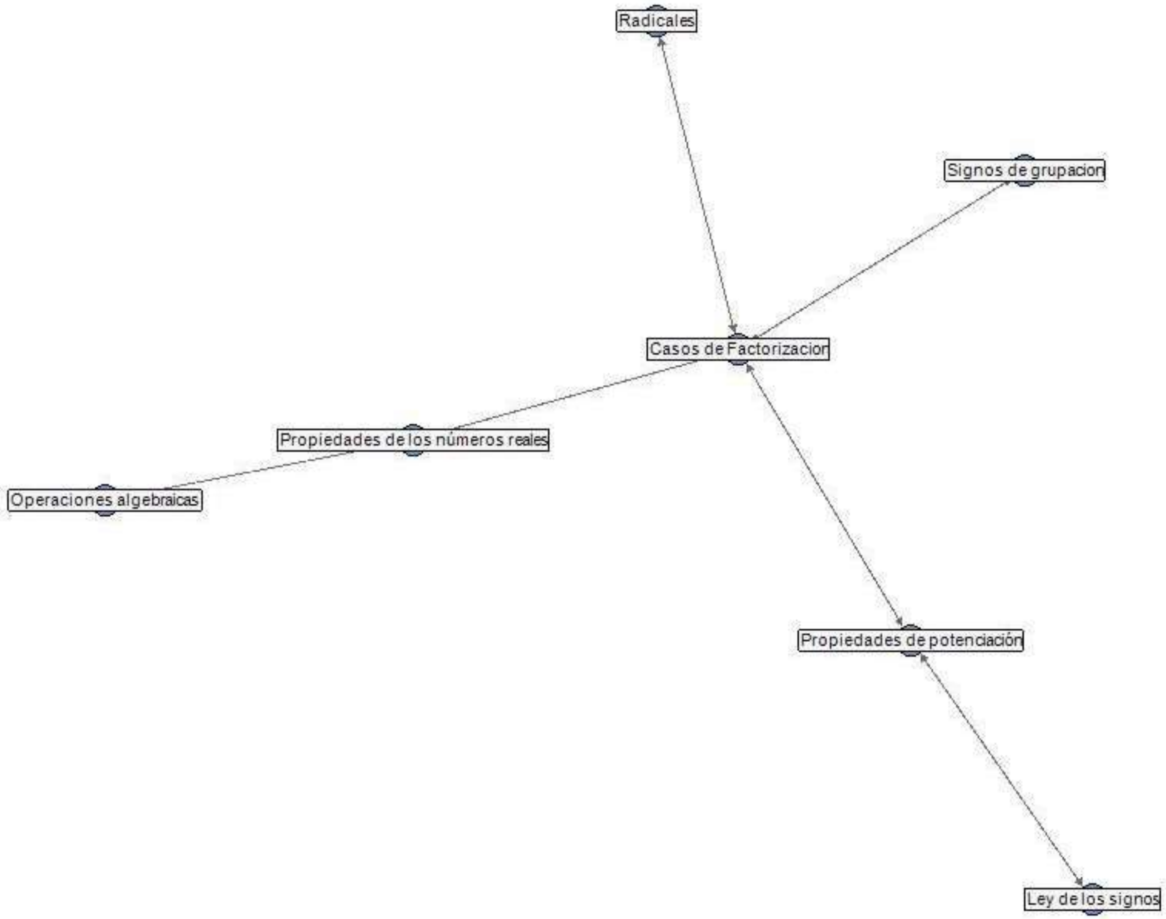

Radicales
Propiedades de potenciación
Casos de Factorizacion
Signos de grupacion
Operaciones algebraicas
Propiedades de los números reales
Ley de los signos

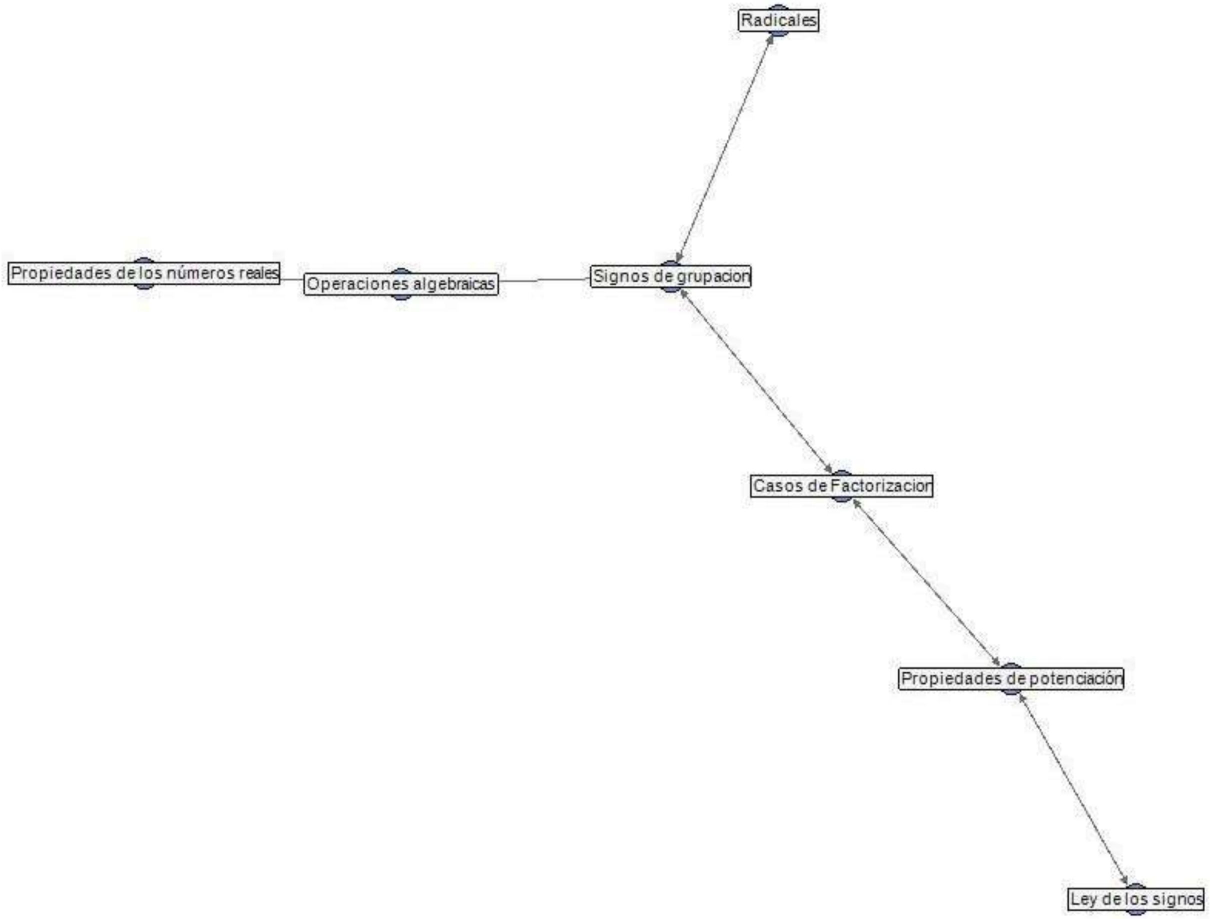

Propiedades de potenciación
Radicales
Casos de Factorizacion
Operaciones algebraicas
Signos de grupacion
Ley de los signos
Propiedades de los números reales

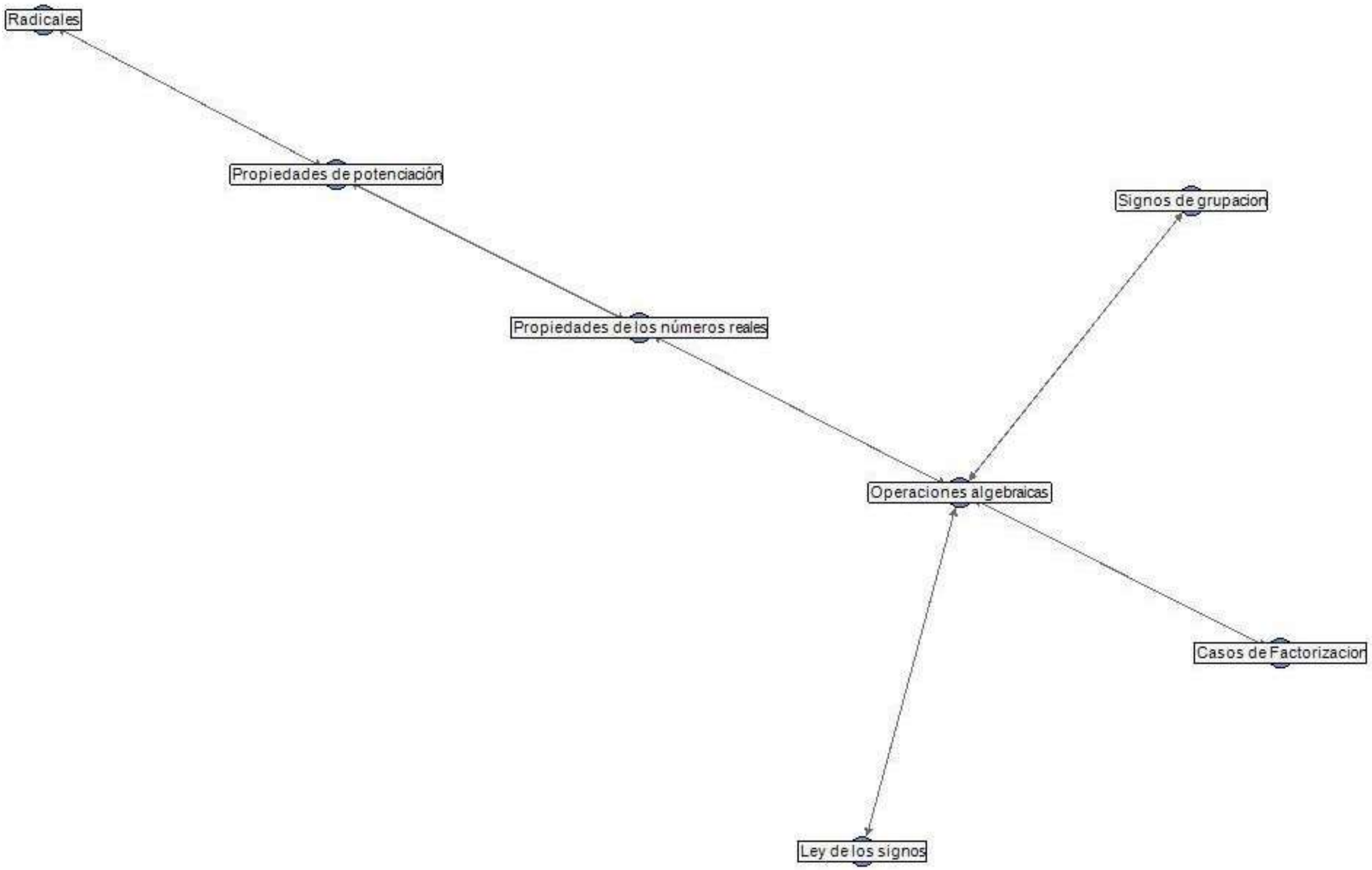

Radicales
Operaciones algebraicas
Casos de Factorizacion
Ley de los signos
Propiedades de potenciación
Propiedades de los números reales
Signos de grupacion

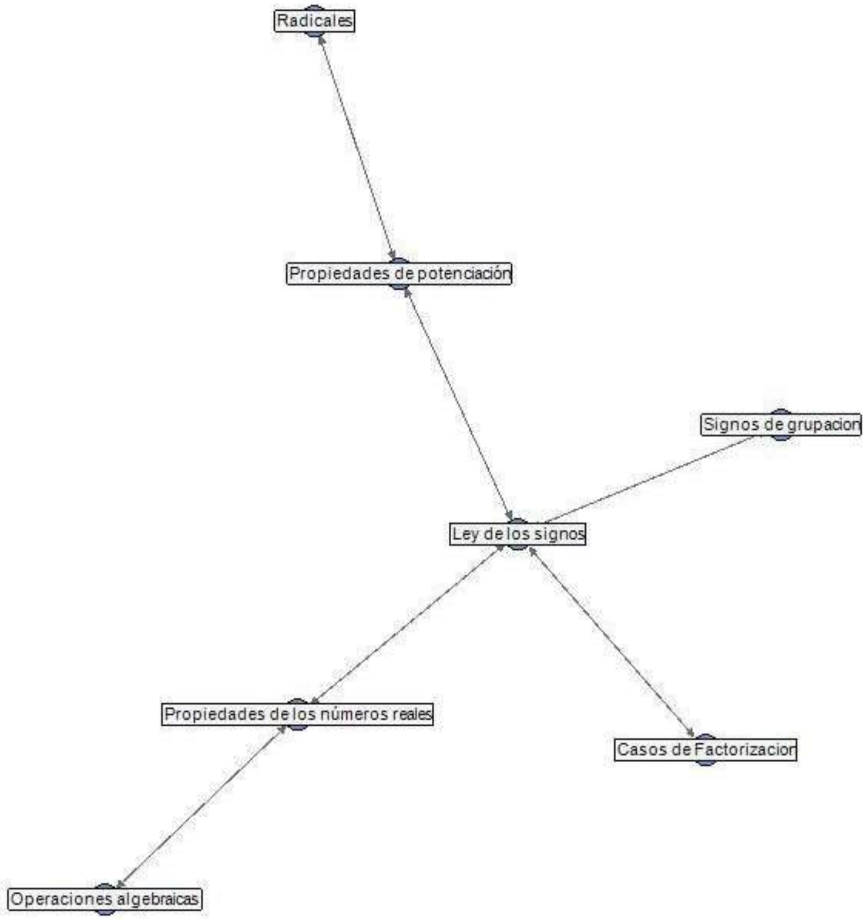

Propiedades de los números reales
Casos de Factorizacion
Signos de grupacion
Ley de los signos
Radicales
Operaciones algebraicas
Propiedades de potenciación

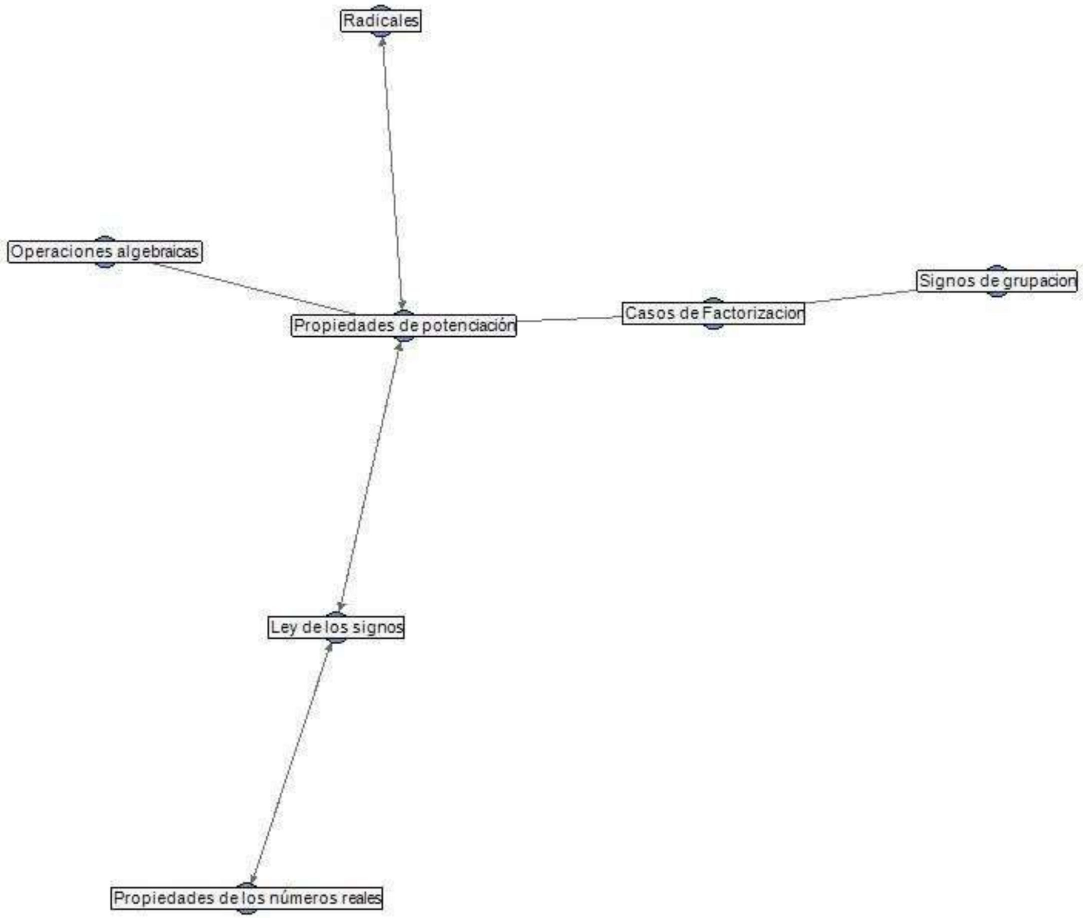

Operaciones algebraicas
Signos de grupacion
Propiedades de potenciación
Casos de Factorizacion
Ley de los signos
Propiedades de los números reales
Radicales

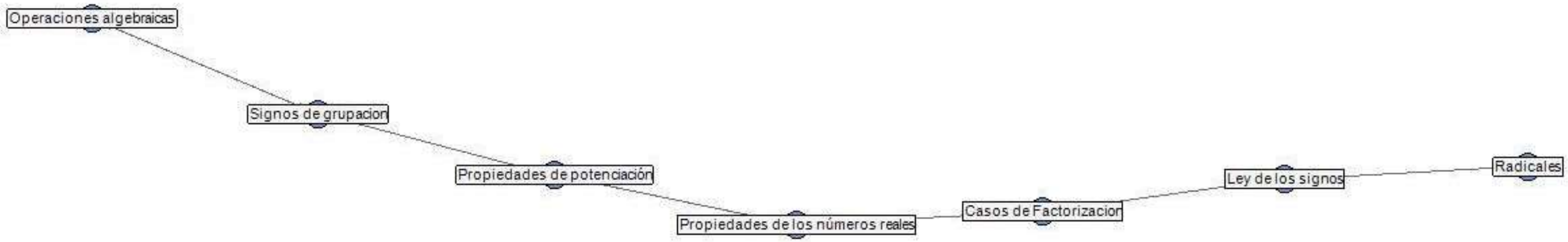

Radicales
Signos de grupacion
Casos de Factorizacion
Propiedades de los números reales
Operaciones algebraicas
Propiedades de potenciación
Ley de los signos

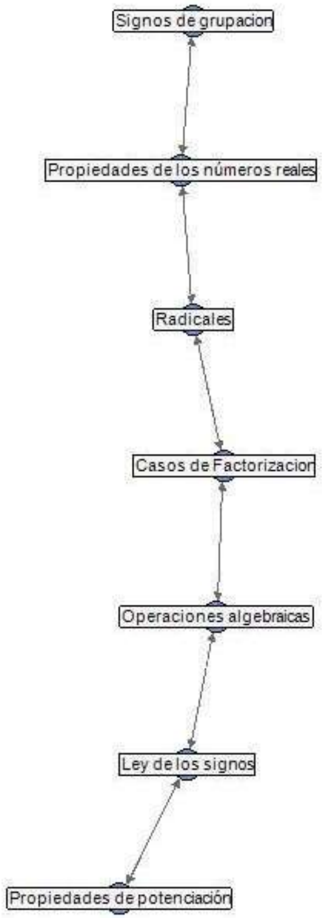

Radicales
Propiedades de los números reales
Operaciones algebraicas
Signos de grupacion
Casos de Factorizacion
Propiedades de potenciación
Ley de los signos

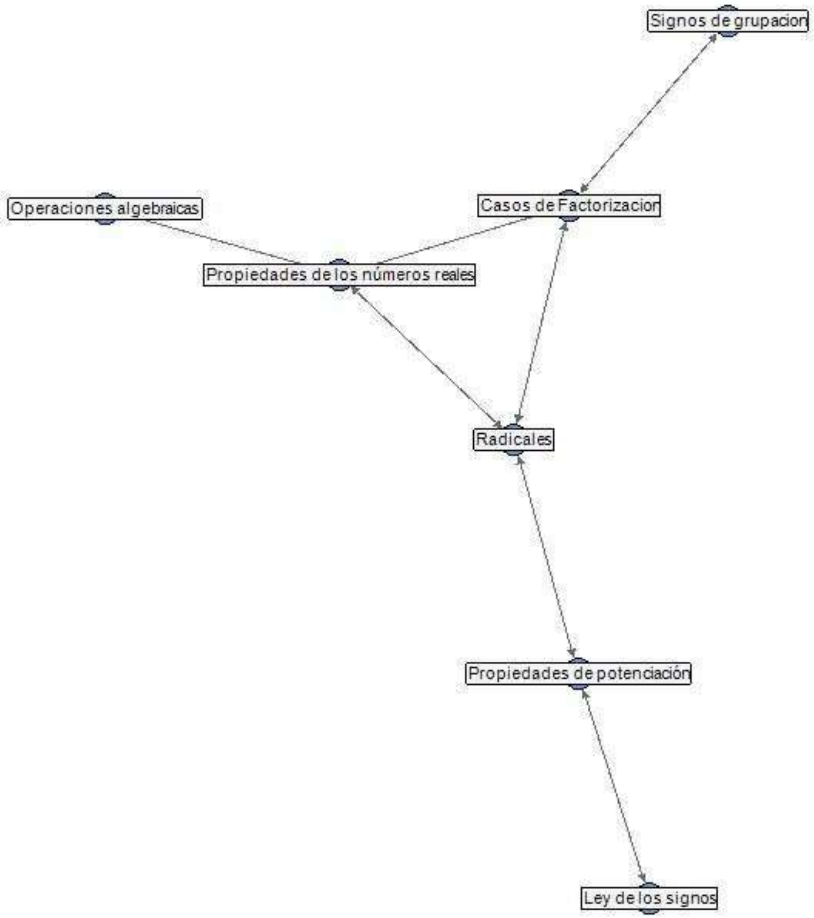

Radicales
Propiedades de potenciación
Signos de grupacion
Propiedades de los números reales
Operaciones algebraicas
Casos de Factorizacion
Ley de los signos


Radicales
Propiedades de potenciación
Signos de grupacion
Ley de los signos
Propiedades de los números reales
Casos de Factorizacion
Operaciones algebraicas


Radicales
Operaciones algebraicas
Propiedades de potenciación
Casos de Factorizacion
Signos de grupacion
Ley de los signos
Propiedades de los números reales


Operaciones algebraicas
Signos de grupacion
Propiedades de potenciación
Propiedades de los números reales
Casos de Factorizacion
Ley de los signos
Radicales


Signos de grupacion
Propiedades de los números reales
Radicales
Casos de Factorizacion
Operaciones algebraicas
Ley de los signos
Propiedades de potenciación


Signos de grupacion
Operaciones algebraicas
Casos de Factorizacion
Propiedades de los números reales
Radicales
Propiedades de potenciación
Ley de los signos

ANEXO N° 17

UNIVERSIDAD NACIONAL AUATÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN-MANAGUA

TEST-ÁLGEBRA

Primera Parte

NOMBRE:____

CARRERA:________________________FECHA: ________________

TELÉFONO: ___________________

Semántica

I. Lea detenidamente el contenido de cada columna antes de asociar. Coloque en la columna de la derecha la letra que le corresponde de la columna izquierda:

a) Expresión Algebraica	_____Son aquellos que tienen la misma parte literal afectada por los mismos exponentes.
b) Término	_____Es aquel que consta de un solo término.
c) Término Semejante	_____Es el que está formado por el máximo común divisor de los coeficientes de todos los términos y además, la letra o letras que se repite en todos los términos con el menor exponente.
d) Monomio	_____Suma o resta indicada de varios monomios.
e) Polinomio	_____Es una combinación de letras y números ligadas por los signos de las operaciones adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
f) Factor Común	_____Es el producto de un factor numérico por una o más variables literales.

II. Pase de Lenguaje común a lenguaje algebraico

N°	LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
1	Las tres quintas partes de un número aumentado en un cuarto.	x; $\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}$
2	La suma de un número par y el triple de su impar inmediato	
3	La raíz cúbica del cuadrado de la suma de dos números.	
4	¿Cuál es el número que disminuido en 20 da por diferencia 7?	

III. Pase de Lenguaje Algebraico al Lenguaje Común

N°	LENGUAJE ALGEBRAICO	LENGUAJE COMÚN
1	2x-5	El doble de equis disminuido en cinco
2	$X^m \cdot x^n = x^{m+n}$	
3	$\log_2 8$	
4	$(X + Y)^2$	

IV. Ejercicios prerrequisitos

N°	EJERCICIO	SOLUCIÓN
SIMPLIFIQUE:		
1	$-\{-[(2x-5)]-(x-3)\}$	
2	$x^3 . x^5 =$	
3	$\dfrac{y^7}{y^4} =$	
4	$\{[(z)^2]^3\}^4$	

V. Resuelva:

Un obrero pinta un muro cuya superficie es de $8x^2 + 6xy + 9y^2$ metros cuadrados, si le faltan por pintar $3x^2 + 8y^2$ metros cuadrados ¿Qué superficie lleva pintada?

UNIVERSIDAD NACIONAL AUATÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN-MANAGUA

TEST-ÁLGEBRA

Segunda Parte

NOMBRE:____

I. Unir con una línea las fichas de la columna izquierda con su correspondiente en la columna derecha.

$(x+a)(x+b)$	$ax + ay$
$(ax+b)(cx+d)$	$x^2 \pm 2xy + y^2$
$(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$	$acx^2 + x(ad+bc) + bd$
$a(x + y)$	$x^2 + x(a+b) + ab$
$(x \pm y)^2$	$x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$
$(x + y)(x - y)$	$x^3 \pm y^3$
$(x \pm y)^3$	$x^2 - y^2$

II. Factorice		
N°	EJERCICIO	SOLUCIÓN
1	$6x+3x-3y-6y=$	
2	$16z^4 - 25=$	
3	$m^6 - 12m^3n + 36n^2 =$	
4	$3r^2 + 8r + 5=$	
5	$8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$	
6	$27s^3 \pm 64t^3$	

III. Identifique los casos de factorización a través de las siguientes situaciones geométricas

a) $a(x+y) = ax + ay$

b) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

c) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

d) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

e) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

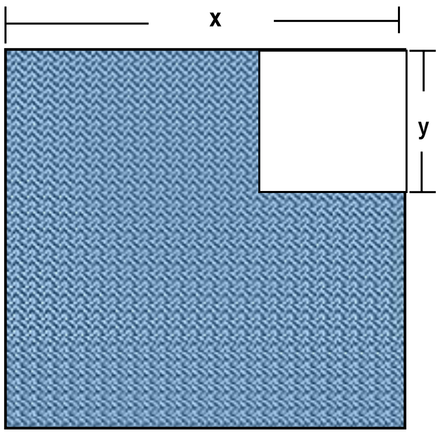
f) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

g) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

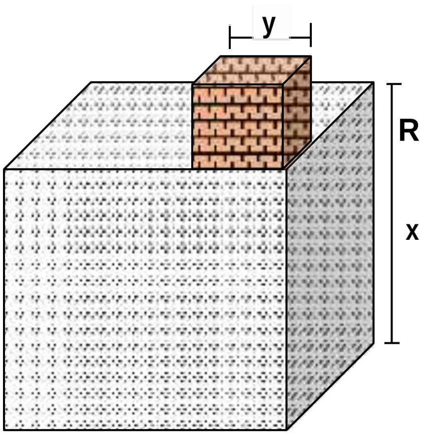
h) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

i) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$

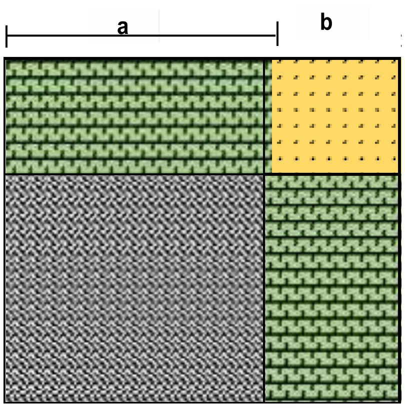
j) $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$



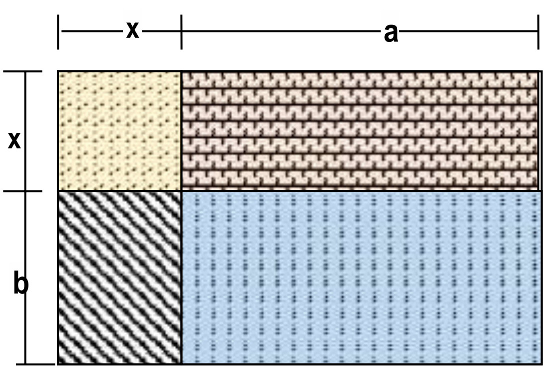
R:______________________________________



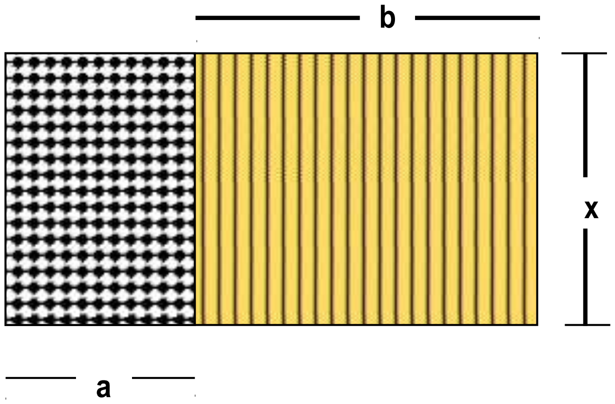
R:____



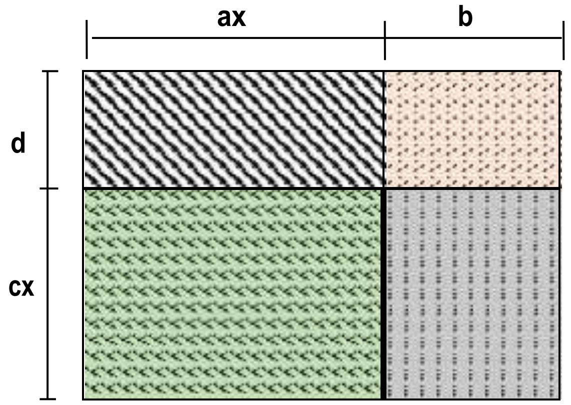
R: ____



R:____



R:____



R:____