



UNIVERSIDAD
NACIONAL
AUTÓNOMA DE
NICARAGUA,
MANAGUA
UNAN-MANAGUA

TESIS DE DOCTORADO

PROPUESTA DIDÁCTICA EN EL APRENDIZAJE
BASADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, UTILIZANDO
GEOGEBRA EN GEOMETRÍA ANALÍTICA

MSc. HEBERT ELIEL GARCÍA LÓPEZ

Tutora

DRA. MAYLING VANESSA ZAMORA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN
MATEMÁTICA APLICADA

¡Universidad del Pueblo y para el Pueblo!



UNIVERSIDAD
NACIONAL
AUTÓNOMA DE
NICARAGUA,
MANAGUA
UNAN-MANAGUA

CUR - MATAGALPA

**Propuesta didáctica en el aprendizaje basado en la
resolución de problemas, utilizando GeoGebra en
geometría analítica**

Tesis para optar al grado de
Matemática Aplicada

Autor

MSc. Hebert Eliel García López

Tutor

Dra. Mayling Vanessa Zamora

Agosto, 2024



DEDICATORIA

En primer lugar, a Dios, por concederme la vida, la salud y las fuerzas para continuar y poder culminar este arduo trabajo.

A mis padres, por su apoyo que me han brindado en todo momento, quienes han sido partícipes y artífices directos de mi esfuerzo y sacrificio a lo largo de mi formación académica, por haberme inculcado el valor de la perseverancia y otros valores morales como la amistad, la gratitud y la tolerancia, para ellos todo mi amor y respeto.

Dedicatoria a mis padres:

✚ Julio García García.

✚ Diega López Mendoza.

A los maestros del Programa “Doctorado en Matemática Aplicada” de UNAN-Managua, CUR-Matagalpa, en especial a la Dra. Mayling Vanessa Zamora, que con sus valiosos aportes, empeño y amor a la educación superior han contribuido a que sus estudiantes hayan llegado a ser grandes elementos dentro de la sociedad.

AGRADECIMIENTO

Ante todo, gracias a:

El Creador Omnipotente, Omnipresente y Omnisciente, dador de la vida, la sabiduría, el conocimiento e inteligencia y dueño de todas las cosas, nuestro Dios y por ayudarme a superar todas las dificultades que se me presentaron a lo largo de este proceso.

Mis padres que día tras día luchan incansablemente y que siempre me han brindado su apoyo moral y económico de manera incondicional en todo momento para que hoy sea un profesional exitoso, dotado de capacidades y poder aportar al desarrollo de la sociedad.

A todo el cuerpo docente del Programa “Doctorado en Matemática Aplicada” de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua UNAN-Managua, CUR-Matagalpa, en especial a mi tutora Dra. Mayling Vanessa Zamora, por su dedicación, paciencia y valiosos aportes que me brindó durante todo el proceso investigativo.

La dirección del Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí Central, San Dionisio, a cargo del Prof. Henry Antonio Sánchez Espino, por haberme permitido llevar a cabo en dicho centro esta investigación; al maestro Roberto César Alvarenga Sánchez y a sus estudiantes de undécimo grado del turno vespertino, quien también colaboró de manera significativa.

Ing. Fredys Mateo Zeledón Tórrez, Alcalde del Municipio de San Dionisio, quien siempre me ha motivado con sus sabios consejos a seguir adelante y por su apoyo brindado de manera incondicional en todo momento.

A cada una de estas personas que de una u otra manera me apoyaron para que este trabajo se llevara a cabo, ¡infinitamente gracias!

TRAYECTORIA DEL INVESTIGADOR

Hebert Eliel García López, obtuvo su Licenciatura en Ciencias de la Educación con Mención en Matemática en la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN-Mangua, 2019). Ostenta el grado de Máster en Matemática Aplicada, título otorgado por la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN-Mangua, 2023). En la actualidad desarrolla el proceso para finalizar el Programa Doctorado en Matemática Aplicada, a través de la investigación titulada, “Propuesta Didáctica en el Aprendizaje Basado en Problemas, utilizando GeoGebra en Geometría Analítica, bajo la tutoría de la Dra. Mayling Vanessa Zamora, coordinado por la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN-Managua), Centro Universitario Regional, (CUR-Matagalpa).

Por otra parte, a través de este proceso se ha evidenciado su interés, motivación y empeño en la contribución al campo de la investigación, quien ha publicado varios artículos científicos en diferentes revistas científicas, así como su aporte de carácter didáctico, metodológico y pedagógico al campo de la educación, específicamente en Geometría Analítica.

Su vocación como docente la empezó a cultivar desde el 2008, al integrarse en la Campaña Nacional de Alfabetización, donde enseñó a leer y a escribir a personas de su comunidad que en ese momento eran iletradas, posteriormente desde el 2009 al 2014, trabajó como maestro popular del programa de Educación de Jóvenes y Adultos en el municipio de San Dionisio.

En el nivel de Educación Secundaria se desempeña como docente desde el año 2019 en el Centro Escolar Público Rubén Darío, San Dionisio-Matagalpa, donde ha demostrado su amor por aportar mejoras al proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas mediante su compromiso con esta noble labor.

También ha laborado en la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, CUR-Matagalpa, a través de la coordinación y como docente en el programa, Universidad en el Campo, en el municipio de San Dionisio, donde ha dirigido trabajos investigativos en el nivel de pregrado.

CARTA AVAL DE TESIS DOCTORAL

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA

CENTRO UNIVERSITARIO REGIONAL MATAGALPA

“2024: Universidad Gratuita y de Calidad para Seguir en Victorias”

Matagalpa, 01 de julio de 2024.

Yo, Dra. Mayling Vanessa Zamora, docente Titular del Departamento de Ciencias de la Educación y Humanidades del Centro Universitario Regional de Matagalpa de la UNAN-Managua, hago constar que el Msc. Hebert Eliel García López, ha concluido el trabajo de tesis doctoral cuyo título es:

**“Propuesta Didáctica en el Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas,
Utilizando Geogebra en Geometría Analítica”**

En calidad de tutora de tesis informo que el trabajo cumple con la normativa vigente de posgrado por el Programa de Doctorado para optar al grado de Doctor en Matemática Aplicada; responde de manera notable a los objetivos propuestos y está listo para ser presentado y defendido ante el tribunal designado para tal efecto.

Dra. Mayling Vanessa Zamora
Docente Titular UNAN-Managua
Centro Universitario Regional-Matagalpa

ÍNDICE

DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTO	ii
CARTA AVAL DE TESIS DOCTORAL	iv
I. ÁREA	x
II. TEMA:	xi
III. INTRODUCCIÓN.....	1
IV. ESTADO DEL ARTE.....	4
V. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	11
VI. JUSTIFICACIÓN.....	13
VII. CUESTIONES DE INVESTIGACIÓN	15
VIII. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN	16
8.1. Objetivo General.....	16
8.1.1 Objetivos Específicos.....	16
IX. MARCO TEÓRICO	17
9.1. Proceso de enseñanza-aprendizaje	17
9.1.1. Proceso de enseñanza	17
9.1.1.1. Modelos de enseñanza o modelos educativos	17
9.1.1.1.1. Modelo tradicional	19
9.1.1.1.2. Modelo conductista	20
9.1.1.1.3. Modelo constructivista	22
9.1.1.1.4. Modelo cognitivista.....	22
9.1.2. Proceso de aprendizaje	23
9.1.2.1. Teorías del aprendizaje	24
9.1.2.1.1. La teoría del aprendizaje por descubrimiento.....	25

9.1.2.1.2.	La Teoría del Aprendizaje Significativo	26
9.1.2.1.3.	Teoría del aprendizaje cognitivo	33
9.1.2.1.4.	Teoría del aprendizaje constructivista.....	34
9.1.2.2.	Aprendizaje Basado en Problemas (APB).....	35
9.1.2.2.1.	Los orígenes del ABP.....	35
9.1.2.2.2.	Definición	36
9.1.2.2.3.	Características.....	38
9.1.2.2.4.	Ventajas.....	40
9.1.2.2.5.	Desventajas	43
9.1.2.2.7.	La Matemática y su relación con el Aprendizaje Basado en Problemas	47
9.1.2.2.8.	Resultados del Aprendizaje Basado en Problemas	48
9.2.	Recursos didácticos	51
9.2.1.	Definición	51
9.2.2.	Importancia	53
9.2.3.	Importancia de los recursos didácticos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.....	55
9.3.	Uso de GeoGebra como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje..	56
9.3.1.	GeoGebra	56
9.3.2.	Características de GeoGebra.....	57
9.3.3.	Importancia del uso de GeoGebra en la enseñanza de la Matemática	60
9.3.4.	Aplicación de GeoGebra en la enseñanza de la Geometría Analítica.....	61
9.4.	Geometría Analítica	62
9.4.1.	Principales precursores	62
9.4.2.	Concepto	63
9.4.3.	Elementos de la Geometría Analítica.....	64
9.4.3.1.	El punto	66
9.4.3.2.	La recta.....	67
9.4.3.3.	Segmento de recta	68

9.4.4.	La circunferencia	68
9.4.4.1.	Ecuación de la circunferencia con centro en el origen.....	69
9.4.4.2.	Ecuación de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r	70
9.4.5.	Aplicaciones de la Geometría Analítica.....	71
X.	SISTEMA CATEGORIAL	72
XI.	DISEÑO METODOLÓGICO	74
11.1	Paradigma de investigación	74
11.2	Enfoque de la investigación.....	74
11.3	Contexto de estudio.....	75
11.4	Diseño de la investigación según su alcance nivel de profundidad	76
11.5	Alcance temporal de la investigación	77
11.6	Población.....	78
11.7	Métodos utilizados	79
11.7.1	Método teórico.....	79
11.7.2	Método empírico	80
11.8	Técnicas e instrumentos de recopilación de la información	81
11.8.1	Técnicas	81
11.9	Validación y confiabilidad.....	84
11.10	Procesamiento de la información	86
XII.	Triangulación de datos	87
XIII.	Análisis y discusión de resultados	89
XIV.	CONCLUSIONES.....	127
XV.	RECOMENDACIONES	129
XVI.	REFERENCIAS	130
XVII.	ANEXOS	143
	Anexo 1: Evaluación inicial	
	Anexo 2: Evaluación final.....	

Anexo 3: Evaluación sistemática (Prueba de unidad de G. A.)	
Anexo 4: Entrevista a docente de Matemática de undécimo grado	
Anexo 5: Guía de observación	
Anexo 6: Resultados de la validación de instrumentos de medición, MSc. Juan Álvaro Ulloa Montoya	
Anexo 7: Resultados de la validación de instrumentos de medición, Dra. Nesly de Los Ángeles Laguna V.	
Anexo 8: Resultados de la validación de instrumentos de medición, Dra. María Elena Blandón Dávila	
Anexo 9: Resultados de la validación de instrumentos de medición, MSc. José Alfredo Jirón Zeledón	
Anexo 10: Propuesta Didáctica.....	

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Fases del aprendizaje basado en problemas	445
Tabla 2. Papel del docente y del estudiante en el ABP.....	497
Tabla 3. Unidad de Geometría Analítica, Francisco Díaz, Marlon Espinoza (2019)	63
Tabla 4. Matriz categorial.....	70
Tabla 5. Población y muestra tomada en cuenta en la investigación	78

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Postulados relacionados con el punto.....	67
Figura 2. Representación de una recta.....	67
Figura 3: Segmento del punto A al punto B.....	68
Figura 4: Circunferencia con centro C y radio r	69
Figura 5: Circunferencia con centro en el origen	70
Figura 6. Circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r	70

RESUMEN

Actualmente la invasión tecnológica y su utilización es inevitable, y particularmente en la educación es de vital importancia, facilita el trabajo, se hace en menor tiempo y con mayor calidad. Sin embargo, existen algunos docentes en este ámbito que aún omiten su uso. Por ello, con este estudio se aplicó una propuesta didáctica enfocada en el Aprendizaje Basado en Problemas, utilizando GeoGebra como recurso didáctico para el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica, aportando tanto metodológicamente a través del ABP y didácticamente mediante la incorporación de GeoGebra. Esta tesis servirá de referencia para futuras investigaciones nacionales e internacionales. Para ello se tomó una muestra de 23 estudiantes, a quienes se les aplicó un diagnóstico inicial y final, considerando conceptos básicos sobre la unidad objeto de estudio, a fin de conocer los niveles de conocimientos previos de los educandos y llevar a cabo este trabajo investigativo; guía de observación al proceso de enseñanza-aprendizaje y entrevista al docente de Matemática para determinar si utiliza la tecnología al impartir su clase, considerando así el enfoque cualitativo, con algunos elementos cuantitativos, donde se emplearon los métodos empíricos, teóricos y técnicas de investigación. A continuación, basado en los resultados que se obtuvieron, se procedió al procesamiento e interpretación de la información para la sustentación de tal investigación. Finalmente, se concluye que la implementación de la estrategia metodológica del ABP en Geometría Analítica utilizando GeoGebra implica el desarrollo del razonamiento, construcción de conocimientos, así como la toma de decisiones de los estudiantes, logrando un aprendizaje significativo.

Palabras claves: Enseñanza, Aprendizaje Significativo, GeoGebra, Geometría Analítica

ABSTRACT

Currently the technological invasion and its use is inevitable, and particularly in education it is of vital importance, it makes work easier, it is done in less time and with higher quality. However, there are some teachers in this area who still omit its use. Therefore, with this study, a didactic proposal focused on Problem-Based Learning was applied, using GeoGebra as a didactic resource for the meaningful learning of Analytical Geometry, contributing both methodologically through PBL and didactically through the incorporation of GeoGebra. This thesis will serve as a reference for future national and international research. For this, a sample of 23 students was taken, to whom an initial and final diagnosis was applied, considering basic concepts about the unit under study, in order to know the levels of prior knowledge of the students and carry out this investigative work. ; observation guide to the teaching-learning process and interview with the Mathematics teacher to determine if he uses technology when teaching his class, thus considering the qualitative approach, with some quantitative elements, where empirical, theoretical methods and research techniques were used. Next, based on the results obtained, the information was processed and interpreted to support such research. Finally, it is concluded that the implementation of the PBL methodological strategy in Analytical Geometry using GeoGebra involves the development of reasoning, construction of knowledge, as well as decision making of students, achieving significant learning.

Keywords: Teaching, Meaningful Learning, GeoGebra, Analytic Geometry

I. ÁREA

De acuerdo con el último reglamento aprobado del Sistema de Estudios de Posgrado y Educación Continua SEPEC–UNAN-Managua (2011, p. 35), en el artículo 94, esta investigación titulada “Propuesta didáctica en el Aprendizaje Basado en la resolución de Problemas, utilizando GeoGebra en Geometría Analítica”, corresponde al área de Educación, ya que está enfocada en dar aporte de carácter meramente educativo. Por una parte, de índole metodológica al incorporar el ABP y didáctica al utilizar el software GeoGebra como recurso didáctico para el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.

II. TEMA:

**PROPUESTA DIDÁCTICA EN EL APRENDIZAJE BASADO EN LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, UTILIZANDO GEOGEBRA EN
GEOMETRÍA ANALÍTICA**

III. INTRODUCCIÓN

La presente investigación titulada "Propuesta Didáctica en el Aprendizaje Basado en Problemas Utilizando GeoGebra en Geometría Analítica" surge de la necesidad de innovar en las metodologías de enseñanza de la Matemática, específicamente en la unidad objeto de estudio. En un contexto donde el aprendizaje activo se ha consolidado como una estrategia efectiva, ésta busca integrar el software como herramienta facilitadora en la implementación del ABP.

La presente propuesta abarca los contenidos correspondientes al plan de estudio vigente del Ministerio de Educación de Nicaragua, de la unidad número cuatro "Geometría Analítica", misma que se divide en tres secciones: Punto y segmento; la recta y la circunferencia, cada una de estas secciones con sus respectivos contenidos.

El desarrollo de este trabajo se centra en varios elementos cardinales. En primer lugar, se presenta un análisis detallado de los trabajos previos que fundamentan el uso del ABP y GeoGebra en la enseñanza de la Matemática, destacando estudios anteriores que han demostrado su efectividad en la mejora del aprendizaje. Además, se establece un marco teórico robusto que permite entender la lógica coherente entre los objetivos de la investigación y la metodología empleada. También es viable por el hecho de tener acceso a la adquisición de la información, a través de los informantes (estudiantes, docente de Matemática y la disposición de medios digitales y tecnológicos) que proporcionan datos valiosos para dar sustentación a este proceso.

La investigación parte de la necesidad de mejorar la comprensión y aplicación de conceptos de Geometría Analítica en estudiantes. Se fundamenta en la relevancia social del problema, considerando que una formación matemática sólida es esencial para el desarrollo

académico y profesional de los discentes. Las implicaciones prácticas y didácticas de esta propuesta incluyen la posibilidad de replicar el modelo en otras instituciones educativas, contribuyendo a la innovación pedagógica, ya que dispone de situaciones problemáticas contextualizadas que permiten encontrar el verdadero sentido e importancia de la Matemática.

El valor teórico radica en la integración de GeoGebra y ABP, dos herramientas que han mostrado resultados positivos por separado, pero cuya sinergia aún no ha sido suficientemente explorada. La utilidad metodológica se manifiesta en la creación de una guía didáctica que puede ser adaptada por otros docentes.

En términos generales, el campo de estudio de esta investigación se sitúa en la intersección entre la didáctica de la matemática y las tecnologías educativas, con un enfoque particular en la Geometría Analítica. La propuesta busca no solo mejorar la comprensión matemática de los estudiantes, sino también fomentar habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas reales. El impacto potencial de este trabajo se extiende a otras disciplinas científicas, donde el ABP y el uso de herramientas tecnológicas son fundamentales.

El informe final se divide en cinco capítulos que detallan el proceso metodológico y los hallazgos de la investigación. Cada capítulo está estructurado de manera que conduce al lector desde los conceptos básicos hasta los resultados avanzados. En el Capítulo I se presentan la Introducción, Planteamiento del Problema, Justificación, las cuestiones de la investigación y los Objetivos General y Específicos que son la guía de todo este proceso; en el Capítulo II se aborda todo lo referente a Estado del Arte; Capítulo III abarca la parte relacionado a Marco Teórico, donde se abordan las principales teorías, los fundamentos teóricos del ABP, GeoGebra y algunos aspectos relacionadas con Geometría Analítica; Capítulo IV Perspectivas de la Investigación, Capítulo V se encuentra estructurado por el

Análisis e Interpretación de Resultados, las Conclusiones y Recomendaciones, basadas en los hallazgos obtenidos, referencias y anexos.

IV. ESTADO DEL ARTE

Con el fin de situar el área problemática se ha realizado una revisión de literaturas vinculadas al tema de investigación la cual consistió en la búsqueda, lectura y análisis de textos digitales en el período comprendido del 2014-2017. En dichas fuentes consultadas se encuentran tesis de maestrías, doctorales, libros de texto y artículos de revista. Se localizaron varios estudios que abordan algunos aspectos relacionados con el tema objeto de investigación, realizados en diferentes países tales como España, Argentina, Chile, Perú, Colombia y Nicaragua. En su mayoría son tesis doctorales orientadas a nivel de secundaria y universitaria. Entre los trabajos de investigación y que tienen relación con la presente temática, se pueden citar los siguientes:

A nivel internacional

Ezquerro (2014), en su tesis desarrollada en Viscoya-España para optar al grado académico de Máster denominada “Uso de GeoGebra en la enseñanza de la Geometría Analítica en 4° de la ESO 2014”, se planteó como objetivo general: Presentar y fundamentar una metodología didáctica para enseñar el bloque de geometría analítica a alumnos de 4° de la ESO, basada en el Software GeoGebra.

El desarrollo de la tesis está fundamentado en el método analítico sintético. Para el proceso de ejecución del trabajo, la autora utilizó el método inductivo, acompañado de técnicas como el cuestionario para diagnosticar el estado de los estudiantes antes y después de plantearles las estrategias propuestas.

Con esta investigación se llegó a concluir que la utilización de GeoGebra facilita la labor de los docentes y sirve de motivación al alumnado; su uso en la enseñanza de Geometría Analítica favorece el aprendizaje significativo de las matemáticas y estimula el interés por parte de los alumnos.

Hernández (2017), en su trabajo final para optar al grado de Magíster en Didáctica de la Matemática, la cual lleva como título una secuencia didáctica para el tratamiento de la circunferencia como lugar geométrico, considerando métricas discretas y la euclidiana (Valparaíso Chile). Este trabajo tuvo como objetivo principal proponer una secuencia didáctica para la enseñanza de la circunferencia en estudiantes del tercer año medio.

Con esta investigación el autor se propuso responder a la interrogante: ¿Qué dificultades pueden presentar los estudiantes al no comprender la circunferencia como lugar geométrico?

Es importante destacar que el investigador se basó en las diferentes dificultades que el estudiante presenta vinculadas al momento de realizare algunas demostraciones, pues se les dificulta entender o identificar que la figura encontrada es un lugar o espacio geométrico, por otro lado, las dificultades pueden estar relacionadas a la falta de contextualización de las situaciones planteadas por el docente.

Meza (2016), en su tesis desarrollada en Lima-Perú, titulada “Influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la Geometría Analítica en los estudiantes del quinto grado de Secundaria de la Institución Educativa José De la Torre Ugarte, El Agustino – 2015”, para optar al título de Doctor en Ciencias de la Educación en Lima-Perú. Su objetivo fue determinar si la aplicación del software GeoGebra influye en el aprendizaje de la geometría analítica en los estudiantes de quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa José de la Torre Ugarte, El Agustino – 2015.

La muestra de estudio de dicha investigación es no probabilística e intencional, dado que el investigador seleccionó la muestra según el propio criterio, sin ninguna regla matemática o estadística, procurando que sea la más representativa posible, para lo cual es necesario conocer objetivamente las características de la población de estudiantes.

Esta investigación permitió concluir que la aplicación del Software GeoGebra influye significativamente en el aprendizaje de la capacidad de razonamiento y demostración de Geometría Analítica en los estudiantes de quinto grado de educación secundaria de la Institución Educativa José de la Torre Ugarte -El Agustino – 2015.

Torres Malaspina (2017), en su tesis (Lima-Perú) para optar al grado de Doctor en Educación, denominada “Aplicación del software GeoGebra para el mejoramiento del aprendizaje de la Geometría Analítica en estudiantes del segundo ciclo, Escuela Profesional de Administración y Negocios Internacionales de la Universidad "Alas Peruanas". Dicha investigación se realizó con el propósito de determinar la eficacia del software GeoGebra para el mejoramiento del aprendizaje de Geometría Analítica en estudiantes del segundo ciclo de la Escuela Profesional de Administración y Negocios Internacionales de la Universidad “Alas Peruanas”, Lima, 2016.

La muestra fue no probabilística, estuvo determinada por selección criterial por estudiantes en el curso de Matemática II del turno de la noche de la Escuela de Administración y Negocios Internacionales de la Universidad Alas Peruanas sede Lima. Se tomó 54 alumnos regulares a criterio del investigador. Los estudiantes fueron divididos en dos grupos: cada grupo compuesto por 27 alumnos.

Con esta investigación el autor concluyó que la comprensión de Geometría Analítica es importante y a la par de la tecnología, se debe también trabajar con lápiz y papel, utilizando

instrumentos de dibujos, evitando la dependencia del computador. El rol del profesor (a) es determinante en el proceso de resolución de la parte de generalización del problema y en la elección de las técnicas y procedimientos seguidos por los integrantes del estudio.

La aplicación del software GeoGebra mejora significativamente el aprendizaje de Geometría Analítica en estudiantes del segundo ciclo de la Escuela Profesional de Administración y Negocios Internacionales de la Universidad “Alas Peruanas”, Lima, 2016.

Aroca Araújo (2019) en su artículo científico desarrollado en Caldas-Colombia, denominado “La enseñanza de la Geometría Analítica en la educación media”. El problema de investigación fue comprender el porqué de la enseñanza de un conjunto de temas que caracterizaron un curso de Geometría Analítica de grado 10, durante un periodo determinado. El objetivo de esta investigación fue describir y analizar el porqué de la selección de dicho conjunto de temas caracterizaron el estudio de caso. Para lograr este objetivo fue necesario hacer una investigación etnográfica en un aula de clases, de una institución educativa pública, ubicada al norte de Colombia.

Cabe señalar que la metodología empleada respondió a dos momentos:

1) Una observación no participante y su respectivo registro audiovisual y transcripción de 14 sesiones de clases y la revisión de cuadernos.

2) El análisis de la información obtenida en el anterior momento, conllevó al empleo de una metodología de revisiones bibliográficas y documentales, sobre el desarrollo curricular en el contexto internacional y nacional de la enseñanza de la Geometría Analítica, en la educación media, para relacionar el análisis del porqué de la enseñanza del conjunto de temas con los aspectos que emergieron de dicha revisión. Al final, se aporta a la discusión sobre lo que podría ser el curso de Geometría Analítica del grado 10.

El tipo de investigación se caracterizó por ser de carácter etnográfico, que incluyó observación no participante y recolección de información, por medio del registro audiovisual de 14 clases, que comprendieron el semestre 2017-2, más sus respectivas transcripciones.

Con este trabajo se concluye que las limitaciones de la investigación son las que se derivan del estudio de caso, donde se escogió un solo curso de Geometría Analítica. Por ello, solo hay elementos de este caso, que invitan a la reflexión sobre la organización temática del curso de Geometría Analítica de grado 10° y su mayor conexión social con la vida de los profesores y de los estudiantes.

A nivel nacional

Guzmán (2017) en su tesis doctoral titulada Concepción didáctica para la integración de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, en la asignatura de Geometría Computacional, usando el asistente matemático GeoGebra, cuyo objetivo principal fue proponer una concepción didáctica que permita integrar las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, de forma tal que responda a las necesidades reales del actual modelo formativo en la FAREM Chontales.

Como resultado de dicha investigación se concluye que el uso de las tecnologías permite pasar de un currículo centrado en contenidos, a uno centrado en la resolución de problemas; el uso de asistentes matemáticos (GeoGebra), en las diferentes asignaturas permite motivar a los estudiantes y desarrollar un aprendizaje significativo, así mismo mediante el uso de las TIC, se pueden realizar construcciones geométricas que difieren de los métodos clásicos, pero con un fundamento matemático.

Aun cuando se considera a esta generación de estudiantes “nativos digitales” necesitan del acompañamiento del docente en el uso de las herramientas tecnológicas sobre todo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Con base en los resultados encontrados en cada una de las investigaciones analizadas y al no encontrar trabajos en donde se relacionen con una propuesta didáctica meramente en Geometría Analítica, aunque la que más se acerca al tema objeto de investigación es la tesis denominada “Uso de GeoGebra en la enseñanza de la Geometría Analítica en 4° de la ESO 2014”; sin embargo, se considera que de cierta forma carece de coherencia didáctica en los contenidos que en ella se abordan, en este caso tomando en cuenta la realidad de los estudiantes, (nivel de conocimientos, contexto social, económico, cultural,...) tampoco se le dio el tiempo adecuado para su abordaje tal a como lo expresa su autora en su valoración personal, en el apartado “Limitaciones del trabajo”, Ezquerro García (2014, p. 62), lo que le impidió por ejemplo, comparar los resultados obtenidos en la aplicación de un examen utilizando GeoGebra y otro con recursos tradicionales.

Los aspectos señalados en el párrafo anterior fue lo que motivó hacer el planteamiento del tema de investigación, pues se considera que alrededor de dichos señalamientos se pueden dar aportes, así como plantear problemas meramente de geometría analítica vinculados con el entorno, y tomando en cuenta el contexto del proceso de desarrollo con que cuenta el país respecto al sistema educativo, es decir, las condiciones de las cuales dispone el Ministerio de Educación Nicaragüense, que permitan en el estudiante despertar un mejor interés en querer ser protagonista de su propio aprendizaje sobre esta importante unidad que tiene muchas aplicaciones en nuestro entorno y relación con otras ciencias, (Ingeniería, Topografía, arquitectura, Física, entre otras).

Por otra parte, al momento de utilizar GeoGebra, es importante realizar una exploración completa de dicho programa, ya que este software ofrece múltiples opciones para

trabajar y desarrollar una clase interactiva, motivadora, innovadora que permita descubrir y construir conocimientos en los estudiantes, es decir no limitarse únicamente a proyectarlo, introducir determinado ejercicio en la ventana de entrada y obtener la respuesta de manera automática para comprobar resultados obtenidos manualmente.

V. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el contexto educativo actual se tiene acceso a una serie de herramientas tecnológicas, las cuales son utilizadas como recursos didácticos por algunos docentes, aportando a una dimensión diferente en los procesos de enseñanza-aprendizaje, complementando las formas tradicionales que comúnmente se practican. Aunque aún existen diversas zonas, (comunidades educativas más recónditas, sobre todo en áreas rurales y que se encuentran en menor escala de desarrollo cultural) en donde el acceso a estos medios es limitado, cada día es mayor el número de individuos que van incorporándose a esta globalización de la informática y sus recursos que dista mucho de alcanzar a todos por igual.

Con relación a la educación como derecho fundamental de las personas, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2008), referido en Lara Castro y Vaca Sierra (2017, p. 1) en sus objetivos propone: “Convencer y presionar a los gobiernos para que exista una mayor inversión en educación y principalmente en apoyar a la globalización de las tecnologías de la informática y comunicación, buscando la globalización del conocimiento y del uso de las TIC”.

Es por ello que en Nicaragua el Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional (GRUN), el 11 de enero del año 2007 decretó el derecho a la gratuidad de la educación y a través del Ministerio de Educación (MINED) ha venido y sigue promoviendo la actualización permanente de los docentes y demás actores de la educación en todos los niveles y modalidades, a través de capacitaciones, cursos, diplomados, entre otros en aras de contribuir a la mejora continua de los programas de estudio, la incorporación de estrategias metodológicas, la integración de las TIC mediante las instalaciones de aulas digitales, las teleclases para el fortalecimiento de contenidos, así como el canal Educativo en línea “Nicaragua Educa”, para que los maestros y estudiantes refuercen sus conocimientos y mejoren la calidad del aprendizaje.

La inclusión de la tecnología en la enseñanza de la Matemática, mediante la utilización de softwares como recursos didácticos, entre otras aplicaciones que se pueden instalar y usar desde algunos dispositivos (celulares, tablet y computadoras) le dan al docente la oportunidad de desarrollar un proceso más interactivo, dinámico, innovador y hasta más provechoso, ya que implica despojarse de cierta manera de las formas tradicionales de enseñanza. De manera que el docente se convierte en un mediador durante el proceso de aprendizaje del estudiante.

El hecho de no abordar la temática implicaría seguir impartiendo el estudio de la Geometría Analítica de manera tradicional, limitando la incorporación de medios tecnológicos y softwares (GeoGebra), que vienen a complementar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, (no a sustituirlos completamente, sino a mejorar) y en este caso particular alcanzar un aprendizaje significativo de la unidad objeto de estudio.

Por ende con esta investigación se pretende diseñar una propuesta didáctica enfocada en el Aprendizaje Basado en la resolución de Problemas, utilizando GeoGebra en Geometría Analítica, donde se propone responder la siguiente interrogante: ¿La metodología del aprendizaje basado en la resolución de problemas, utilizando GeoGebra como recurso didáctico favorece el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica?

VI. JUSTIFICACIÓN

Este trabajo investigativo tuvo como propósito evaluar una propuesta didáctica en el Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas, haciendo uso de GeoGebra como recurso didáctico en el Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría Analítica, implicando de esta manera un aprendizaje de manera interactiva entre docente y estudiante.

Dicha propuesta didáctica, además está enfocada en proporcionar datos más interactivos con el medio en el que se relaciona el estudiante al utilizar el software en Geometría Analítica, es decir, se proponen situaciones propias de su entorno, permitiendo una mejor asimilación del contenido en estudio de manera visual.

Por otra parte, se considera pertinente tratar este tema de forma más amplia, por el hecho de que abordar los contenidos correspondientes a la unidad de Geometría Analítica de manera tradicional, limita a los estudiantes a utilizar la tecnología, conscientes de que en el contexto actual en que se vive la invasión tecnológica es inevitable y por tanto se debe estar familiarizado con la misma, su uso y apropiación es de vital importancia, ya que vienen a complementar a los recursos que tradicionalmente se han venido utilizando en el proceso de enseñanza a lo largo de la historia, por esto es importante hacer uso del software GeoGebra en actividades que permitan un aprendizaje satisfactorio en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Con esta propuesta didáctica se espera beneficiar a docentes y estudiantes del área de Matemática, puesto que se presentan actividades resueltas y de manera contextualizadas para trabajarlas en el aula de clase, así mismo sugeridas como reforzamiento al estudio de la Geometría Analítica, ya sea en horas extraclase o tareas en casa.

La importancia de este trabajo también radica en proporcionar aportes, tanto de carácter metodológico, mediante la incorporación del ABP como una estrategia de enseñanza activa con situaciones contextualizadas, como didáctico a través de la utilización del software GeoGebra de manera dinámica e innovadora para el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.

Además, los estudiantes podrán hacer uso adecuado de la tecnología a través de la manipulación del software en Geometría Analítica, de tal manera que contribuya a alcanzar un aprendizaje de mayor satisfacción. Así mismo el uso de dicho programa implica desarrollar una clase más dinámica, innovadora, donde se aprovecha mejor el tiempo.

Finalmente, destacar que la realización de este trabajo es viable porque es una situación que probablemente está contextualizada en el Centro Escolar Público Rubén Darío, San Dionisio, Matagalpa y puede llevarse a cabo un trabajo de campo para la investigación, los informantes claves están dentro del mismo contexto, existe acceso a la información tanto con docentes y estudiantes y será un referente para futuras investigaciones científicas de carácter nacional e internacional.

VII. CUESTIONES DE INVESTIGACIÓN

A continuación, se presentan las interrogantes a las cuales se les ha dado respuesta durante el desarrollo de este trabajo de investigación científica:

1. ¿Cómo se encuentra actualmente el proceso de enseñanza-aprendizaje basado en problemas en Geometría Analítica?
2. ¿Qué estrategias metodológicas son apropiadas para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica utilizando como recurso didáctico el software GeoGebra?
3. ¿Cómo diseñar actividades para fortalecer el proceso enseñanza-aprendizaje de los contenidos de Geometría Analítica, mediante la metodología del ABP, utilizando como recurso didáctico el software GeoGebra?

VIII. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

8.1. Objetivo General

Evaluar una propuesta didáctica enfocada en el Aprendizaje Basado en Problemas, haciendo uso de GeoGebra como recurso didáctico para el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.

8.1.1 Objetivos Específicos

8.1.1.1. Diagnosticar el nivel de aprendizaje de los estudiantes en Geometría Analítica a través de las estrategias didácticas utilizadas en el Proceso Enseñanza-Aprendizaje.

8.1.1.2. Describir los fundamentos teóricos que sustentan la estrategia metodológica enfocada en el Aprendizaje Basado en Problemas.

8.1.1.3. Aplicar una propuesta didáctica enfocada en el Aprendizaje Basado en Problemas, haciendo uso de GeoGebra como recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica.

IX. MARCO TEÓRICO

9.1. Proceso de enseñanza-aprendizaje

9.1.1. Proceso de enseñanza

El proceso de enseñanza implica una serie de acciones investigativas que permiten hacer diagnósticos, plantear hipótesis, diseñar estrategias, innovar e implementar las mejores prácticas educativas. El proceso de enseñanza busca definir qué se enseña y cómo se enseña, con el objetivo de que el estudiante construya conocimientos, así como para la mejora continua de la calidad educativa.

De acuerdo con Dorn y Parot (2004), citados en Jiménez Corona (2013, p. 77), abordan que: “Enseñanza se define como la transmisión de conocimientos teóricos o prácticos, de técnicas o métodos, realizada por un profesor dirigida al aprendiz”.

De manera análoga lo expresado por los autores citados anteriormente se refiere a que la enseñanza es el proceso mediante el cual se logra proporcionar conocimientos, ya sea de manera práctica o teórica sobre determinado tópico. Por tanto, en educación la enseñanza se da cuando el docente en su desempeño brinda al estudiante la oportunidad de poder adquirir nuevos conocimientos, habilidades y destrezas.

9.1.1.1. Modelos de enseñanza o modelos educativos

Como se sabe, toda realidad va cambiando con el paso del tiempo y la educación no es la excepción de tal fenómeno. Esta va evolucionando a la par de la tecnología y por supuesto, las nuevas generaciones van demandando nuevas formas de enseñanza, es decir, un nuevo modelo de sociedad requiere que se le enseñe de una manera diferente, lo que implica que los responsables de este proceso se vayan adaptando y a la vez diseñando nuevos modelos que respondan a las necesidades de los estudiantes. Para ello, se plantean distintas

cuestiones, que pueden ser el enfoque, la metodología, así como el método de evaluación empleado en el proceso.

Respecto a modelos educativos Vega Aguilar y Yépez Herrera (2011, p. 29), sostienen lo siguiente:

El núcleo del proceso de enseñanza consiste en el diseño de los ambientes donde los alumnos pueden interactuar y estudiar de qué manera aprender. Dado que los modelos proporcionan herramientas de aprendizaje a los estudiantes, resultan extraordinariamente adecuados para elaborar programas destinados a los estudiantes.

Con base en lo expresado anteriormente, los modelos educativos se pueden entender entonces como la descripción del ambiente en que interactúan los estudiantes para adquirir conocimientos. Las descripciones pueden abarcar la planificación del currículo, cursos, unidades didácticas,

De acuerdo con Tünermann Bernheim (2008, p. 15):

El modelo educativo es la concreción, en términos pedagógicos, de los paradigmas educativos que una institución profesa y que sirve de referencia para todas las funciones que cumple (docencia, investigación, extensión, vinculación y servicios), a fin de hacer realidad su proyecto educativo.

En otras palabras, los modelos de enseñanza son herramientas que adoptan los docentes para llevar a cabo sus funciones a través del desarrollo de actividades didácticas y pedagógicas para alcanzar de alguna manera los objetivos del proceso de enseñanza-aprendizaje propuestos. Sin embargo, es importante destacar que cada docente utiliza dichos modelos de acuerdo a las condiciones de las que dispone, así como de sus capacidades que posee. Además, se debe tener presente que cada estudiante tiene un ritmo distinto de aprendizaje, por lo que no es conveniente adoptar un solo modelo de enseñanza, puesto que

el hecho que uno de ellos dé buenos resultados, no significa que funcionará igual para todos los discentes.

Cabe señalar que de acuerdo a diversos autores existen varias formas de clasificar los tipos de modelos educativos; sin embargo, en este apartado se describen los más comunes en el campo de la educación.

9.1.1.1.1. Modelo tradicional

Vives Hurtado (2016, p. 43) considera que:

En este modelo se concibe al estudiante como un ser pasivo, es decir, un receptor pasivo del conocimiento y objeto de la acción del maestro. El conocimiento se considera como algo que ya está dado y determinado por un sabedor exclusivo que es la teoría y/o el docente.

De acuerdo con lo expresado por Vives Hurtado, en el modelo tradicional el maestro es quien lo sabe todo y dota de información al estudiante, donde este último es un agente pasivo, que simplemente recibe la información, le limita el protagonismo para que pueda crear su propio conocimiento. Esto, sin dudarle impide al estudiante participar en un ambiente donde sus saberes previos puedan ser tomados en cuenta, en el que se propicie el trabajo colaborativo, se fomente la participación, el debate, y el desarrollo del pensamiento crítico de los discentes.

De manera similar Álvarez Ruiz (2020, p. 11) considera que:

En definitiva, el contenido en el aula de clases tradicional tiene una naturaleza estática. El maestro lo toma tal cual lo ha elaborado la comunidad científica y en esa forma inerte lo transmite al estudiante. Este debe recibir sin alteraciones los contenidos y debe, de igual forma, evitar la modificación.

El modelo tradicional procura formar al estudiante mediante la acción de moldear su carácter, voluntad, virtud y conducta tomando como ejemplo de modelo la figura del profesor. El modelo educativo tradicional o enseñanza tradicional, se centra en el profesor, quien determina todo el proceso de enseñanza y aprendizaje es la fuente de información que durante el proceso de la transmite al discente.

En este modelo el estudiante es únicamente un receptor de información, restringiendo la oportunidad de poder actuar, pensar, proponer, sugerir y explorar sus conocimientos que éste ha adquirido como producto de sus vivencias, de su interacción con el medio, ya que docente es el que todo lo sabe y lo transmite.

9.1.1.1.2. Modelo conductista

En relación a este modelo, Céspedes Reyes (2017, pp. 41-42) afirma que:

El conductismo describe relaciones entre eventos que se dan de manera cotidiana. Las conductas que producen consecuencias positivas tienden a repetirse, mientras que aquellas que no generan resultados positivos o que generan resultados claramente negativos, tienden a desaparecer de nuestro repertorio de conductas.

En el conductismo los conocimientos se adquieren a partir de las experiencias que se dan en la vida cotidiana de los individuos, mediante la influencia de estímulos y/o fenómenos externos que van poco a poco moldeando el comportamiento de las personas.

Escribano González (1992), citado en Casasola (2018, p. 36) afirma que:

Los modelos de enseñanza conductual se aplican en todos los niveles de la educación, desde preescolar hasta secundaria, pero especialmente en la educación especial. Según este enfoque, el aprendizaje está condicionado por el grado de estímulos que ofrece el ambiente. El sujeto que aprende es un receptor pasivo de las influencias externas del ambiente. Esto tiene relevancia aplicado al contexto educativo porque si los docentes logran regular o controlar las fuerzas del medio que causan ciertas conductas en los estudiantes, podrían modelar el entorno para aumentar el aprendizaje. En este sentido, la teoría conductista se

interesa por las conductas observables que se pueden modificar mediante la manipulación de estímulos ambientales.

Los conductistas creen que las fuerzas externas del medio provocan respuestas determinadas en los sujetos. Estas fuerzas provocan o debilitan respuestas concretas y específicas, de tal manera que en éstas aumentan o disminuyen la probabilidad de que se produzcan las conductas. Las implicaciones en la enseñanza son enormes. Si los profesores son capaces de regular las fuerzas del medio causantes, en parte, de las conductas del alumno, entonces, aquellos podrán modelar el entorno, de tal manera que se aumente el aprendizaje y otros resultados educativos importantes.

En la teoría conductual, a diferencia del pensamiento psicodinámico tradicional, las causas subyacentes de la conducta no tienen importancia, les interesan las conductas observables, que a según ellos, se pueden modificar mediante la manipulación de los estímulos ambientales. Incluso, las fuerzas internas, tales como la ansiedad o el estrés, se pueden modificar con técnicas conductuales específicas y apropiadas.

En referencia a lo expresado por Escribano González, el estudiante está meramente influido por las características del medio en que se desenvuelve, no obstante, en este caso, el maestro juega un papel determinante, ya que debe tener la capacidad de controlar algunos factores que originan ciertos comportamientos de manera no tan favorables en los estudiantes, pues el actuar del docente de manera eficiente permitirá lograr un mejor aprendizaje en los discentes que son y deben ser el centro de la enseñanza.

En este enfoque la conducta es resultado del ambiente y su asociación por medio de las experiencias vividas del individuo, en otras palabras, se fundamenta en la metodología experimental que surge de las vivencias del día a día de cada persona.

9.1.1.1.3. Modelo constructivista

Para Carretero (2005, p. 24):

El constructivismo sostiene que el individuo, en su aspecto cognitivo, social y afectivo, no es simplemente un producto del ambiente ni el resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia. El sujeto impone al mundo un significado a partir de su experiencia. La realidad es un proceso constructivo.

Este modelo considera que el individuo no depende meramente de la influencia del medio en el que interactúa, sino que el conocimiento es producto de su propia construcción, es decir aquí el individuo ha sido un agente activo, partícipe de sus propios saberes, quien ha dejado de ser un simple receptor de información, en donde sus experiencias vividas son también producto de sus conocimientos y por supuesto que le da mayor importancia porque también es fruto de su esfuerzo puesto en práctica durante cada proceso.

9.1.1.1.4. Modelo cognitivista

“La enseñanza desde el enfoque cognitivo se centra en los diversos temas relacionados con el aprendizaje, el conocimiento, el razonamiento, la emoción, la memoria, entre otros. Algunos autores llaman al modelo de enseñanza cognitivo, pedagogía cognitiva” Alvarado (2016), citados por Casasola (2018, p. 45), en su tesis doctoral sobre “Un estudio fenómeno gráfico sobre estrategias didácticas en docentes y habilidades metacognitivas en estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Instituto Tecnológico de Costa Rica”, considera que:

La pedagogía cognitiva tiene como prioridad el aprendizaje basado en problemas, el cual contribuye con la formación en competencias, fundamental en educación superior o universitaria. En el contexto universitario el desarrollo de las competencias de resolución de

problemas es fundamental. Cuando se habla en pedagogía cognitiva de aprendizaje basado en problemas se refiere a los procesos educativos que compromete a los estudiantes a investigar y resolver cooperativamente diferentes situaciones problemáticas.

La pedagogía cognitiva centra su atención en el desarrollo de habilidades cognitivas del individuo a través de la resolución de problemas, donde este pone en práctica el razonamiento, el pensamiento crítico para poder encontrar solución a determinadas situaciones problemáticas planteadas. De esta forma se promueve también el trabajo colaborativo, implicando además el desarrollo de competencias.

Escribano A. (2004, p. 285) sostiene que:

Las teorías del desarrollo cognitivo ofrecen una base científica a la educación para dar cuenta de los mecanismos cognitivos implicados en el aprendizaje. Estos enfoques se han centrado en tres puntos básicos: cómo funciona la mente de los niños en los diversos estadios del desarrollo, cómo hacen los niños la transición de un estadio al siguiente, qué puede hacer la educación para garantizar que los niños alcancen su potencial cognitivo. En sentido general, el interés por potenciar el desarrollo cognitivo desde este enfoque de enseñanza se da en todos los niveles o etapas del desarrollo, esto es, adolescentes y adultos. El interés fundamental consiste en optimizar el potencial intelectual de los estudiantes.

Estas teorías, además aportan las bases científicas en torno al proceso educativo que explican cómo funcionan los factores cognitivos involucrados en el aprendizaje del individuo, tales como el funcionamiento de la mente de los niños en las diferentes etapas de desarrollo, la forma en que transitan los niños de un contexto a otro y los posibles aportes que puede dar la educación en función de alcanzar un alto desarrollo cognitivo de los niños; sin embargo, este enfoque también está presente en todas las etapas de la vida, aunque su mayor influencia se da en la etapa de la niñez, según lo expresado anteriormente por Escribano.

9.1.2. Proceso de aprendizaje

El ser humano está aprendiendo y evolucionando constantemente en diferentes campos y niveles, dependiendo estrechamente de las circunstancias que se le presentan. Es

decir, este se adapta a las condiciones propicias del entorno en que vive y nadie escapa de ella. De manera general el aprendizaje se puede entender como la obtención del conocimiento, habilidades, valores, actitudes a través de diferentes vías, tales como el estudio, las experiencias cotidianas, la ejercitación o algo que se puede dar o se aprende por intuición.

De acuerdo a Serrano (1990), citado en Maldonado y Sarmiento (2007, p. 41) sostiene que:

El aprendizaje es un proceso activo en el cual cumplen un papel fundamental la atención, la memoria, la imaginación, el razonamiento que el alumno realiza para elaborar y asimilar los conocimientos que va construyendo y que debe incorporar en su mente en estructuras definidas y coordinadas.

El aprendizaje está referido a la actividad en donde el ser humano aprende de manera espontánea donde su pensamiento está conformado por todo un conjunto de actividades interconectadas, de manera activa y el maestro debe tener la capacidad de interpretar los contenidos en función de estas operaciones que son la base de lo que se propone enseñar.

El aprendizaje es un cambio duradero que surge del producto de las experiencias que los seres humanos viven en el entorno, o sea, es la acumulación de las vivencias del día a día de cada individuo adquiridas en el ambiente en que se desenvuelve.

9.1.2.1. Teorías del aprendizaje

Sin dudarlo, las teorías ocupan un papel importante en todo proceso investigativo, dado que son la base del conocimiento y que dan soporte a toda actividad práctica. Las teorías educativas se pueden entender como campos conceptuales que han servido para describir, explicar y orientar el quehacer educativo, las cuales se refieren a un hecho social desarrollado en torno a la persona y a la sociedad donde se desenvuelve.

Para Gallardo Vásquez y Camacho Herrera (2008, p. 24), destaca que:

El propósito de las teorías educativas es el de comprender e identificar los procesos de adquisición de conocimiento y a partir de ellos, tratar de describir métodos para que la instrucción sea más efectiva. Es en este último aspecto en el que se basa el diseño instruccional, que se fundamenta en identificar cuáles son los métodos que deben ser utilizados en el diseño del proceso de instrucción, y también de determinar en qué situaciones estos métodos deben ser empleados. De la combinación de estos dos elementos: métodos y situaciones, se determinan los principios y las teorías del aprendizaje.

Las teorías del aprendizaje son valiosas herramientas que mediante de resultados obtenidos en el proceso de aprendizaje permiten establecer los modelos más apropiados para la obtención de un mejor aprendizaje.

Las teorías aprendizaje son pautas que de manera sistemática y dinámica sirven para guiar el proceso de aprendizaje, cada una de ella sustentada en investigaciones realizadas durante determinado espacio de tiempo, es decir cada teoría ha de surgir como producto de los resultados obtenidos a partir de investigaciones científicas realizadas en el campo de la educación.

9.1.2.1.1. La teoría del aprendizaje por descubrimiento

Santrok (2004), Citado por Eleizalde et al. (2010, p. 4) sostiene que:

El aprendizaje por descubrimiento es el aprendizaje en el que los estudiantes construyen por sí mismos sus propios conocimientos, en contraste con la enseñanza tradicional o transmisora del conocimiento, donde el docente pretende que la información sea simplemente recibida por los estudiantes.

Esta teoría expone que el estudiante adquiere los conocimientos por sí mismo, lo que puede ocurrir por accidente o por el interés de querer saber algo, es decir, se puede dar de diferentes maneras. En este sentido Santrok al considera que los estudiantes deben aprender a través de un descubrimiento guiado que tiene lugar durante una exploración

motivada generalmente por la curiosidad, lo cual lo conducirá a obtener un nuevo conocimiento que le servirá en su vida.

Martínez y Zea (2004), referidos por Eleizalde et al. (2010, p. 273), destacan que:

Una de las características más relevantes del aprendizaje por descubrimiento, es que el contenido a ser aprendido, no se facilita en su forma final, sino que tiene que ser descubierto por el sujeto, lo que requiere un rol activo de parte del estudiante.

En el aprendizaje por descubrimiento al estudiante no se le brinda toda la información, sino que se le brinda alguna pista para él busque alguna estrategia para llegar a la solución a un problema planteado y es en este proceso donde el discente se vuelve un agente activo en el proceso y puede construir su propio aprendizaje.

9.1.2.1.2. La Teoría del Aprendizaje Significativo

El aprendizaje significativo es el que conduce a la creación de estructuras de aprendizaje de conocimiento mediante la relación sustantiva entre la nueva información y los conocimientos previos del estudiante. Se puede decir entonces que el aprendizaje significativo es la concatenación entre los saberes previos del alumno con sus nuevos conocimientos o información proporcionada.

Por esta razón, Ausubel (1976), citado en Rodríguez Palmero (2004, p. 2), sostiene que: “El aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal”.

Para Paucar (2015), referido en Torres Malaspina (2017, pp-95-96), el aprendizaje significativo es: “Aquel instante que se convierte en momento en el que el estudiante posee

la capacidad de emitir un significado, para ello es necesario que éste logre establecer relaciones sustantivas entre la nueva información y los saberes previos”.

Con relación a lo expresado por Ausubel y Paucar, el aprendizaje significativo ocurre precisamente en el momento en que el sujeto tiende a relacionar el conocimiento nuevo que ha adquirido con sus saberes previos y por ende lograr enriquecer sus conocimientos que los manifestará de manera permanente en los diferentes ámbitos en que éste interactúa con el medio, así como con sus semejantes.

Ausubel pensaba que aprender nuevos conocimientos dependía de lo que se haya conocido con anterioridad. Que se llega a conocer más sobre un tema a través de la construcción de una red de conceptos e ir añadiendo nuevos a los ya existentes.

Por lo tanto, aprendizaje significativo es aquel que es permanente, genera un cambio cognitivo en el individuo, mediante la relación que se logra establecer entre la nueva información que se adquiere y los saberes previos que se tiene como producto de la observación, la ejercitación, experiencias vividas, entre otros factores que favorecen este proceso.

Para promover el aprendizaje significativo se debe proporcionar retroalimentación productiva, familiaridad, explicar con ejemplos, guiar el proceso cognitivo y fomentar estrategias de aprendizaje. Éste tiene las ventajas que produce retención más duradera de la información, facilita la adquisición de nuevos conocimientos relacionados con otros previos, es activo, ya que depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte del alumno. Además, es personal por cuanto la significación de aprendizaje se deriva de los recursos cognitivos del estudiante.

Por tanto, la teoría del aprendizaje significativo ha permitido crear programas educativos, mejorar currículum y planes de estructuras que han venido a ayudar a un mejor proceso de enseñanza-aprendizaje.

Algunas situaciones donde se da el aprendizaje significativo podrían ser:

El estudiante que aprende a calcular el perímetro y áreas de figuras geométricas y las aplica en su vida cotidiana u otras ramas, como la construcción, la ingeniería, en los cultivos, etc.

El estudiante que ya conoce el concepto de triángulo y su representación, si el nuevo conocimiento es clasificación de los triángulos, según la medida de sus lados, entonces éste puede clasificarlos en equiláteros, isósceles y en escalenos, es decir está relacionando el conocimiento ya existente con la nueva información y a la vez creando una nueva estructura.

Ausubel et al. (1997), referidos en Sarmiento Santana (2007. p. 43), señalan tres tipos de aprendizajes, que pueden darse en forma significativa, éstos son:

Aprendizaje de Representaciones: Es el aprendizaje más elemental, que se da cuando el niño adquiere el vocabulario. Consiste en la atribución de significados a determinados símbolos al igualarlos con sus referentes (objetos, por ejemplo). El niño primero aprende palabras que representan objetos reales con significado para él aunque no los identifica como categorías.

Este tipo de aprendizaje es un proceso fundamental en el desarrollo cognitivo de los niños, caracterizado por la adquisición de vocabularios, así como la capacidad de atribuirles significados a símbolos. Durante la adquisición de vocabulario los niños aprenden palabras que representan objetos reales y con significado personal para ellos. Posteriormente se da la atribución de significados, donde los niños comienzan a igualar símbolos (como palabras) con sus referentes (objetos u otras entidades).

Aprendizaje de Conceptos: Los conceptos se definen como objetos, eventos, situaciones o propiedades que se designan mediante algún símbolo o signos Ausubel et al. (1997). El niño, a partir de experiencias concretas, comprende que la palabra "pelota" pueden usarla otras personas refiriéndose a objetos similares. Los conceptos son adquiridos a través del proceso de formación (las características del concepto se adquieren a través de la experiencia directa, por ejemplo, el niño aprenda el concepto de "pelota" a través de varios encuentros con su pelota y las de otros niños) y de asimilación (se produce a medida que el niño usa las combinaciones disponibles en su estructura cognitiva, por ejemplo, el niño podrá distinguir distintos colores, tamaños y texturas y reconocer que se trata de una "pelota").

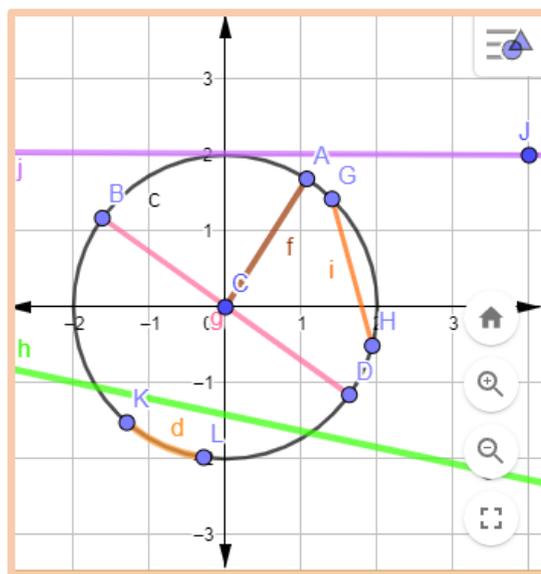
Este tipo de aprendizaje implica el desarrollo cognitivo y la comprensión del mundo real en el que interactúan los individuos. En este proceso se dan algunos fenómenos, como, la definición de conceptos, mismos que pueden referirse a objetos, eventos o situaciones que se representan mediante símbolos o signos; la formación de conceptos, que es donde se da la adquisición de las características del concepto a través de la experiencia directa. Por ejemplo, el niño empieza a contar juguetes. Tiene tres muñecos y cuenta: "uno, dos, tres"; la asimilación de conceptos, a medida que el niño utiliza las combinaciones disponibles en su estructura cognitiva, puede distinguir diferentes características como colores, tamaños, por ejemplo, empieza a identificar patrones y relaciones numéricas, como que "cinco" es mayor que "tres".

Aprendizaje de Propositiones: Exige captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones, las cuales se obtienen cuando el alumno forma frases que contienen dos o más conceptos, este nuevo concepto es asimilado al integrarlo en su estructura cognitiva con los conocimientos previos. Dicha asimilación puede hacerse por: diferenciación progresiva (cuando el concepto nuevo se subordina a conceptos más inclusores ya conocidos por el alumno), por reconciliación integradora (cuando el concepto nuevo es de mayor grado de inclusión que los conceptos que el alumno ya conocía) y por combinación (cuando el concepto nuevo tiene la misma jerarquía que los conocidos).

Según Ausubel, en este aprendizaje se da la comprensión de ideas expresadas en forma de proposiciones, las cuales contienen dos o más conceptos interrelacionados. En este proceso se dan aspectos como:

Captar el significado de proposiciones: Implica entender ideas expresadas en frases que combinan múltiples conceptos.

Figura 1: Algunos para construir conceptos matemáticos



Fuente: Elaboración propia en GeoGebra.

Integración en la estructura cognitiva: El nuevo concepto se asimila al relacionarse con conocimientos previos que posee el estudiante.

Diferenciación progresiva: El nuevo concepto se subordina a conceptos más inclusores ya conocidos. Por ejemplo, aprender que "un triángulo equilátero es un tipo de triángulo".

Reconciliación integradora: El nuevo concepto es más inclusivo que los conceptos previos. Por ejemplo, entender que "todas las formas geométricas son figuras" incluye a "cuadrados, círculos, y triángulos".

Combinación: El nuevo concepto tiene la misma jerarquía que los conocidos. Por ejemplo, aprender que una circunferencia y un círculo tienen propiedades relacionadas, pero no son lo mismo: una circunferencia es el perímetro de un círculo, mientras que un círculo incluye todos los puntos dentro de la circunferencia.

Contexto: Un estudiante está aprendiendo sobre las propiedades de la circunferencia en un sistema de coordenadas cartesianas.

Proposición: "La ecuación de una circunferencia con centro en el origen $C(0, 0)$ y radio r es $x^2 + y^2 = r^2$ "

Proceso de Aprendizaje:

1. Captar el Significado:

El estudiante comprende que esta proposición incluye conceptos como "circunferencia", "centro en el origen", "radio" y "ecuación".

Entiende la relación entre estos conceptos expresada en la proposición: todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ están a una distancia r del origen.

2. Diferenciación Progresiva:

El aprendiz ya sabe lo que es una circunferencia y aprende que una circunferencia con centro en el origen tiene una forma específica de ecuación.

La proposición se subordina a su conocimiento existente sobre circunferencias y coordenadas cartesianas.

3. Reconciliación Integradora:

La proposición es más inclusiva que los conceptos previos, ya que relaciona la geometría de la circunferencia con su representación algebraica en el plano cartesiano.

El discente integra este conocimiento con su comprensión general de las ecuaciones y las gráficas.

4. **Combinación:**

El educando puede relacionar esta proposición con otras proposiciones sobre ecuaciones de formas geométricas, como la ecuación de una recta o la parábola, que tienen una jerarquía similar.

Aplicación

El estudiante puede aplicar la proposición al resolver problemas. Por ejemplo, determinar si un punto dado está en la circunferencia, o encontrar el radio de una circunferencia dada su ecuación.

Problema: "Determina si el punto (3, 4) está en la circunferencia con centro en el origen y radio 5."

Solución:

Utilizando la proposición ($x = 3, y = 4$ y $r = 5$)

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$3^2 + 4^2 = 25$$

$$9 + 16 = 25$$

$$25 = 25$$

$$r^2 = 5^2$$

$$r = 5$$

Dado que $x^2 + y^2 = r^2$, el punto (3, 4) está en la circunferencia.

Este ejemplo ilustra cómo el aprendizaje de proposiciones permite a los estudiantes integrar nuevas ideas complejas con sus conocimientos previos, facilitando una comprensión más profunda y significativa de los conceptos matemáticos relacionados con la circunferencia en el plano cartesiano.

9.1.2.1.3. Teoría del aprendizaje cognitivo

Esta teoría como su nombre lo indica está centrada en los procesos cognitivos o mentales del individuo para alcanzar el aprendizaje, es decir se enfoca en describir cómo se interpreta, procesa y almacena la información, o sea cómo la mente humana es capaz de pensar y aprender un nuevo conocimiento.

En relación con el cognitivismo, Zapata (2015), referido en Zetina López et al. (2021, p. 3), explica que:

Los conocimientos se le presentan al individuo como un reto, una situación de desafío que le provoca el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas y las transferencias de estas resoluciones a nuevas situaciones problemáticas de rasgos semejantes, pero en contextos distintos.

Las teorías cognitivas se dedican a la conceptualización de los procesos del aprendizaje del estudiante y se ocupan de cómo la información es recibida, organizada, almacenada y localizada.

Para la teoría cognitivista el aprendizaje consiste entonces en la adquisición y categorización de nueva información, la que se obtiene como producto de la interacción con la realidad y se adquiere por medio de los sentidos. Luego la información se almacena creando nuevos conceptos o modificando los ya existentes, por tal razón el aprendizaje se considera activo, de asociación y construcción.

9.1.2.1.4. Teoría del aprendizaje constructivista

En relación con este enfoque Newby et al. (1993), referidos por Figueroa y Muñoz (2017, p. 6), afirman que: “El enfoque constructivista identifica al aprendizaje con la creación de significados a partir de experiencias, considerándolo como una actividad mental, porque la mente filtra lo que nos llega del exterior para producir su propia realidad”.

Tünnermann Benheim (2011, p. 24), Citando a Piaget, expresa que: “Las teorías de Piaget señalan el punto de partida de las concepciones constructivistas del aprendizaje como un proceso de construcción interno, activo e individual”.

Según el constructivismo el aprendizaje consiste en la asimilación de nuevos elementos, y posteriormente la acomodación de estos elementos a un entorno que ya es distinto al que se tenía previamente, es decir el individuo desempeña también un papel activo.

Esta teoría se enfoca en la necesidad de entregar al estudiante las herramientas necesarias que le permitan construir sus propios procedimientos para resolver una situación problemática, lo que implica que sus ideas puedan verse modificadas y siga aprendiendo constantemente. Esta teoría considera al estudiante responsable de su propio aprendizaje, donde se convierte en protagonista en todo el proceso, donde el maestro funcionará como mediador del aprendizaje.

9.1.2.2. Aprendizaje Basado en Problemas (APB)

9.1.2.2.1. Los orígenes del ABP

Morales y Landa (2004, pp. 145-146) abordan de manera sintetizada el origen del Aprendizaje Basado en Problemas, como se muestra a continuación:

En las décadas de los 60's y 70's un grupo de educadores médicos de la Universidad de McMaster (Canadá) reconoció la necesidad de replantear tanto los contenidos como la forma de enseñanza de la medicina, con la finalidad de conseguir una mejor preparación de sus estudiantes para satisfacer las demandas de la práctica profesional. La educación médica, que se caracterizaba por seguir un patrón intensivo de clases expositivas de ciencia básica, seguido de un programa exhaustivo de enseñanza clínica, fue convirtiéndose gradualmente en una forma inefectiva e inhumana de preparar estudiantes, en vista del crecimiento explosivo de la información médica y las nuevas tecnologías, además de las demandas rápidamente cambiantes de la práctica profesional. Era evidente, para estos educadores, que el perfil de sus egresados requería habilidades para la solución de problemas, lo cual incluía la habilidad para adquirir información, sintetizarla en posibles hipótesis y probar esas hipótesis a través de la adquisición de información adicional. Ellos denominaron a este proceso como de Razonamiento Hipotético Deductivo.

Sobre esta base, la Facultad de Ciencias de la Salud de la Universidad de McMaster estableció una nueva escuela de medicina, con una propuesta educacional innovadora que fue implementada a lo largo de los tres años de su plan curricular y que es conocida actualmente en todo el mundo como Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) (Problem Based Learning, PBL) (Barrows, 1996). La primera promoción de la nueva escuela de medicina de la Universidad de McMaster se graduó en 1972. Por el mismo tiempo, la especialidad de Medicina Humana de la Universidad de Michigan implementó un curso basado en resolución de problemas en su currículo preclínico. También a inicios de los años 70's las universidades de Maastricht (Holanda) y Newcastle (Australia) crearon escuelas de medicina implementando el Aprendizaje Basado en Problemas en su estructura curricular. A inicios de los 80's, otras escuelas de medicina que mantenían estructuras curriculares convencionales empezaron a desarrollar planes paralelos estructurados en base al ABP. La universidad que lideró esta tendencia fue la de New México, en los Estados Unidos. Un poco más tarde otras

escuelas asumieron el reto de transformar su plan curricular completo en una estructura ABP. Las universidades líderes en esta empresa fueron la de Hawai, Harvard y Sherbrooke (Canadá) (Barrows, 1996).

En los últimos treinta años el aprendizaje basado en problemas ha sido adoptado por escuelas de medicina en todo el mundo. Más recientemente ha sido aplicado en una diversidad de escuelas profesionales y el interés en su incorporación en la educación superior en general ha ido incrementándose día a día.

9.1.2.2.2. Definición

Como su nombre lo indica el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), está enfocado en la estrategia metodológica centrada en la resolución de problemas de diferentes ámbitos que se le presentan al estudiante.

Al respecto Campaner (2016), citado por Albornoz (2020, p. 22) define que:

Una estrategia de enseñanza o estrategia didáctica son actividades, seleccionadas y organizadas por los docentes de una disciplina y utilizadas con intención pedagógica para enseñar un determinado contenido conceptual, procedimental o actitudinal- mediante un acto creativo y reflexivo, en un momento y escenario determinado, son algunos ejemplos los siguientes: trabajo de laboratorio, exposición dialogada, mesa redonda, trabajo en pequeños grupos, trabajo de campo, resolución de problemas, aprendizaje basado en problemas, entre otros.

Por otro lado, Díaz Barriga (2006), citada en Flores et al. (2014, p. 2):

Se refiere al ABP como un enfoque centrado en el alumno, basado en actividades que fomentan la reflexión, el pensamiento complejo, la cooperación y la toma de decisiones. “La habilidad para resolver problemas está relacionada con otras habilidades, como el razonamiento crítico, la interacción social, la metacognición. Existe sinergia entre ellas. El

desarrollo de la habilidad para resolver problemas debe hacerse simultáneamente con otras habilidades.

El ABP consiste en un conjunto de estrategias a través de situaciones problemáticas activas que propician el aprendizaje de manera activa, innovadora, motivadora y que permiten en los actores del proceso ser partícipes directos de su propio aprendizaje, ya que dicho enfoque está centrado en el estudiante donde éste es un agente activo durante todo el proceso.

En palabras del Dr. Restrepo Gómez (2005, p. 10):

El ABP es un método didáctico, que cae en el dominio de las pedagogías activas y más particularmente en el de la estrategia de enseñanza denominada aprendizaje por descubrimiento y construcción, que se contrapone a la estrategia expositiva o magistral. Si en la estrategia expositiva el docente es el gran protagonista del proceso enseñanza-aprendizaje, en la de aprendizaje por descubrimiento y construcción es el estudiante quien se apropia del proceso, busca la información, la selecciona, organiza e intenta resolver con ella los problemas enfrentados. El docente es un orientador, un expositor de problemas o situaciones problemáticas, sugiere fuentes de información y está presto a colaborar con las necesidades del aprendiz.

En la cita anterior se describe el ABP como una metodología de enseñanza dentro del marco de las pedagogías activas, principalmente vinculado con el aprendizaje por descubrimiento y construcción del mismo, enfatizando en el rol activo del estudiante en todo el proceso, ya que el discente es responsable de buscar, seleccionar y organizar información que le permitan resolver un determinado problema. El docente en lugar de ser el principal expositor de información, le propone situaciones problemáticas de la vida real y los guía para que lleguen a una solución satisfactoria.

9.1.2.2.3. Características

Marra et al. (2014), citado por Montejo (2019, p. 356), señalan las siguientes características:

“El aprendizaje centrado en el problema (contenidos y habilidades a ser aprendidas organizadas alrededor de problemas reales auténticos)”.

El aprendizaje centrado en problemas busca conectar los contenidos y habilidades que los estudiantes deben aprender a través de la resolución de situaciones reales y genuinas que faciliten un aprendizaje significativo y aplicable a la vida cotidiana.

“El aprendizaje centrado en el estudiante (se despliegan una serie de procesos cognitivos y afectivos para investigar y resolver el problema)”.

El aprendizaje centrado en el estudiante no solo implica el uso de procesos cognitivos, como el pensamiento crítico y la resolución de problemas, sino que también contempla aspectos afectivos (la motivación), todo dirigido hacia la investigación y la resolución de situaciones propias del mundo real.

“La auto-dirección (se demanda a los estudiantes asumir la responsabilidad de: identificar los objetivos de aprendizaje, planificar el recojo de información y realizar la búsqueda, procesamiento e integración de la información)”.

En el apartado anterior se subraya que la auto-dirección en el aprendizaje busca que los estudiantes asuman un papel activo y responsable en el proceso de manera que les permita autoconstruir su propio aprendizaje. Para conseguir estos resultados es clave la identificación

de objetivos de aprendizaje, la planificación de cómo obtener la información necesaria y la ejecución de la búsqueda y procesamiento de esa información.

“La auto-reflexión (se propicia que los estudiantes monitoreen su comprensión y aprendizaje para ajustar sus estrategias)”.

La auto-reflexión por parte de los estudiantes es crucial en su aprendizaje autorigido, dado que propicia que los discentes sean conscientes de la construcción de su propio conocimiento. Así mismo les permite ajustar sus estrategias de aprendizaje para mejorar continuamente.

El trabajo colaborativo (se estimula el intercambio, diálogo y discusión entre pares).

En el ABP, el trabajo colaborativo permite fomentar el intercambio de ideas entre cada uno de los involucrados, así como el diálogo y la discusión para llegar a una solución conjunta de manera satisfactoria sobre determinada situación.

El andamiaje del docente (se actúa como facilitador cuyo rol fundamental es modelar y guiar procesos de razonamiento, de búsqueda e integración de información, facilitar procesos grupales y formular preguntas para indagar sobre la exactitud, pertinencia y profundidad de análisis de la información).

En el ABP, por ser una metodología activa, actúa como facilitador que modela y guía los procesos de razonamiento, búsqueda e integración de información. Además, facilita el trabajo grupal y fomenta un análisis profundo y preciso a través de preguntas estratégicas. Este enfoque permite a los estudiantes desarrollar autonomía y habilidades de pensamiento crítico mientras reciben el apoyo necesario para su aprendizaje.

Además, Morales y Landa (2004, p. 148), destacan como una de las características del ABP, afirmando que:

El aprendizaje se produce en grupos pequeños de estudiantes. En la mayoría de las primeras escuelas de medicina que implementaron el ABP, los grupos de trabajo fueron conformados por 5 a 8 ó 9 estudiantes. Al finalizar cada unidad curricular los estudiantes cambiaban aleatoriamente de grupo y trabajaban con un nuevo tutor. Esto les permitía adquirir práctica en el trabajo intenso y efectivo, con una variedad de diferentes personas.

El Aprendizaje en grupos pequeños es apto para permitir una interacción significativa entre los miembros, pero también lo suficientemente grande para aportar diversidad de perspectivas y habilidades. Al finalizar cada unidad curricular, los estudiantes cambian de grupo de manera aleatoria, lo que asegura que no trabajen siempre con las mismas personas y tengan la oportunidad de interactuar con una variedad de compañeros. Así mismo los discentes trabajan con un nuevo tutor en cada unidad. Esto les permite experimentar diferentes estilos de enseñanza y recibir orientación de diversos docentes.

9.1.2.2.4. Ventajas

En referencia a las ventajas del Aprendizaje Basado en Problemas, (APB), Escribano, A. y Del Valle (2010), citado por Luy Montejo (2019, pp. 358-359), señalaron el reconocimiento de las ventajas del ABP sobre los métodos convencionales de aprendizaje que han promovido su difusión y aplicación en diversas disciplinas a nivel educación superior. Entre las ventajas señaladas por estos autores se pueden enfatizar:

La motivación como “voluntad de aprender” como lo señaló Bruner, es estimulada por el ABP, ya que invita al estudiante a involucrarse más en el aprendizaje debido a que siente la posibilidad de interactuar con la realidad y a observar los resultados de dicha interacción.

El aprendizaje basado en problemas estimula la motivación en los estudiantes mediante la integración activa en el proceso de aprendizaje al interactuar con situaciones del mundo real. Esto aparte de aumentar su interés y el entusiasmo, también fomenta una voluntad propia por aprender

El estudiante, mediante esta metodología, logra establecer conexión sustantiva entre la información que va recibiendo y el conocimiento previo que posee, produciéndose un aprendizaje más significativo; este modo de aprender refuerza incluso su interés por seguir investigando también fuera de aula.

La estrategia del ABP implica que los estudiantes puedan conectar la nueva información con sus presaberes, lo que facilita un aprendizaje significativo. Por otra parte, este enfoque fomenta un mayor interés por investigar y aprender de manera independiente, es decir se vuelven más autónomos en todo el proceso, construyendo su propio conocimiento.

La integración del conocimiento posibilita mayor retención y transferencia del conocimiento. La metodología del ABP permite desde la práctica, la detección de errores o inconsistencias teóricas lo que se perfila como una de las estrategias más propicias para la construcción de un aprendizaje que establece contacto con las concepciones previas del estudiante y que contribuye a transformarlas.

El ABP promueve y facilita la integración de conocimientos al conectar nueva información con saberes previos, mejorando la retención y la transferencia del aprendizaje. Así mismo mediante esta estrategia los estudiantes pueden identificar y corregir errores teóricos mediante la práctica, contribuyendo a la transformación y enriquecimiento de sus presaberes.

“El aprendizaje que se apoya en esta metodología estimula el pensamiento crítico y creativo, es decir, estimula la adquisición de habilidades para identificar problemas y ofrecer soluciones adecuadas a los mismos”.

La implementación del ABP es efectiva para estimular tanto el pensamiento crítico como el creativo, ya que al enfrentarse a situaciones complejas y reales, los estudiantes pueden potenciar el desarrollo de habilidades para analizar y llegar a una respuesta satisfactoria de manera efectiva, mejorando sus capacidades cognitivas.

“El estudiante, mediante la metodología del ABP, logra lo que se conoce como la integración del conocimiento. El conocimiento de las diferentes disciplinas se integra para dar solución al problema sobre el cual se está trabajando”.

A través de la implementación del ABP se logra la integración del conocimiento al requerir que los estudiantes combinen información y habilidades de diferentes disciplinas para la solución de situaciones que se les plantean. Esta metodología fomenta una comprensión más holística (no solo la solución específica del problema como tal).

El método de ABP promueve la interacción incrementando habilidades interpersonales como: el trabajo en equipo, la evaluación de los compañeros, la presentación y defensa de los trabajos. Esta metodología interactiva permite desarrollar, extender y profundizar las habilidades interpersonales: los estudiantes tienen la oportunidad de compartir sus descubrimientos, y se brindan apoyos para resolver los problemas y trabajar en proyectos conjuntos.

Mediante la implementación del APB se fomenta el desarrollo de habilidades interpersonales al involucrar de manera activa a los estudiantes en actividades que implican el trabajo en equipo, la valoración mutua y presentaciones de sus resultados. De esta forma

contribuye a mejorar el aprendizaje académico, fortalece la comunicación, colaboración y apoyo entre todos los involucrados.

Se promueve la evaluación formativa, en un sistema de autoevaluación de los estudiantes y la coevaluación, que permite identificar y corregir errores, así como asegurar el alcance de metas personales y comunes, mediante la retroinformación constructiva.

Esta metodología permite desarrollar una evaluación formativa de manera eficaz a través de la autoevaluación y la coevaluación, lo que implica que los estudiantes puedan identificar y corregir errores, así mismo garantiza el alcance de metas de manera individual y colectiva.

9.1.2.2.5. Desventajas

Para González (2016, p. 51) el ABP presenta las siguientes desventajas con base en los resultados sobre los inconvenientes expresados por los grupos de estudiantes que emplearon la metodología de ABP:

La mayor desventaja del ABP es que se necesita más tiempo para el aprendizaje: es un método complejo que requiere mucho tiempo; se necesita más tiempo para los alumnos y los profesores; es un trabajo de gran envergadura y con gran libertad que provoca una pérdida de tiempo; es costoso y se necesita mucho tiempo; el diálogo y el consenso llevan mucho tiempo.

Para el del ABP se requiere una inversión significativa de tiempo y otros recursos, tanto para los estudiantes como para los docentes. Esta estrategia es compleja ya que para su plena implementación se requiere la gestión de proyectos extensos y fomentar el diálogo, así mismo, puede resultar en una mayor demanda de tiempo y esfuerzo en comparación con métodos de enseñanza más tradicionales.

Hay un rechazo inicial al cambio: es difícil el cambio en la forma de aprender; es nuevo, no estamos acostumbrados y es complicado de enfocar; es algo desconocido y difícil de comprender al principio; es un cambio importante en la forma de aprender.

Tanto estudiantes como docentes, puede mostrar cierta resistencia a cambiar sus métodos de enseñanza y aprendizaje que han venido implementando en el proceso, lo que se convierte en un desafío para ambas partes. Este racho puede tener sus razones a la adaptación que se tiene respecto a los enfoques tradicionales.

Es necesario mejorar la coordinación entre el equipo y las distintas asignaturas, ya que resulta difícil llegar a un consenso en la toma de decisiones y hay problemas de compatibilidad horaria para organizar reuniones fuera del horario escolar.

Para implementar el ABP se requiere de mayor organización respecto a la coordinación de los equipos de trabajo y la integración entre asignatura (interdisciplinaria), así como las dificultades en la toma de decisiones en los grupos y la incompatibilidad de horarios entre las partes involucradas para las sesiones de trabajo, estos factores pueden complicar la ejecución efectiva de esta estrategia, por lo que requiere una planificación cuidadosa y una comunicación efectiva para superar estos desafíos.

Aprendizaje más complejo: es difícil sintetizar y enfocar la resolución del problema; nos sentimos confusos por la complejidad del trabajo; el abordaje es difícil al ser multidimensional.

Sin duda, el ABP es una estrategia metodológica de carácter activa, que requiere darle el protagonismo al estudiante, donde debe asumir un rol activo, lo que implica que para lograr

conocimientos sólidos el proceso de enseñanza y aprendizaje se vuelve más complejo debido a la dificultad de sintetizar y enfocar la solución de problemas.

9.1.2.2.6. Fases o etapas del Aprendizaje Basado en Problemas

Varela Guntiño (2016, p. 19), propone las fases para la implementación de esta propuesta pedagógica:

Tabla 1. Fases del aprendizaje basado en problemas

Fases	Actividades del docente	Actividades de los estudiantes	Interpretación
Activación	Presentación del problema. Activación de los equipos. Supervisión de su plan de trabajo.	Forman equipos de trabajo. Activación del conocimiento. Identificación de puntos clave. Establecimiento de hipótesis. Selección de puntos clave y conceptos Análisis mediante lluvia de ideas.	En esta etapa se plantea a los estudiantes el problema que deben resolver, el cual debe ser relevante, auténtico y desafiante, diseñado para estimular el pensamiento crítico y la aplicación de conocimientos. En esta fase los estudiantes se organizan en grupos para abordar el problema presentado con el fin de fomentar la colaboración y el trabajo en equipo, lo cual es esencial para el ABP, ya que los ellos aprenderán unos de otros y resolverán situaciones de manera conjunta.
Investigación	Evalúa la pertinencia de los recursos o dirige hacia ellos.	Utilización de puntos clave para orientar su búsqueda de información.	El docente revisa los recursos disponibles que los estudiantes planean utilizar para resolver el problema. El docente evalúa si estos materiales son adecuados y

	Proporciona retroalimentación.	Organización de la información. Emisión de pre-reporte.	útiles para el contexto del problema y el nivel de los estudiantes. Si algunos de estos no son inadecuados, el docente dirige a los estudiantes hacia otros más pertinentes. Los estudiantes identifican los aspectos más importantes y relevantes del problema y los utilizan para guiar su búsqueda de información. Estos actúan como directrices que ayudan a enfocar la investigación en los temas y áreas más pertinentes para resolver el problema.
Resolución	Pide soluciones. Reconduce a los desorientados.	Discusión y búsqueda con base en retroalimentación. Diseño de soluciones. Emisión de reporte final.	El docente solicita a los estudiantes que presenten sus propuestas de solución al problema, evaluando su comprensión y capacidad para aplicar lo aprendido, identificar a los estudiantes que están confundidos o en la dirección equivocada y proporcionarles la guía necesaria para volver al camino correcto. Los estudiantes revisan y discuten la retroalimentación para mejorar y ajustar las ideas y enfoques, buscando información adicional si es necesario. Desarrollan soluciones concretas y detalladas basadas en el análisis y la información recopilada. Preparan un informe final que documente todo el proceso de resolución del problema, incluyendo la investigación, el análisis y las soluciones.
Evaluación	Dirige discusión y reflexión grupal.	Presentación de soluciones al grupo y discusión de la pertinencia de las mismas.	El docente guía una discusión entre los estudiantes para reflexionar sobre su trabajo, compartir experiencias, y aprender colectivamente.

	Evalúa el desempeño de competencias.	Evaluación entre compañeros. Evaluación de la actividad.	<p>Evalúa el grado de desarrollo de las competencias clave en los estudiantes, proporcionando retroalimentación sobre su rendimiento y progreso.</p> <p>Los estudiantes: Presentan sus soluciones al grupo y discuten la pertinencia y efectividad de las mismas. Revisan y evalúan el trabajo de sus compañeros, proporcionando retroalimentación constructiva. Evalúan el desarrollo de la actividad.</p>
--	--------------------------------------	---	--

Fuente: Varela Guntiño, (2016, p. 19).

9.1.2.2.7. La Matemática y su relación con el Aprendizaje Basado en Problemas

Como se ha abordado en el apartado anterior el ABP es un método de aprendizaje basado en la utilización de problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos. En esta estrategia los estudiantes son los protagonistas de su aprendizaje, que asumen la responsabilidad de ser parte activa en el proceso. El ABP es el medio más invocado para el aprendizaje activo de las Matemáticas.

Alzate Rodríguez et al. (2013, p. 543), consideran que:

La metodología permite formar personas capaces de enfrentar el continuo cambio de la ciencia y las disciplinas, permitiendo desarrollar las habilidades de aprendizaje necesarias para adaptarse y ser competentes con las exigencias de la sociedad actual; con el desarrollo de esta metodología los estudiantes podrán obtener las aptitudes idóneas para desempeñar cualquier tipo de trabajo lógico. El método de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), es un aprendizaje centrado en el estudiante, su esencia es la integración interdisciplinaria y la libertad para explorar lo que todavía no conoce, centrándolo en el proceso de aprendizaje.

De acuerdo a lo expresado por los autores anteriormente citados, el Aprendizaje Basado en Problemas como metodología activa está en función de poder dotar a las personas de facultades aptas para enfrentar con dominio suficiente los avances científicos en la sociedad, que de hecho son inevitables y por ende los seres humanos deben estar capacitados para enfrentar dichos cambios en las diferentes ramas del conocimiento y por supuesto, las Matemáticas no son la excepción, ya que ésta es una de las ciencias que está presente en cada una de las actividades cotidianas y el ABP permite en este sentido que los individuos puedan desarrollar el pensamiento crítico de manera tal que puedan resolver los problemas con mayor efectividad, dado que a través de esta estrategia los estudiantes se sienten actores de lo que ocurre, construyendo su propio conocimiento a lo largo de todo el proceso de determinada actividad.

En este particular los aprendices se convierten en artífices de su propio aprendizaje durante todo el proceso logrando así conocimientos más sólidos y siendo por supuestos más independientes en la solución de las diferentes situaciones problemáticas que el docente les plantea a fin de desarrollar el análisis de sus estudiantes para desarrollar sus potencialidades.

9.1.2.2.8. Resultados del Aprendizaje Basado en Problemas

De hecho, toda acción tiene sus resultados y en este sentido el ABP como una acción metodológica tiene su impacto en función de la enseñanza y aprendizaje, lo que estará en dependencia de diferentes factores que favorezcan o no dicho proceso.

Al respecto Servicio de Innovación Educativa (2008, p. 11) plantea el aprendizaje basado en problemas desde el punto de vista del papel que desempeña tanto el educador como el estudiante:

Tabla 2. Papel del docente y del estudiante en el ABP

Profesor	Alumnado	Interpretación
Da un papel protagonista al alumno en la construcción de su aprendizaje.	Asumir su responsabilidad ante el aprendizaje.	El docente sensibiliza al estudiante a que éste asuma un rol activo para que sea constructor de su propio aprendizaje. El estudiante desempeña un papel activo de manera independiente.
Tiene que ser consciente de los logros que consiguen sus alumnos.	Trabajar con diferentes grupos gestionando los posibles conflictos que surjan.	Esta acción exige al docente a estar atento y reconocer los progresos y éxitos de sus alumnos a lo largo del proceso, considerando no solo una calificación numérica, sino también las habilidades desarrolladas, competencias adquiridas y la capacidad de resolver problemas de manera autónoma. El docente por su parte debe ser capaz de colaborar efectivamente con sus compañeros, incluso cuando se formen diferentes grupos de trabajo. Esta habilidad es esencial para crear un ambiente de aprendizaje positivo y productivo.
Es un guía, un tutor, un facilitador del aprendizaje que acude a los alumnos cuando le necesitan y que les ofrece información cuando la necesitan.	Tener una actitud receptiva hacia el intercambio de ideas con los compañeros.	El docente se convierte en guía porque orienta a los estudiantes en su proceso de aprendizaje, ayudándoles a encontrar recursos y a estructurar sus investigaciones; en tutor, ya que les proporciona apoyo individual o en pequeños grupos, ofreciendo retroalimentación y ayudando a reflexionar sobre su aprendizaje; en facilitador del aprendizaje, porque fomenta un ambiente de colaboración y autoaprendizaje y en fuente de información, dado que proporciona datos y conocimientos cuando los estudiantes lo necesitan. Los estudiantes deben estar abiertos a escuchar, considerar y discutir las ideas y opiniones de los demás miembros del grupo. Así mismo valorar las perspectivas diversas, contribuir con sus propios conocimientos y

		experiencias, y trabajar juntos al objetivo común (solución del problema).
El papel principal es ofrecer a los alumnos diversas oportunidades de aprendizaje.	Compartir información y aprender de los demás.	<p>Esto significa que el docente debe proporcionar una variedad de experiencias, recursos y actividades que faciliten el aprendizaje de los estudiantes, tales como proyectos y problemas reales, recursos y materiales, experiencias prácticas, invitados y expertos, tecnología y herramientas digitales, ambientes de aprendizaje colaborativo, entre otras.</p> <p>Por su parte, el estudiante debe compartir información y aprender de los demás; contribuir y comunicar activamente; valorar la diversidad de perspectivas; ayudar y apoyar a los compañeros y reflexionar en grupo.</p>
Ayuda a sus alumnos a que piensen críticamente orientando sus reflexiones y formulando cuestiones importantes.	Ser autónomo en el aprendizaje (buscar información, contrastarla, comprenderla, aplicarla, etc.) y saber pedir ayuda y orientación cuando lo necesite.	<p>El docente ayuda a sus estudiantes a pensar críticamente orientando sus reflexiones y formulando cuestiones importantes. Esto significa que se debe fomentar el pensamiento crítico, orientar reflexiones, formular preguntas significativas, facilitar la autoevaluación y crear un ambiente de aprendizaje seguro.</p> <p>El estudiante debe ser autónomo en el aprendizaje y saber pedir ayuda y orientación cuando lo necesite, buscar información, contrastar información, comprender la información, aplicar la información y ser proactivos.</p>
Realizar sesiones de tutoría con los alumnos.	Disponer de las estrategias necesarias para planificar, controlar	El docente debe realizar sesiones de tutoría con los alumnos para brindar apoyo individualizado, guiar el proceso de

	y evaluar los pasos que lleva a cabo en su aprendizaje.	<p>aprendizaje, fomentar la reflexión, proporcionar retroalimentación constructiva, motivar y apoyar, facilitar la autoevaluación.</p> <p>El estudiante debe disponer de las estrategias necesarias para planificar, controlar y evaluar los pasos que lleva a cabo en su aprendizaje, planificar el aprendizaje, controlar el proceso, evaluar el trabajo realizado, utilizar estrategias de aprendizaje efectivas, gestionar los recursos, ser autodisciplinado Estas son esenciales para que los estudiantes se conviertan en aprendices autónomos y eficaces, capaces de enfrentar y resolver problemas complejos de manera independiente y colaborativa.</p>
--	---	---

Fuente: Tomado de Servicios de Innovación Educativa (2008, p. 11).

9.2. Recursos didácticos

9.2.1. Definición

De manera general al hablar del término recurso, se puede referir al conjunto de elementos disponibles para resolver o tratar una necesidad, para llevar a cabo una acción o que sirven de complemento y lograr mayor efectividad en el desarrollo de determinada actividad.

De hecho, cualquier acción requiere al menos de alguna herramienta para su ejecución y en el ámbito educativo a menudo se hace uso de recursos en aras de implementar determinadas estrategias didácticas que permitan alcanzar de manera satisfactoria los objetivos planteados para determinado fin.

En relación a recursos didácticos Rodríguez (2011), citado en Chancusig Chisag et al. (2017, p. 115), sostiene que: “Estos constituyen un recurso útil para favorecer procesos de aprendizaje de habilidades, de conocimientos, siempre que conciban como un medio al servicio de un proceso que se pretende desarrollar”.

Los recursos didácticos son valiosos porque implican el enriquecimiento de conocimientos, ayudan a potenciar habilidades; sin embargo, su eficacia depende de la forma cómo se utilicen, pues deben ser vistos como herramientas que promuevan un proceso educativo dinámico e interesante para los estudiantes. En otras palabras, no es suficiente disponer del acceso de ellos, sino que es crucial integrarlos de manera adecuada para que realmente contribuyan a obtener los aprendizajes esperados.

De manera similar Chancusig Chisag et al. (2017, p. 4) consideran que:

Los recursos didácticos pueden potenciar la retención de información, desarrollo y estimulación de habilidades y capacidades, un medio al cual se puede recurrir como alternativa, los recursos didácticos interactivos ayudan a los maestros y estudiantes a motivar con estos medios ayudan a los estudiantes a tener un alcance de objetivos durante el proceso de adquirir ideas o conocimientos.

Según lo expresado por los autores anteriores los recursos didácticos, específicamente los que poseen características interactivas, son herramientas valiosas, ya que pueden mejorar la retención de información, el desarrollo de habilidades, así como la motivación de los estudiantes, contribuyendo así al logro de los objetivos educativos esperados.

Para Hernández (2012, p. 115) señalado en Chancusig et al. (2017), sostiene que: “Los recursos didácticos son aquellos materiales tangibles y manipulables por el estudiante, estos materiales motivan en el proceso de aprendizaje, estos recursos pueden utilizarse una y otra vez muchas veces con diversos propósitos”.

Los recursos didácticos son todos aquellos que se pueden ver y tocar, cuya utilización en actividades escolares estimulan el proceso de aprendizaje. Además, estos se pueden emplear con diferentes propósitos, dependiendo de la o las actividades que se vayan a realizar, así como de las condiciones de las que se dispone para su manipulación durante el proceso de ejecución de determinada actividad.

9.2.2. Importancia

La utilización de recursos en todo proceso es de suma importancia y en algunos casos, hasta imprescindibles, es decir su uso es inevitable, ya que son una herramienta de apoyo que permiten complementar el proceso de enseñanza y aprendizaje para lograr resultados más satisfactorios.

Al respecto, Cedeño Molina (2013, pp. 32-33), refiere lo siguiente:

Según como se utilicen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, los medios didácticos y los recursos educativos en general pueden realizar diversas funciones; entre ellas destacamos como más habituales las siguientes:

Proporcionar información: Prácticamente todos los medios didácticos proporcionan explícitamente información: libros, vídeos, programas informáticos.

Los recursos didácticos son esenciales porque permiten estructurar y facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje, ofreciendo la adquisición de una base sólida de conocimientos.

Guiar los aprendizajes de los estudiantes, instruir: Ayudan a organizar la información, a relacionar conocimientos, a crear nuevos conocimientos y aplicarlos... Es lo que hace un libro de texto, por ejemplo.

Esta función es crucial porque permiten estructurar y dirigir el proceso educativo, asegurando que los estudiantes a parte de adquirir información, también desarrollen habilidades para relacionar, crear y aplicar conocimientos de manera más efectiva.

Ejercitar habilidades, entrenar: Por ejemplo, un programa informático que exige una determinada respuesta psicomotriz a sus usuarios.

Con la utilización de recursos didácticos se puede desarrollar y perfeccionar las habilidades específicas de los estudiantes, ya que proporcionan oportunidades para la práctica repetitiva, ofrecen retroalimentación de manera inmediata y pueden adaptar el aprendizaje a las necesidades individuales de los educandos, preparándolos para que puedan aplicar sus conocimientos de manera apropiada en el mundo real.

Motivar, despertar y mantener el interés: Un buen material didáctico siempre debe resultar motivador para los estudiantes.

Los recursos didácticos utilizados de manera adecuada permiten de manera inmediata motivar y despertar el interés en los estudiantes, que sin dudarlo permiten un aprendizaje satisfactorio. Estos deben estar diseñados en función de persuadir la atención de los discentes y fomentar la participación en todo el proceso.

Evaluar los conocimientos y las habilidades que se tienen, como lo hacen los libros de texto o los programas informáticos.

Esta función es importante ya que a través de ella se puede medir el proceso de aprendizaje de los educandos, identificar aspectos de mejoras así proporcionar retroalimentación en los que se consideren retomar.

9.2.3. Importancia de los recursos didácticos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática

Sin duda alguna es de vital importancia contar con la disposición de recursos didácticos en el proceso de enseñanza aprendizaje, particularmente en el área de Matemática, que es una asignatura compleja, ya que esto favorecerá en el rendimiento académico de los estudiantes.

Respecto a la importancia de los recursos didácticos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, Chipre y Franco (2015, p. 7), estiman que:

Para que la enseñanza de la matemática tenga un verdadero aprendizaje significativo, más no memorizado; es necesario de que además de la experiencia del docente; él también cuente con técnicas de motivación que indirectamente vendrían hacer la utilización de los recursos didácticos en mención para así despertar la participación activa de los estudiantes.

El docente ocupa un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas y para que este sea significativo, se debe tener un alto grado de estimulación por parte del maestro, ya que de esto dependerá de que el estudiante despierte el interés por aprender. Para esto sin duda se tiene que hacer uso de recursos didácticos que complementen el proceso y obtener los mayores resultados posibles.

La utilidad de los recursos didácticos en el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática radica en que permiten el espacio para la motivación, y participación de los discentes para alcanzar un verdadero aprendizaje significativo de tan importante materia.

9.3. Uso de GeoGebra como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje

9.3.1. GeoGebra

La utilización de recursos tecnológicos de manera sistemática en el desarrollo de actividades didácticas durante el proceso de enseñanza-aprendizaje influye de manera significativa en el estudiante.

Bustos (2013, p. 26), sostiene que:

GeoGebra es un software libre escrito en Java y, por ello, disponible en múltiples plataformas (Sistemas operativos). Está diseñado para interactuar dinámicamente en un ámbito en que se reúnen la Geometría, el Álgebra y el Análisis o Cálculo. Puede ser usado para Matemáticas, Física, Dibujo Técnico, con este programa se pueden realizar todos los cálculos matemáticos y geométricos desde una práctica y sencilla interfaz que permite no solo resolver operaciones, sino también aprender de él mientras se utiliza.

GeoGebra por ser un software libre que se encuentra escrito en Java, lo que implica que se puede usar en diversos sistemas operativos, cuyo uso permite la interacción dinámica en áreas como Geometría, Álgebra y Cálculo. Además de ser una gran herramienta para trabajar en Matemática, también lo es para la Física, Dibujo Técnico, entre otros. Por otra parte, la interfaz de dicho programa facilita la realización de cálculos matemáticos y geométricos, y además, permite aprender mientras se utiliza por su versatilidad y utilidad educativa.

9.3.2. Características de GeoGebra

Meza (2016, pp. 38-39), aborda las siguientes características más sobresalientes acerca del software GeoGebra:

- Es un software de uso libre para desarrollar matemática dinámica”.

GeoGebra puede ser descargado y utilizado sin costo alguno, es decir, no se requiere pagar una licencia para acceder al programa, lo que lo hace accesible para estudiantes, docentes, y cualquier persona interesada en la matemática.

- La característica más destacable de GeoGebra es la doble percepción de los objetos: cada expresión de la ventana de álgebra se corresponde con un objeto de la zona gráfica y viceversa.

En este software, la característica de doble percepción permite que cada expresión algebraica en la ventana de álgebra tenga una correspondencia visual en la zona gráfica y que cualquier cambio en la zona gráfica se refleje en la ventana de álgebra. Esto facilita la exploración y comprensión de conceptos matemáticos al permitir a los usuarios interactuar y observar cómo las representaciones algebraicas y gráficas están interconectadas.

- Es un software de geometría dinámica que facilita la enseñanza y el aprendizaje de Geometría, Aritmética, Álgebra, Análisis, Cálculo, Probabilidad y Estadística.

Estas funciones básicas son fundamentales para la construcción y el análisis de figuras geométricas en GeoGebra, facilitando la visualización y resolución de problemas matemáticos de manera interactiva y precisa.

- Dibuja segmentos, vectores, rectas y semirrectas.

GeoGebra permite la construcción precisa de elementos geométricos, tales como segmentos, rectas, y semirrectas que son componentes básicos en la construcción y análisis de figuras geométricas, facilitando el estudio de conceptos matemáticos fundamentales (vectores, rectas y semirrectas) que son esenciales para el análisis en álgebra, geometría y cálculo. Proporciona herramientas para resolver problemas.

- Dibuja circunferencias, arcos, sectores y cónicas.

Este software facilita la construcción de figuras geométricas complejas, ya que permite crear y explorar circunferencias y cónicas, que son elementos clave en la geometría y el cálculo. Así mismo se logra la visualización de conceptos matemáticos avanzados. Ayuda a estudiar propiedades y relaciones entre diferentes tipos de curvas y figuras geométricas.

- Trazas perpendiculares, paralelas, punto medio, mediatrices, bisectrices y tangentes.

Esta característica es crucial, ya que en menor tiempo con más calidad permite realizar el trazo de diferentes tipos de rectas y visualizarlas de manera más efectiva para una mejor comprensión de las mismas.

- Mide distancias, ángulos, áreas y pendientes.

Con GeoGebra se puede realizar el cálculo de distancia entre determinados puntos, la medición de ángulos, determinar áreas de diferentes figuras, entre otras de manera más rápida y con mayor precisión.

- Hace traslaciones, giros, simetría axial, simetría central y homotecias.

GeoGebra facilita el estudio de transformaciones geométricas, ya que permite explorar y entender cómo las figuras cambian bajo diferentes tipos de transformaciones. Ayuda a visualizar y analizar simetrías, movimientos y escalas en geometría.

- Halla coordenadas y ecuaciones.

Con el software GeoGebra se puede calcular y mostrar las coordenadas exactas de puntos en el plano gráfico. Esto incluye puntos que forman parte de figuras geométricas, intersecciones de objetos, y puntos definidos por el usuario.

- Representa curvas en el plano.

Con la utilización de GeoGebra se puede construir de manera perfecta curvas, que permiten ser comprendidas e interpretadas de una manera más eficiente.

- Es un software portátil, porque está realizado en Java 6, por ello, los estudiantes lo pueden grabar en un USB.

El programa no requiere instalación en el sistema operativo del ordenador para funcionar. Al estar desarrollado en Java 6, puede ejecutarse en cualquier equipo que tenga una Máquina Virtual de Java (JVM) instalada. Esto permite que los estudiantes puedan llevar GeoGebra en una memoria USB y ejecutarlo directamente desde allí en cualquier ordenador compatible, sin necesidad de realizar una instalación previa en cada uno de ellos.

- Este software se puede ejecutar en Windows, Mac OS X, Linux o Solaris.

GeoGebra es una aplicación multiplataforma. Esto implica que ha sido diseñada para ser compatible y funcionar correctamente en diferentes sistemas operativo, o sea que independientemente del sistema operativo que los usuarios tengan en sus computadoras (ya sea Windows, Mac OS X, Linux o Solaris), podrán instalar y usar el software sin problemas de compatibilidad. Esto amplía su accesibilidad y permite que una mayor cantidad de usuarios puedan beneficiarse de sus funciones, sin importar el sistema operativo que utilicen.

9.3.3. Importancia del uso de GeoGebra en la enseñanza de la Matemática

Según Sánchez Balarezo y Borja Andrade (2022, pp. 38-39), explican que:

GeoGebra es una herramienta que permite trabajar bajo la metodología del aprendizaje colaborativo y constructivista, es decir, los alumnos, a través de la manipulación del software, pueden ayudarse entre sí y compartir experiencias. Además, de crear e innovar soluciones a las actividades propuestas por el profesor. Ayuda al alumno a experimentar el aprendizaje por descubrimiento y fomenta la creación de proyectos matemáticos.

Conforme a lo que expresan por los autores anteriormente citados, GeoGebra implica que los estudiantes sean constructores de su propio aprendizaje, se vuelven agentes activos e independientes durante el proceso y además, fomenta el aprendizaje por descubrimiento.

9.3.4. Aplicación de GeoGebra en la enseñanza de la Geometría Analítica

Con relación al uso de GeoGebra en la enseñanza de la Geometría Analítica, González (2020), referido en Baena Álvarez (2020, p. 22), afirma que: “GeoGebra permite abordar la geometría de manera dinámica e interactiva ayudando a los estudiantes a la visualización de contenidos matemáticos que son más complicados de afrontar desde un dibujo estático”.

De acuerdo con lo que expresa González, señala la ventaja de usar GeoGebra para enseñar geometría, destacando su capacidad para transformar conceptos abstractos en experiencias de aprendizaje más accesibles y comprensibles a través de la interacción y la visualización dinámica, donde los estudiantes pueden observar conceptos matemáticos complejos de manera más clara y asimilarlos mejor, facilitando la construcción del conocimiento.

De manera similar, Hernández Chavarría (2013, p. 115), manifiestan que:

El GeoGebra, convenientemente utilizado, permite profundizar en Fundamentos de la matemática escolar pues permite integrar, comprender y utilizar, con facilidad y rapidez, contenidos de distintas áreas para justificar procedimientos y resultados.

Con estos resultados propuestos por cada uno de los autores en diversas áreas de la Matemática, se emplea GeoGebra como un complemento de la enseñanza para la elaboración de recursos que faciliten la comprensión de los contenidos de Geometría Analítica y Vectores I en la modalidad semipresencial, así también se realizan actividades individuales y colaborativas para la solución de situaciones problemáticas aplicando dicho programa.

9.4. Geometría Analítica

9.4.1. Principales precursores

Ayerbe Toledano (2017, pp. 93-102), destaca que:

El nacimiento de la geometría analítica tuvo lugar en la primera mitad del siglo XVII, y la situación general de la matemática al iniciarse el siglo. Se incide de forma particular en la relación entre la invención de la geometría analítica y el desarrollo de los métodos infinitesimales.

La geometría del Sr. DESCARTES había puesto de moda la construcción de problemas mediante la resolución de igualdades, y que para este fin ella había abierto grandes caminos, la mayoría de los geómetras se ocuparon de ella y a su vez aportaron nuevos descubrimientos, los cuales aumentan y se perfeccionan todos los días.

La geometría analítica fue una creación independiente, pero casi simultánea en el tiempo, de los dos más grandes matemáticos franceses del siglo XVII, Descartes y Fermat. Sin embargo, mientras Descartes tuvo plena conciencia de que hacía una obra definitiva, en el sentido de que creaba un nuevo método para el abordaje de antiguos y nuevos problemas que rompía con la tradición heredada de la geometría griega y que situaba al álgebra en el centro de la matemática, y lo dijo claramente como veremos enseguida, Fermat fue mucho más modesto, limitándose a presentar su trabajo como una reformulación de las obras griegas clásicas, fundamentalmente de las Cónicas de Apolonio, utilizando las técnicas algebraicas desarrolladas en el siglo XVI.

La Geometría de Descartes se considera el libro fundacional de la geometría analítica. La realidad que ese mismo año 1637, Fermat envió a sus colegas de París sus investigaciones de alrededor de 1629, que surgen a propósito de su reconstrucción de los Lugares planos de Apolonio, en las que, con un punto de vista complementario al de Descartes, introduce las técnicas que hoy día forman parte de la geometría analítica. Estos estudios de Fermat están contenidos en su memoria Introducción a los lugares planos y sólidos o, en latín, Ad locos

planos et solidos isagoge, pero ésta no se publicó hasta que su hijo Samuel De Fermat editó en 1679, las *Varia Opera Mathematica*, obra completa de los trabajos de su padre. No obstante, en el Elogio que se publicó al día siguiente de su muerte, en 1665, se menciona que “entre sus obras dejó un tratado analítico para resolver los problemas planos y sólidos, conocido antes de que DESCARTES hubiera publicado nada sobre ese tema.

Como se abordó de manera general en el apartado anterior, René Descartes y Pierre de Fermat fueron dos de los más grandes matemáticos, físicos y filósofos de su época. A ellos se debe la interpretación algebraica de la geometría y, en consecuencia, muchos de los conocimientos que derivaron de esta nueva forma de hacer Matemáticas (cálculo de rectas tangentes y normales a una curva, cálculo de áreas encerradas por curvas, máximos y mínimos, entre otros problemas infinitesimales; soluciones al problema de la consistencia de la geometría; etc.). Dicha interpretación geométrica terminaría de validar al álgebra como vía para resolver problemas y alentaría a realizar estudios posteriores en esta área.

9.4.2. Concepto

Acerca de la Geometría Analítica, Ezquerro (2014, p. 18), señalan que: “La Geometría Analítica consiste en el estudio de las propiedades de figuras geométricas algebraicamente en un sistema de coordenadas. Esta área de las matemáticas es de gran importancia ya que ha unido los conceptos de análisis y geometría”.

Para González Urbaneja (2007, p. 205):

La Geometría Analítica es un poderoso instrumento de ataque de los problemas geométricos que utiliza como herramienta básica el Álgebra. La esencia de su aplicación en el plano es el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales, es decir, un sistema de coordenadas, lo que posibilita una asociación entre curvas del plano y ecuaciones en dos variables, de modo que cada curva del plano tiene asociada una ecuación $f(x, y) = 0$ y, recíprocamente, para cada ecuación en dos variables está definida una curva que determina un conjunto de puntos del plano, siempre respecto a un sistema de coordenadas.

La Geometría Analítica enlaza conceptos geométricos y algebraicos para proporcionar una herramienta eficiente que permite representar y resolver problemas geométricos de manera algebraica. Dicha integración es fundamental, ya que facilita la visualización, así como el análisis de situaciones complejas mediante técnicas algebraicas, volviendo así esta rama más accesible para comprenderla mejor.

9.4.3. Elementos de la Geometría Analítica

En este apartado se hará énfasis en la descripción de los principales elementos que conforman la Geometría Analítica, objeto de estudio del presente trabajo de investigación.

Cabe mencionar que la descripción de los componentes de la Geometría Analítica está basada en la estructura del programa actual del Ministerio de Educación nicaragüense respecto a dicha unidad, la que se especifica a continuación:

Tabla 3. Unidad de Geometría Analítica, Francisco Díaz, Marlon Espinoza (2019)

UNIDAD 4: Geometría Analítica		
Sección 1: Punto y segmento	Sección 2: La recta	Sección 3: La circunferencia
C1: División entre dos puntos en la recta numérica	C1: Ecuación de la recta pendiente y el intercepto con el eje y	C1: Ecuación de la circunferencia con centro en el origen
C2: División de un segmento de la recta numérica en una razón dada	C2: Ecuación punto-pendiente de la recta	C2: Ecuación de la circunferencia con centro en $C(h, k)$ y radio r
C3: Distancia entre dos puntos del plano cartesiano	C3: Expresión para la pendiente de una recta	C3: Forma general de la ecuación de una circunferencia
C4: División de un segmento en una razón dada	C4: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos	C4: Transformación de la forma general a la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia
C5: Coordenadas del punto medio de un segmento	C5: Ecuación general de la recta	C5: Intersecciones de una circunferencia y una recta secante a ésta
C6: Comprobemos lo aprendido	C6: Ecuación de rectas paralelas a los ejes coordenados	C6: Intersecciones de una circunferencia y una recta tangente a ésta C7: Comprobemos lo aprendido
	C7: Condición de paralelismo	
	C8: Condición de perpendicularidad de rectas	
	C9: Distancia del origen a una recta del plano	
	C10: Comprobemos lo aprendido	

Fuente: Adaptado del libro de Matemática de undécimo grado

Salazar y Washburn (2017, p. 9) en su obra titulada Elementos básicos de Geometría Analítica para Economía, plantea las siguientes definiciones:

La Geometría Analítica como tal se atribuye a René Descartes, matemático y filósofo francés. En su libro titulado “Geometría” publicado en 1637, Rene Descartes estableció la unificación del álgebra y de la geometría mediante un sistema de: Coordenadas Cartesianas Rectangulares (llamado así en su honor por su aportación en las ciencias matemáticas). Es decir, está compuesto por dos números reales los cuales dan como resultado un punto en el plano o el espacio.

Euclides, denominado el padre de la geometría, cuando empezó a crear conocimientos matemáticos, estableció, que el punto era algo en lo que no se puede dividir, a su vez, que en un punto sólo puede haber un punto, y es el cimiento de toda la geometría como tal, ya que con los puntos se forman rectas, y con las rectas se forman planos, es decir, todo está formado por una sucesión de puntos.

9.4.3.1. El punto

Avilés Zúñiga et al. (2018, p. 31), abordan que:

El punto es un objeto geométrico que no tiene dimensiones y se usa para representar una ubicación en el plano o en el espacio.

El un punto no tiene longitud, anchura ni altura. Es infinitamente pequeño y no ocupa espacio. Es un concepto abstracto que se utiliza en la geometría para definir una ubicación exacta. En otras palabras, es la unidad básica en geometría que define una posición específica sin ocupar volumen o área.

Euclides escribió 2 postulados relacionados al punto:

Por dos puntos diferentes, pasa una sola línea recta.

Un segmento rectilíneo puede ser siempre alargado por la sucesión infinita de puntos.

Figura 2. Postulados relacionados con el punto



Fuente: Elaboración propia.

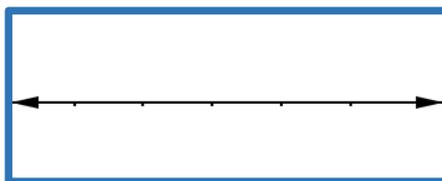
Lo anterior significa que el punto es un elemento geométrico adimensional, es decir carece de dimensiones, solamente indica una posición en el espacio.

9.4.3.2. La recta

Salazar (2017, p. 9), expresa que: “El concepto clásico de la recta dice que está compuesta por la sucesión infinita de puntos en un plano o el espacio, descrito así por los griegos en el siglo 300 a.C”.

El concepto de recta se entiende como una figura geométrica que consiste en una sucesión infinita de puntos alineados en una dirección específica. Esto implica que no tiene ni principio ni fin o sea que se extiende indefinidamente en ambas direcciones.

Figura 3. Representación de una recta



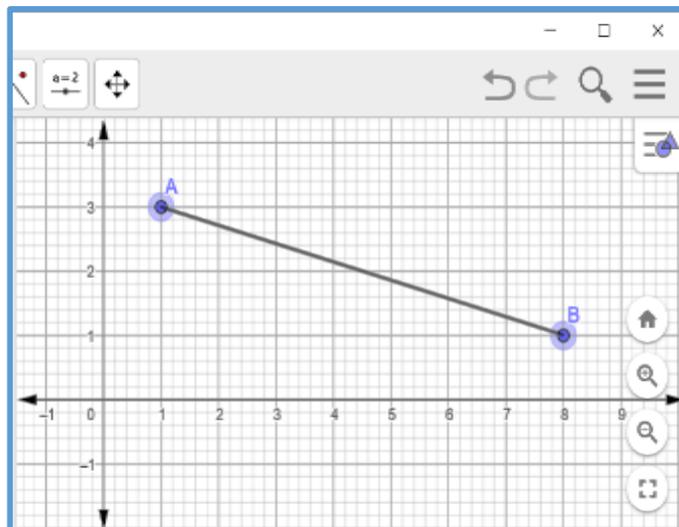
Fuente: Elaboración propia.

9.4.3.3. Segmento de recta

Salazar (2017, p. 9), sostiene que: “El segmento de recta es la sucesión de puntos comprendidos en una porción determinada por dos puntos los cuales son sus extremos”.

Un segmento también se puede definir como un subconjunto de la recta, que se encuentra comprendido entre dos puntos determinados “A” y “B”.

Figura 4: Segmento del punto A al punto B

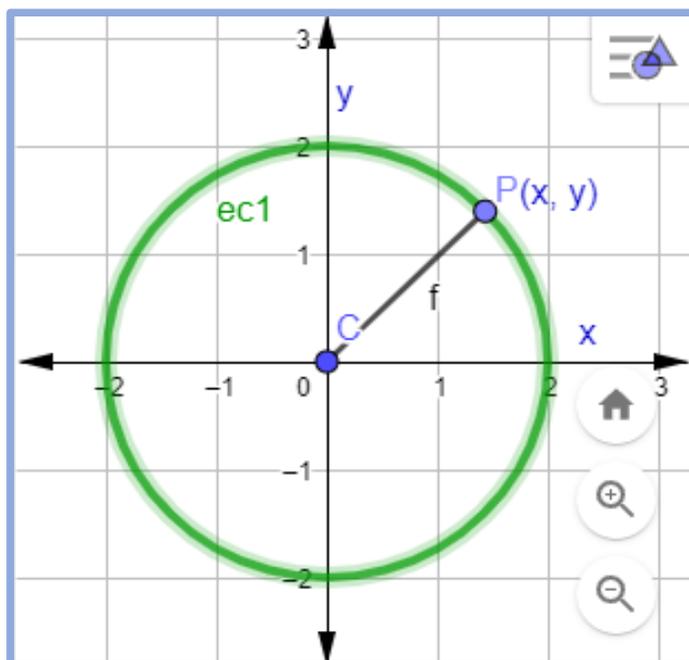


Fuente: Elaboración propia.

9.4.4. La circunferencia

Al respecto, Díaz Vega et al. (2019, p. 89), brindan la siguiente definición referente a la circunferencia: “Una circunferencia con centro C y radio r es el conjunto de todos los puntos P del plano que equidistan de C , es decir $\overline{CP} = r$ ”.

Figura 5: Circunferencia con centro C y radio r



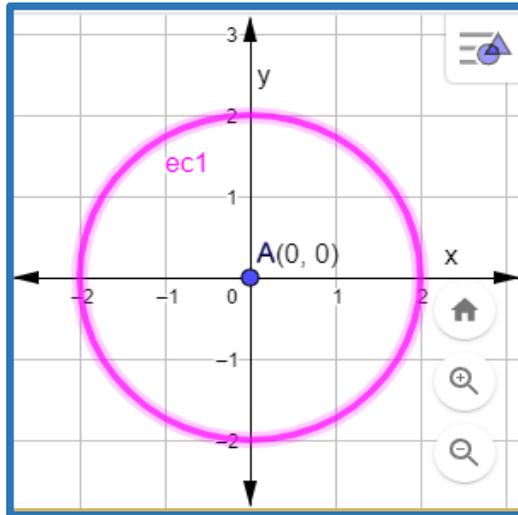
Fuente: Elaboración propia

Lo anterior significa que la circunferencia es el lugar geométrico formado por el conjunto de todos los puntos del plano los cuales se encuentran a una misma distancia de un punto fijo llamado centro de dicha circunferencia. También se puede considerar a la circunferencia como una línea curva cerrada formada por todos los puntos del plano que se encuentran a una misma distancia de un punto fijo de ella llamado centro.

9.4.4.1. Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

Díaz Vega et al. (2019, p. 89): “La ecuación de la circunferencia con centro en el origen $O(0,0)$ y radio r es $x^2 + y^2 = r^2$. En este caso se dice que está es la forma canónica”.

Figura 6: Circunferencia con centro en el origen



Fuente: Elaboración propia

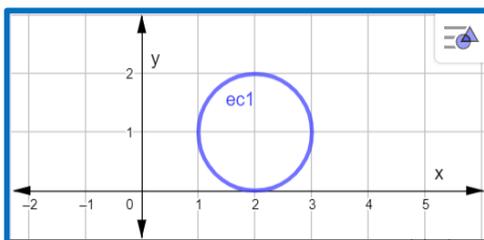
9.4.4.2. Ecuación de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r

Díaz Vega et al. (2019, p. 90): “Ecuación de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, misma que puede escribirse en su forma general como:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Siendo D, E, F , constantes determinadas”.

Figura 7: Circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r



Fuente: Elaboración propia

9.4.5. Aplicaciones de la Geometría Analítica

Aunque una de sus funciones principales es la de establecer una correspondencia entre las curvas geométricas y las ecuaciones algebraicas que permite reformular los problemas geométricos en equivalentes algebraicos y viceversa, sus aplicaciones, sobre todo con la llegada de la computación en el siglo XX, se han extendido considerablemente.

La Geometría Analítica, importante rama de las matemáticas juega un papel determinante en muchas situaciones de la vida cotidiana.

Serrano Salgado y Zapata Corea (2015, p. 190), destacan que: “ La geometría analítica tiene muchas aplicaciones en el campo de la arquitectura y la ingeniería”.

La Geometría Analítica tiene diferentes aplicaciones en diversos campos; sin embargo en las áreas que más se aplica es en arquitectura y la ingeniería para hacer diversas construcciones, por ejemplo en arquitectura permite diseñar edificios y estructuras con precisión matemática, tales como el cálculo de dimensiones exactas de los elementos de un edificio, (paredes, ventanas, puertas, pisos, etc.). Además, gracias a la Geometría Analítica se pueden piezas estructurales, como vigas, columnas y arcos. En ingeniería permite el diseño de puentes colgantes que pueden permitir el acceso de determinadas zonas geográficas a otras.

X. SISTEMA CATEGORIAL

Tabla 4. Matriz categorial

Objetivo general:

Evaluar una propuesta didáctica enfocada en el Aprendizaje Basado en Problemas, haciendo uso de GeoGebra como recurso didáctico para el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.

Objetivos Específicos	Variables	Definición conceptual	Indicadores	Fuente de información	Instrumentos
Describir los fundamentos teóricos que sustentan la estrategia metodológica enfocada en el Aprendizaje Basado en Problemas.	Aprendizaje Basado en Problemas	Díaz Barriga (2006), citada en Flores et al. (2014, p. 2): Se refiere al ABP como un enfoque centrado en el alumno, basado en actividades que fomentan la reflexión, el pensamiento complejo, la cooperación y la toma de decisiones. “La habilidad para resolver problemas está relacionada con otras habilidades, como el razonamiento crítico, la interacción social, la metacognición. Existe sinergia entre ellas. El desarrollo de la habilidad para resolver problemas debe hacerse simultáneamente con otras habilidades.	Apropiación de la estrategia metodológica activa del ABP Papel del docente en la implementación del ABP Ventajas y desventajas del ABP	Tesis de maestrías, doctorales, artículos científicos. Docente de Matemática	Guía de revisión documental Entrevista

<p>Aplicar una propuesta didáctica enfocada en el Aprendizaje Basado en Problemas, haciendo uso de GeoGebra como recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica.</p>	<p>GeoGebra como recurso didáctico</p>	<p>Para Jiménez García et al. (2017, p. 11): GeoGebra es un software gratuito y muy sencillo de operar, el cual puede presentar el comportamiento gráfico de los conceptos matemáticos, pero es responsabilidad de cada docente hacer sus clases más interactivas, atractivas y entretenidas, tiene que recordar que está enseñando a una generación tecnológica, una generación de redes sociales, una generación innovada, entonces el papel de docente también tiene que ser innovado hacia el uso de todos los recursos tecnológicos para lograr el proceso enseñanza-aprendizaje.</p>	<p>Características Importancia Recurso didáctico Importancia de los recursos didácticos en el PEA de la Geometría Analítica</p>	<p>Tesis de maestrías, doctorales y artículos científicos Estuantes de</p>	<p>Guía de revisión documental, (lectura y análisis Propuesta didáctica Prueba sistemática</p>
--	--	--	---	--	--

Fuente: Elaboración propia

XI. DISEÑO METODOLÓGICO

11.1 Paradigma de investigación

La investigación que lleva por nombre: Propuesta didáctica en el aprendizaje basado en la resolución de problemas, utilizando GeoGebra en Geometría Analítica, se considera un trabajo investigativo fundamentado en el paradigma interpretativo.

Según, Ramírez Robledo et al. (2004, p.71) establecen que:

La función final de las investigaciones fundadas en el paradigma interpretativo consiste en comprender la conducta de las personas estudiadas, lo cual se logra cuando se interpretan los significados que ellas le dan a su propia conducta y a la de los otros, como también a los objetos que se encuentran en sus ámbitos de convivencia.

Para Barrantes (2009), referido en Blandón Dávila (2017, p. 76):

Enfatiza en la comprensión e interpretación de la realidad educativa desde los significados de las personas implicadas en los contextos educativos. Aquí se requiere que el investigador utilice e interprete dos lenguajes, el propio y el de las personas que le proporcionan la información, a fin de interpretar de forma correcta lo que sucede en el contexto de la investigación.

Es por ello que el tipo de paradigma que dirige a esta investigación se fundamenta en el interpretativo, dado que comprende la naturaleza de los fenómenos estudiados, de manera que se realizó una interpretación de entrevista aplicada a docente que imparte el área de Matemática, aplicación de diagnóstico inicial y final a estudiantes de undécimo grado, así como guía de observación al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica.

11.2 Enfoque de la investigación

Para el desarrollo de este trabajo investigativo se utilizó el enfoque cualitativo con algunos elementos cuantitativos, tomando como referencia la conceptualización que brindan los siguientes autores:

Hernández Sampieri y Fernández Collado (2006, p. 10), consideran que: “El enfoque cualitativo busca principalmente "dispersión o expansión" de los datos e información; mientras que el cuantitativo pretende, de manera intencional, "acotar" la información”.

-

Este utiliza la recolección y análisis de la información para dar respuesta a las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación, de los datos obtenidos. En cuanto al enfoque cuantitativo se afirma que: en el enfoque cuantitativo se refleja la necesidad de medir y estimar magnitudes de los fenómenos y problema de investigación.

Es por esta razón que en este estudio se ha utilizado el enfoque cualitativo con elementos cuantitativos, ya que primeramente trata de la interpretación de datos subjetivos los que fueron reflejados en la aplicación que se realizó a docente como a estudiantes, así mismo se hizo un análisis cuantificable del diagnóstico que fue aplicado, acerca del aprendizaje basado en problemas utilizando GeoGebra, para la enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica.

11.3 Contexto de estudio

Con el propósito de recopilar información a través de diferentes instrumentos a fin de darle mayor sustentación a la presente investigación, este trabajo se llevó a cabo en el Municipio de San Dionisio, Departamento de Matagalpa, el cual se describe a continuación:

Según INTUR (2021):

El municipio se encuentra a 166 kilómetros de la Ciudad de Managua, capital de Nicaragua y a 37 km de la Ciudad de Matagalpa. Limita al norte con Matagalpa, al sur con Terrabona, al este con Matagalpa y Esquipulas y al oeste con el Municipio de Terrabona. El Municipio de San Dionisio tiene una extensión territorial de 165.50Km^2 y se encuentra en una altitud de 380 msnm. Posee una población (urbana: 2944; rural: 15,334).

Con el fin de realizar la aplicación de instrumentos para la recopilación de información se seleccionó el Centro Escolar Público Rubén Darío, ubicado en la Comunidad de Susulí Central, 5 Km al Norte del Municipio de San Dionisio, a estudiantes que cursan undécimo grado, durante el segundo semestre 2022, conformada por 23 discentes, más un docente de Matemática.

11.4 Diseño de la investigación según su alcance nivel de profundidad

De acuerdo a Mejía (2009), referido en Medrano Chávez (2021, p. 77):

Principalmente se describen los elementos fundamentales del contexto de actuación, y factores de gestión de calidad, al igual que las valoraciones dadas por los actores implicados, además se presenta la correlación que existe entre dos o más variables de interés. La correlación se da cuando se llevan a cabo encuestas y cuestionarios de los cuales es recopilada la información, dentro de este tipo de investigación se debe elegir una muestra o grupo aleatorio de participantes.

En este sentido, se analizaron diversos factores que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica, vinculación con el entorno y procesos de seguimiento. El análisis de estos aspectos genera la propuesta de mejora, que puede ser aplicada en situaciones o problemas similares en la gestión de calidad del aprendizaje.

En referencia al diseño, Hernández Sampieri et al. (2006, p. 210): “De acuerdo con los objetivos y nivel de profundidad, el alcance de la investigación se puede clasificar como transaccional- descriptivo”. Tienen como objetivo indagar la incidencia de las modalidades o niveles de una o más variables en una población.

Lo expresado por Hernández Sampieri et al. (2006, p. 210) se refiere al diseño de investigación transaccional-descriptivo según sus objetivos y nivel de profundidad. Este se enfoca en describir las características de una población en un momento específico. En otras palabras este tipo de diseño de investigación se emplea para obtener una descripción detallada de la situación actual de un fenómeno o una población, sin profundizar en las causas o relaciones entre variables.

Basado en la definición anterior, la presente investigación se considera de diseño transaccional-descriptivo, ya que en este caso particular se ha realizado una descripción detallada de la situación actual del fenómeno o población objeto de estudio, sin profundizar en las causas o relaciones entre variables.

11.5 Alcance temporal de la investigación

Sierra (2008), citado por Medrano Chávez (2021, p. 77), expresa que : "De acuerdo al alcance temporal la investigación es transversal si se estudia el tema en un momento único".

Este un estudio transversal porque se ha efectuado sobre una situación y población concreta en un momento determinado y recogiendo datos en un solo momento de cada informante, para efectos de esta tesis son los estudiantes de undécimo grado del Centro Escolar Público Rubén Darío, San Dionisio Matagalpa, segundo semestre 2022 y un docente que imparte el área de Matemática. Con ello se analizó la forma en cómo se comportaban las variables en estudio en esa situación bajo unas circunstancias específicas.

11.6 Población

Para Arias Gómez et al. (2016, p. 202):

La población de estudio es un conjunto de casos, definido, limitado y accesible, que formará el referente para la elección de la muestra, y que cumple con una serie de criterios predeterminados. Es necesario aclarar que cuando se habla de población de estudio, el término no se refiere exclusivamente a seres humanos, sino que también puede corresponder a animales, muestras biológicas, expedientes, hospitales, objetos, familias, organizaciones, etc.; para estos últimos, podría ser más adecuado utilizar un término análogo, como universo de estudio.

De acuerdo a la opinión de Arias la población es un grupo de elementos, (personas, animales o cualquier otro elemento) de los cuales se desea estudiar determinadas características que tengan en común. Para esta investigación se tomó como población a un total de 23 estudiantes de undécimo grado del II semestre 2022 y un docente del área de Matemática.

Tabla 5. Población considerada para la investigación

Población
23 estudiantes de undécimo grado del Centro Escolar Público Rubén Darío, San Dionisio-Matagalpa, correspondiente al segundo semestre 2022 y 1 docente que imparte la asignatura de Matemática.

Fuente: Elaboración propia.

11.7 Métodos utilizados

11.7.1 Método teórico

Generalmente en los métodos de la investigación se emplean los teóricos (Análisis, síntesis, inducción, deducción, comparación, descriptivo). Estos son esenciales en la investigación científica porque permiten interpretar conceptualmente los datos empíricos, desarrollar teorías y caracterizar fenómenos de manera profunda y fundamentada.

Del Sol Febregat et al. (2017, p. 252) sostienen que:

Los métodos teóricos permiten revelar las relaciones esenciales del objeto de investigación no observables directamente, cumpliendo así una función gnoseológica importante al posibilitar la interpretación conceptual de los datos empíricos encontrados, la construcción y desarrollo de teorías, creando las condiciones para la caracterización de los fenómenos.

De acuerdo a lo expresado por los autores citados anteriormente, los métodos teóricos son de carácter conceptual, se basan en el análisis e interpretación de instrumentos aplicados con un carácter teórico para posteriormente obtener conclusiones a través de determinados hallazgos y aportar mejoras a la problemática encontrada durante el proceso. De tal manera que se afirma que en esta investigación se aplicaron métodos teóricos los cuales se encuentran reflejados en el análisis de los resultados, mediante la triangulación de la información adquirida por los diferentes instrumentos que se aplicaron.

Así mismo se afirma que en esta investigación se utilizó el método teórico porque se realizó interpretación de los datos recopilados, los cuales se encuentran reflejados en el documento, a través de la selección e interpretación de las bibliografías para elaborar el marco teórico y en aras de aportar al alcance de un aprendizaje significativo, se diseñó una

propuesta didáctica enfocada en el aprendizaje basado en la resolución de problemas, utilizando GeoGebra en Geometría Analítica.

11.7.2 Método empírico

Según Hernández Rodríguez et al. (2021, p. 33), sostienen que:

Los métodos empíricos se basan en la experiencia en el contacto con la realidad; es decir, se fundamentan en la experimentación y la lógica que, junto a la observación de fenómenos y su análisis estadístico, son los más utilizados en el campo de las ciencias sociales y en las ciencias naturales.

Este método es aquel tomado de la práctica, analizado y sistematizado por vía experimental mediante la observación reiterada y la experimentación. Constituye la primera etapa del conocimiento, donde el hombre obtiene el reflejo del mundo circundante a través de sensaciones, percepciones y representaciones. Es esencial para garantizar que la investigación científica se base en datos sólidos y verificables, lo que a su vez fortalece la confianza en los hallazgos y conclusiones obtenidos.

Esta investigación es empírica, ya que se aplicó entrevista a docentes, y un diagnóstico inicial y diagnóstico final a estudiantes de undécimo grado, así como una guía de observación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica, los que fueron interpretados de manera detallada durante este proceso.

11.8 Técnicas e instrumentos de recopilación de la información

11.8.1 Técnicas

Según Egg (1995), citado en Pulido Polo (2015, p. 1143), afirma que: “El concepto de técnicas, en el ámbito de la investigación científica, hace referencia a los procedimientos y medios que hacen operativos los métodos”.

González Ríos (1997), referido por Pulido Polo (2015, p. 1143), “La entrevista, la observación, o el uso de fuentes de información secundarias, etc. son algunas de las diferentes técnicas más utilizadas en la investigación social”.

De acuerdo a la opinión del autor antes mencionado la técnica permite llevar a cabo procedimientos o actividades con el propósito de recabar la información necesaria para el logro de los objetivos de una investigación y de esta manera lograr una decisión acertada al caso de estudio, en esta actividad se pueden aplicar instrumentos para recompilar información necesaria con el propósito de conocer la opinión de un determinado grupo de la población.

11.8.1.1 Entrevista

Hernández Sampieri et al. (2006, p. 597): “Esta se define como una reunión para intercambiar información entre una persona (el entrevistador) y otra (el entrevistado) u otras (entrevistados)”.

En relación a lo antes mencionado, la entrevista es una conversación entre dos personas. A ésta se le considera de vital importancia, ya que se utilizará para recopilar

información pertinente para el análisis e interpretación de las variables propuestas en la presente investigación.

La estructura de esta guía se conformó para ver la aplicación de la variable, Aprendizaje basado en problemas y el uso de GeoGebra como recurso didáctico en la enseñanza-aprendizaje de la unidad de Geometría Analítica.

Este instrumento se aplicó con el propósito de conocer la opinión del docente, para esto se redactaron preguntas abiertas, las cuales se encuentran definidas en (Anexo 1). Las respuestas obtenidas se tomarán en consenso para dar salida a la propuesta de mejora.

11.8.1.2 Evaluación

Garza Vizcaya (2004, p. 807), considera que la evaluación:

Se identifica a la evaluación con la última etapa del proceso natural del conocimiento que concluye con la emisión de juicios informados, proceso que antecede a las decisiones y a la acción humana. En su forma más simple, la evaluación conduce a un juicio sobre el valor de algo y se expresa mediante la opinión de que ese algo es significativo. Se llega a este juicio calificando qué tan bien un objeto reúne un conjunto de estándares o criterios.

La evaluación es un proceso crítico e informado que implica medir algo basado en criterios establecidos para emitir juicios que guiarán decisiones y acciones futuras. La calidad de la evaluación depende de la adecuación y claridad de estos criterios.

Al respecto Vallejos Díaz (2008, p. 13) “es el resultado final o temporal de la tendencia del comportamiento del objeto de estudio que deseamos conocer, en un determinado contexto-espacio-tiempo, a través de sus funciones y principios que lo caracterizan como tal”.

Vallejos Díaz define la evaluación como un proceso dinámico y contextual que analiza las tendencias de comportamiento de un objeto de estudio considerando sus características esenciales en un contexto específico de espacio y tiempo, para tomar decisiones futuras basada en los resultados de esta.

Para llevar a cabo la presente investigación se hizo uso de la evaluación como instrumento de investigación científica realizado en dos momentos, una a inicio de la unidad de Geometría Analítica y el otra al final de la unidad.

11.8.1.3 Observación

Para Campos et al. (2012, p.47) sostienen que:

La observación es la forma más sistematizada y lógica para el registro visual y verificable de lo que se pretende conocer; es decir, es captar de la manera más objetiva posible, lo que ocurre en el mundo real, ya sea para describirlo, analizarlo o explicarlo desde una perspectiva científica; a diferencia de lo que ocurre en el mundo empírico, en el cual el hombre en común utiliza el dato o la información observada de manera práctica para resolver problemas o satisfacer sus necesidades.

De acuerdo con la definición anterior, se afirma que esta investigación hará uso de la observación como técnica de recopilación de información, la cual será debidamente analizada y procesada para brindar aportes en la elaboración de la propuesta de mejora a la problemática presente.

11.9 Validación y confiabilidad

De acuerdo a Borja García (2020, pp. 81-82), para que exista validez en las investigaciones cualitativas debe de existir o se debe procurar:

- Buscar que resultados reflejen una imagen lo más completa posible, clara y representativa de la realidad o situación estudiada.
- Planear la investigación (modo de recoger y analizar la información) comportándose el investigador de forma rigurosa, sistemática y lógica.
- Tomar en cuenta para una validez interna: a) los cambios notables en el ambiente estudiado (principio y fin); b) el estatus y el rol que el investigador ha asumido; y c) la credibilidad de la información que dan los informantes.
- Establecer para la validez externa que las estructuras de significado descubiertas en un grupo no son comparables con las de otro.

Para que exista confiabilidad en las investigaciones cualitativas debe de existir o se debe procurar:

- Buscar que la investigación sea estable, segura, congruente, igual a sí misma en diferentes tiempos y previsible para el futuro.
- Procurar que exista confiabilidad interna, es decir, cuando varios observadores, al estudiar la misma realidad, concuerdan en sus conclusiones.
- Reducir la amenaza que representa la confiabilidad interna mediante (LeComte y Goetz citados por Martínez Miguélez, 2006): a) el uso de categorías descriptivas lo más concretas y precisas posibles; b) la presencia de varios investigadores; c) la confirmación de que lo visto o registrado por el investigador coincide o es consistente con lo que ven o dicen los sujetos del grupo estudiado; y d) el uso de medios tecnológicos para conservar la realidad presenciada (cámaras, videos, grabadora, entre otros).
- Procurar que exista confiabilidad externa, al estar seguros que, si investigadores independientes al estudiar una realidad en tiempos o situaciones diferentes, llegan a los mismos resultados.
- Asegurar la confiabilidad externa al (LeComte y Goetz citados por Martínez Miguélez, 2006): a) precisar el nivel de participación y la posición asumida por el investigador en el

grupo estudiado; b) identificar a los informantes; c) especificar el contexto físico, social e interpersonal; y d) precisar los métodos de recolección y análisis de la información.

Para la validación de los instrumentos que se aplicaron, se hizo uso de la técnica de juicios de especialistas, donde se contó con la participación de 4 expertos de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN) con los niveles de Máster y Doctores, así mismo con amplia experiencia en Metodología de la Investigación, esto con el objetivo de que ellos evaluaran el contenido de los instrumentos con relación a la congruencia de la temática. Para lo cual se les proporcionó el tema de estudio, los objetivos de la investigación, las preguntas de investigación, la matriz categorial y los instrumentos a revisar.

A continuación, se hace mención del equipo de expertos que estuvo a cargo de la validación de instrumentos:

- MSc. Juan Álvaro Ulloa Montoya, Docente –Horario Física-Matemática de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, UNAN-Managua, CUR-Matagalpa.
- Dra. Nesly de Los Ángeles Laguna Valle, Docente Titular y Coordinadora de la Carrera de Informática Educativa de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, UNAN-Managua, CUR-Matagalpa.
- Dra. María Elena Blandón Dávila, Doctora en Matemática Aplicada.
- MSc. José Alfredo Jirón Zeledón, Docente-Horario de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, UNAN-León.

11.10 Procesamiento de la información

El proceso y análisis de la información se llevó a cabo a través del uso de las siguientes herramientas: Programa (Excel), Software Statistical Package for Social Sciences (SPSS) o Paquete Estadístico para las Ciencias Sociales, donde se procesó la información a través de la construcción de diagramas que resaltan cada una de las respuestas obtenidas a través de la aplicación de instrumentos, (diagnóstico inicial y final a estudiantes de undécimo grado, entrevista a docente de Matemática y guía de observación al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica).

Cabe señalar que con el diagnóstico inicial se obtuvo la base del estudio de esta investigación, dado que por medio de este se pudo determinar si los estudiantes de undécimo grado antes de iniciar sus procesos de aprendizaje de la unidad de Geometría Analítica, poseían conocimientos básicos de la temática que se les iba a impartir, aunque unos en menor grado y otros en un nivel más avanzado, como suele suceder generalmente.

El diagnóstico final consistió en actividades de identificación, pero a la vez fueron más complejas; sin embargo, tenían estrecha relación con las actividades planteadas en el diagnóstico inicial a fin de realizar una comparación en ambos resultados.

XII. Triangulación de datos

En este apartado se presenta la triangulación de los datos obtenidos durante el proceso investigativo, aportados por las diferentes fuentes que fueron consultadas a fin de garantizar mayor validez y credibilidad a la investigación.

Para Ruiz Olabuénaga (2003), referido en Araneda Valdés (2005, p. 25) sostiene que:

La triangulación es un intento de promoción de nuevas formas de investigación que enriquezcan el uso de la metodología cuantitativa con el recurso combinado de la cualitativa y viceversa. Para el autor, la triangulación está orientada al control de calidad de la investigación. Esta fase corresponde a la tercera etapa de la lógica investigativa después de la problematización y elaboración del marco conceptual y que puede efectuarse de tres modos principales en función de lo que con ella se pretenda: verificar, confirmar y enriquecer las conclusiones.

Lo expresado en la cita anterior, significa que la triangulación es un proceso que tiene como propósito principal enriquecer el proceso de la investigación a fin de dar mayor precisión y validez a través de un análisis de distintos puntos de vistas. Es decir, no se basa solamente en una opinión en particular, al contrario, considera el argumento de varias fuentes, lo que le da más rigurosidad.

Una vez obtenida toda la información presentada en la presente investigación y a la vez habiéndola procesado, se procedió a la triangulación, permitiendo realizar un análisis de manera exhaustiva. Cabe señalar que dichos resultados han dado salida a los objetivos que se plantearon para este proceso, así mismo implicaron deducir conclusiones de dicho estudio. Además, destacar que entre uno y otro instrumento aplicado se obtuvieron algunas diferencias; sin embargo, la información originada entre cada uno de ellos se complementó permitiendo así determinar si los resultados eran consistentes o no para argumentar la validez y confiabilidad de la información.

En esta investigación científica la triangulación ocupa un papel determinante, ya que sirve como una herramienta que implica el enriquecimiento de los resultados al permitir aumentar la comprensión del fenómeno, tomando en cuenta que cada individuo tiene puntos de vistas diferentes sobre un mismo fenómeno objeto de estudio, y al involucrar todas las opiniones, consideraciones o valoraciones se le da mayor rigor científico y a la vez disminuir sesgos en el proceso investigativo.

XIII. Análisis y discusión de resultados

En este acápite se reflejan los resultados del análisis basado en la información obtenida a través de los instrumentos aplicados a 23 estudiantes de undécimo grado de educación secundaria, segundo semestre 2022 del Centro Escolar Público Rubén Darío. Se aplicó guía de observación al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica y entrevista al docente que imparte el área de Matemática para dar mayor validez y rigor científico a la investigación.

A continuación, se presenta una descripción y análisis de manera detallada de los resultados obtenidos mediante la aplicación de una evaluación inicial y una evaluación final al empezar y culminar el abordaje de la unidad de Geometría Analítica, impartida por el docente de Matemática. Cabe señalar que cada diagnóstico disponía de nueve actividades de selección múltiple, cuya solución se debía realizar de manera individual y una vez seleccionada la respuesta que el estudiante considerara correcta en cada ítem, este justificara el porqué de su elección, mediante un procedimiento matemático o de manera explicativa.

Los resultados de esta investigación se presentan por cada objetivo planteado, cuya sustentación está basada en los hallazgos que se obtuvieron mediante la aplicación de diferentes instrumentos, previamente validados.

Objetivo N° 1: Estuvo enfocado en diagnosticar el nivel de aprendizaje de los estudiantes en Geometría Analítica a través de las estrategias didácticas utilizadas en el proceso enseñanza-aprendizaje de dicha unidad. Para ello se aplicó una evaluación inicial y final a discentes de undécimo grado del Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí San Dionisio-Matagalpa, segundo semestre 2022.

Mediante los resultados de cada instrumento aplicado, se constató que los educandos presentaron ciertas dificultades al momento de resolver ejercicios y problemas relacionados con conceptos básicos acerca de la unidad objeto de estudio, tales como distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, ecuación de la recta, situaciones afines a la ecuación de la circunferencia, entre otros aspectos. Lo que más se evidenció fue la falta de justificación en cada ítem, es decir, aunque en algunas de las problemáticas planteadas la mayoría de los individuos involucrados seleccionaron la respuesta correcta, estas carecieron de un procedimiento matemático o explicación escrita sobre el porqué de su elección.

Por otra parte, a través de entrevista aplicada al docente que imparte el área de Matemática, se obtuvo importante información, mediante la cual afirma que él hace uso de algunas herramientas tecnológicas para desarrollar los contenidos correspondientes a Geometría Analítica, sobre todo, GeoGebra; sin embargo, expresó textualmente: “No logro explorar todo el repertorio que este software ofrece por falta de tiempo”. Manifestó que la mayoría de las veces que lo ha utilizado lo hace con el fin de comprobar resultados de ejercicios y/u operaciones realizadas manualmente, también para graficar funciones. Además, considera que aún no está trabajando en lleno la estrategia del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), ya que es un proceso que requiere de mayor tiempo para su implementación, agregó.

Durante un proceso de acompañamiento al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica, se pudo observar que efectivamente el docente sí hace uso de GeoGebra, pero no logra explorar las múltiples oportunidades que este ofrece. Es decir, únicamente lo utiliza para comprobar resultados que se resuelven en la pizarra. Debido a que este software tiene un sinnúmero de opciones para trabajar de manera dinámica, se puede afirmar que hace falta un proceso más exhaustivo complementado con situaciones problemáticas propias del entorno.



Imagen 1: Aplicación de evaluación

Fuente: Evidencia propia

Con el propósito de brindar mayor sustentación y validez a la salida de cada uno de los objetivos, se presentan los resultados por cada ítem correspondiente al evaluación inicial y final, así mismo, un análisis crítico y reflexivo de cada hallazgo encontrado a lo largo de este proceso.

Evaluación inicial

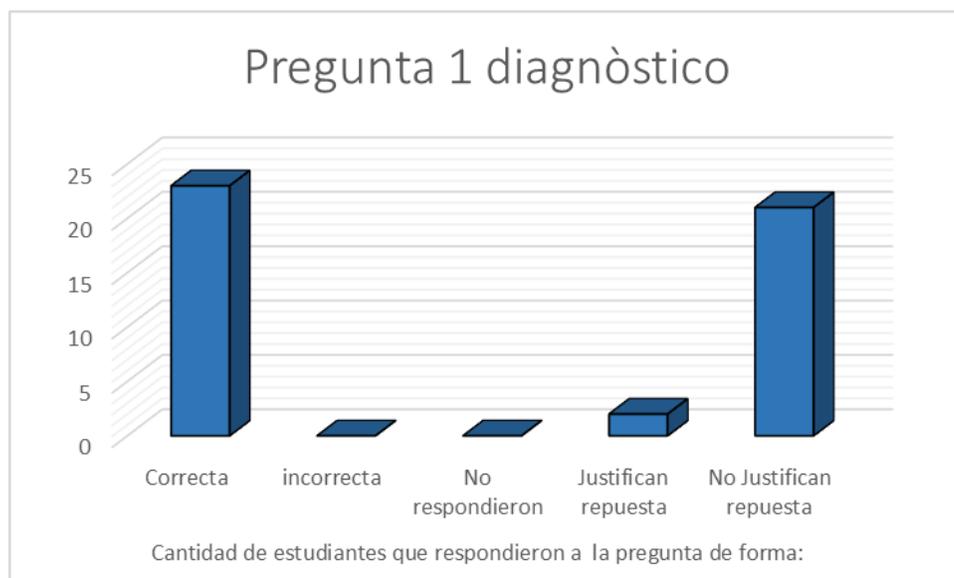


Imagen 2: Reconoce un plano cartesiano, a partir de su gráfica

Fuente: Evidencia propia

Al presentarles la actividad 1, cuya finalidad consistía en que el estudiante identificara un plano cartesiano a partir de sus características, en la cual se pudo constatar que todos seleccionaron la opción correcta, lo que representa un 100% del total de la población involucrada; sin embargo, la mayoría no brindó una justificación, pues únicamente dos lo hicieron, evidenciando que la mayor parte carecía de conocimientos previos sobre la temática, por lo cual se deduce que estas respuestas surgen de diferentes fuentes, tales como: el estudiante responde al azar o copia la respuesta, limitándose a desarrollar el razonamiento crítico y solucionar de manera satisfactoria una situación planteada.

Mediante un proceso de observación realizado durante el desarrollo de la unidad de Geometría Analítica se logró constatar que los estudiantes pueden identificar un plano cartesiano, pero no tienen un concepto bien definido como tal para poderlo expresar. Esto les dificultó poder argumentar la razón por la cual la figura presentada correspondía a dicho

plano. Además, este es un contenido que incluso se imparte en niveles inferiores. De acuerdo a Huete Fuente et al. (2019, p. 46), este tema se aborda en octavo grado, según el programa vigente del Ministerio de Educación. Así mismo, al estudiante se le enseña la definición, características, construcción del plano cartesiano, gráfica de funciones de primer grado, es decir, que por ser un contenido elemental debería haber un dominio y comprensión de todos estos aspectos, lo cual no se evidencia en la solución de este ítem.

Basado en los resultados descritos, analizados y fundamentados anteriormente, se considera de vital importancia fortalecer en el estudiante la promoción del autoestudio, el análisis crítico y sobre todo la independencia durante el desarrollo del proceso educativo, o sea, que ellos se vuelvan protagonistas de su propio aprendizaje, que se conviertan en seres activos y constructores de su conocimiento. En este particular, el papel del docente consiste en ser mediador, es decir, no facilitarle todo al educando, sino que los inste, motive y dirija a descubrir para dar solución a diversos problemas planteados mediante diferentes estrategias o alternativas que permitan encontrar respuestas satisfactorias a situaciones propias de su entorno vinculadas a la Geometría Analítica.

En base a lo expresado anteriormente, es importante hacer énfasis en que el estudiante asimile bien los conceptos y definiciones cuando estos se abordan, para evitar confusiones o dificultades en la comprensión de temas similares en niveles más complejos, en otras palabras, tratar que lleven una secuencia en los aprendizajes. En este sentido, GeoGebra permite comprender mejor las temáticas abordadas, ya que con este se logran realizar actividades dinámicas, interactivas y motivadoras que manualmente son difíciles y en ocasiones imposibles de realizar. Entre ellas, graficar funciones, construcción de figuras o cuerpos geométricos con exactitud, tales como: animaciones de las mismas, girar el plano cartesiano, hacer cálculos de longitud, distancia entre dos puntos, áreas, entre otros. Estas situaciones se pueden realizar en menor tiempo e implican una mejor visualización e interpretación de los contenidos por parte de los aprendices.

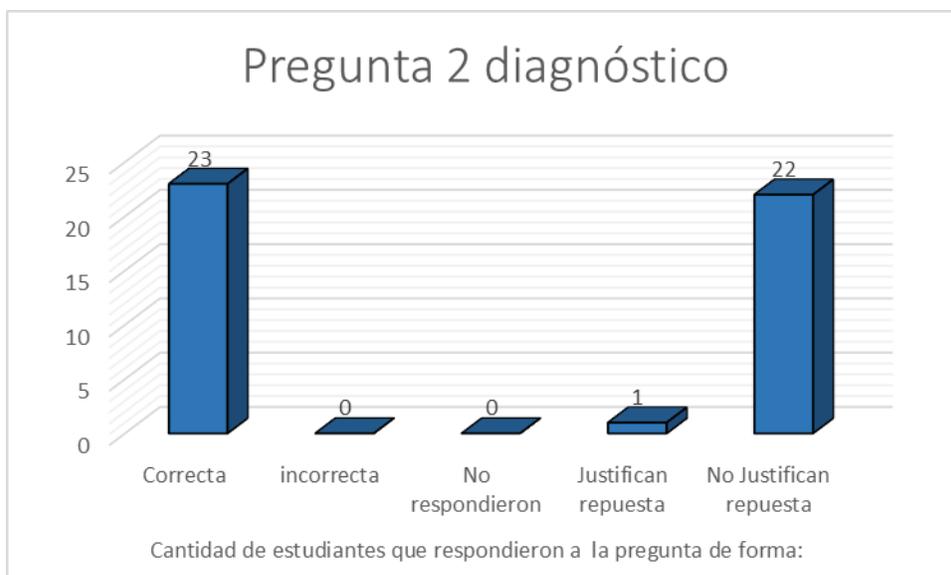


Imagen 3: Determina la distancia entre dos puntos

Fuente: Evidencia propia

La actividad 2 estaba orientada en determinar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, en la cual se verificó que toda la población tomada en consideración seleccionó el ítem correcto. Estos resultados evidenciaron que una cantidad muy reducida logró probar su respuesta, por lo que se entiende que la mayoría simplemente optó por el inciso al azar. Se puede decir que el estudiante presenta dificultad al relacionar este contenido con otros que ya ha estudiado en grados anteriores.

En referencia a lo abordado anteriormente, García Acevedo et al. (2019, p. 124), expresan que el teorema de Pitágoras es un contenido que se empieza a enseñar desde noveno grado y se retroalimenta en el nivel décimo grado, por lo que los estudiantes de undécimo deberían tener dominio de esta temática, no obstante, en la respuesta del ítem planteado no se aprecian estos conocimientos.

Cabe señalar que es necesario hacer hincapié en el desarrollo de una clase más práctica e inculcar en los estudiantes la importancia de la lectura y análisis crítico durante la resolución de un ejercicio o problema, buscando diversas estrategias de solución relacionadas

con saberes adquiridos previamente, de manera que se vincule con la temática que se está estudiando. Cuando el estudiante logra enlazar los conocimientos que ha obtenido con el nuevo contenido, está demostrando que ha alcanzado un aprendizaje significativo y por tanto tendrá menos dificultad al dar respuesta a situaciones problemáticas que se le plantean, por esto es de vital importancia trabajar en función de lograr conocimientos sólidos en cada contenido abordado.

El rol del discente debe ser de carácter creativo, imaginativo, de modo que desarrolle la capacidad de encontrar una forma de resolver problemas propios de su entorno relacionados con Geometría Analítica, objeto de estudio en esta investigación científica. Esto se logrará cuando el docente le plantea situaciones contextualizadas y que el estudiante se involucre activamente en el proceso de solución de manera que se sienta parte central en la búsqueda de una respuesta satisfactoria, garantizando así un conocimiento duradero que le servirá para toda la vida.

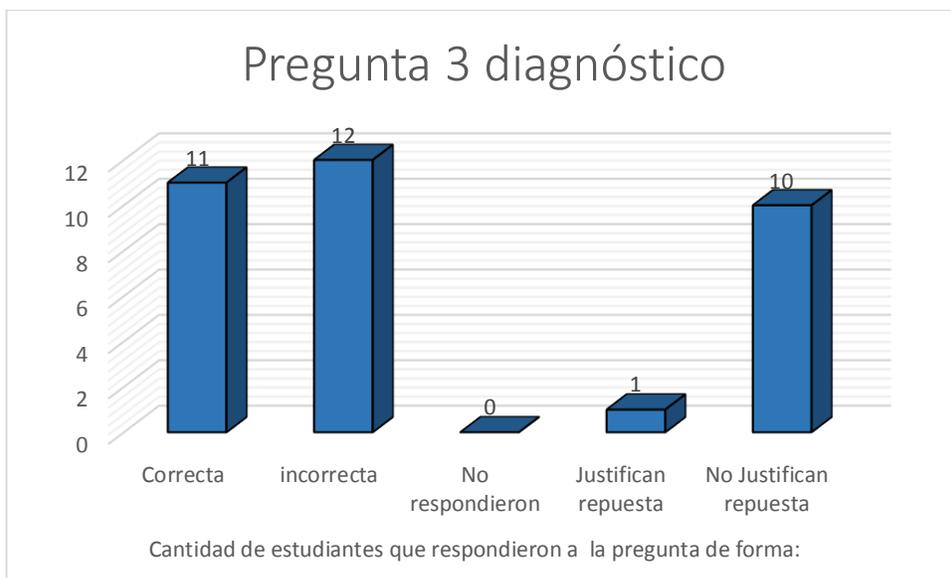


Imagen 4: Explica cómo calcular la distancia entre dos puntos

Fuente: Evidencia propia

Actividad #3: Ésta consistía en que el estudiante pudiera explicar cómo calcular la distancia entre dos puntos. De acuerdo con los resultados adquiridos, una cantidad bastante considerable respondió de manera incorrecta. Además, de quienes contestaron de forma correcta, la mayoría no realizó ningún procedimiento que sustentara su elección. Esto permite afirmar que había una carencia de conocimientos para poder brindar una justificación satisfactoria a la situación planteada. Se considera que los involucrados en este proceso no lograron enlazar contenidos abordados con anterioridad con la temática abordada.

Evidentemente es necesario fortalecer los conocimientos respecto a la temática, a través de actividades amigables con la Matemática, para que en los discentes despierte el interés por aprender acerca de esta disciplina, en donde sean ellos artífices de su propio aprendizaje y el docente un mediador en este proceso, de manera que los conocimientos sean los esperados.

En relación al protagonismo del estudiante y del docente en el proceso educativo, (Ministerio de Educación [MINED], (2009, p. 23), aborda que:

El estudiante: Es el artífice de su propio aprendizaje con base en sus experiencias previas y la apropiación crítica del conocimiento universal acumulado, en interacción permanente con sus docentes, compañeros y compañeras de estudio y su entorno. El docente: Se caracteriza como un mediador (a) pedagógico de los aprendizajes, reconociendo que estos juegan un papel relevante en el proceso docente – educativo, en donde el maestro actúa como un agente de cambio en el aula, la escuela y la comunidad.

Al realizar acompañamiento al desarrollo de la unidad de Geometría Analítica se observó que el docente relaciona el contenido a abordar con los conocimientos previos del estudiante, es decir explora los saberes que estos poseen. A pesar de todo, tuvieron dificultad al brindar una respuesta satisfactoria al problema planteado. De acuerdo a (Aráuz Chévez, 2019, p. 78) en grados anteriores se abordan contenidos relacionados con la distancia entre dos puntos, entre ellos el teorema de Pitágoras, pero no se lograron evidenciar estas habilidades en la solución de la situación presentada.

Por lo afirmado anteriormente, se estima que es necesario hacer planteamientos de actividades propias del entorno, en las cuales los estudiantes se involucren de manera activa en todo el proceso, encontrando el sentido de aplicabilidad de las Matemáticas, es decir, no solo presentarles ejercicios y que los realicen de manera mecánica, sino, poner en práctica el razonamiento crítico, sobre todo mediante la implementación del ABP como estrategia metodológica activa y participativa de aprendizaje, pues esto permitirá comprender mejor lo que se está haciendo, es decir se logrará un significado más claro.

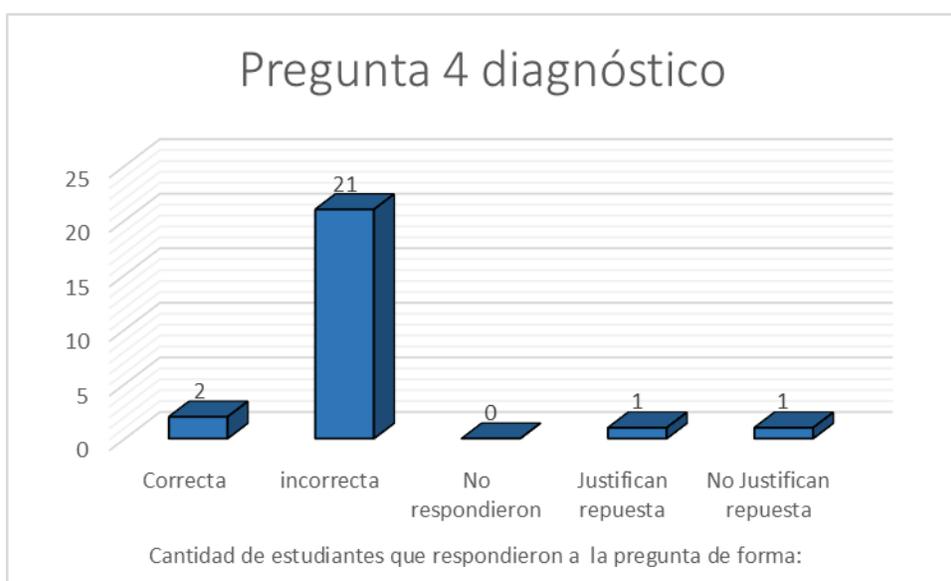


Imagen 5: Aplica la fórmula de la distancia entre dos puntos

Fuente: Evidencia propia

Actividad #4: En esta se les proporcionaron los puntos $A(2, -3)$ y $B(5, 1)$, en la cual se les solicitó que calcularan la distancia entre ambas coordenadas. Este ítem estaba muy relacionado con el anterior, por tanto, los resultados fueron similares; la mayor parte tuvo dificultad para dar solución al problema planteado, ya que lo resolvieron sin realizar ningún procedimiento matemático o al menos dar una explicación de manera escrita sobre la respuesta seleccionada, por lo que es necesario brindar retroalimentación en esta temática o utilizar otras estrategias didácticas para lograr un aprendizaje significativo en este contenido.

Durante un proceso de observación se logró verificar que el docente hace uso de algunas herramientas tecnológicas únicamente para comprobar resultados de ejercicios que se resuelven manualmente, sobre todo GeoGebra, pero no siempre tiene acceso a algunos aparatos tales como el data show, tablets, ya que otros docentes también los utilizan, limitando así el uso frecuente de este software.

Debido a que GeoGebra es uno de los softwares matemáticos más completos que dispone de un amplio repertorio, el docente debería aprovechar cada una de las oportunidades que este ofrece de manera dinámica, activa e innovadora, para lograr una mayor motivación y comprensión en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos abordados.

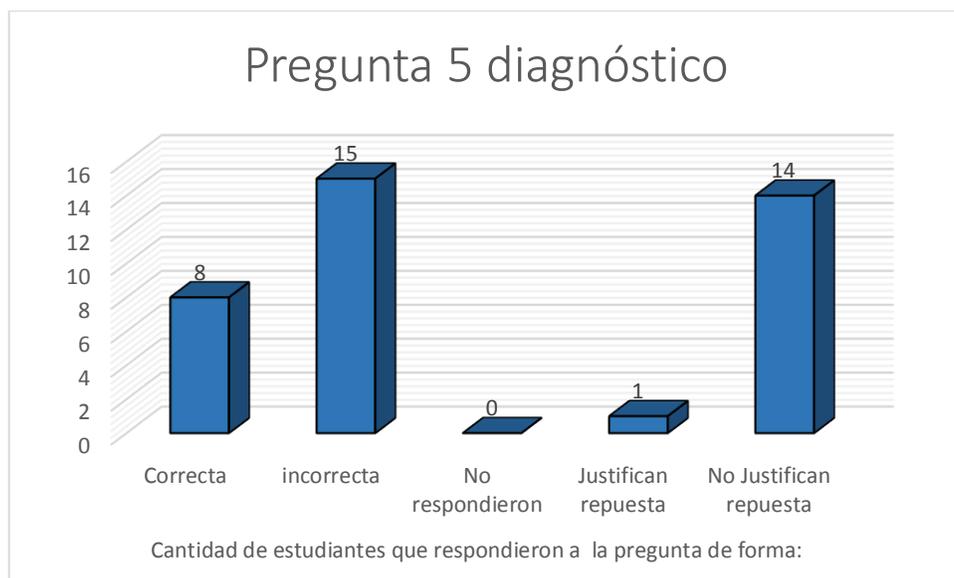


Imagen 6: Resolución de problemas reales sobre distancia entre dos puntos

Fuente: Evidencia propia

En el ítem #5 se les planteó un problema contextualizado sobre la aplicación de la distancia entre dos puntos, en el cual se observó que un porcentaje considerablemente bajo tenía conocimiento sobre cómo resolver la situación presentada. Además, de los estudiantes

que respondieron adecuadamente únicamente 1 realizó determinado procedimiento para llegar a la respuesta, lo que indica que la mayoría carecía de habilidades matemáticas. Cabe señalar que para brindar una solución satisfactoria se pudieron haber puesto en práctica saberes previos de contenidos abordados en grados anteriores relacionados con la problemática.

Por ello, se recomienda reforzar este contenido, así mismo guiar a los estudiantes para que adquieran habilidades en la interpretación de los resultados obtenidos durante el proceso educativo, dado que muchas veces tienen dificultad para analizar los resultados obtenidos después de haber resuelto un problema matemático. Es decir, preguntarse por qué llegó a ese resultado o qué significa la respuesta obtenida.

A través de entrevista aplicada al docente de Matemática, afirmó que él aún no está promoviendo el aprendizaje basado en problemas, dado que se trabaja conforme al plan pizarra y en este no se plantean problemas, específicamente en Geometría Analítica, sino únicamente la resolución de ejercicios, los que se resuelven de manera mecánica y en ocasiones utiliza GeoGebra para comprobar dichos resultados. En muchas ocasiones no hay tiempo para ampliar el plan de clases e incorporar esta estrategia. Se puede decir que en el contexto de la ejercitación implica que los estudiantes estén adaptados a emplear pasos, fórmulas o algoritmos preestablecidos para llegar a una solución sin comprender muchas veces el significado detrás de estos.

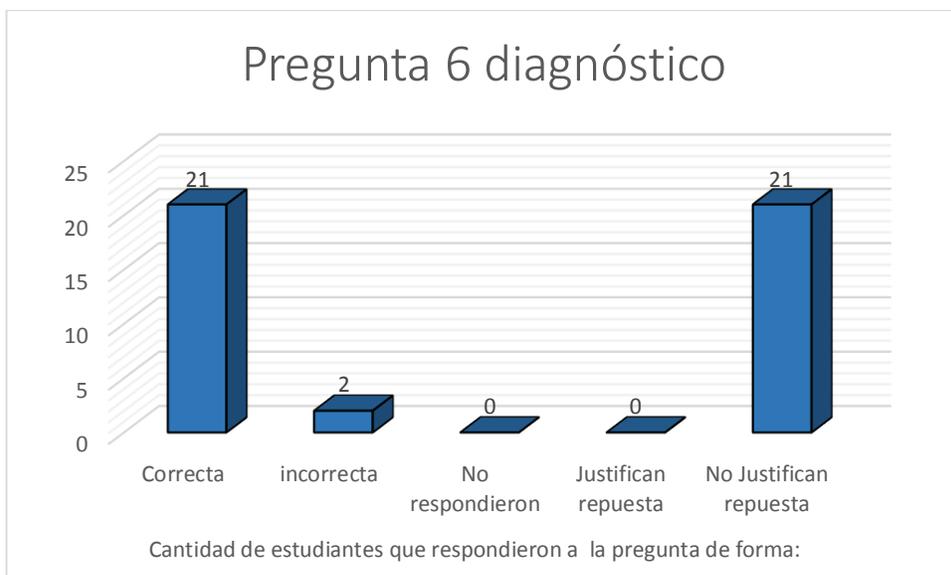


Imagen 7: Identifica la una función lineal, a partir de su gráfica

Fuente: Evidencia propia

La actividad #6 estaba enfocada en identificar la gráfica de una función lineal, donde se les proporcionó una línea recta en el plano cartesiano. La mayoría acertaron su respuesta. En este ítem casi toda la población involucrada seleccionó el inciso correcto, pero ninguno de ellos realizó alguna explicación para argumentar su elección. Esto lleva a interpretar que se necesita hacer mayor énfasis en la asimilación de este tema, empleando otras estrategias que permitan despertar el interés en los estudiantes y llegar a comprender mejor esta temática.

Cabe mencionar que a partir de octavo grado según el Ministerio de Educación se imparten contenidos estrechamente vinculados a esta temática entre ellos la función de primer grado de la forma $y = ax + b$, esto de acuerdo a Huete Fuentes et al. (2019, p. 55), por lo que se espera que los estudiantes en el nivel de undécimo grado deberían tener conocimientos sólidos sobre el tópico abordado, habilidades que no fueron puestas en práctica para resolver el problema planteado.

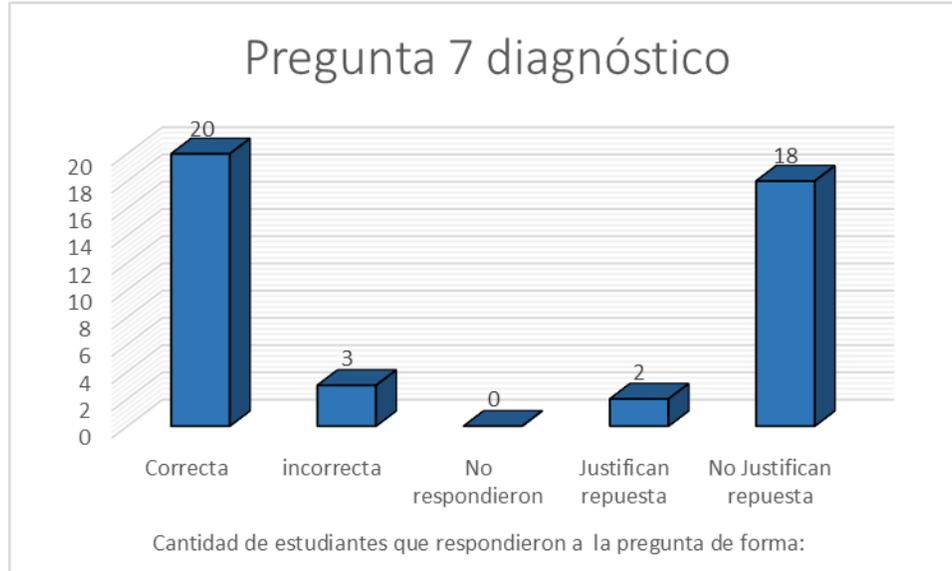


Imagen 8: Identifica y describe el radio de una circunferencia

Fuente: Evidencia propia

En referencia a la actividad 7, se les presentó una circunferencia con su radio trazado, solicitándole al estudiante que identificara el nombre del segmento \overline{AB} . En dicho ítem, se puede afirmar de manera general que se presentaron bastantes dificultades, puesto que solo 20, (87%) contestaron correctamente, pero la mayoría no brindó explicación alguna, porque quizás no tenían la certeza del verdadero concepto de radio de una circunferencia o tal vez lo confundieron con otro elemento de esta.

Según García Acevedo et al. (2019, p. 36), en el nivel de noveno grado del programa actual del Ministerio de Educación se abordan contenidos relacionados con la temática presentada, específicamente (elementos y rectas notables de una circunferencia), por lo que se espera que en el nivel de undécimo grado los estudiantes tengan dominio completo de este tema, no obstante, en la solución de dicho ítem no se lograron verificar estas habilidades.

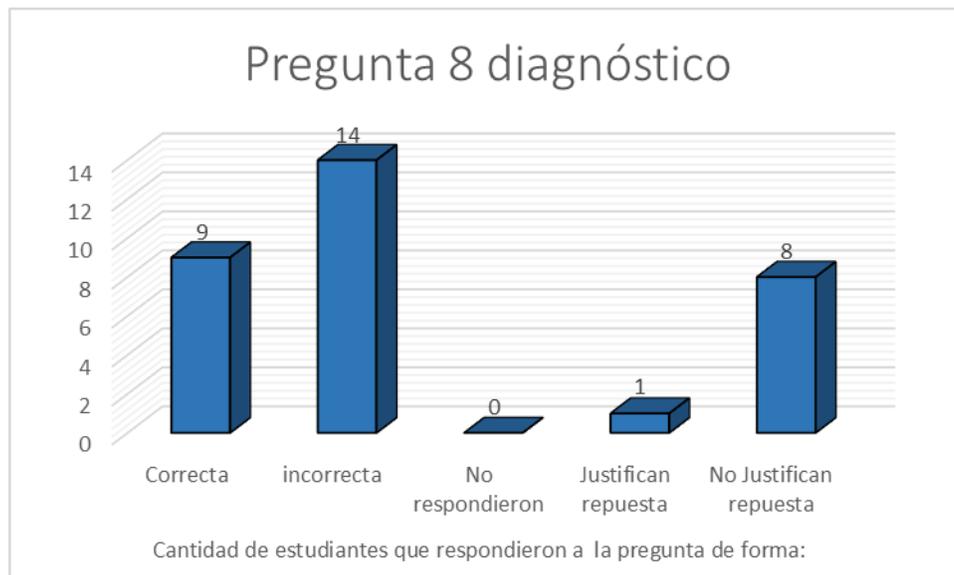


Imagen 9: Identifica situaciones reales que representan una circunferencia

Fuente: Evidencia propia

Con relación a la actividad #8, cuyo propósito consistía en identificar y explicar cuándo una gráfica describe una circunferencia, a través de un problema planteado relacionado con el entorno. La mayoría de ellos contestaron de manera equivocada, ya que 14 fallaron. No obstante, de quienes seleccionaron el ítem correcto, solo uno de ellos pudo brindar una sustentación al proceso realizado. Para brindar una respuesta satisfactoria el estudiante debía analizar la gráfica que se les presentó y recordar algunos conceptos de contenidos elementales abordados en grados anteriores que les permitiera establecer una relación, tales como la circunferencia, que se imparte en noveno grado. No se logró evidenciar dichos conocimientos en la situación planteada, la cual podía ser explicada de manera escrita, tal vez realizando alguna ilustración que diera una mejor interpretación, sin hacer procedimientos matemáticos.

Se puede apreciar que esta situación estaba relacionada con el ítem anterior, por tanto, los resultados obtenidos fueron similares, ya que casi toda la muestra involucrada presentó

dificultad en brindar una respuesta correcta, careciendo de habilidades matemáticas para dar solución al problema o de algún razonamiento para dar una explicación.

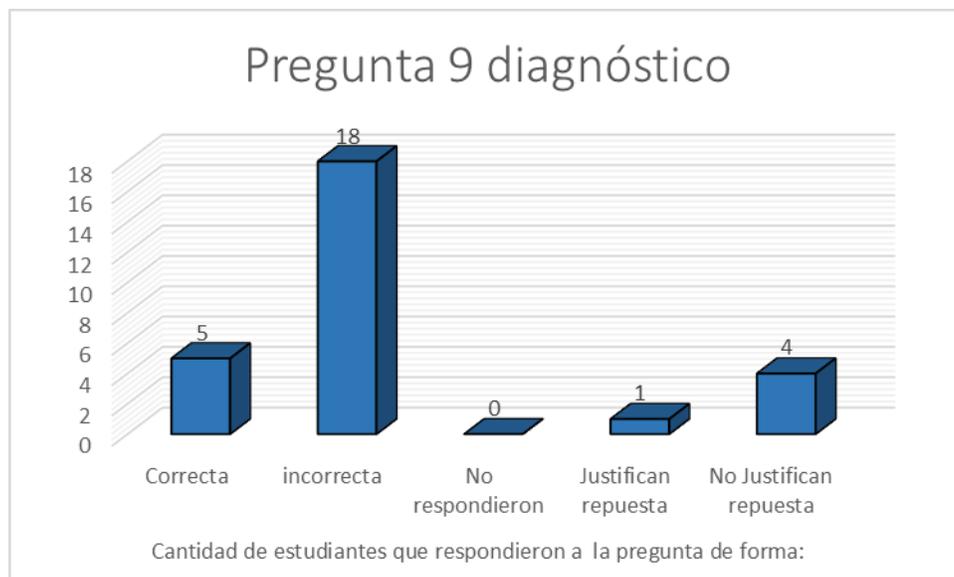


Imagen 10: Resuelve problemas reales relacionados con la circunferencia

Fuente: Evidencia propia

Para finalizar con la evaluación inicial se les presentó la actividad #9 acerca de un problema de aplicación sobre la circunferencia, donde se evidenció que del total, sólo 5 acertaron de manera correcta, de ellos sólo uno realizó procedimientos matemáticos para llegar a la respuesta. Por el contrario, 18 estudiantes seleccionaron incisos incorrectos. Este resultado deja claro que se deben realizar más actividades de carácter práctico a fin de lograr el desarrollo del pensamiento lógico y poder resolver situaciones propias de su vida cotidiana de forma que se logre en el estudiante un cambio de actitud hacia las matemáticas, que experimente una concepción optimista y que cada día se interese más por aprender de esta importante disciplina.

Una de las razones que justifica las dificultades que presentaron los estudiantes al dar solución a cada una de las situaciones planteadas es el hecho de que en el contexto actual todavía no se está implementando la estrategia del ABP, aunque con el nuevo enfoque

centrado en competencias que empieza a ejecutar el Ministerio de Educación se pretende encaminar al estudiante a ese fin, afirma el docente de Matemática a través de una entrevista que se le aplicó.

Al respecto, MINED (2009, p. 31), sostiene que:

La competencia implica poder usar el conocimiento en la realización de acciones y productos (ya sean abstractos o concretos). En este sentido, se busca trascender de una educación memorística, basada principalmente en la reproducción mental de conceptos y sin mayor aplicación, a una educación que, además del dominio teórico, facilite el desarrollo de habilidades aplicativas, investigativas y prácticas, que le hagan del aprendizaje una experiencia vivencial y realmente útil para sus vidas y para el desarrollo del país.

Lo expresado en la cita anterior quiere decir que el enfoque por competencia tiene como propósito principal formar personas integrales, de manera que puedan desarrollar capacidades en todos los niveles y en cualquier ámbito, de forma que las pueda aplicar para resolver problemas reales de la vida cotidiana, pero para lograr dicho objetivo se le debe brindar el espacio al estudiante para que sea protagonista de la construcción de su propio aprendizaje.

Evaluación final

Una vez que el docente culminó el abordaje de la unidad de Geometría Analítica, se procedió a la aplicación de una evaluación final, con el propósito de que los discentes demostraran sus conocimientos adquiridos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje respecto a cada uno de los contenidos abordados. Los resultados con su respectivo análisis de este instrumento se presentan a continuación:

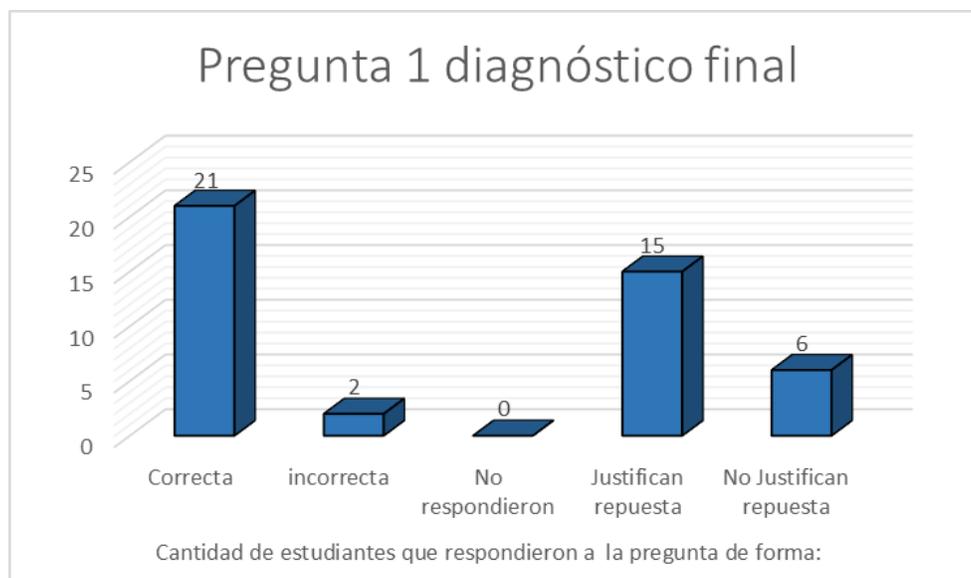


Imagen 11: Aplicación de la distancia entre dos puntos en problemas reales

Fuente: Evidencia personal

En la imagen anterior se aprecian los resultados de la actividad 1 que consistía en un problema contextualizado sobre la distancia entre dos puntos de referencia, (en donde se proporcionaron las coordenadas), de manera que la mayoría respondieron de forma correcta, pero de ellos solo 15, (71%) lograron brindar evidencias de su elección. Es importante destacar que en la solución de esta situación se tuvo un buen nivel en la demostración del conocimiento respecto a cómo calcular la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. Se pusieron en práctica habilidades cognitivas adquiridas previamente, tales como el análisis e interpretación de los datos proporcionados para luego deducir algún algoritmo matemático que les permitiera obtener un resultado satisfactorio.

Mediante un proceso de observación realizado al desarrollo de la unidad de Geometría Analítica se pudo constatar que los estudiantes tienen la capacidad de encontrar la distancia entre dos puntos; no obstante, se observó que no se les plantea problemas relacionados con dicha temática, sino que únicamente se resuelven ejercicios de manera mecánica, los cuales algunas veces son comprobados en GeoGebra. Además, se determinó que el docente tiene

bastante dominio de la tecnología, pero por el espacio de tiempo o por la disponibilidad de dichos medios, no siempre utiliza el software.

Por otra parte (MINED, 2022, p. 21), en los indicadores de logro propuestos para la unidad de Geometría Analítica plantea la resolución de problemas, expresando textualmente: “Resuelve situaciones en diferentes contextos, relacionadas con el cálculo de la distancia entre dos puntos y las coordenadas de un punto que divide a un segmento en una razón dada ubicados en la recta numérica o en el plano cartesiano”.

Al trabajar con el “Plan Pizarra”, específicamente en la unidad de Geometría Analítica se omite la resolución de problemas, (únicamente se da la resolución de ejercicios), o sea que se limita a implementar el ABP mediante situaciones en diferentes contextos, tal como se expresa en la cita anterior. Por esta razón, los estudiantes presentan dificultad cuando se les hacen estos planteamientos, donde deben analizar y poner en práctica el pensamiento crítico y reflexivo de forma que puedan dar una respuesta de forma satisfactoria.

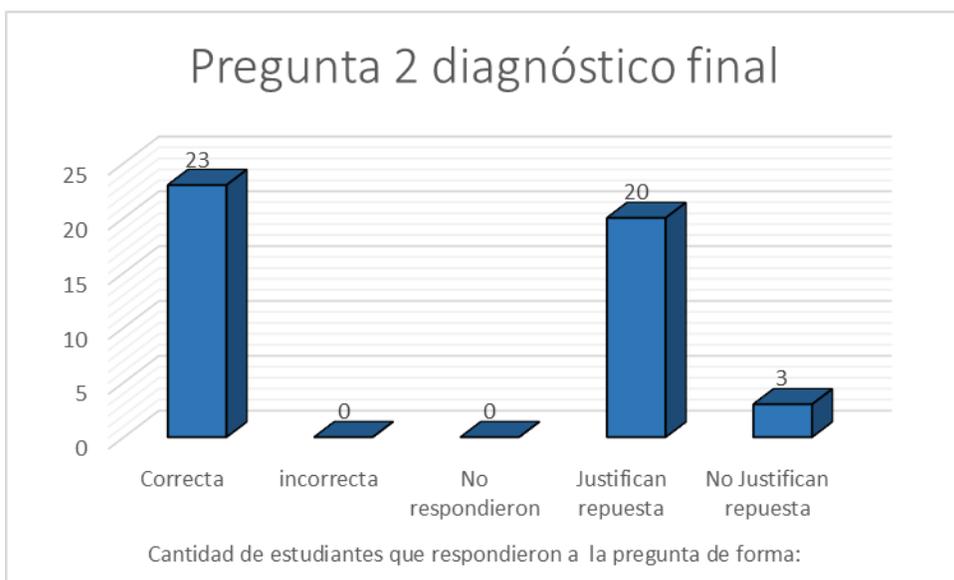


Imagen 12: Aplicación de la ecuación de la recta en problemas reales

Fuente: Evidencia personal

La imagen anterior correspondiente a la actividad # 2 y refleja los resultados del ítem en donde se les propuso una situación relacionada con la ecuación de la recta que tiene pendiente m y pasa por el punto $A(x, y)$, en este ítem toda la muestra respondió de forma acertada, la mayoría pudo justificar de manera satisfactoria. Esto indica que se logró un buen resultado, demostrándose que los involucrados sí tienen conocimientos sobre la temática.

No obstante, es importante destacar que la implementación del ABP ocupa un papel determinante en el desarrollo de los procesos cognitivos del estudiante, sobre todo cuando se le da el protagonismo y el docente se convierte en un mediador, guiando y motivando a sus discentes a encontrar una solución a determinados problemas que se le presenten, tanto de matemática, como de cualquier otra índole. De esta manera el individuo despierta el interés por las Matemáticas, ya que se siente actor de su propio aprendizaje. Al respecto Ortiz Granja (2015):

El conocimiento es una construcción del ser humano: cada persona percibe la realidad, la organiza y le da sentido en forma de constructos, gracias a la actividad de su sistema nervioso central, lo que contribuye a la edificación de un todo coherente que da sentido y unicidad a la realidad. (p. 96).

El conocimiento es pues la cimentación de saberes que el ser humano va acumulando día a día basado en cada experiencia vivida, es decir, cada actividad que este va realizando le permite adquirir un aprendizaje, ya sea de carácter práctico o teórico, los cuales serán empleados para desarrollar ciertas competencias en la vida cotidiana.

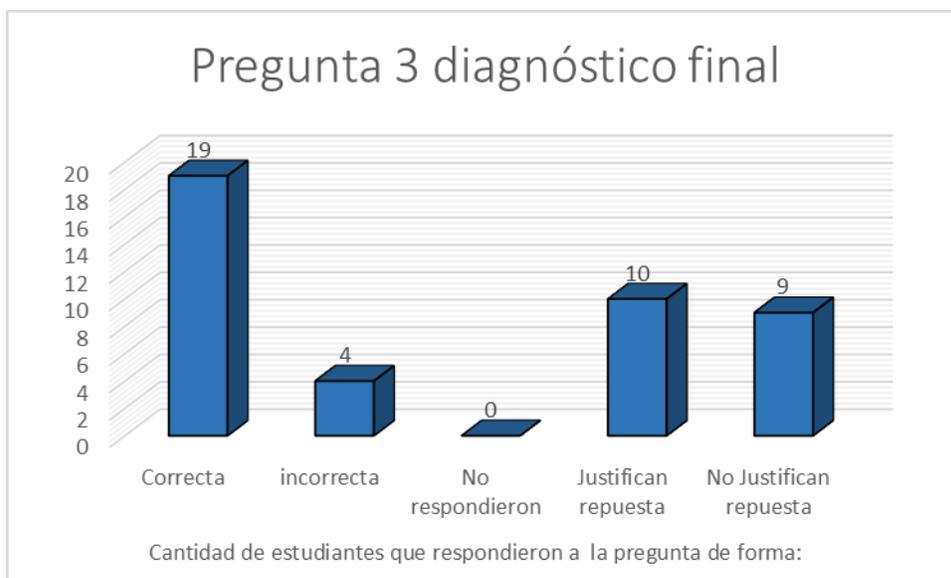


Imagen 13: Identificación de la ecuación de una línea recta

Fuente: Evidencia personal

Actividad # 3: Estaba relacionada con identificar cuándo una ecuación representa una línea recta. En este ítem, sólo 19 acertaron de manera correcta de los cuales cerca de la mitad pudo justificar su respuesta. Esto permite deducir que los estudiantes respondieron al azar, no analizaron, tampoco implementaron alguna estrategia que argumentara su elección. Muchas veces el discente se estanca cuando no encuentra una forma inmediata de solución de terminada situación, limitándose a pensar y poder buscar diversas vías que le puedan servir para resolver de manera satisfactoria.

De acuerdo a García Acevedo et al. (2019, p. 59), en el nivel de noveno grado uno de los contenidos abordados que mayor relación tiene con la temática planteada es el de la función de primer grado, por lo que se espera que en el nivel de undécimo grado, los estudiantes deben tener conocimiento suficiente sobre este tópico; sin embargo, no se vio reflejado en su totalidad en los resultados obtenidos.

Además, este problema pertenece a un contenido propio de Geometría Analítica, unidad que recién habían recibido, razón por la cual se puede afirmar que no se logró una

efectividad en la adquisición de conocimientos. Por tanto, se considera importante implementar otras estrategias didácticas y metodológicas que permitan adquirir un aprendizaje significativo de este tema.

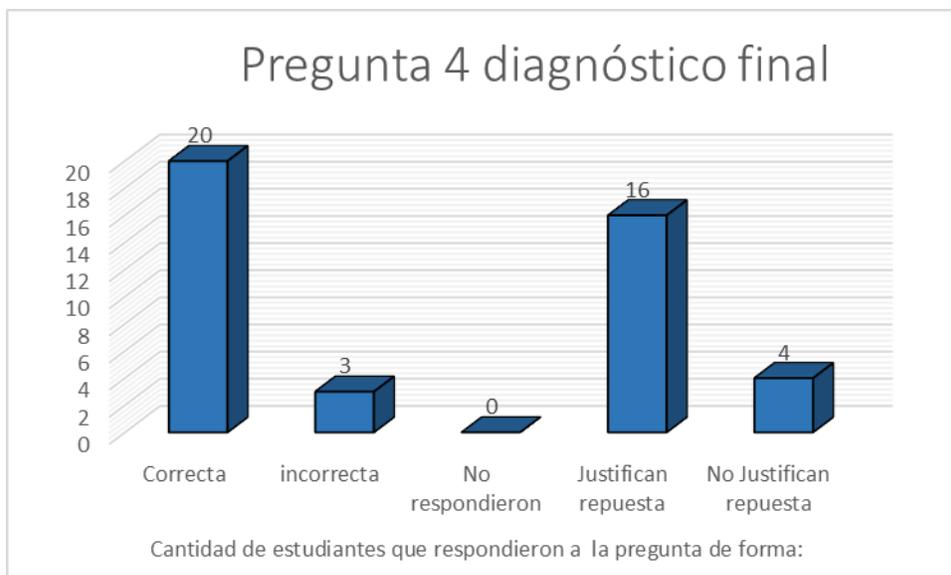


Imagen 13: Expresa la ecuación de la recta en su forma general

Fuente: Evidencia personal

Actividad # 4: En correspondencia a los resultados de este ítem, la mayoría de estudiantes seleccionaron la alternativa verdadera, así mismo una cantidad significativa brindó justificación de su elección. A manera de análisis se puede inferir que casi toda la población poseía conocimiento alrededor de la situación propuesta, en la que se les pedía escribir la ecuación de una recta en su forma general ($Ax + By + C = 0$).

No obstante, se puede apreciar que este ítem prácticamente consistía en un ejercicio, por lo que se puede deducir que la mayor dificultad que presentan los estudiantes radica en la resolución de problemas, ya que no se les plantea, específicamente en la unidad de Geometría Analítica, tal como lo expresa el docente de matemática en entrevista aplicada. Los discentes están adaptados a resolver únicamente ejercicios generalmente de manera mecánica, siguiendo determinado algoritmo o pasos explicados por el maestro. Pues en el

plan pizarra ellos resuelven, siguen exactamente el mismo procedimiento con el que se les explica cada ejemplo.

El hecho que los estudiantes sigan exactamente los mismos pasos que el docente les explica para resolver un ejercicio, (lo que generalmente se les plantea en Geometría Analítica en el programa actual del MINED) les impide buscar alternativas diversas de solución; no tienen la oportunidad de desarrollar el pensamiento lógico, el proceso se vuelve totalmente repetitivo y muchas veces, hasta aburrido, causando desmotivación y falta de deseo de querer trabajar por parte del educando.

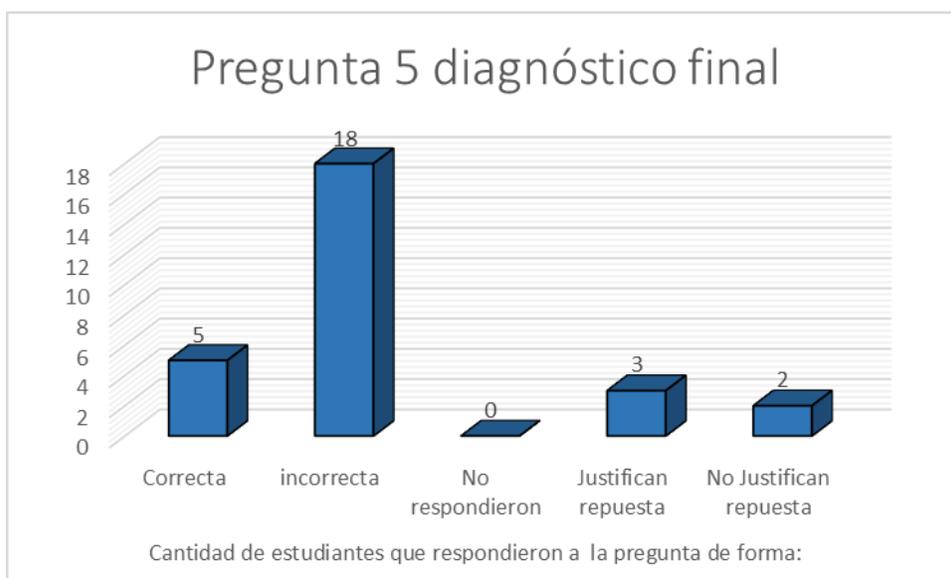


Imagen 15: Determina la ecuación de la recta, dados dos puntos de ésta

Fuente: Evidencia personal

El propósito de la actividad #5 era determinar la ecuación de una recta, dados dos puntos de ella. Además, se proporcionó la gráfica, cuya elaboración se realizó en GeoGebra. En esta situación los resultados fueron pocos satisfactorios, pues no se evidenciaron habilidades que demostraran conocimientos sobre la temática abordada.

De manera general, todos tuvieron diferentes niveles de dificultad para dar solución a la situación presentada, no pusieron en práctica conocimientos abordados recientemente, los estudiantes, no buscan una estrategia o algún algoritmo para resolver el problema planteado. Cuando no le entienden a la situación se limitan a pensar y encontrar una forma de llegar a una respuesta satisfactoria. Cabe señalar que en este ítem un porcentaje bajo logró seleccionar el inciso correcto, pero de estos únicamente 3 argumentaron su respuesta.

Con base en la información recopilada en esta actividad se puede decir que hubo carencia de habilidades para resolverla e interpretarla, no se puso en práctica el análisis crítico, aunque para dar solución a este problema se debieron aplicar conocimientos de temas desarrollados recientemente, donde se aborda el contenido ecuación de la recta que pasa por dos puntos (Díaz Vega 2019, p. 81).

Una de las razones que justifica las dificultades presentadas en la solución del problema planteado es el hecho de que no se presentan problemas durante el abordaje de la unidad de Geometría Analítica, pues durante acompañamiento al desarrollo de dicha unidad se observó que únicamente se resuelven ejercicios que se plantean en el libro de texto con el que se trabaja actualmente y la mayoría de estos se resuelven empleando los mismos pasos explicados por el docente.

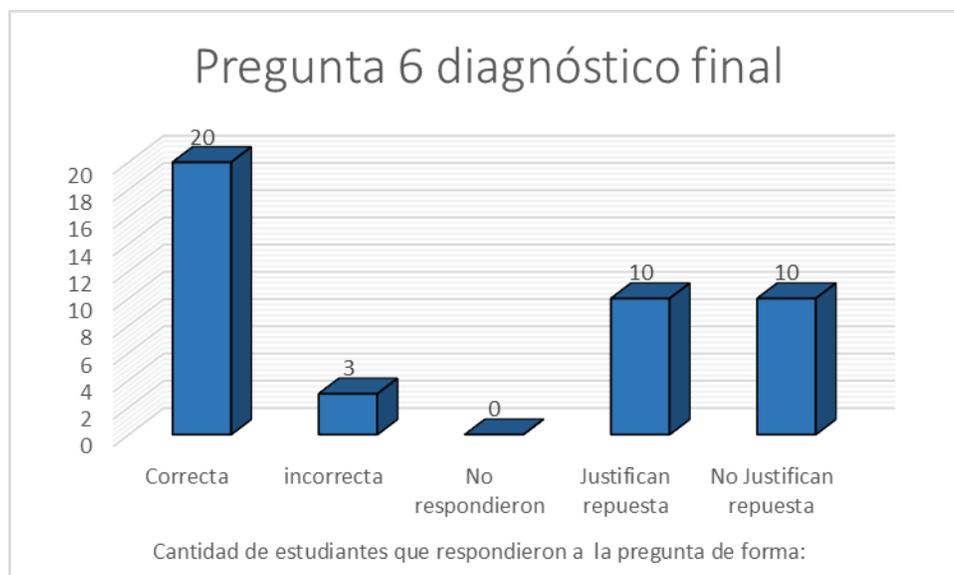


Imagen 16: Aplicación de la ecuación de la recta en problemas reales

Fuente: Evidencia personal

Actividad #6: Los resultados de esta situación fueron poco alentadores, ya que casi todos seleccionaron el ítem verdadero, pero sólo aproximadamente la mitad de estos justificaron su respuesta. El resto que simplemente optó por el inciso correcto, lo hizo quizás al alzar. Lo que supone que cuyas respuestas fueron proporcionadas de manera aleatoria, sin leer, analizar o buscar alguna forma lógica, por ejemplo, un procedimiento matemático para encontrar una solución satisfactoria.

De acuerdo a Velásquez Castillo et al. (2019, p. 62), en séptimo grado de secundaria regular del programa vigente del MINED se imparte el contenido “valor numérico de una expresión algebraica” conocimientos que los estudiantes de undécimo grado deben haber adquirido y puesto en práctica para poder resolver el problema planteado; sin embargo, no se lograron apreciar dichas habilidades cognitivas.

Además, según Huete Fuentes et al. (2019, p. 18) en el nivel de octavo grado se aborda el contenido “ecuaciones de la forma $x + b = c$ y $ax = c$ ”, mismo que tiene mucha relación con la situación planteada, los discentes no utilizaron estos conocimientos porque quizás no los adquirieron previamente.

Es evidente que para poder brindar una respuesta significativa, los estudiantes debían leer, analizar y buscar una estrategia que les permitiera obtener un resultado satisfactorio. Esto indica que se debe promover en los discentes el desarrollo del pensamiento crítico mediante el planteamiento y solución de problemas, donde se presentan mayores dificultades de aprendizaje, para lo cual es necesario que estas situaciones sean lo más contextualizadas posible. Pues el hecho de abordar la Matemática desde un punto de vista más cercano al estudiante permite tener una mejor comprensión, se logra apreciar aún más la aplicación en la vida cotidiana y por ende despertar el interés por aprender de tan importante materia. Se ha logrado observar que los estudiantes prestan mayor atención cuando los temas tienen un contenido de apropiación en la vida real. Esto es porque se sale de la rutina de estar simplemente resolviendo ejercicios siguiendo casi siempre un mismo algoritmo.

Se sabe que el ABP como estrategia metodológica activa de aprendizaje permite a los estudiantes la libertad de buscar diferentes formas de encontrar la solución a un problema, pues no hay un solo algoritmo para llegar a la solución, sino que pueden haber diversas vías y esto es lo interesante. Se pasa de un aprendizaje basado en contenidos de manera mecanizada a uno enfocado en competencias, en el cual el individuo se vuelve un agente activo y constructor de su propio conocimiento.

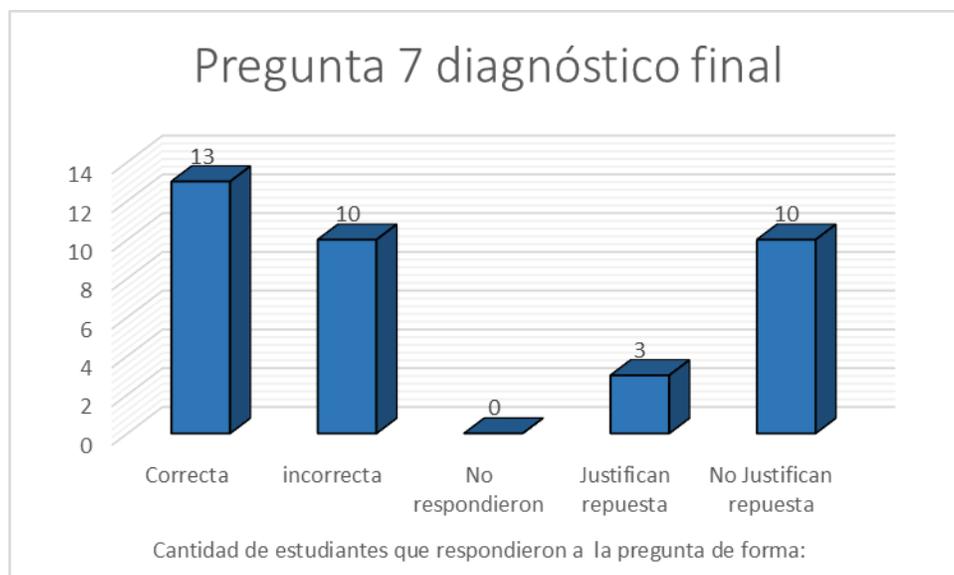


Imagen 17: Identifica fenómenos que describen una circunferencia en su trayectoria

Fuente: Evidencia personal

Actividad #7: La información recopilada en el desarrollo de este ítem revela que más de la mitad de estudiantes respondieron de manera correcta; sin embargo, la mayoría de estos no brindó ningún argumento relacionado con su elección. Estos resultados indican que los discentes quizás tenían alguna noción de conceptos relacionados con el problema planteado, pero no poseían una claridad para poder explicar de manera escrita o a través de algún mecanismo matemático la razón de su elección, lo que demuestra que es necesario promover la resolución de situaciones que implique poner en práctica el análisis y por ende la construcción del conocimiento para un aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.

Durante un proceso de observación al abordaje de la unidad de Geometría Analítica se comprobó que no se plantean situaciones problemáticas, mucho menos de manera contextualizada, únicamente se da la resolución de ejercicios manualmente y en ocasiones se comprueban los resultados en GeoGebra. Esto limita a los estudiantes a poder desarrollar el análisis y el pensamiento crítico que les permita construir su propio conocimiento.

En entrevista que se le aplicó al docente que imparte el área de Matemática afirma que no se da la resolución de problemas porque se trabaja conforme el “Plan Pizarra” y en este sólo se plantean ejercicios. Además, el currículum actual del MINED está centrado bajo un enfoque por competencias. Es decir que se enfatiza en atender a las necesidades, así como los diferentes ritmos de aprendizajes y potenciar individual y colectivamente a los estudiantes para que le puedan encontrar sentido a sus conocimientos mediante la resolución de problemas.

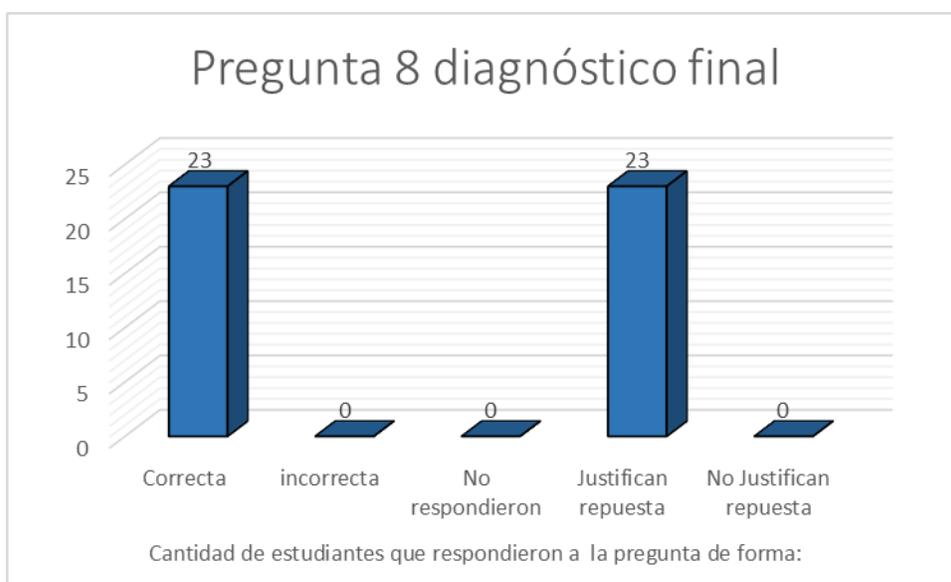


Imagen 18: Describe fenómenos que representan una circunferencia en su trayectoria

Fuente: Evidencia personal

Actividad #8: Producto de los resultados obtenidos en la solución de esta situación, se puede afirmar que fueron significativos, pues todos los estudiantes respondieron y argumentaron correctamente. Las evidencias fueron muy buenas y demuestra que la mayoría de los involucrados tenían conocimientos previos de la temática propuesta.

A manera de análisis y consideración se puede decir que la estrategia de plantear situaciones más vinculadas con el entorno en que a diario interactúan los estudiantes, le

permiten tener una visión más clara para poder dar solución y brindar una respuesta acertada. Además, que experimentan mayor motivación por aprender Matemáticas, ya que la clase se vuelve más práctica, interesante y menos monótona.

La aplicación del ABP a través de situaciones relacionadas con el medio implica que los estudiantes puedan descubrir, tener más oportunidad para desarrollar habilidades cognitivas, menos dependencia hacia el docente y por ende una mejor apreciación sobre la aplicación de la Matemática, en este particular, de Geometría Analítica en la vida cotidiana, logrando así un aprendizaje significativo, sobre todo cuando el enfoque de dicha estrategia se enfatiza en el discente, quien es y debe ser el centro del proceso de formación.

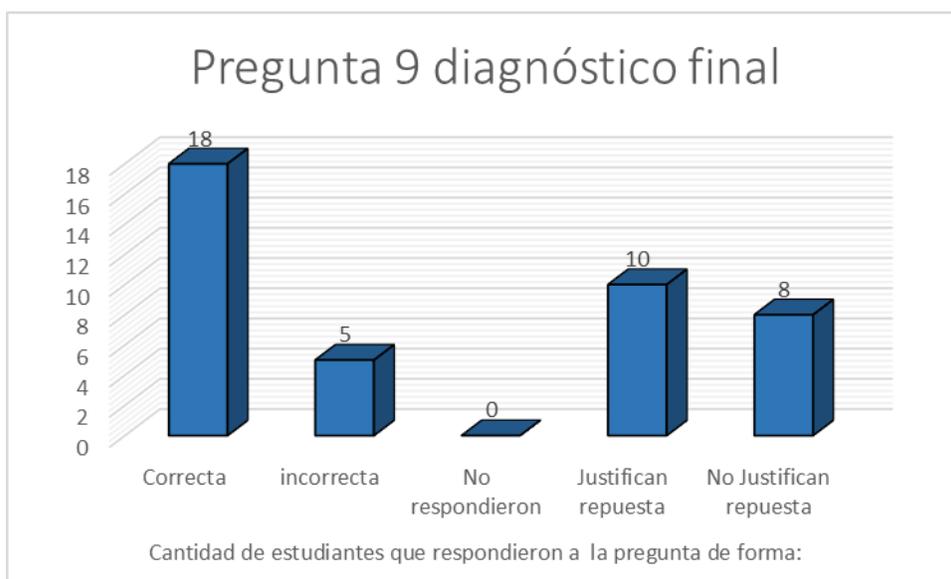


Imagen 19: Aplicación de problemas sobre la circunferencia en el mundo real

Fuente: Evidencia personal

Actividad #9: Para culminar con la evaluación final, en la última acción propuesta se les planteó un problema sobre la aplicación de la ecuación de la circunferencia en la vida cotidiana, con el fin de inducir a los estudiantes la importancia y aplicabilidad que tiene la Geometría Analítica en su entorno. En esta problemática la mayor parte de involucrados

acertaron la respuesta correcta. No obstante, sólo cerca de la mitad brindó evidencias para verificar la respuesta.

Los estudiantes no están acostumbrados a resolver situaciones que los induzca a pensar y en el momento que se les presenta un problema carecen de habilidades para darle solución a estos, sobre todo cuando se les aumenta la complejidad, pues también incrementa el nivel de dificultad. Por lo que es importante seguir promoviendo el ABP a través de actividades donde se utilice un lenguaje sencillo, claro y apropiado al de los educandos, tomando en cuenta que los objetivos de aprendizajes deben estar en función de los discentes.

Finalmente, al concluir con la aplicación de la evaluación final se pudo evidenciar que a la mayoría de estudiantes se les dificulta la interpretación acerca de los resultados obtenidos, ya sea de un ejercicio o problema matemático, por ello, se debe hacer énfasis en el análisis de estos luego de haber resuelto una situación problemática. Por el ejemplo, preguntarse ¿Qué significa o qué indica la respuesta a la que se logró llegar?, ¿El resultado obtenido satisface las condiciones que plantea el problema?, ¿Para qué sirve este resultado?, entre otras interrogantes de carácter analítica que pueden surgir, luego de haber resuelto una situación.

Es importante promover el pensamiento crítico en los educandos, ya que garantiza que estos puedan desarrollar habilidades cognitivas y por ende construir su propio aprendizaje y ser capaces de enfrentar diferentes fenómenos o problemas que se les presenten en su vida cotidiana.

Objetivo N° 2: Estuvo referido a los fundamentos teóricos que sustentan la estrategia metodológica enfocada en el aprendizaje basado en problemas (ABP). Para el alcance de

dicho propósito se realizó una amplia revisión bibliográfica haciendo uso de diferentes fuentes digitales, tales como tesis con grado de maestrías, doctorado y artículos científicos. Se describió y analizó ampliamente la importancia del ABP, así como el papel tanto del estudiante como del docente en el desarrollo de dicha metodología, de igual forma las ventajas y desventajas que esta posee en el proceso educativo.

Durante una guía de observación a las sesiones de clase en el desarrollo de la unidad de Geometría Analítica, se pudo constatar que aún no se está implementando la estrategia del ABP en el proceso de enseñanza y aprendizaje específicamente en dicha unidad, información que también fue confirmada por el docente que imparte el área de Matemática, quien afirmó que todavía no está empleando dicha metodología en el centro educativo.

Referente a lo abordado anteriormente, se afirma que el docente retoma los conocimientos previos de los estudiantes con los contenidos a abordar; sin embargo, no logra contextualizar dichos temas, no utiliza el ABP en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, particularmente en Geometría Analítica, de la cual se ocupa esta investigación, puesto que solo les planteó la resolución de ejercicios. El docente atiende y da respuestas a las inquietudes o preguntas de los discentes, así como la atención individual y colectiva en los equipos de trabajos que él orienta.

Por otra parte, el Ministerio de Educación propone la resolución de situaciones en diferentes contextos, para sustentar esta afirmación se realizó una revisión al programa de Matemática de undécimo grado, concretamente en la unidad de Geometría Analítica, en donde se confirmó que, (MINED, 2022, pp. 21-23), plantea los siguientes indicadores de logro:

1. Resuelve situaciones en diferentes contextos, relacionadas con el cálculo de la distancia entre dos puntos y las coordenadas de un punto que divide a un segmento en una razón dada ubicados en la recta numérica o en el plano cartesiano.
2. Aplica las diferentes formas de expresar la ecuación de una recta, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas, así como el cálculo de la distancia del origen a una recta del plano.
3. Resuelve situaciones en diferentes contextos, que involucren las diferentes formas de expresar la ecuación de una circunferencia, el cálculo de las intersecciones entre una circunferencia y una recta secante o una tangente.

Mediante entrevista aplicada al docente de Matemática afirma que el ABP conduce a los estudiantes a la concretización de los conocimientos, lo que le da significado a lo que aprenden, por tanto, ese debe ser el norte al que debemos apuntar no solo en esta área, añadió. Además, señaló que él todavía no ha llegado a ese nivel tan importante en el PEA, pero actualmente estamos trabajando una metodología nueva (El Plan Pizarra) la cual tiene un enfoque basado en la resolución de problemas; sin embargo, el plan no está completo, pues una vez revisado y analizado específicamente los planes de la unidad de Geometría Analítica, se verificó que no se promueve el ABP.

En el “Plan Pizarra”, ya se encuentra plasmado lo que el docente debe impartir en el aula de clase, de igual forma, contempla las actividades que el estudiante tiene que desarrollar, esto limita al maestro a implementar otras actividades que complementen el proceso de enseñanza-aprendizaje. Así mismo, se considera que no se le da salida a los indicadores de logro porque únicamente se contemplan ejercicios y no situaciones en diferentes contextos, como se plantean en dichos indicadores.

Aunque el plan pizarra busca centrarse en el aprendizaje basado en la resolución de problemas, según lo expresado por el docente, aún no se ha concretizado el proyecto, por ello se consideraron oportunos retomar estos aspectos en esta investigación, con el fin plantear algunas pautas que contribuyan a darle salida a los indicadores de logro propuestos por el

MINED y aportar a mejorar la calidad educativa, objetivo común de todos los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje.

De manera general, la mayoría de estudiantes estuvieron atentos a la clase, se observó dominio de los grupos de trabajos por parte del docente, pero también algunos educandos se distraían con el teléfono, sobre todo en redes sociales, pues casi todos cuentan con un dispositivo inteligente y además, tienen acceso a internet la mayor parte del tiempo.

Objetivo N° 3: Finalmente, este objetivo estaba dirigido a la aplicación de una propuesta didáctica haciendo uso de GeoGebra como recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica. Por tanto, habiendo aplicado cada uno de los instrumentos descritos, analizados y basado en los resultados derivados de estos, se procedió a la elaboración, aplicación y evaluación de dicho material de carácter didáctico y metodológico titulado: **“Geometría Analítica enfocada en el aprendizaje basado en la resolución de problemas, utilizando GeoGebra”**.



Imagen 20: Aplicación de propuesta didáctica

Fuente: Evidencia propia



Imagen 21: Aplicación de propuesta didáctica

Fuente: Evidencia propia

Con el propósito de aportar mejoras a la problemática encontrada y contribuir a la calidad de la educación, la presente propuesta se ha diseñado de manera novedosa, atractiva, interactiva, dinámica, motivadora e innovadora, con el fin de persuadir y encaminar al estudiante a obtener conocimientos sólidos sobre Geometría Analítica, de forma que le puedan encontrar el verdadero sentido y darle la importancia que ésta posee en el mundo real a través de la solución de problemas propios de su entorno. Así mismo se hizo uso de GeoGebra, enfatizando en la utilización de las múltiples oportunidades que este ofrece, donde en conjunto con los estudiantes se exploraron cada una de las ventajas de dicho software para trabajar en Matemática, lo que permitió que el desarrollo del material didáctico presentado fuera más interesante y se aprovechara de manera significativa el tiempo y las condiciones disponibles para este proceso.

Por otra parte, con esta propuesta didáctica se brindan pautas que buscan darle salida a los indicadores de logros de la unidad de Geometría Analítica propuestos en el plan de estudio vigente del Ministerio de Educación Nicaragüense, pues basado en los resultados obtenidos en cada uno de los instrumentos aplicados y analizados, no se logran alcanzar

dichos indicadores, ya que en estos se plantean la resolución de problemas relacionados con la realidad; como durante un proceso de observación se terminó que solo se lleva a cabo la resolución de ejercicios de manera mecánica y algunas veces se hace uso de GeoGebra para comprobar dicho proceso.

Considerando que los estudiantes son la razón del ser docente, los objetivos de la propuesta didáctica se han planteado en función de la adquisición y construcción de sus conocimientos, la cual dispone de situaciones contextualizadas sobre la aplicación de la Geometría Analítica, a fin de que los discentes puedan apreciar la gran importancia que tiene esta rama de las Matemáticas en la vida cotidiana y así lograr un aprendizaje significativo de la misma.

Cabe señalar que los aportes tanto de carácter didáctico, metodológico como pedagógico de esta propuesta se centran en función de un objetivo común, (contribuir a la mejora de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica). Es decir, se ha elaborado con la finalidad de facilitar la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades cognitivas y competencias de los estudiantes, dándoles el protagonismo en todo el proceso educativo, cuya adaptación responde a las necesidades, condiciones y características de los actores del proceso de aprendizaje.

Durante la aplicación de la propuesta didáctica, los estudiantes mostraron una actitud positiva, ya que trabajaron cada una de las actividades de manera disciplinada y activa en todo el proceso, a quienes se les dispuso de todos los recursos didácticos que debían utilizar, así mismo, cada uno tenía acceso de dicho material de manera digital en sus teléfonos y en las tablets. Estos dispositivos también tenían el software GeoGebra instalado previamente.

Por otra parte, la mayoría de los estudiantes de undécimo grado son diestros respecto al dominio y uso de la tecnología, dado que casi todos cuentan con teléfonos inteligentes y el centro de estudio dispone de un aula TIC con su respectivo docente experto en la parte de informática, quien les brinda acompañamiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje de estas herramientas. Esto fue una ventaja que se aprovechó al máximo durante la aplicación de la propuesta, facilitando su desarrollo y apropiación.

En referencia a la solución de los problemas planteados, fueron mínimas las dificultades, pues en primera instancia se les presentó un ejemplo de cada contenido resuelto en GeoGebra, paso a paso, los cuales se iban resolviendo con la participación de los discentes y a continuación, ellos debían resolver otras situaciones similares, siguiendo las instrucciones explicadas. Por otra parte, se empleó un lenguaje sencillo, acorde al contexto de ellos, lo que implicó la comprensión inmediata de los mismos. De la misma manera dispone de problemas propios de la comunidad, con el propósito de darle más realce al momento de la implementación del ABP como una estrategia activa metodológica y por supuesto lograr los mayores resultados significativos esperados.

Además, se determinó que el hecho de asumir un papel activo por parte de los discentes implica una formación integral, pues no solo alcanzan competencias matemáticas, sino que el ABP por ser una estrategia de carácter interdisciplinar y al integrar GeoGebra aún enriquece más el proceso, promoviendo en los estudiantes el desarrollo del pensamiento crítico para la resolución de problemas que se le puedan presentar en cualquier ámbito; la autonomía en su aprendizaje; la promoción del trabajo en equipo de forma colaborativa, la motivación por descubrir, así como el compromiso y el interés por la materia, asegurando una mayor retención y comprensión.

Como testimonio de los estudiantes expresaron sentirse contentos con la estrategia metodológica que se les presentó, ya que por primera vez le hallamos el verdadero sentido a esta disciplina, lo que despertó en nosotros el interés por aprender Matemáticas, afirmaron, misma que fue evidente durante el desarrollo de la propuesta didáctica que se les aplicó, pues se llevó a cabo bajo un ambiente de participación, durante todo el proceso, quienes asumieron el protagonismo con entusiasmo, disposición y disciplina para trabajar.

Es por tal razón que el haber implementado el ABP haciendo uso de GeoGebra como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica tuvo un impacto significativo, ya que se evidenció un dominio completo en la solución de cada una de las situaciones problemáticas que se les planteó a los estudiantes, quienes mostraron motivación en todo el desarrollo, se integraron y participaron de manera significativa durante la aplicación de dicho instrumento.

Respecto a GeoGebra se hace énfasis en su potencial para abordar la unidad de Geometría Analítica, el cual ha sido utilizado como un valioso recurso didáctico, permitiendo realizar actividades interactivas que con recursos tradicionales no son posibles, mismo que fue llevado a cabo a la par del Aprendizaje Basado en Problemas. Durante la aplicación de la presente propuesta didáctica, así como de una prueba sistemática, se implementó dicha estrategia, mediante sus cuatro fases (Activación Investigación, Resolución y Evaluación), haciendo uso de las múltiples ventajas de GeoGebra.

Además, destacar que en cada problema se plantean preguntas de análisis crítico referente a la interpretación de los resultados luego de resolver cada situación, con el fin de que los estudiantes sean más visionarios y que aprecien la importancia de la aplicabilidad de la Geometría Analítica en fenómenos reales, así mismo se desarrollaron diferentes formas de abordar cada una de las etapas del ABP, a fin de evitar la parte rutinaria, por ejemplo se han propuesto diferentes dinámicas en cada una de ellas, esto para no caer en la monotonía y

evitar que se vuelva un ambiente poco agradable, sino que favorezca la motivación en el transcurso de este proceso y lograr los resultados esperados.

En base a la experiencia de la población de estudio involucrada, se puede afirmar que la utilización de manera adecuada de GeoGebra, junto al ABP implican un aprendizaje activo, colaborativo y significativo para los estudiantes. Al finalizar cada proceso fue notorio el desarrollo cognitivo que estos adquirieron y la capacidad para interpretar situaciones del mundo real.

El hecho de resolver problemas meramente relacionados con la vida cotidiana es crucial, ya que despierta el interés en los educandos y aún más cuando se incorpora el uso de la tecnología y nuevas estrategias de enseñanza-aprendizaje. Es importante potenciar las habilidades que tienen los estudiantes respecto al dominio de las TIC, además en el contexto donde se ha desarrollado la presente investigación se cuenta con acceso a tablets, internet, sala de capacitación y otras condiciones propicias para la implementación de estrategias innovadoras de carácter, didáctico y metodológico.

Una vez desarrollada la propuesta didáctica se procedió a la aplicación de una prueba sistemática con el propósito de evaluar de manera integral y objetiva el grado de comprensión y dominio de los contenidos de Geometría Analítica. Los resultados obtenidos a partir de la aplicación de este instrumento son un referente para determinar si se alcanzó aprendizaje significativo en los estudiantes, misma que consistía en la resolución de 6 problemas contextualizados sobre las diferentes aplicaciones de la Geometría Analítica.

La prueba se les aplicó de manera individual, utilizando el software GeoGebra, así como la implementación de las etapas del ABP, brindándoles acompañamiento y disponiendo las condiciones óptimas para su desarrollo. Así mismo, ellos tenían acceso a realizar alguna

pregunta o inquietud presentada; sin embargo, todos realizaron dicha evaluación sin dificultad.

Cabe señalar que los resultados fueron significativos, pues las dificultades presentadas en la solución de los problemas planteados fueron mínimas, dado que se utilizó una metodología similar a la que se desarrolló durante la aplicación de la propuesta didáctica. Una vez que todos y todas terminaron de resolver la prueba, se procedió a darle solución de manera conjunta, a fin de que cada uno de los estudiantes aportaran ideas respecto a cada situación presentada y compartirlas con el resto de compañeros, dado que en estos tipos de problemas el individuo tiene la libertad de emplear diferentes estrategias para llegar a la respuesta o encontrar una solución satisfactoria.

Es por ello que se pone a la disposición de estudiantes, docentes y demás personas el presente material como una herramienta didáctica y pedagógica con el propósito de contribuir, ya sea para fines de enseñanza, de aprendizaje o de referencia a futuras investigaciones, instando a potenciar las diversas funcionalidades de GeoGebra y las ventajas del ABP, aportando de esta manera a una dimensión más innovadora, motivadora y significativa en la construcción de conocimientos sólidos de las Matemáticas, que son y seguirán siendo de gran importancia en la revolución y evolución del mundo real.

XIV. CONCLUSIONES

Una vez concluida la presente investigación científica titulada “Propuesta Didáctica en el Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas, utilizando GeoGebra en Geometría Analítica” y dando salida a cada uno de los objetivos planteados, se presentan las siguientes conclusiones:

1. Se aplicó un diagnóstico inicial y final a estudiantes de undécimo grado, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, San Dionisio- Matagalpa, segundo semestre 2022 para conocer su nivel de aprendizaje en Geometría Analítica, determinando que:

Los estudiantes presentaron dificultad sobre todo al resolver situaciones problemáticas relacionadas con Geometría Analítica.

El aprendizaje de los estudiantes en Geometría Analítica debe ser complementado con estrategias metodológicas activas que aún no se están implementando, como el ABP, en donde se planteen problemas contextualizados que permitan construir conocimientos sólidos.

2. Se describieron los fundamentos teóricos que sustentan la estrategia metodológica del ABP, a través de la revisión de literaturas confiables, (tesis de maestrías y doctorales, medios electrónicos y entrevista aplicada a docente de Matemática).
3. Como aporte didáctico y metodológico a esta investigación se elaboró, aplicó y evaluó una propuesta didáctica titulada: “Geometría Analítica enfocada en el aprendizaje basado en la resolución de problemas, utilizando GeoGebra”, la que permitió concluir que:

La implementación de la estrategia metodológica del ABP en Geometría Analítica implica el desarrollo del razonamiento crítico y la construcción del conocimiento por descubrimiento, así como la toma de decisiones de los estudiantes.

El uso de una propuesta didáctica en el aprendizaje basado en la resolución de problemas, utilizando GeoGebra como recurso didáctico en Geometría Analítica permite lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes.

Con base en la entrevista aplicada a docente de Matemática y guía de observación se determinó que:

El docente utilizó el software GeoGebra en la enseñanza de Geometría Analítica, como complemento a las formas tradicionales de enseñanza, pero únicamente como calculadora para graficar. No explicó las múltiples opciones que este programa presenta.

El docente no logra profundizar sobre la utilización de GeoGebra por falta de tiempo, además las actividades extraescolares que surgen de manera imprevista afectan el desarrollo pleno de los contenidos plasmados en la programación didáctica.

XV. RECOMENDACIONES

Con base en los principales hallazgos encontrados en esta investigación, respecto al uso de GeoGebra como recurso didáctico en el PEA de Geometría Analítica, undécimo grado, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, San Dionisio Matagalpa, se sugiere al:

1. Ministerio de Educación desarrollar un proceso de capacitación de manera profunda sobre la metodología del ABP, previo a su implementación a fin de lograr una buena apropiación de la misma para obtener los mejores resultados posibles.
2. Ministerio de Educación (MINED), continuar con el proceso de capacitación y actualización continua del personal docente en todos los niveles y modalidades sobre la apropiación y uso de aplicaciones y programas tecnológicos para que en conjunto se pueda contribuir a obtener aprendizajes significativos, principalmente de las Matemáticas.
3. Centro Escolar Público Rubén Darío proponer el uso de recursos didácticos tecnológicos bajo el enfoque del ABP a través de situaciones problemáticas vinculadas al entorno del estudiante, a fin de que puedan encontrar la verdadera importancia de las Matemáticas.
4. Cuerpo docente y estudiantes apropiarse de la propuesta didáctica brindada en este trabajo, ya que permitirá aprovechar los beneficios que GeoGebra ofrece como un software educativo para la resolución de ejercicios, análisis de conceptos y propiedades y también situaciones aplicadas a la vida cotidiana.

XVI. REFERENCIAS

- Albornoz, R. (2010). ABP en el desarrollo de capacidades del área de Matemática en los estudiantes de la Institución Educativa José María Arguedas del distrito de Margos, Huánuco 2018. *Tesis Doctoral*. UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN, Lima, Perú.
- Alvarado, N. &. (s.f.). Gestión del talento Humano e innovación de la enseñanza y el aprendizaje. *Tesis Doctoral*. Universidad de Baja California, California.
- Álvarez Ruiz, R. (2020). Análisis de las teorías implícitas sobre enseñanza-aprendizaje en el pensamiento de docentes de Lengua y Literatura y su relación con cinco modelos pedagógicos. *Tesis doctoral*. Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua-Nicaragua. Recuperado el 19 de Febrero de 2022, de <https://repositorio.unan.edu.ni/13478/1/tesis%20doctorado%20Ricardo%20%C3%81lvarez.pdf>
- Alzate Rodríguez, E. e. (2013). Diseño de actividades mediante la metodología ABP para la enseñanza de la Matemática. *Uniersidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Risaralda, Colombia, 18(3)*, 542-547. Recuperado el 05 de Junio de 2022, de <https://www.redalyc.org/pdf/849/84929154015.pdf>
- Araneda Valdés, A. (Marzo de 2005). La Triangulación como Técnica de Cientificidad en Investigación Cualitativa Pedagógica y Educacional. *REXE: "Revista de estudios y Experiencias en Educación"*, 4(7), 11-37. Recuperado el 5 de Abril de 2023, de <file:///C:/Users/UNICAM%201/Downloads/Dialnet-LaTriangulacionComoTecnicaDeCientificidadEnInvesti-2314209.pdf>
- Aráuz Chévez, D. F., Herrera Herrera , P., Espinoza Espinoza, M. J., & González Funes, A. B. (2019). *Matemática 10*. Managua, Nicaragua: Primera Edición. Recuperado el 6 de Junio de 2023

- Arias Gómez, J., Villasis Keever, M. Á., & Miranda Novales, M. G. (Junio de 2016). El Protocolo de Investigación III: La población de estudio. *Revista Alergia México*, 63(2), 201-206. Recuperado el 20 de Febrero de 2022, de <https://www.redalyc.org/pdf/4867/486755023011.pdf>
- Aroca Araújo, A. (17 de Mayo de 2019). La enseñanza de la geometría analítica en la educación media. *Revista U.D.C.A Actualidad & Divulgación Científica*, 22(1), 1-8.
doi:doi.org/10.31910/rudca.v22.n1.2019.1222
- Ausubel, D. (Noviembre de 1963). El aprendizaje significativo como un concepto subyacente a subsumidores, esquemas de asimilación, internalización de instrumentos y signos, constructos personales y modelos mentales, compartir significados e integración constructiva de pensamientos, senti. *APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO: UN CONCEPTO SUBYACENTE*, 19-44.
Recuperado el 23 de Enero de 2022, de <https://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigsubesp.pdf>
- Avilés Zúñiga, F. J., Islas Caballero, M. G., Escuadra Gallegos, Á., Joya Cruz, M., Fuentes Romero, M. M., & Orozco de la Garza, N. P. (2018). *Álgebra Geometría Analítica*. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México. Recuperado el 04 de Agosto de 2024, de <https://www.dgire.unam.mx/webdgire/wp-content/uploads/2019/06/Guia-Matematicas-III-1301.pdf>
- Ayerbe Toledano, J. M. (2017). El nacimiento de la geometría analítica. *Lecturas Matemáticas*, 38(2), 93-124. Recuperado el 21 de Julio de 2024, de [file:///C:/Users/Bismarck/Downloads/Dialnet-ElNacimientoDeLaGeometriaAnalitica-6332646%20\(3\).pdf](file:///C:/Users/Bismarck/Downloads/Dialnet-ElNacimientoDeLaGeometriaAnalitica-6332646%20(3).pdf)
- Baena Álvarez, D. (2020). Recurso de GeoGebra para geometría analítica en el espacio. *Tesis de fin de Máster*. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid-España, España. Recuperado el 24 de Julio de 2022, de https://oa.upm.es/65698/1/TFM_DIEGO_BAENA_ALVAREZ.pdf
- Blandón Dávila, M. E. (2017). Propuesta metodológica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la unidad de Álgebra en la asignatura de Matemática General en la Facultad Regional

Multidisciplinaria FAREM-Estelí, UNAN-Managua. *Tesis Doctoral*. Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Estelí, Nicaragua, Nicaragua. Recuperado el 31 de Julio de 2022, de <https://repositorio.unan.edu.ni/8818/1/TESIS%20DOCTORAL%20FINAL.ME.pdf>

Borja García, J. E. (01 de Junio de 2020). Validez y confiabilidad en la recolección y análisis de datos bajo un enfoque cualitativo. (15), 79-97. Recuperado el 11 de Agosto de 2024, de <https://www.scielo.org.mx/pdf/tcg/v5n15/2448-6388-tracender-15-79.pdf>

Bustos, I. (2013). La enseñanza del concepto del límite en el grado undécimo haciendo uso de GeoGebra. *Tesis de maestría*. Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Colombia. Obtenido de <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/11916/8411002.2013.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Calva Álvarez, L. V. (2015). El proyector digital como recurso didáctico para el aprendizaje de la línea recta en los estudiantes del primer año, del Bachillerato General Unificado, paralelo A, de la Unidad Educativa Anexa a la Universidad Nacional de Loja, de la ciudad de Loja, peri. *Tesis de maestría*. Loja-Ecuador, Ecuador. Recuperado el 15 de Enero de 2023, de <https://dspace.unl.edu.ec/jsui/bitstream/123456789/16824/1/TESIS%20LUIS%20VINICIO%20CALVA%20ALVAREZ.pdf>

Campos y Covarrubias, G., & Lule Martínez, N. E. (Junio de 2012). "La observación, un método para el estudio de la realidad. *Xihmaj*, VII(13), 45-60. Recuperado el 16 de Abril de 2022, de https://www.google.com/search?q=que+es+la+observaci%C3%B3n+en+una+investigaci%C3%B3n&sxsr=APq-WBsN3I9d0vTsCENKMmzV8JXXdICJ9Q%3A1650155703548&ei=t2BbYtmRlcWOwbkPhquRyAk&oq=que+es+LA+OB+en+una+investigaci%C3%B3n&gs_lcp=Cgxnd3Mtd2l6LXNlcnAQAQARgAMgYIABAHEB4yB

Carretero, M. (31 de Julio de 2005). *Constructivismo y Educación*. Obtenido de Prorego Recuperado:

<https://books.google.co.cr>

Casola Rivera, W. (2018). Un estudio fenomenográfico sobre estrategias didácticas en docentes y habilidades metacognitivas en estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Tesis Doctoral*. Universidad de Baja California, Colima México. Recuperado el 23 de Enero de 2022, de <https://core.ac.uk/download/pdf/322914231.pdf>

Cedeño Molina, M. G. (2013). Importancia de los Recursos Didácticos Tecnológicos en Procesos de Aprendizaje en la Educación Universitaria. *Tesis de Máster*. Universidad de Guayaquil, Guayaquil-Ecuador. Obtenido de <http://repositorio.ug.edu.ec/bitstream/redug/7717/1/Importancia%20de%20los%20recursos%20did%C3%A1cticos%20tecnol%C3%B3gicos%20en%20proceso%20de%20apredizajeen%20a%20edu.%20universitaria.pdf>

Céspedes Reyes, W. A. (2017). Relación entre el modelo educativo de los docentes y su influencia en el rendimiento académico de los alumnos de primaria de la Institución Educativa N° 1154 Nuestra Señora del Carmen - Lima. *Tesis doctoral*. Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle Alma Máter del Magisterio Nacional, Escuela de Posgrado, Lima- Perú.

Recuperado el 19 de Febrero de 2022, de

<https://repositorio.une.edu.pe/bitstream/handle/UNE/1837/TD%20CE%201808%20C1%20-%20Cespedes%20Reyes.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Chancusig Chisag, J. C. (2017). UTILIZACIÓN DE RECURSOS DIDÁCTICOS INTERACTIVOS A TRAVÉS DE LAS TIC'S EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE EN EL ÁREA DE MATEMÁTICA. *B O L E T Í N V I R T U A L - A B R I L - V O L 6 - 4 I S N N 2 2 6 6 - 1 5 3 6*. Obtenido de <https://www.google.com/search?q=UTILIZACI%C3%93N+DE+RECURSOS+DID%C3%81CTICOS+INTERACTIVOS+A+TRAV%C3%89S+DE+LAS+TIC%C2%B4S+EN+EL+PROCESO+DE+ENSE%C3%91>

ANZA+APRENDIZAJE+EN+EL+%C3%81REA+DE+MATEM%C3%81TICA&oq=UTILIZACI%C3%93N
+DE+RECURSOS+DID%C3%81CTICOS+INTERA

Chipre, F. &. (2015). Importancia de los recursos didácticos en el aprendizaje de la Matemática. *Tesis de maestría*. Universidad de Guayaquil, Guayaquil. Obtenido de <http://repositorio.ug.edu.ec/bitstream/redug/14821/1/Importancia%20de%20los%20recursos%20did%C3%A1cticos%20en%20el%20aprendizaje%20de%20la%20matem%C3%A1tica%20en%20los%20estudiantes%20de%20tercer%20grado%20de%20educaci%C3%B3n%20b%C3%A1sica.pdf>

Del Sol Febregat, L. A., Tejada Castañeda, E., & Mirabal Díaz, J. M. (Diciembre de 2017). Los métodos teóricos: una necesidad de conocimiento en la. *Edu Mecentro*, 9(4), 250-253. Recuperado el 20 de Febrero de 2022, de <https://www.medigraphic.com/pdfs/edumecentro/ed-2017/ed174u.pdf>

Díaz Barriga, F. (2006). Reseña de "Aprendizaje basado en problemas. De la teoría a la práctica" de Carlos Sola Ayape. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.*, XXVIII(111), pp. 124-127. Obtenido de <http://www.redalyc.org>

Díaz Vega, F. E., Espinoza Espinoza, M. J., Herrera Herrera, P., & Jarquín López, H. A. (2019). *Matemática 11, Undécimo grado*. Managua, Nicaragua. Recuperado el 14 de Enero de 2023

Eleizalde, M., Parra, N., Palimino, C., Reyna, A., & Trujillo, I. (2010). Aprendizaje por descubrimiento y su eficacia en la enseñanza de la Biotecnología. *Revista de Investigación*(71), 271-290. Recuperado el 22 de Octubre de 2022, de <https://www.redalyc.org/pdf/3761/376140386013.pdf>

Escribano González, A. (1992). Modelos de enseñanza en la Educación Básica. *Tesis doctoral*. Univesidad Complutense de Madrid, Madrid-España. Recuperado el 23 de Enero de 2022, de <https://eprints.ucm.es/id/eprint/3748/1/T17160.pdf>

Escribano, A. &. (2010). El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Una. *Madrid: Narcea Ediciones*, 6-7.

Escribano, A. (2004). *Aprender a enseñar: fundamentos de didáctica general*. California: La Mancha.

Ezquerro, M. (2014). *Uso de Geogebra en la enseñanza de la Geometría Analítica en 4° de la Eso*. Vizcaya, España.

Figuerola, H. M. (20 de Noviembre de 2017). ANÁLISIS CRÍTICO DEL CONDUCTISMO Y CONSTRUCTIVISMO, COMO TEORÍAS DE APRENDIZAJE EN EDUCACIÓN. *Revista órbita Pedagógica*, 4(1), 1-12. Recuperado el 20 de Julio de 2024, de <https://core.ac.uk/reader/268044060>

Flores, L., Rincón, E., & Zúñiga, L. (2014). El ABP en la enseñanza de las matemáticas como estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento crítico en el nivel medio básico y modalidad telesecundaria. (C. L. Educativa, Ed.) 27, 2125-2132. Recuperado el 02 de Noviembre de 2022, de <http://funes.uniandes.edu.co/6180/1/FloresEIABPALME2014.pdf>

Gaita, R. (2014). El paso de la Geometría sintética a la Geometría analítica,. *Tesis doctoral*. Universidad de Valladolid, Valladolid.

Gallardo Vásquez, P., & Camacho herrera, J. (2008). *Teorías del aprendizaje y práctica docente* (I Edición ed.). España: WANCEULEN, Educación. Recuperado el 23 de Octubre de 2022, de <https://flomige.files.wordpress.com/2019/04/teorc3adas-del-aprendizaje-y-prc3a1ctica-docente.pdf>

García Acevedo, A. L., Caballero López, J. C., & González Funes , A. B. (2019). *Matemática 9* (Primera Edición ed.). Managua, Nicaragua: Primera Edición. Recuperado el 3 de Junio de 2023

Garza Vizcaya, E. (Diciembre de 2004). Investigación Educativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, IX(23), 807-816. Recuperado el 03 de Agosto de 2024, de <https://www.redalyc.org/pdf/140/14002302.pdf>

González Urbaneja, P. M. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Revista de Matemáticas*(30), 205-236. Recuperado el 11 de Agosto de 2024, de

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2529640>

González, C. e. (2016). Ventajas e inconvenientes del aprendizaje basado en problemas percibidos por los estudiantes de Enfermería. *Revista de la Fundación Educación Médica*, 19(1), 47-53.

Recuperado el 28 de Octubre de 2022, de <http://www.fundacioneducacionmedica.org>

Guzmán, J. (2017). *Concepción didáctica para la integración de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), al proceso de Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática, en la asignatura de Geometría Computacional, usando el asistente matemáticos GeoGebra*. Chontales, Nicaragua.

Hernández. (2012). Recursos y estrategias y técnicas didácticas. *S/C: UNED*. P.7, 88.

Hernández Chavarría, C. M. (Marzo de 2013). Consideraciones para el uso del GeoGebra en

ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 82,

115-129. Recuperado el 11 de Agosto de 2024, de

<https://core.ac.uk/download/pdf/20482443.pdf>

Hernández Ereche, C. (2017). Una secuencia didáctica para el tratamiento de la circunferencia como lugar geométrico, considerando métricas discretas y la euclidiana. *Tesis de maestría*.

Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso-Chile. Recuperado el 12 de Enero de 2022, de

http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-2500/UCC2685_01.pdf

Hernández Rodríguez, A. A., Argülle Pascal, V., & Palacios H, R. (2021). Métodos empíricos de la

investigación. *Ciencia Huasteca Boletín Científico de la Escuela Superior de Huejutla*, 9(17), 33-

34. Recuperado el 20 de Febrero de 2022, de

<https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/huejutla/article/view/6701>

- Hernández Sampieri, R., & Fernández Collado, C. &. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: México D.F. Recuperado el 6 de Febrero de 2022, de http://jbposgrado.org/material_seminarios/HSAMPIERI/Metodologia%20Sampieri%205a%20edicion.pdf
- Huete Fuentes, A. J., Jarquín López, H. A., López Sánchez, C. d., & Gallo Cajina, H. E. (2019). *Matemática 8*. Managua, Nicaragua: Primera Edición. Recuperado el 3 de Junio de 2023
- INTUR. (20 de Julio de 2021). *Mapas de Nicaragua*. Obtenido de Mapaa del Municipio de San Dionisio: <https://www.mapanicaragua.com/municipio-de-san-dionisio/>
- Jiménez Corona, J. L. (2013). Estrategias de Enseñanza que promueven la mejora del rendimiento académico de estudiantes de Medicina. *Tesis doctoral*. Universidad de Castilla La mancha, Castilla La Mancha, España. Recuperado el 22 de Octubre de 2022, de <https://ruidera.uclm.es/xmlui/bitstream/handle/10578/6331/TESIS%20Jim%C3%A9nez%20Coronas.pdf?sequence=1>
- La Educación en América Latina. (2015). *Publicación mensual*, 8., 13.
- Lara Castro, L. O., & Vaca Sierra, T. N. (31 de Octubre de 2017). Análisis Comparativo de Metodologías Web para el Desarrollo de un Webquest En Entornos Virtuales de Aprendizaje. *Programa de Maestría en Ingeniería del Software*, 1-16. Recuperado el 11 de Agosto de 2024, de <https://repositorio.utn.edu.ec/bitstream/123456789/7244/2/ART%C3%8DCULO.pdf>
- Maldonado, A., & Sarmiento Santana, M. (2007). La enseñanza de las matemáticas y las TIC una estrategia de formación permanente. Recuperado el 20 de Abril de 2022, de https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/8927/D-TESIS_CAPITULO_2.pdf;sequence=4
- Manuel, M., & Trina, M. (Mayo de 2016). *Caracterización de la validez y confiabilidad en el constructo metodológico de la investigación social*. Carabobo, Venezuela. Recuperado el 21 de Julio de 2024, de Los modelos de enseñanza y la práctica de aula:

file:///C:/Users/Bismarck/Downloads/2512-Texto%20del%20art%C3%ADculo-5304-1-10-20180502.pdf

Medrano Chávez, R. A. (2021). Gestión de la calidad en la Unidad de Educación Continua y Posgrado (UECP) de la Facultad Regional Multidisciplinaria de Carazo, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua. *Tesis Doctoral*. UNAN-Managua, Managua, Nicaragua. Recuperado el 24 de Octubre de 2022, de <https://repositorio.unan.edu.ni/16521/1/16521.pdf>

Meza, M. (2016). Influencia del Software Geogebra en el Aprendizaje de la Geometría Analítica en los Estudiantes del Quinto Grado de Secundaria de la Institución Educativa José De la Torre Ugarte, El Agustino – 2015. *Tesis doctoral*. Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima-Perú.

MINED-Nicaragua. (2009). Currículo Nacional Básico, Diseño Curricular del Subsistema de la Educación Básica y Media Nicaraguense. Managua, Nicaragua. Recuperado el 11 de Junio de 2023, de https://www.mined.gob.ni/biblioteca/wp-content/uploads/2018/08/DisenoCurricular_subsistema.pdf

MINED-Nicaragua. (2009). Currículo Nacional Básico, Diseño Curricular del Subsistema de la Educación Básica y Media Nicaragüense . Managua, Nicaragua. Recuperado el 11 de Junio de 2023, de https://www.mined.gob.ni/biblioteca/wp-content/uploads/2018/08/DisenoCurricular_subsistema.pdf

Ministerio de Educación. (2022). Macro Unidad Pedagógica Quinto Ciclo Secundaria Regular. Managua, Nicaragua. Recuperado el 10 de Junio de 2023, de https://nicaraguaeduca.mined.gob.ni/wp-content/uploads/2022/01/Quinta_MUP-Matematica-2022_Secundaria-Regular-fe.pdf

- Montejo, C. L. (Agosto de 2019). El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en el desarrollo de la inteligencia emocional de estudiantes universitarios. *Scielo*, 7(2), . 353 - 383.
doi:<https://orcid.org/0000-0003-0824-7959>
- Morales, P., & Landa, V. (2004). Aprendizaje Basado en Problemas. *Redalyc Org*, 13(1), 145-157.
Recuperado el 28 de Jilio de 2024, de <https://www.redalyc.org/pdf/299/29901314.pdf>
- Muñoz Herrerías, O. A. (2020). Ecuación de la recta conociendo un punto y su pendiente. *Vida Científica Boletín Científico de la Escuela Preparatoria No. 4*(15), 39-41. Recuperado el 21 de Enero de 2023, de file:///C:/Users/UNICAM%201/Downloads/5238-Manuscrito-24377-2-10-20191126.pdf
- Newby, E. (1993). *Conductismo y constructivismo en educación*, 6.
- Ortiz Granja , D. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*(19), 93-110. Recuperado el 10 de Junio de 2023, de <https://www.redalyc.org/pdf/4418/441846096005.pdf>
- Pulido Polo, M. (01 de Septiembre de 2015). Cere monial y protocolo: métodos y técnicas de investigación científica. *31*(1), 1137 - 1156. Recuperado el 20 de Febrero de 2022, de <https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/96370/20167-25247-1-PB.pdf?sequence=1>
- Ramírez Robledo, L. E., Arcila, A., Buritica, L. E., & Castellón, J. (2004). *Paradigmas y modelos de investigación*. Recuperado el 6 de Febrero de 2022, de https://www.academia.edu/6530612/PARADIGMAS_Y_MODELOS_DE_INVESTIGACION
N_GU%3%8DA_DID%3%81CTICA_Y_M%3%93DULO_Texto_reestructurado_por
- Restrepo Gómez, B. (2005). Aprendizaje basado en problemas (ABP): Una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*, 8, 9-19. Recuperado el 16 de Abril de 2022, de <https://www.redalyc.org/pdf/834/83400803.pdf>

- Rodríguez Palmero, M. L. (2004). La teoría del aprendizaje significativo. *Centro de Educación a distancia*, 1-10. Recuperado el 25 de Octubre de 2022, de <https://cmc.ihmc.us/Papers/cmc2004-290.pdf>
- Rodríguez, J. (2011). Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios. *Barcelona: Barcelona: GRAÓ, de IRIF, S.L. P.7, 4.*
- Salazar , J., & Washburn, C. (2017). *Elementos básicos de Geometría Analítica para Economía* (Vol. 4). Guayaquil, Ecuador. Recuperado el 11 de Agosto de 2024, de <https://repositorio.cidecuador.org/bitstream/123456789/58/1/Elementos%20Basicos%20de%20Geometria%20Analitica%20para%20Economia.pdf>
- Sánchez Balarezo , R. W., & Borja Andrade, A. M. (16 de Mayo de 2022). Geogebra en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Científica: Dominio de las Ciencias*, 8(2), 33-52. doi: <http://dx.doi.org/10.23857/dc.v8i2.2737>
- Santrok. (2004). Aprendizaje por descubrimiento y su eficacia en la enseñanza de la Biotecnología. *Revista de Investigación Nº 71 Vol 34. Septiembre- Diciembre 2010*, 4.
- Sarmiento Santana, M. (2007). La Enseñanza de las Matemáticas y las TIC una Estrategia de formación permanente. *Tesis de Magister*. Universidad Rovira 1 Virgili, Barcelona España. Recuperado el 23 de Julio de 2024, de https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/8927/D-TESIS_CAPITULO_2.pdf
- Secundaria Regular 2022 Asignatura Matemática*. (2022). Obtenido de https://nicaraguaeduca.mined.gob.ni/wp-content/uploads/2022/01/Quinta_MUP-Matematica-2022_Secundaria-Regular-fe.pdf
- Serrano Salgado, V. M., & Zapata Corea, M. J. (2015). *¿Cómo aplico la matemática en mi vida?* Managua-Nicaragua, Nicaragua: 2a Edición.

- Servicio de Innovación Educativa. (2008). Aprendizaje Basado en Problemas. *Innovación Educativa*, 1-14. Recuperado el 22 de Octubre de 2022, de https://innovacioneducativa.upm.es/sites/default/files/guias/Aprendizaje_basado_en_problemas.pdf
- Torres Malaspina, V. M. (2017). Aplicación del software GeoGebra para el mejoramiento del aprendizaje de la geometría analítica en estudiantes del segundo ciclo, Escuela Profesional de Administración y Negocios Internacionales de la Universidad "Alas Peruanas". *Tesis Doctoral*. Universidad Alas Peruanas, Lima-Perú, Perú. Recuperado el 24 de Julio de 2022, de https://repositorio.uap.edu.pe/jspui/bitstream/20.500.12990/7160/1/Aplicaci%C3%B3n_Software%20geogebra_Mejoramiento%20del%20aprendizaje_Geometr%C3%ADa%20anal%C3%A9tica.pdf
- Tünermann Bernheim, C. (2008). *Modelos Educativos y Académicos*. Managua, Nicaragua: Editorial Hispamer. Recuperado el 22 de Octubre de 2022, de <https://www.enriquebolanos.org/media/publicacion/Modelos%20educativos%20y%20academicos.pdf>
- Tünnermann Benheim, C. (Marzo de 2011). El constructivismo y el aprendizaje de los estudiantes. *Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*(48), 21-32. Recuperado el 22 de Octubre de 2022, de <https://www.redalyc.org/pdf/373/37319199005.pdf>
- UNAN-Managua. (07 de Octubre de 2011). *Reglamento del Sistema de Estudios de Posgrado y Educación Continua*. Recuperado el 20 de Octubre de 2022, de file:///C:/Users/UNICAM%201/Desktop/unan-managua-2da_edicion-reglamento-posgrado.pdf
- Vallejos Díaz, Y. A. (Diciembre de 2008). Formas de hacer un diagnóstico en la investigación científica. Perspectiva holística. *Teoría y Praxis Investigativa*, 3(2), 11_22. Recuperado el 16 de Abril de

2022, de

<https://www.google.com/search?q=que+es+un+diagn%C3%B3stico+en+una+investigaci%C3%B3n&oq=que+es+un+diagn%C3%B3stico+en+&aqs=chrome.5.69i57j0i512i9.13429j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8>

Varela Guntiño, J. (2016). Aprendizaje basado en problemas: Buena sociedad requiere nuevas estrategias de enseñanza-aprendizaje. *Tesis de Maestría*. Universidad Internacional de La Rioja Facultad de Educación, Pontevedra. Recuperado el 16 de Abril de 2022, de <https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/4379/VARELAGUNTI%C3%91AS%2CJORGE.pdf?sequence=1>

Vega Aguilar, N., & Yépez Herrera, J. (2011). Modelos de Enseñanza. *Tesis de maestría*. Universidad Pedagógica Nacional, Zamora-Michoacán, México. Recuperado el 23 de Octubre de 2022, de <http://200.23.113.51/pdf/29663.pdf>

Velásquez Castillo, M. L., Barreda Rodríguez, N. A., Jarquín López, H. A., & Ortiz Hernández, G. I. (2019). *Matemática 7*. Managua, Nicaragua: Primera Edición. Recuperado el Julio de 06 de 2023

Vives Hurtado, M. M. (Diciembre de 2016). Modelos Pedagógicos y Reflexión para las Pedagogías del sur. *Boletín Virtual*, 5(11), 40-55. Recuperado el 22 de Octubre de 2022, de file:///C:/Users/UNICAM%201/Downloads/ojsadmin,+Gestor_a+de+la+revista,+2.+MODELOS+PEDAG%C3%93GICOS+Y+REFLEXIONES+PARA+LAS+PEDAGOGIAS+DEL+SUR.pdf

Zetina López, I. J., Nieto Suárez, M. G., & Esquivel Avila, C. (2021). Teorías del aprendizaje que sustentan la educación preescolar y la formación docente. *CONISEN*, 1-12. Recuperado el 22 de Octubre de 2022, de <https://conisen.mx/Memorias-4to-conisen/Memorias/1769-554-Ponencia-doc-%20LISTO.docx.pdf>

XVII. ANEXOS

Anexo 1: Evaluación inicial



UNIVERSIDAD
NACIONAL
AUTÓNOMA DE
NICARAGUA,
MANAGUA
UNAN - MANAGUA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA
UNAN-CUR-MATAGALPA
DIAGNÓSTICO APLICADO A ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO GRADO DEL
TURNO VESPERTINO
CENTRO ESCOLAR PÚBLICO RUBÉN DARÍO, MUNICIPIO SAN DIONISIO–
MATAGALPA

Diagnóstico de Matemática (Unidad: Geometría Analítica)

Se está llevando a cabo una investigación acerca del tema: **“Propuesta didáctica en el aprendizaje basado en la resolución de problemas, utilizando GeoGebra en Geometría Analítica”**, para la tesis de maestría con mención en Matemática Aplicada, cuyo objetivo es evaluar una propuesta didáctica enfocada en el ABP, haciendo uso de GeoGebra como recurso didáctico para el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.

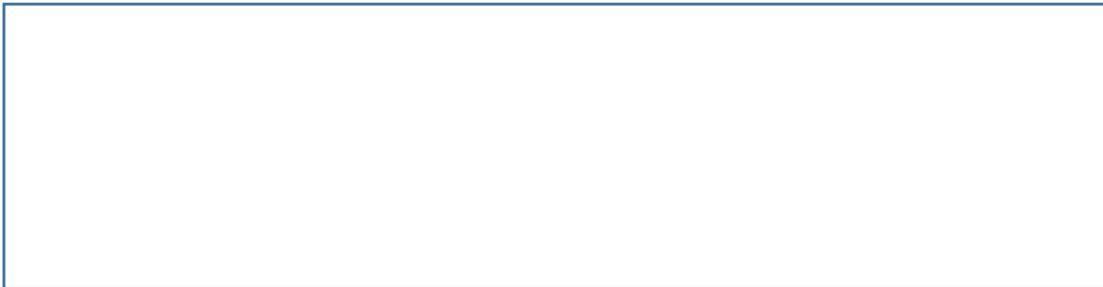
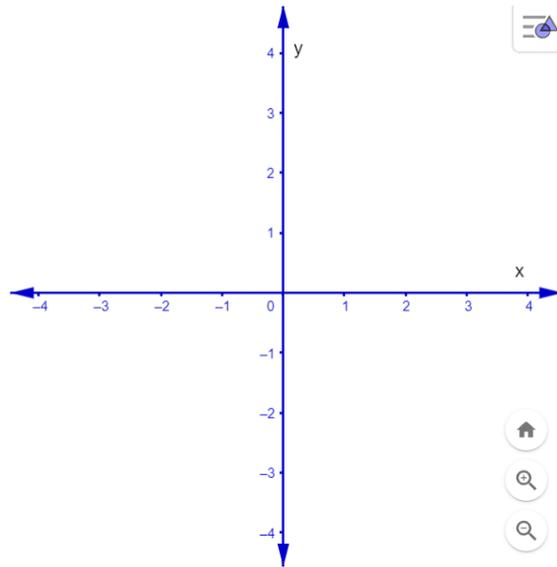
Por lo que la información recopilada servirá de soporte para dicha investigación. De antemano, gracias por su colaboración.

Nombres y Apellidos del estudiante: _____

Sección: _____ Fecha: _____

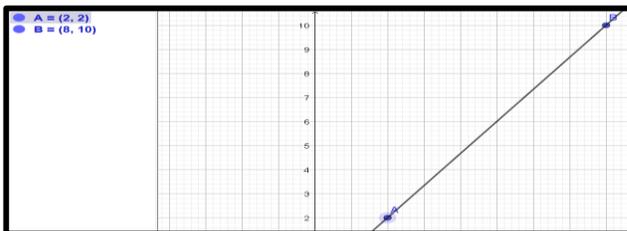
- I. Encierre en un círculo la opción que considere correcta y en el rectángulo justifique su respuesta, haciendo uso de gráfico, procedimientos o explicación verbal, según considere conveniente
 1. La siguiente ilustración representa:
 - a. Una recta.
 - b. Un plano cartesiano.

- c. Un par de rectas perpendiculares.
- d. b y c son correctas.
- e. Ninguna de las anteriores.



2. La siguiente gráfica representa:

- a. Una recta,
- b. La distancia entre dos rectas,
- c. Distancia entre dos puntos
- d. Ninguna de las anteriores



3. De los siguientes, incisos: ¿cuál (es) considera verdadero (s)?, justifique su respuesta a través de un ejemplo concreto.

- a. La distancia entre dos puntos A y B se puede calcular utilizando el teorema de Pitágoras.
- b. La distancia entre dos puntos A y B se puede calcular utilizando la fórmula

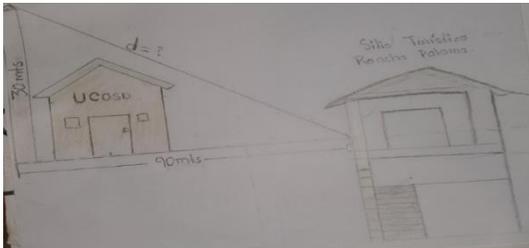
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- c. La distancia entre dos puntos A y B se puede calcular utilizando el teorema de Thales.
- d. a y b son correctas.
- e. Ninguna de las anteriores es correcta.

4. Justifique a través de un procedimiento, cuál de las opciones corresponde a la distancia entre los puntos $A(2, -3)$ y $B(5, 1)$.

- a. 5, b. -5, c. $\frac{1}{5}$, d. 6, e. Ninguna de las anteriores.

5. Don Juan necesita colocar un cable desde la cima del poste de luz ubicado frente a la UCOSD, cuyo poste tiene una altura de 30 metros, de manera que dicho cable debe llegar hasta el sitio turístico “Rancho Paloma”, cuya distancia desde la base del poste hasta el a rancho es de 90 metros. ¿Cuál debe ser la longitud del cable que necesita colocar Don Juan desde la cima del poste hasta el centro turístico?

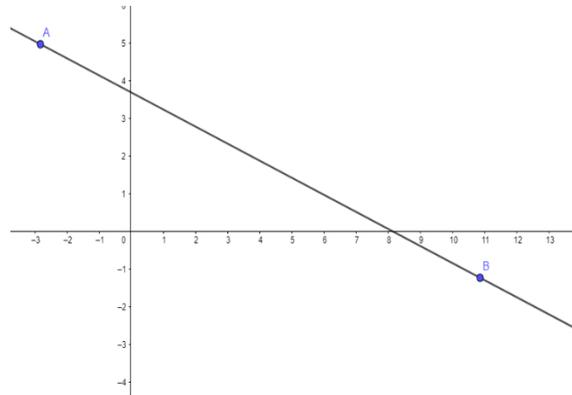


FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA.

- a. 2700 m, b. 2000 m, c. 100 m, d. 94.87m, e. Ninguna de las anteriores

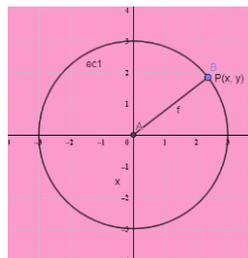
6. La gráfica mostrada a continuación pertenece a:

- a. Una parábola.
- b. Una ecuación de segundo grado.
- c. Una circunferencia.
- d. Ecuación de una recta.



7. En la siguiente circunferencia el segmento que va desde el punto "A" al punto "B" se llama:

- a. Diámetro,
- b. Recta tangente,
- c. Arco,
- d. Radio.
- e. Recta secante,
- f. Ninguna de las anteriores,



8. Si se sabe que un avión cisterna que riega los cultivos de arroz en Sébaco, se mantiene sobrevolando la ciudad a una distancia constante de 100 metros de un plantillo de arroz esperando instrucciones para su aterrizaje, dicha trayectoria representa:

a) Una recta, b) Una parábola, c) Una circunferencia, d) Un segmento de recta, e) N. A

9. Don Luis quiere cercar una parcela de su terreno. Dicha parcela tiene forma circular de 10 metros de radio. Si quiere poner 4 hilos de alambre, ¿con cuántos metros de alambre podrá cercar su parcela?, Puede hacer uso de algún gráfico de acuerdo a los datos brindados para orientarse mejor en la solución del problema.

- a. 40 metros
- b. 251.33 m
- c. 100 metros
- d. Ninguna de las anteriores

Anexo 2: Evaluación final



UNIVERSIDAD
NACIONAL
AUTÓNOMA DE
NICARAGUA,
MANAGUA
UNAN - MANAGUA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA
UNAN-CUR-MATAGALPA
DIAGNÓSTICO APLICADO A ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO GRADO DEL
TURNO VESPERTINO
CENTRO ESCOLAR PÚBLICO RUBÉN DARÍO, MUNICIPIO SAN DIONISIO–
MATAGALPA

Diagnóstico de Matemática (Unidad: Geometría Analítica)

Con el fin de continuar con la investigación que tiene como tema: **“Propuesta didáctica en el aprendizaje basado en la resolución de problemas, utilizando GeoGebra en Geometría Analítica”**, para la tesis de maestría con mención en Matemática Aplicada, cuyo objetivo es evaluar una propuesta didáctica enfocada en el ABP, haciendo uso de GeoGebra como recurso didáctico para el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.

Por lo que la información recopilada servirá de soporte para dicha investigación.

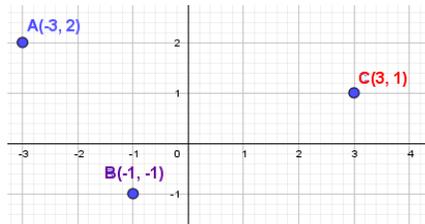
Por esta razón es necesario el aporte individual que pueda dar cada estudiante en base a sus conocimientos adquiridos durante el desarrollo de la unidad en estudio, la información obtenida será utilizada como soporte y aporte a este trabajo investigativo que se está realizando. Agradeciendo de antemano su colaboración.

Nombres y Apellidos del estudiante: _____

Sección: _____ Fecha: _____

- I. Al suponer que un sistema de coordenadas rectangulares en la vista cerca de la comunidad de Susulí Central se tiene la siguiente información: El punto A coincide con la iglesia Católica San Juan Evagelista, el punto B con la

iglesia Monte Sinaí y el punto C con el Centro Escolar Público Rubén Darío, como se muestra en la siguiente ilustración:



Si los cuadrados tienen 500 metros, responda cada una de las siguientes preguntas, justificando su respuesta a través de un procedimiento (puede auxiliarse de la expresión $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, si lo considera necesario):

- ¿Cuál es la distancia que hay del Centro Escolar Público Rubén Darío a la iglesia Católica?
- ¿Cuál es la distancia que hay del Centro Escolar Público Rubén Darío a la iglesia Monte Sinaí?
- ¿Cuál es la distancia que hay de la iglesia Católica a la iglesia Monte Sinaí?

1. $d(CA)=\sqrt{37}$, $d(CB)= 2\sqrt{5}$, $d(AC)=\sqrt{37}$,

2. $d(CA)=\sqrt[3]{37}$, $d(CB)=5\sqrt{2}$, $d(AC)=37$

3. Ninguna de las anteriores.

II. En esta actividad se le presenta una definición matemática, se recomienda analizar cada uno de los incisos para elegir y rellenar el rectángulo donde considera que es la respuesta correcta y justifique la selección de su respuesta “La ecuación de la recta que tiene pendiente m y pasa por el punto $A(x_1, y_1)$ “, es

$y - y_1 = m(x - x_1)$, se llama:

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| a). Ecuación general de la recta, | b). Ecuación punto-pendiente |
| c). Ecuación canónica de la recta | d). Ninguna de las anteriores |

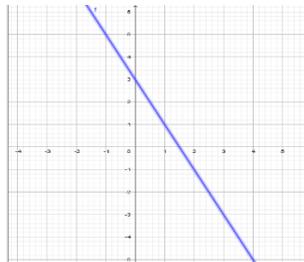
III. Para la siguiente actividad se te presentan dos situaciones es necesario realizar un análisis para cada caso y así elegir entre cada uno el inciso correcto para rellenar el rectángulo donde considera que es la respuesta correcta y justifique su elección de acuerdo a lo estudiado en la unidad de geometría analítica.

¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa una recta?

- a). $y = x^3 + x^2 + 2x - 1$, b). $y = 2x + 1$, c). $y = \frac{x+1}{x-1}$

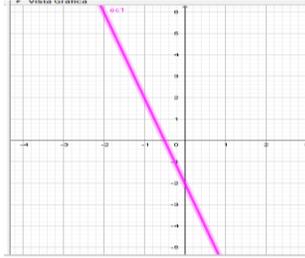
IV. Escribiendo la ecuación. $y = -2x + 3$, en su forma general,

$Ax + By + C = 0$, (mostrada en la gráfica siguiente), resulta,



- a). $2x + 2y - 3 = 0$, b). $2x + 3y - 3 = 0$, c). $2x + 2y + 3 = 0$ d). Ninguna es correcta.

- V. Encuentre la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(1, -6)$ y $B(-2, 6)$, justificando en el rectángulo un procedimiento lógico, cuya gráfica se ilustra en la figura mostrada a continuación:



- a). $-2x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$ b). $2x + \frac{1}{2}y + 1 = 0$
- c). $4x + y + 2 = 0$ d). b y c son correctas.

- VI. Calcule el valor que debe tener “k” mediante un procedimiento matemático para que la recta cuya ecuación es $k3x + 4y + k = 0$ pase por el punto $A(-6, 5)$:

- b. $\frac{17}{20}$, b). $\frac{20}{17}$, c). $2\frac{20}{17}$, d). Ninguna de las anteriores es correcta

VII. ¿Cuál es la ecuación que representa la trayectoria de un helicóptero que se mantiene volando la capital Managua a una distancia constante de 4Km de la torre del aeropuerto Augusto C. Sandino esperando orden para su aterrizaje?, argumente su respuesta mediante un planteamiento matemático

- a). $x^2 + y^2 = 5$, b). $x^2 + y^2 = 4$, c). $x^2 + y^2 = 16$, d). Ninguna de las anteriores es correcta

VIII. ¿Cuál será la trayectoria que describe un avión cisterna que riega los cultivos de arroz en Sébaco, si se mantiene sobrevolando la ciudad a una distancia constante de 100 m de un plantillo de arroz esperando instrucciones para su aterrizaje?, (puede hacer uso de GeoGebra para ilustrar dicha trayectoria, si tiene acceso al programa).

- a). Una línea recta, b). Una parábola, c). Una circunferencia,
d). Segmento de recta, e). Ninguna de las anteriores.

IX. Don Luis quiere cercar una parcela de su terreno, la cual tiene forma circular de 10 metros de radio. Si quiere poner 4 hilos de alambre, ¿con cuántos metros de alambre podrá cercar su parcela?

Justifique su respuesta mediante un procedimiento matemático.

a). 40 m, b). 251.33m, c). 100 m, d). Ninguna es correcta.



Anexo 3: Evaluación sistemática (Prueba de unidad de G. A.)



UNIVERSIDAD
NACIONAL
AUTÓNOMA DE
NICARAGUA,
MANAGUA
UNAN - MANAGUA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA
UNAN-CUR-MATAGALPA
PRUEBA APLICADA A ESTUDIANTES DE UNDÉCIMO GRADO DEL TURNO
VESPERTINO
CENTRO ESCOLAR PÚBLICO RUBÉN DARÍO, MUNICIPIO SAN DIONISIO–
MATAGALPA

Prueba sistemática de Geometría Analítica

Con el fin de evaluar de manera integral y objetiva el grado de comprensión y dominio de los contenidos de Geometría Analítica, se le presenta la presente prueba sistemática, cuya realización será de manera individual. Los resultados obtenidos a partir de la aplicación de este instrumento servirán de soporte para la investigación científica titulada “**Propuesta Didáctica en el Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas, utilizando GeoGebra en Geometría Analítica.** Por esta razón es necesario el aporte que pueda dar cada estudiante en base a sus conocimientos adquiridos durante el desarrollo de la unidad en estudio,. Agradeciendo de antemano su colaboración.

Nombres y Apellidos del estudiante: _____

Sección: _____ Fecha: _____

Para la realización de la presente prueba se le recomienda aplicar las cuatro fases de la metodología del Aprendizaje Basado en Problemas, (Activación, Investigación, Resolución y Evaluación), así mismo utilizar el software GeoGebra como recurso didáctico para este proceso y realizar una interpretación de los resultados obtenidos una vez que haya resuelto cada problema.

1. Se sabe que la biblioteca del Centro Escolar Público Rubén Darío se encuentra en el extremo $A(2, 2)$ y la cancha en el extremo $B(8, 1)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento \overline{AB} .
2. La Alcaldía de San Dionisio está planificando la instalación de un nuevo parque en la comunidad de Susulí Central para la recreación de la niñez. Dos ubicaciones posibles han sido propuestas: una en la esquina de la calle A con coordenadas $(2, 3)$ y otra en la esquina de la calle B con coordenadas $(8, 7)$.

Calcula la distancia entre estas dos ubicaciones para determinar la distancia directa que recorrerán los pobladores si se trasladan de una esquina a la otra.

3. La avenida del Boulevard de San Dionisio necesita nuevas farolas a lo largo de su tramo recto. Las farolas se instalarán siguiendo una línea recta que pasa por los puntos $C(1, 2)$ y $D(6, 12)$.

Determinar la ecuación de la recta para la instalación de las farolas.

4. La señora Julia cuenta con un servicio de agua potable que cuesta 5 dólares el mes, quien la utiliza únicamente para los quehaceres del hogar. Si ella ocupa más agua de lo normal para aguar su ganado deberá pagar 1.5 dólares por mes

- a) Formule un modelo lineal matemático para el pago por mes “y” por “x” equipos
- b) Encuentra la pendiente y el intercepto con el eje y.

c) Trace la gráfica de la ecuación dada

5. En la comunidad el Jícaro, Sector “Los Hernández”, debido a la escasez de agua y al crecimiento sucesivo de la población, las familias de este sector demandan a las autoridades municipales la construcción de un pozo comunitario. Si el Sr. Alcalde, Ing. Fredys Zeledón ha decidido construir un pozo de forma circular, de manera que tenga un radio de 2 metros y cuyo centro está en el origen $C(0, 0)$, determine un modelo matemático que describe esta situación y grafique dicho modelo.

6. El servicio sismológico de Nicaragua (INETER) detectó un sismo con origen en el Municipio de Managua a 4. km Este y 2 km Sur del centro de la ciudad con un radio de 5 km a la redonda. Determine la ecuación de la circunferencia del área afectada. Utilice la ecuación encontrada para indicar si afectó al municipio de Managua.

Anexo 4: Entrevista a docente de Matemática de undécimo grado



UNIVERSIDAD
NACIONAL
AUTÓNOMA DE
NICARAGUA,
MANAGUA
UNAN - MANAGUA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE NICARAGUA

UNAN-CUR- MATAGALPA

ENTREVISTA DIRIGIDA A:

Docente de Matemática de undécimo grado, San Dionisio – Matagalpa

I. Datos generales

Fecha: _____

Nombre del entrevistador: _____

Nombre del entrevistado: _____

Nivel académico: _____

Cargo que desempeña el entrevistado: _____

Estimado docente:

Se está llevando a cabo la investigación titulada: “**Propuesta didáctica en el aprendizaje basado en la resolución de problemas, utilizando GeoGebra en Geometría Analítica**”, para la tesis de maestría con mención en Matemática Aplicada, cuyo propósito es evaluar una propuesta didáctica enfocada en el ABP, utilizando GeoGebra como recurso didáctico de manera que permita en los estudiantes lograr un aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.

Por lo que la información brindada servirá de soporte para dicha investigación. De antemano, se le agradece por su colaboración.

1. En caso que usted haya usado GeoGebra, ejemplifique.
2. ¿Considera usted importante utilizar GeoGebra con los estudiantes?
3. ¿En qué contenidos lo ha utilizado GeoGebra?
4. ¿Usted ha utilizado GeoGebra para trabajar en Geometría Analítica?
5. ¿Qué ventajas le ofrece el software GeoGebra en sus clases?
6. ¿Cree usted que GeoGebra presenta desventajas?, ¿por qué?
7. ¿Considera usted importante el uso de GeoGebra para el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica?, ¿por qué?
8. ¿Qué experiencias ha tenido al utilizar GeoGebra en el desarrollo del contenido de Geometría Analítica?
9. Si usted ha promovido el ABP en el PEA de la Geometría Analítica, ¿qué resultados ha obtenido?
10. ¿Cree usted que la aplicación del ABP en el PEA de la Geometría Analítica contribuye a alcanzar un aprendizaje significativo de la misma?, ¿por qué?
11. ¿Qué otros aspectos sugiere poner en práctica para lograr un aprendizaje significativo de la Geometría Analítica?

Anexo 5: Guía de observación



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE NICARAGUA UNAN-CUR- MATAGALPA

Guía de observación dirigida a:

Docente de Matemática de undécimo grado, San Dionisio – Matagalpa.

Cabe señalar que esta actividad se realiza con el propósito de recopilar información para llevar a cabo la investigación titulada: “**Propuesta didáctica en el aprendizaje basado en la resolución de problemas, utilizando GeoGebra en Geometría Analítica**”, para la tesis de maestría con mención en Matemática Aplicada, cuyo propósito es evaluar una propuesta didáctica enfocada en el Aprendizaje Basado Problemas, utilizando GeoGebra como recurso didáctico de manera que permita en los estudiantes lograr un aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.

Es por esta razón que se necesita de cierta información, la cual es posible obtenerla mediante la observación durante el desarrollo de cada una de las temáticas en la unidad de la Geometría Analítica, cuyo objetivo es visualizar los recursos didácticos utilizados para resolver problemas, en dicha unidad con estudiantes de 11°. Dicha información será utilizada con fines propios de la investigación. Agradeciendo de ante mano por su colaboración.

I. DATOS GENERALES:

Nombre del profesor visitado: _____ **Fecha:**

Hora en que inicia la clase: _____

Hora que finaliza la

clase: _____

Tema que imparte: _____

Asistencia de estudiantes: _____

I. Aprendizaje basado en problema (ABP)

N°	Pregunta	Sí	No	Observación
1	¿El docente realiza exploración de conocimientos previos de sus estudiantes al iniciar el contenido?			
2	¿El docente relaciona el contenido presentado con los conocimientos previos de sus estudiantes?			
3	¿El docente plantea situaciones problemáticas de manera contextualizada?			
4	¿El docente desempeña el rol de docente facilitador durante el proceso?			
5	¿El docente realiza actividades de aprendizaje que potencien el desarrollo de habilidades cognitivas de sus estudiantes?			
6	¿Los problemas planteados por el docente durante la clase son claros y de fácil interpretación?			
7	¿Al momento de resolver un problema, se debaten las respuestas obtenidas?			
8	¿El docente propone algún problema complejo que implica mayor documentación por parte del estudiante?			
9	¿El docente brinda atención individual de acuerdo a las características de sus estudiantes?			

10	¿El docente evalúa el desarrollo del proceso de aprendizaje de sus estudiantes?			
----	---	--	--	--

II. Utilización de GeoGebra como recurso didáctico en el ABP

Nº	Pregunta	Sí	No	Observación
1	¿Para resolver un problema el docente da a conocer que GeoGebra sirve únicamente como alternativa para verificar y comprobar los resultados obtenidos manualmente?			
2	¿El docente explora con sus estudiantes todo el repertorio que ofrece GeoGebra?			
3	¿El docente hace uso de GeoGebra como recurso didáctico al momento de resolver un problema?			
4	¿El docente motiva a los estudiantes utilizando diferentes recursos didácticos para el desarrollo de las clases?			
5	¿El docente les sugiere a los estudiantes hacer uso de GeoGebra para resolver problemas de Geometría Analítica?			

Observaciones generales:

Anexo 6: Resultados de la validación de instrumentos de medición, MSc. Juan Álvaro Ulloa Montoya

Instrumentos elaborados	Observaciones y/o recomendaciones brindadas
Diagnóstico inicial	El diagnóstico elaborado tiene secuencia didáctica en relación a los contenidos
Diagnóstico final	Este diagnóstico se considera que reúne una estructura básica para ser aplicado
Entrevista a docente de Matemática	Las preguntas de estén instrumento tienen un orden lógico, siguen una buena secuencia
Guía de observación	Está muy bien estructurada, posee un buen orden en relación al contenido objeto de observación

**Anexo 7: Resultados de la validación de instrumentos de medición, Dra. Nesly de Los
Ángeles Laguna V.**

Instrumentos elaborados	Observaciones y/o recomendaciones brindadas
Diagnóstico inicial	Se hicieron mejoras en la redacción de los ejercicios y problemas planteados, así como la escritura correcta de algunas fórmulas matemáticas
Diagnóstico final	Se hizo hincapié en la parte de la contextualización de problemas. Se recomendó realizar preguntas de análisis relacionadas a reflexiones usando GeoGebra. Se sugirió mejorar en la redacción de algunos problemas, sobre todo en la secuencia lógica de las mismas.
Entrevista a docente de Matemática	Se hicieron mejoras en la redacción de preguntas, así como el cambio de orden en algunas interrogantes.
Guía de observación	Se incorporaron algunos aspectos que no se había retomados

Anexo 8: Resultados de la validación de instrumentos de medición, Dra. María Elena Blandón Dávila

Instrumentos elaborados	Observaciones y/o recomendaciones brindadas
Diagnóstico inicial	Se sugirió la complementación de algunos elementos que se habían tomado en cuenta.
Diagnóstico final	Se incorporaron aspectos relevantes sobre el ABP en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría analítica.
Entrevista a docente de Matemática	Se recomendó mejorar la redacción de algunas preguntas, así como la incorporación de aspectos relevantes que no se habían tomado en cuenta.
Guía de observación	Se hicieron mejoras en base a las recomendaciones brindadas, sobre todo en aspectos que permitieran obtener mayor información

Anexo 9: Resultados de la validación de instrumentos de medición, MSc. José Alfredo Jirón Zeledón

Instrumentos elaborados	Observaciones y/o recomendaciones brindadas
Diagnóstico inicial	Tiene secuencia lógica en su redacción, sólo se sugirió brindar dicho instrumento contestado a la comisión evaluadora.
Diagnóstico final	Los puntos tratados están muy bien redactados. Se sugirió proporcionar dicho instrumento ya contestado a la comisión evaluadora
Entrevista a docente de Matemática	Las preguntas están bien redactadas, sólo se pidió cambiar el orden en algunas de ellas.
Guía de observación	Los puntos a considerar están bien, acorde con la temática en estudio

Anexo 10: Propuesta Didáctica



“Geometría Analítica enfocada en el aprendizaje basado en la resolución de problemas, utilizando GeoGebra”



ÍNDICE

I.	Introducción	170
II.	Justificación	171
III.	OBJETIVOS	172
IV.	Sección 1: Punto y segmento	174
	Contenido: Distancia entre dos puntos de la recta numérica	174
	Contenido: Distancia entre dos puntos del plano cartesiano	180
	Contenido: Coordenadas del punto medio de un segmento	187
V.	Sección 2: La recta	194
	Contenido: Ecuación de la recta: pendiente y el intercepto con el eje y	194
	Contenido: Ecuación punto–pendiente de la recta	200
	Contenido: Ecuación general de la recta	205
	Contenido: Ecuaciones de rectas paralelas a los ejes coordenados	210
VI.	Sección 3: La circunferencia	216
	Contenido: Ecuación de la circunferencia con centro en el origen.....	216
	Contenido: Ecuación de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r	222
	Contenido: Forma general de la ecuación de una circunferencia	227
	Contenido: Transformación de la forma general a la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia	234

I. Introducción

La tecnología ha venido a evolucionar los modelos de enseñanza, sobre todo en Matemática para desarrollar diferentes contenidos. La utilización de algunos softwares matemáticos como recurso didáctico contribuyen a llevar a cabo un proceso más dinámico, interactivo e innovador con el estudiante, despertando el interés por el estudio y al mismo tiempo su uso en Geometría Analítica permite que el aprendizaje sea significativo.



Es por ello que el propósito central de este trabajo es desarrollar una propuesta didáctica enfocada en el aprendizaje basado en problemas, haciendo uso de GeoGebra como recurso didáctico para el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.

Esta propuesta didáctica consta de objetivos que son la guía de todo el proceso, una justificación donde se da a conocer el valor didáctico y metodológico que posee, como los beneficiarios y la importancia que tendrá esta propuesta para ellos.

Finalmente, destacar que esta propuesta está diseñada con situaciones problemáticas contextualizadas, con un lenguaje sencillo, para que el estudiante pueda comprender y encontrar el verdadero significado e importancia de la Matemática en la vida cotidiana. Es importante señalar que se explica paso a paso la solución a cada problema utilizando el software GeoGebra y, a continuación, se plantean problemas similares, los que deberán ser resueltos por los estudiantes aplicando el modelo dado en cada uno de los ejemplos presentados.

II. Justificación

La presente propuesta didáctica está enfocada en proporcionar datos más interactivos con el medio en el que se relaciona el estudiante al utilizar el software GeoGebra en Geometría Analítica, es decir, se proponen situaciones propias de su entorno, permitiendo una mejor asimilación del contenido en estudio de manera visual.



Es importante abordar la Geometría Analítica haciendo uso de las TIC, ya que estas ocupan un papel importante en el ámbito educativo y la utilización de GeoGebra permite un aprendizaje satisfactorio en el proceso de enseñanza-aprendizaje de dicha unidad

Con esta propuesta didáctica se beneficiará a docentes y estudiantes del área de Matemática, puesto que presenta actividades resueltas y de manera contextualizadas para trabajarlas en el aula de clase, así mismo sugeridas como reforzamiento al estudio de la Geometría Analítica, ya sea en horas extraclase o tareas en casa.

La importancia de esta propuesta también radica en proporcionar dos aportes que sobresalen; por un lado, de carácter metodológico, mediante la incorporación del ABP como una estrategia de enseñanza activa a través de situaciones contextualizadas y de índole didáctico con la utilización del software GeoGebra de manera dinámica e innovadora para el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.

Además, los estudiantes podrán hacer uso adecuado de la tecnología a través de la utilización del software en Geometría Analítica, de tal manera que contribuya a alcanzar un aprendizaje de mayor satisfacción. De igual manera el uso de dicho software implica desarrollar una clase dinámica, innovadora, donde se aprovecha mejor el tiempo.

III. OBJETIVOS

3.1.Objetivo General

Desarrollar una propuesta didáctica enfocada en el aprendizaje basado en problemas reales, utilizando GeoGebra como recurso didáctico para el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.

3.2.Objetivos Específicos

1. Analizar problemas contextualizados, vinculados a la Geometría Analítica, a fin de valorar la importancia de esta rama en la vida cotidiana.
2. Aplicar la metodología del aprendizaje basado en problemas, mediante la solución de situaciones contextualizadas, utilizando GeoGebra como recurso didáctico para el aprendizaje significativo de la Geometría Analítica.
3. Desarrollar el pensamiento crítico a través de la solución de situaciones contextualizadas relacionadas con la Geometría Analítica, mediante el uso de las tecnologías de la información y comunicación con actitud crítica y responsable.
4. Utilizar el software GeoGebra de forma apropiada para resolver situaciones del mundo real, relacionadas con Geometría Analítica, aplicando la metodología del ABP.

En el siguiente apartado se abordará una serie de situaciones problemáticas reales, relacionadas con Geometría Analítica enfocada en la metodología activa del Aprendizaje Basado en problemas, utilizando GeoGebra como recursos didácticos. La solución de dichos problemas está en función del aprendizaje del estudiante, por tanto, las orientaciones están dirigidas meramente a ellos, donde se pretende que estos asuman el protagonismo en todo el proceso y puedan ser constructores de sus propios conocimientos. Así mismo se emplearán las cuatro fases del ABP y utilizando GeoGebra como recurso didáctico.

Para el desarrollo de cada una de las actividades planteadas, se orienta la conformación de equipos d trabajos de 5 a 7 estudiantes, donde se espera que estos tengan de manera general los siguientes conocimientos previos sobre:

1. Geometría Básica: Concepto de Rectas y Segmentos de Recta.
2. Plano Cartesiano: Puntos y ejes de coordenadas.
3. Conceptos básicos y ecuaciones en sus diferentes formas relacionadas con la unidad objeto de estudio.
4. El software GeoGebra: Familiarizarse con la interfaz, incluyendo la vista gráfica, la barra de entrada, y las herramientas básicas; **Ingreso de Coordenadas y Puntos;** Ecuaciones, entre otros.
5. **Trazado de rectas y segmentos:** Utilizar herramientas para trazar rectas, segmentos, y otros objetos geométricos.
6. **Investigación y búsqueda de información:** Saber buscar y seleccionar información relevante para resolver problemas específicos.
7. La metodología del ABP, (características, papel del estudiante, fases y otras).
8. Aplicación de los conocimientos teóricos a la resolución práctica de problemas utilizando GeoGebra.

IV. Sección 1: Punto y segmento

Contenido: Distancia entre dos puntos de la recta numérica

En la comunidad Susulí Central se encuentra ubicada la pulpería “Variedades Tinoco”, cuyo propietario es el Sr. Otoniel Tinoco, exactamente en el km 2 sobre la carretera que conduce a San Dionisio y la Alcaldía “Casa del Pueblo” está en el kilómetro 6 en el mero casco urbano de dicho municipio.

Don Otoniel tiene convenio con la alcaldía, quien le provee de productos para distintas actividades que se desarrollan en esta institución, por lo que necesitan determinar la distancia entre ambos.

Haciendo uso del software Geogebra calcule la distancia entre la pulpería del Sr. Otoniel y la Alcaldía, Posteriormente analice e interprete el resultado en el contexto de la comunidad.

Figura 1: Variedades Tinoco



Fuente: Evidencia personal

FIGURA 2: ALCALDÍA SAN



FUENTE: ING. FREDYS

Fase 1: Activación

Para dar solución al problema planteado, se realizará la conformación de equipos de trabajos de 5 integrantes. Para este proceso los estudiantes se organizarán de manera voluntaria.

Conocimientos previos activados:

Se hace necesario recordar algunos aspectos como:

- a. El proceso para graficar puntos en la recta numérica.
- b. El concepto de recta en geometría.

Fase 2: Investigación

Los estudiantes deben buscar, recopilar, seleccionar y organizar información necesaria en diferentes medios que estén a su disposición para resolver el problema, y una vez que se logre resolver la situación, compartirán con el resto de equipos de trabajos, mediante una exposición, donde participarán todos los miembros del equipo. Se sugiere hacer uso de aplicaciones para diseñar presentaciones creativas, por ejemplo, canva u otras que se consideren adecuadas.

Nota: Se puede visitar el siguiente tutorial, que puede servir para dar una mejor idea de cómo llegar a una respuesta satisfactoria, cuyo link de acceso es el siguiente.

<https://www.youtube.com/watch?v=oko3qX51Lyw>

<https://www.youtube.com/watch?v=0cUkAd2o1yw>

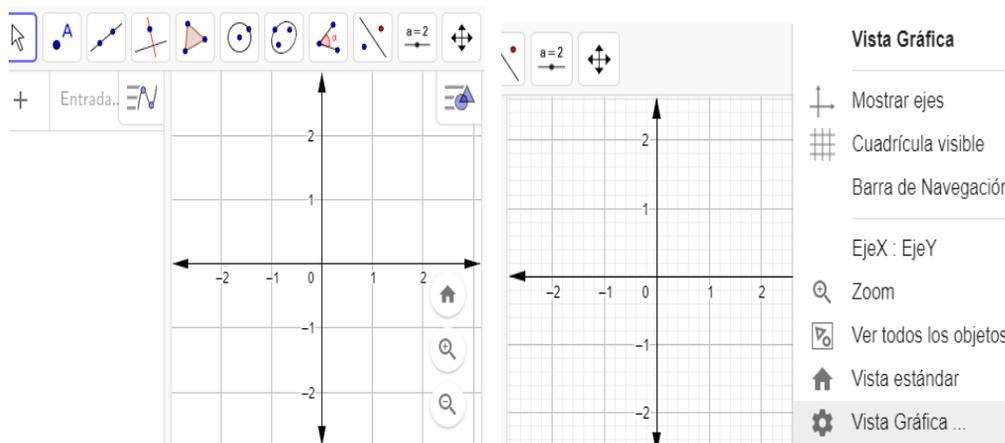
Fase 3: Resolución

En el problema se pueden identificar algunos datos (en este caso los puntos que se deben graficar, $A(2, 0)$ que correspondería a la Pulpería “Variedades Tinoco” y $B(6, 0)$), a la alcaldía, respectivamente).

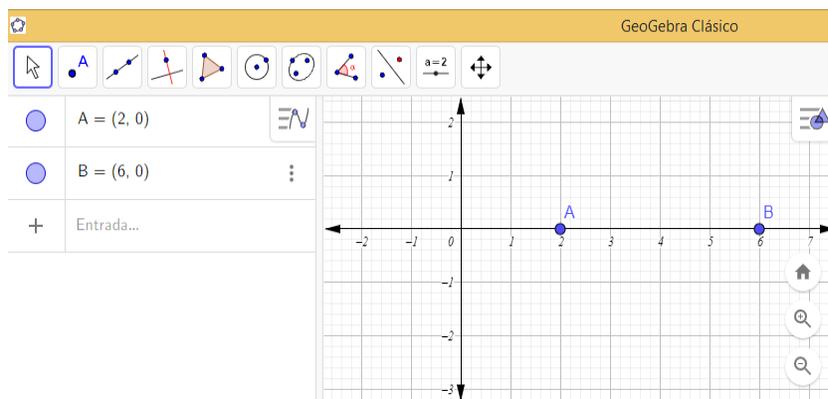
Utilizando GeoGebra como una herramienta didáctica, se determinará la distancia de la recta que pasa por los puntos A y B .

Para esto se tomarán en cuenta los siguientes pasos:

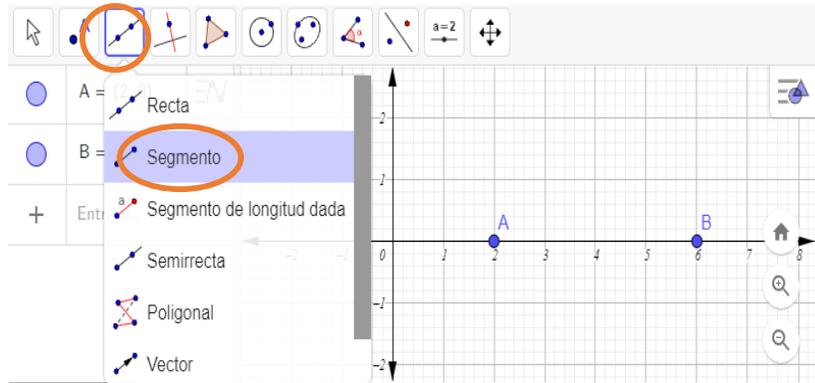
- a. Abrimos GeoGebra, presionamos clic derecho sobre el software seleccionamos la vista gráfica, como se aprecia en las siguientes imágenes:



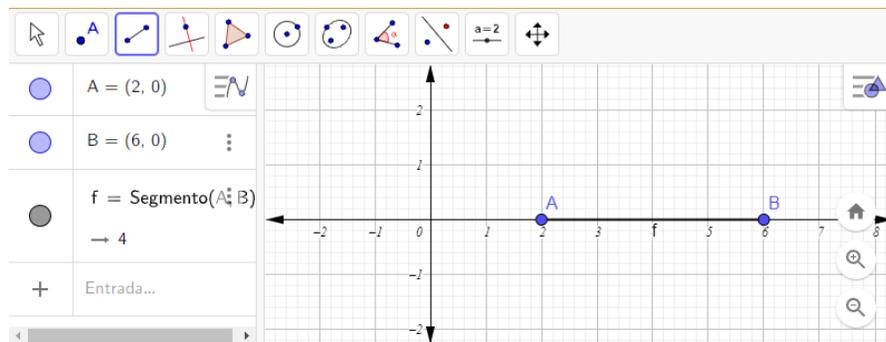
- b. En este apartado ingresamos los puntos $A(2, 0)$ y $B(6, 0)$ en la barra de entrada, tal como se muestra a continuación:



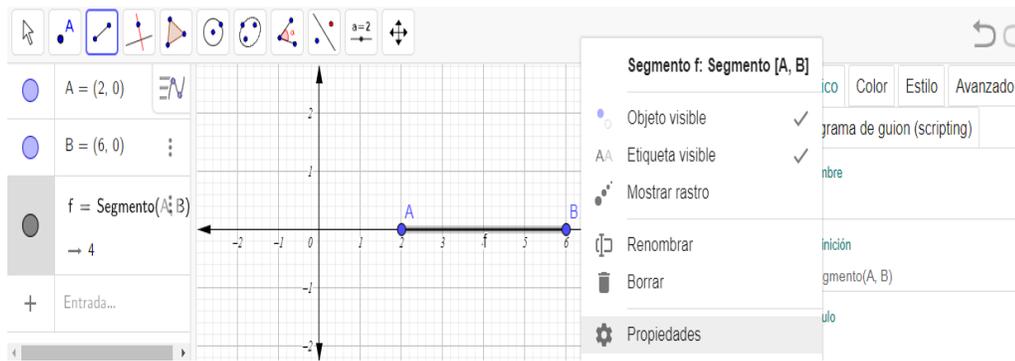
- c. Al ubicar el puntero en el ícono que se muestra en la imagen siguiente, se nos abre una nueva ventana, damos clic en la opción “Segmento”.

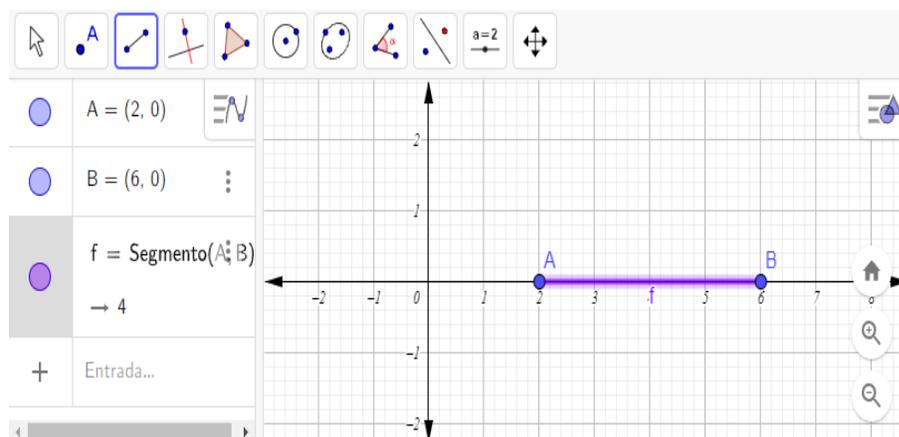


- d. Para graficar el segmento que pasa por los puntos “A” y “B”, damos clic en ambos puntos y automáticamente GeoGebra, nos trazará el segmento respectivo.



- e. Para darle mayor realce, podemos darle color y grosor, dando clic sobre el segmento trazado y seleccionando la opción “propiedades” y damos el color y grosor que deseamos.





Fase 4: Evaluación

Los estudiantes realizarán un análisis en base a los resultados obtenidos para responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo puede utilizar los datos obtenidos del problema don el Sr. Otoniel?
2. ¿En qué otras situaciones pueden usted aplicar el contenido abordado?

Esta distancia de 4 kilómetros significa que el Sr. Otoniel debe recorrer una distancia relativamente corta para proveer productos a la alcaldía. En el contexto de la comunidad, donde la colaboración entre vecinos es fundamental, conocer esta distancia les permite planificar mejor el tiempo y los recursos necesarios para el transporte. Además, esta información puede ser útil para coordinar otros aspectos logísticos, como la repartición de productos o la organización de actividades comunitarias.

El uso de GeoGebra nos ha permitido visualizar y resolver el problema de manera efectiva, confirmando que las distancia entre la Pulpería “Variedades Tinoco” y la alcaldía es de 4 kilómetros.

NOTA: Para que todos los estudiantes alcancen las competencias esperadas, una forma de retroalimentar sus conocimientos puede ser orientarles que mantengan un diario de aprendizaje donde registren lo que han aprendido y sus reflexiones sobre el tema. El docente deberá estar

pendiente que todos cumplan y al mismo tiempo estimular a quienes acaten la orientación para motivar al resto

Problema propuesto



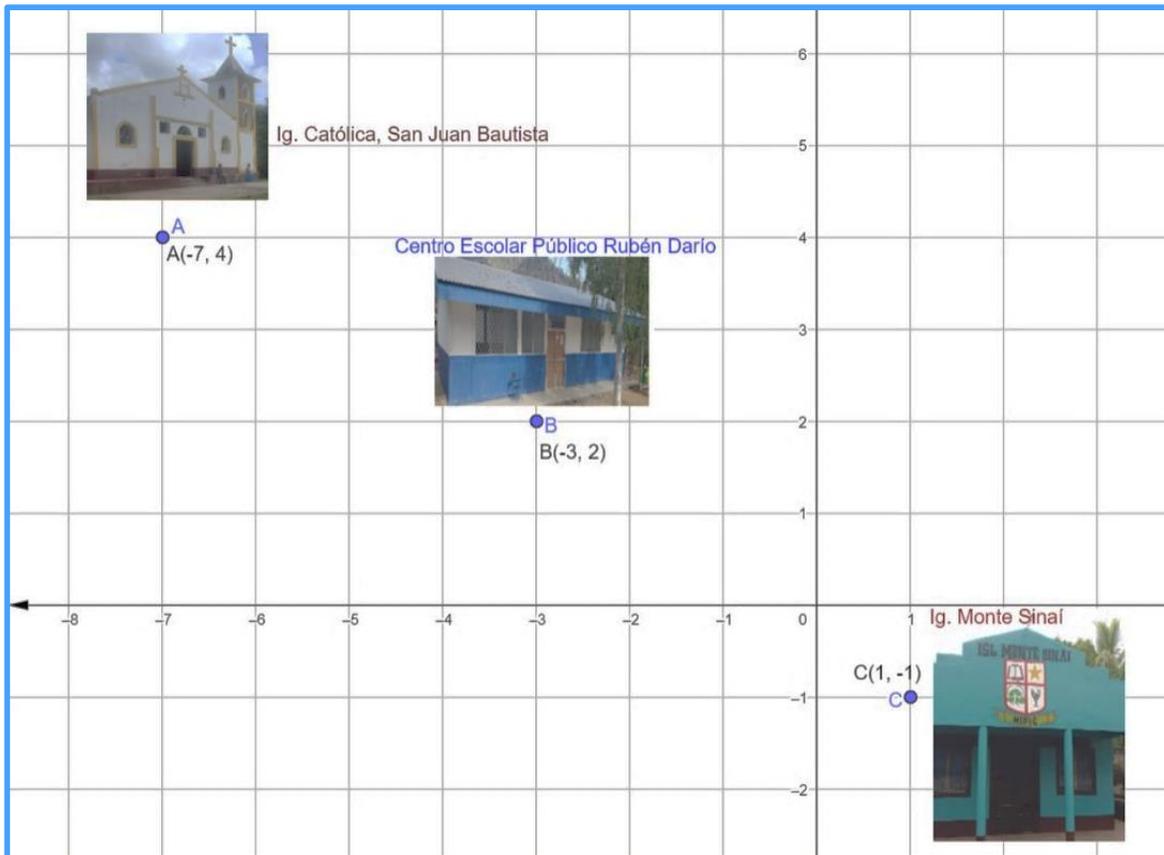
A continuación, se plantea la siguiente situación, para su solución se recomienda realizar lectura y análisis al problema, así mismo emplear las fases del ejemplo anterior para su solución.

En el municipio de San Dionisio se encuentra el sitio turístico “Rancho Paloma” ubicado en el kilómetro 2.5 y el Centro de Capacitación “Abiyala” en el kilómetro 7. Haciendo uso del software GeoGebra determine la distancia que recorre un automóvil entre estos dos puntos. Siga las instrucciones y con la ayuda del docente realice los pasos empleados en el ejemplo anterior.

Contenido: Distancia entre dos puntos del plano cartesiano

Al suponer que un sistema de coordenadas rectangulares en la vista cerca de la comunidad de Susulí Central se tiene la siguiente información: El punto **A** coincide con la Iglesia Católica San Juan Bautista, el punto **B** con el Centro Escolar Público Rubén Darío y el punto **C** con la Iglesia Monte Sinaí, como se muestra en la siguiente ilustración:

Suponiendo que cada unidad del resultado obtenido equivale 50 metros de longitud cada uno en la realidad, ¿cuál es la distancia real que hay desde la Iglesia Católica al Centro Escolar Público Rubén Darío?



Fase 1: Activación

Para activar los equipos de trabajos se enumerarán a los estudiantes del 1 al 5, (los 1 se juntarán con los 1, los 2 con los 2 y así sucesivamente), quienes activarán sus presaberes, que sean necesarios para dar solución al problema planteado. Para ello realizarán una lluvia de 5 ideas en cada equipo.

Conocimientos previos activados:

Recordemos algunos aspectos como

- a. El significado de coordenada en x y la coordenada y
- b. Gráfica de pares ordenados en el plano cartesiano.

Fase 2: Investigación

Se hará uso de algunos medios disponibles para buscar, seleccionar y organiza información necesaria que permitan resolver el problema. Una vez que logremos resolver la situación, compartiremos con el resto de equipos de trabajos, mediante un conversatorio, donde participarán todos los miembros del equipo.

Nota: Si necesita material de apoyo, puede visitar los siguientes link:

<https://www.youtube.com/watch?v=CUKGajqY68o>

<https://www.youtube.com/watch?v=zp4T3stKn94>

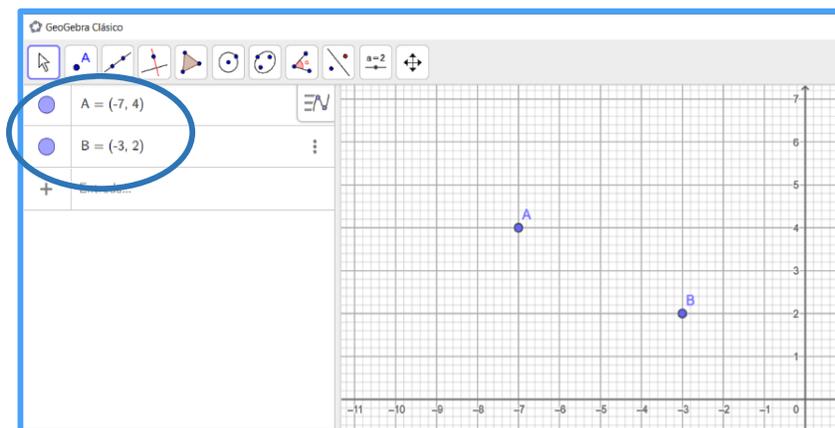
Fase 3: Resolución

En esta fase debemos identificar algunos datos que proporciona el problema, (los puntos que se deben graficar $A(-7, 4)$ que correspondería a la “Iglesia Católica” y $B(-3, 2)$, al Centro Escolar Rubén Darío, respectivamente.

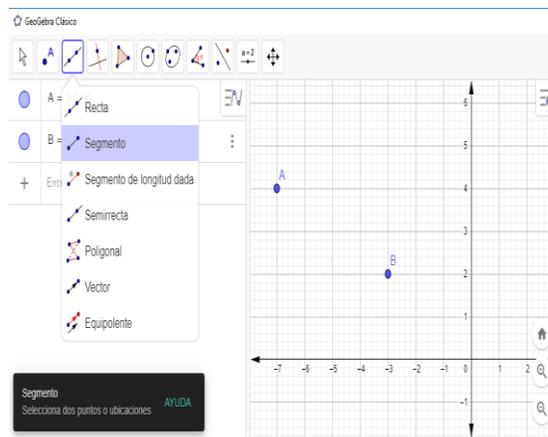
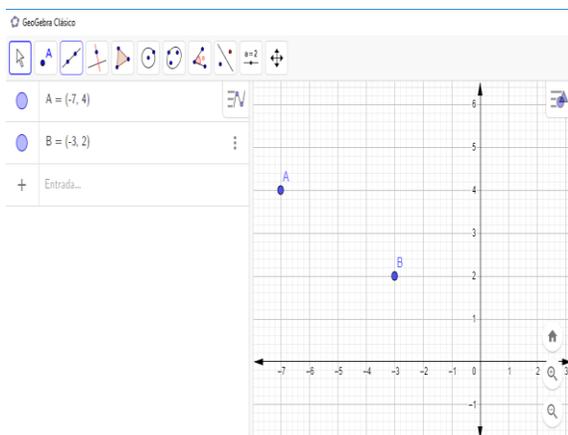
Auxiliándonos del software GeoGebra, determinaremos la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B .

Pasos en GeoGebra:

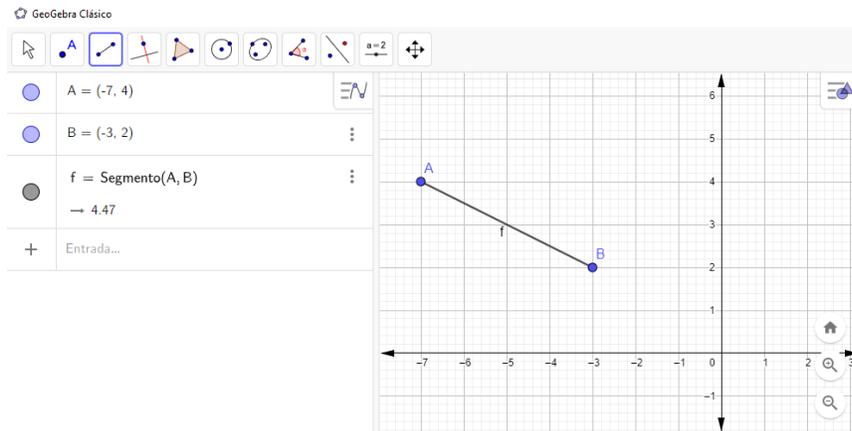
- Una vez que abramos GeoGebra, ingresamos los puntos proporcionados en el problema $A(-7, 4)$ y $B(-3, 2)$, escribiéndolos en la barra de entrada, como se muestra a continuación:



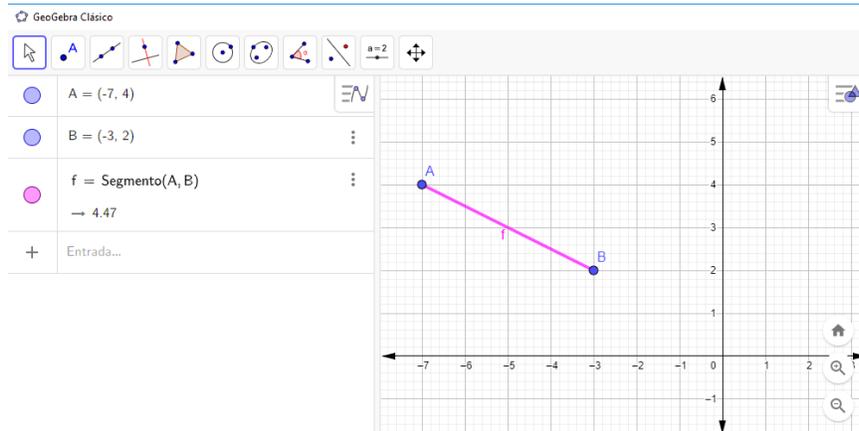
- Ahora ubicamos el puntero en el ícono que se muestra en la siguiente imagen y a continuación damos clic en “Segmento”.



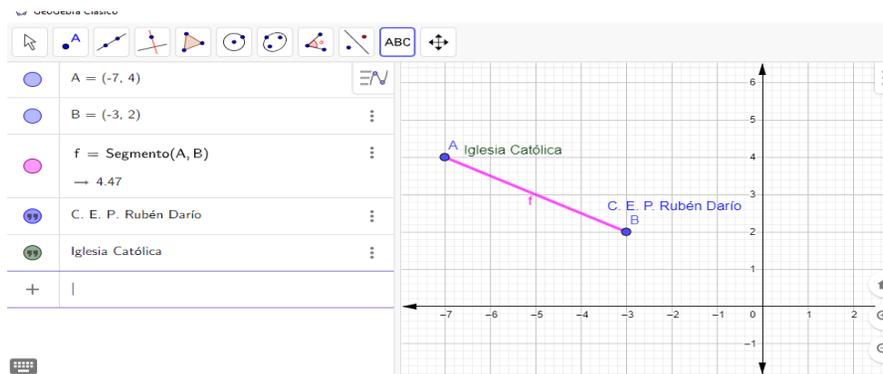
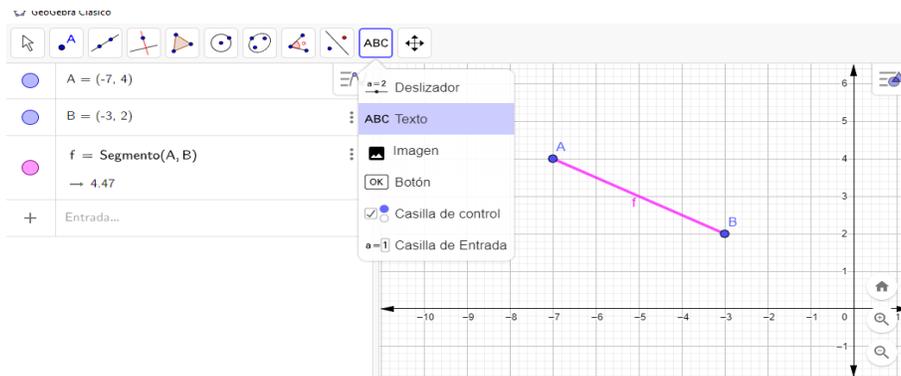
- c. El siguiente paso consiste en dar clic en los puntos que hemos introducidos en GeoGebra y automáticamente el software nos dará el trazo del segmento con su respectiva longitud.



- d. Para dar mayor vistosidad, hacemos clic derecho sobre el segmento trazado y a continuación presionamos la opción “Propiedades” y seguidamente en “Color” y seleccionamos el de nuestra preferencia.



- e. Para etiquetar los puntos dados en el problema colocamos el puntero en el ícono “ABC” y luego damos clic en “ABC Texto” como se muestra en la siguiente ilustración:



Fase 4: Evaluación

Mediante un conversatorio los estudiantes realizan una valoración sobre la aplicabilidad de la distancia entre dos puntos en situaciones reales, así como la importancia de utilizar la tecnología y estrategias innovadoras que les permite aprender de manera significativa.

Revisamos y verificamos la solución proporcionada por GeoGebra, utilizando la ecuación para asegurarnos de que es correcta.

Discutimos sobre la precisión de GeoGebra y su utilidad para resolver problemas geométricos.

Reflexionamos sobre el proceso de encontrar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos y cómo el uso de software puede facilitar este tipo de problemas.

El uso de GeoGebra nos ha permitido visualizar y resolver el problema de manera efectiva, confirmando la distancia desde la Iglesia Católica hasta el Centro Escolar Público Rubén Darío, cuyo valor es de 4.47.

Como en el problema se nos especifica que cada unidad del resultado obtenido equivale 50 metros de longitud, entonces multiplicaremos los (4.47) que nos da GeoGebra por los 50 metros y obtenemos una distancia real de $(4.47)(50) = 223.5$ metros.

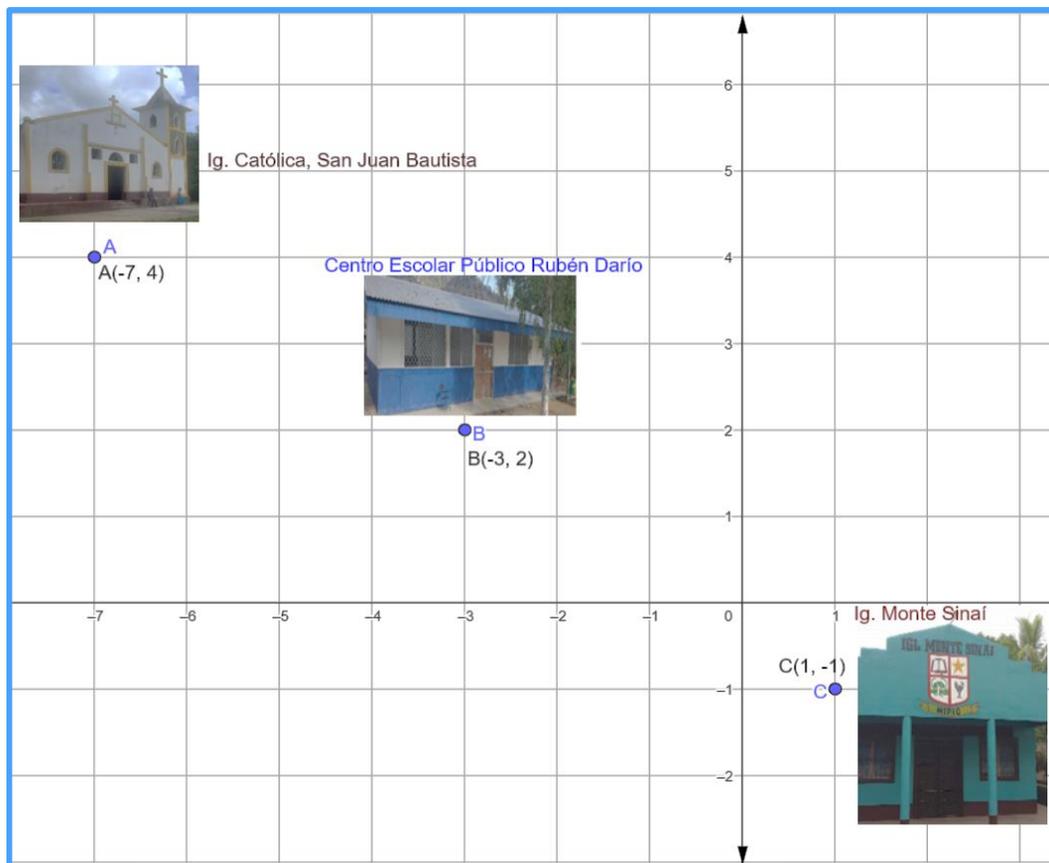
Por lo tanto, la distancia real que hay desde la Iglesia Católica al Centro Escolar Público Rubén Darío es de 223.5 metros.

NOTA: Con el fin ampliar los aprendizajes de los estudiantes el docente puede inculcar la importancia del autoestudio, motivando a los estudiantes a ser más investigativos. Una forma podría ser orientarles que averigüen sobre el uso de otras aplicaciones (no solo GeoGebra) y que presenten un informe de dicha búsqueda.

Problema propuesto



A continuación, se te propone encontrar la distancia real que separa a la Iglesia Católica de la Iglesia Monte Sinaí, con la información brindada en la lámina del problema planteado, donde debes emplear los pasos explicados anteriormente.



Contenido: Coordenadas del punto medio de un segmento



Se sabe que el Preescolar “Rafaela Herrera” del Centro Escolar Público Rubén Darío se encuentra en el extremo $A(1, 3)$ y la cancha en el extremo $B(8, 1)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento \overline{AB} .

Fase 1: Activación:

Para dar solución al problema planteado, se formarán equipos de trabajo, mediante la dinámica “**Tarjetas de Colores**”. Se entregará a cada estudiante una tarjeta de un color específico. Los estudiantes deben formar grupos con otros que tengan la misma tarjeta de color. Este método es rápido y aleatorio, lo que fomenta la diversidad de grupos. A continuación, mediante una lluvia de 5 ideas se activarán los conocimientos previos

Conocimientos previos activados:

Recordamos:

- a. Cómo graficar segmentos a través de pares ordenados en el plano cartesiano.

Fase 2: Investigación

Para el desarrollo de esta etapa se hará uso de medios digitales o físicos con el fin de adquirir información que pueda ser útil para resolver el problema. Una vez que se haya resuelto el problema, cada equipo compartirá con el resto, presentando sus resultados en PowerPoint.

Para tener mayor seguridad, se recomienda hacer uso del libro de texto de 11º, página 75, cuyo enlace de acceso es el siguiente:

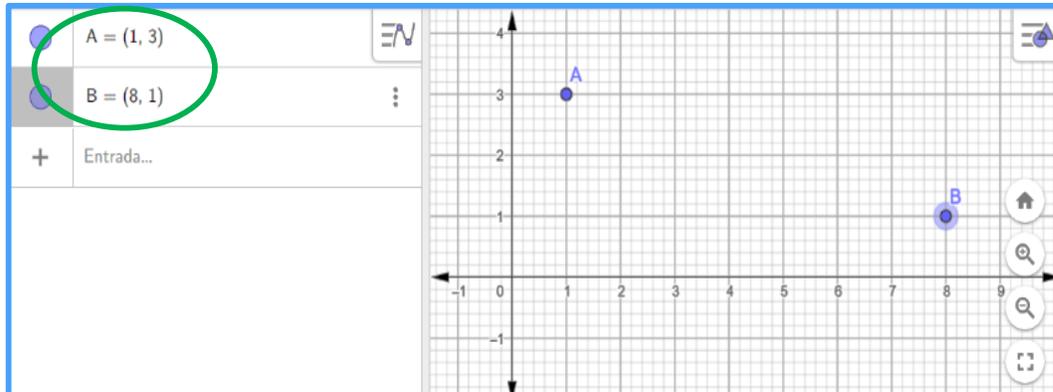
https://nicaraguaeduca.mined.gob.ni/wp-content/uploads/2020/03/Lmatematicas11mo_unlocked.pdf

Fase 3: Resolución

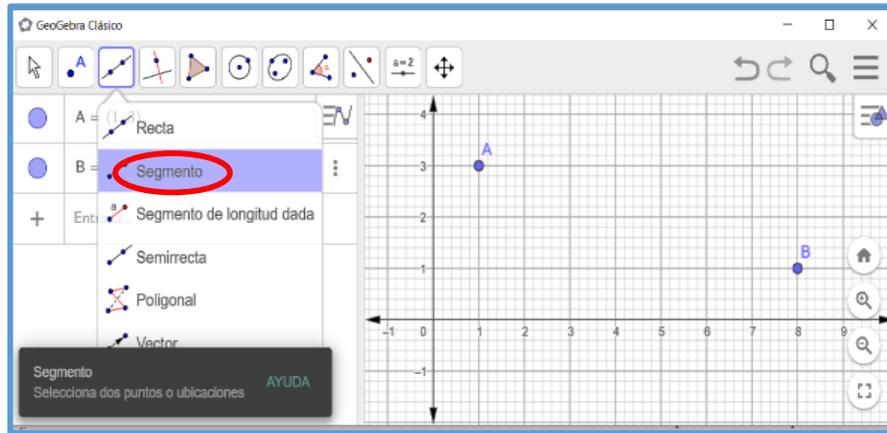
En el problema dado podemos observar que nos proporciona los puntos que se deben graficar, los cuales son $A(1, 3)$ que correspondería al preescolar “Rafael Herrera” y $B(8, 1)$, a la cancha del Centro Escolar Rubén Darío, respectivamente.

Con la utilización de GeoGebra vamos a calcular la distancia entre los puntos A y B , siguiendo los pasos descritos a continuación:

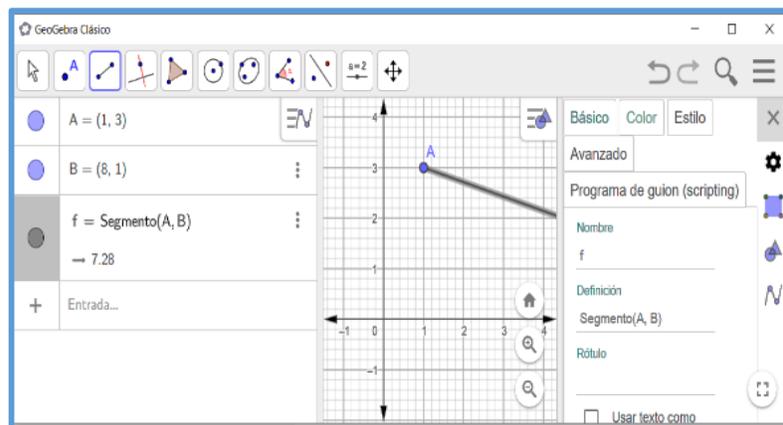
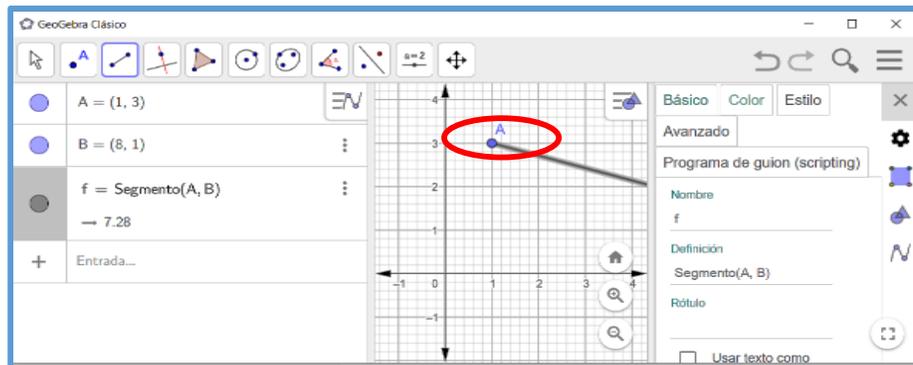
- a. En “**Entrada**” del software introducimos los puntos dados en el problema:

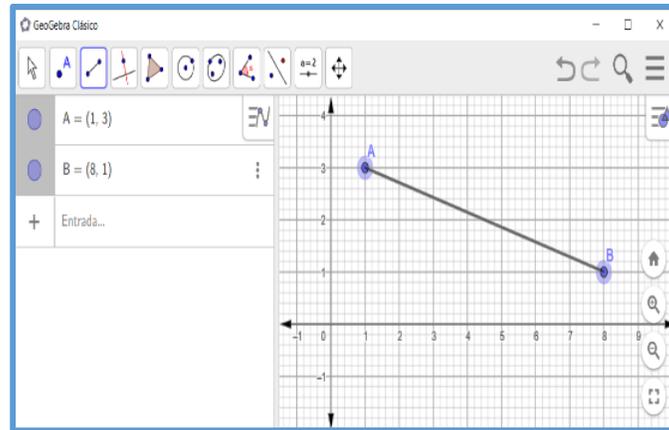


b. Ubicamos el puntero en la opción “Segmento”.

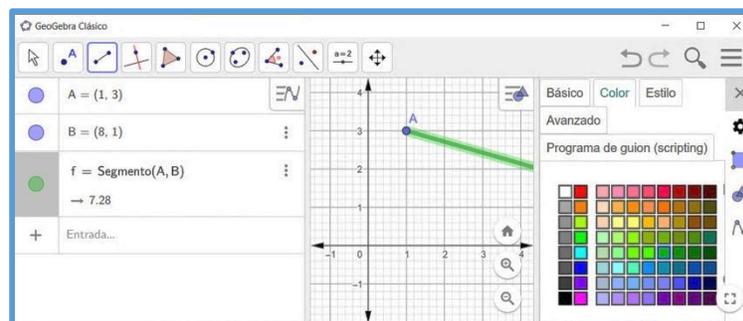
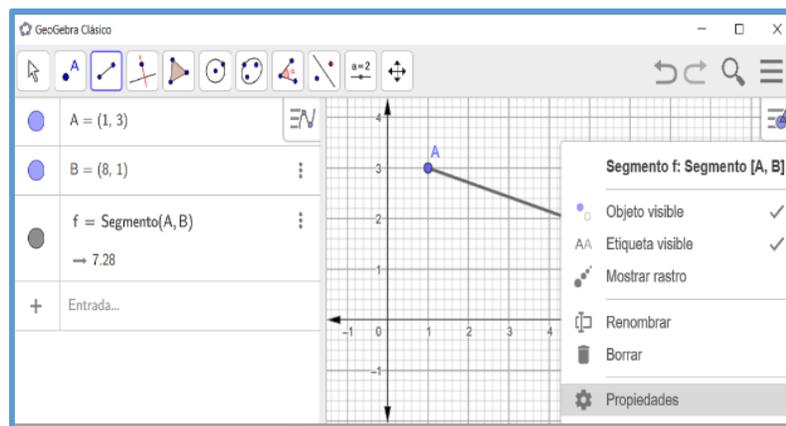


c. Luego clic derecho en el punto “A” y punto “B”.

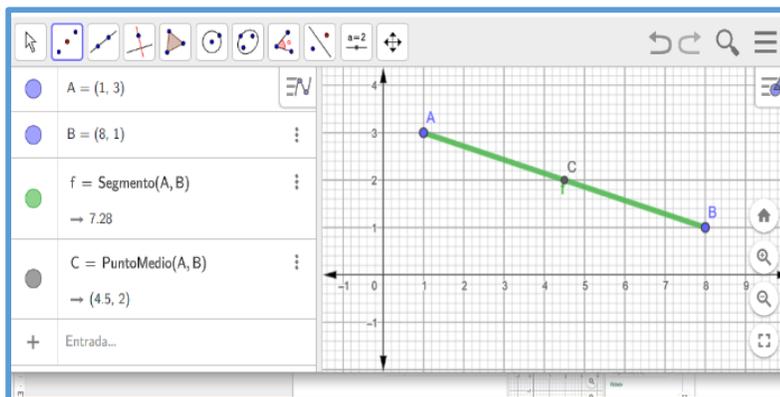
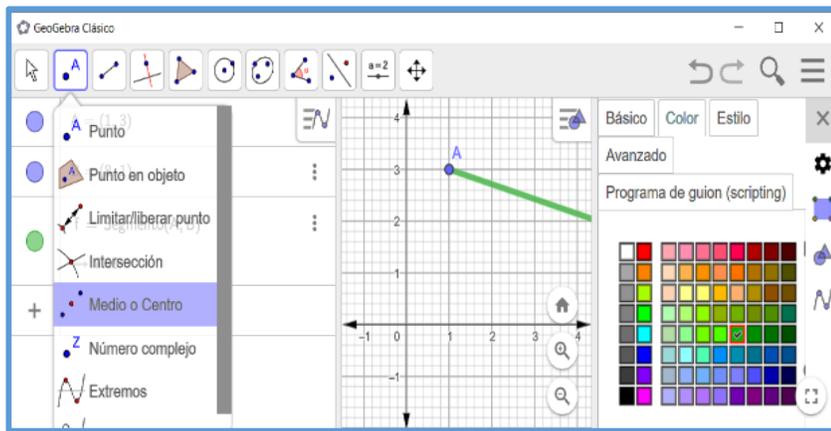
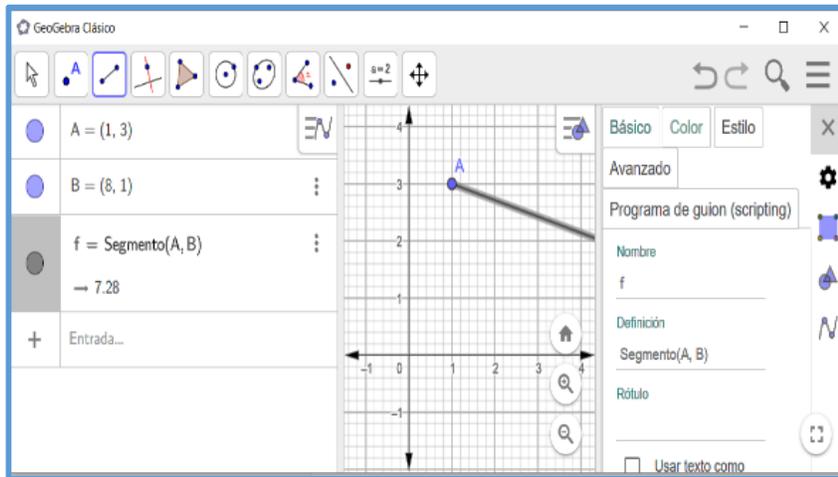




- d. Damos clic derecho sobre el software y ubicamos el puntero en la opción “Propiedades” y posteriormente en la opción “Color” y “Estilo” le damos el color que queremos elegir.



- e. Nos ubicamos en la opción “Medio o Centro” y luego clic en el punto “A” y “B” y automáticamente obtenemos las coordenadas en el punto “C”, las cuales son $C(4.5, 2)$.



Fase 4: Evaluación

En esta etapa se propone realizar una **Autoevaluación y Reflexión Escrita**:

Se les pide a los estudiantes que escriban un breve informe reflexionando sobre cómo resolvieron el problema, qué pasos siguieron y qué dificultades encontraron. Esto les permitirá autoevaluar su comprensión del tema abordado.

Revisamos y verificamos la solución proporcionada por GeoGebra para asegurarnos de que es correcta, haciendo uso de la ecuación de las coordenadas del punto medio, y los puntos dados $A(1, 3)$ y $B(8, 1)$. cuya expresión es:

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{1 + 8}{2}, \frac{3 + 1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{4}{2}\right)$$

$$P(4.5, 2)$$

Vemos que sí coinciden las respuestas, por lo tanto, el uso de GeoGebra nos ha permitido visualizar y resolver el problema de manera efectiva, confirmando las coordenadas del punto medio de los puntos $A(1, 3)$ y $B(8, 1)$ correspondiente al preescolar “Rafaela Herrera” y la cancha respectivamente es $(4.5, 2)$.

NOTA: El o la docente llevará a cabo una revisión del proceso realizado, aclarando dudas o inquietudes de los estudiantes, sugiriendo mejoras y reconociendo los buenos resultados obtenidos por cada grupo de trabajo". Se pueden realizar juegos educativos, por ejemplo, “Quiz Competitivo”. Esta consiste en dividir a los estudiantes en equipos y realizar un concurso de preguntas sobre el tema. Esto permitirá determinar en qué aspectos se debe mejorar.

Problemas propuestos

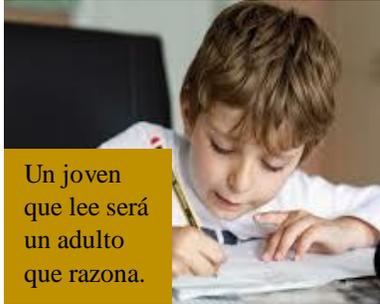


Con el propósito de fortalecer los conocimientos y desarrollar el pensamiento lógico, de los estudiantes, se plantean los siguientes problemas, para lo cual se sugiere seguir los pasos explicados en el ejemplo anterior, así mismo se recomienda realizar un análisis e interpretación de los resultados obtenidos en la solución de cada situación.

1. Se sabe que la biblioteca del Centro Escolar Público Rubén Darío se encuentra en el extremo $A(2, 2)$ y la cancha en el extremo $B(8, 1)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento \overline{AB} .
2. Se sabe que el aula TIC del Centro Escolar Público Rubén Darío se encuentra en el extremo $A(3, 2)$ y la cancha en el extremo $B(8, 1)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento \overline{AB} .

V. Sección 2: La recta

Contenido: Ecuación de la recta: pendiente y el intercepto con el eje y



La señora Juana cuenta con un servicio de energía que cuesta 5 dólares el mes, quien la utiliza únicamente para alumbrar. Si ella instala otros equipos que consumen más energía deberá pagar 1 dólar por cada equipo instalado.

a). Formule un modelo lineal matemático para el pago por mes “y” por “x” equipos

b). Encuentra la pendiente y el intercepto con el eje y.

c) Trace la gráfica de la ecuación dada utilizando GeoGebra.

Fase 1: Activación

Para el desarrollo de esta etapa, formamos equipos de trabajo de 5 integrantes, esto se realizará a través de la dinámica “Lotería de números”. Para esto se necesitar 1 bolas de lotería o papelitos numerado; cada estudiante toma un número al azar. Luego se agrupan con otros que tengan números consecutivos o aleatorios, según la dinámica deseada. A continuación, ponemos en práctica la comunicación e intercambio de ideas y/o conocimientos previos.

Conocimientos previos activados:

Recordamos:

- ¿Cómo graficar una recta en el plano cartesiano?
- La ecuación de la recta ($y = mx + b$).

El objetivo consiste en:

Formular un modelo matemático lineal para el costo total por mes en función del número de equipos adicionales.

Encontrar la pendiente y el intercepto con el eje y de este modelo.

Graficar la ecuación en GeoGebra.

Fase 2: Investigación

En esta etapa es importante hacer uso de algunas fuentes que puedan dar pistas de solución al problema, por eso se te proporcionan algunos links de acceso, donde puedes entrar a ellos y documentarte mejor, luego mediante la dinámica “**Panel de Expertos**”, se darán a conocer los resultados de tu trabajo.

Puedes utilizar el libro del programa actual del Ministerio de Educación Nicaragüense, página 78, cuyo enlace de acceso es:

https://nicaraguaeduca.mined.gob.ni/wp-content/uploads/2020/03/Lmatematicas11mo_unlocked.pdf

Fase 3: Resolución

Para llevar a cabo esta fase, debemos leer y analizar el problema las veces que sean necesarias, así mismo extraer los datos que en él se proporcionan.

Para formular el modelo Matemático vamos a utilizar la ecuación de la recta en su forma ordinaria, cuya expresión es $y = mx + b$. También asignaremos una variable a cada dato desconocido, suponiendo que " x " el número de equipos adicionales instalados. El costo total mensual " y " está compuesto por el costo fijo del servicio y el costo variable por los equipos adicionales. El costo fijo es \$5, y el costo adicional es \$1 por cada equipo.

a. Entonces, el costo total y se puede encontrar sustituyendo los valores en la expresión:

$$y = 5 + 1 \cdot x$$

$$y = 5 + x$$

$$y = x + 5$$

b. Pendiente e Intercepto

En la ecuación $y = x + 5$ la forma ordinaria de una ecuación lineal es $y = mx + b$

Donde m es la pendiente y b es el intercepto con el eje y .

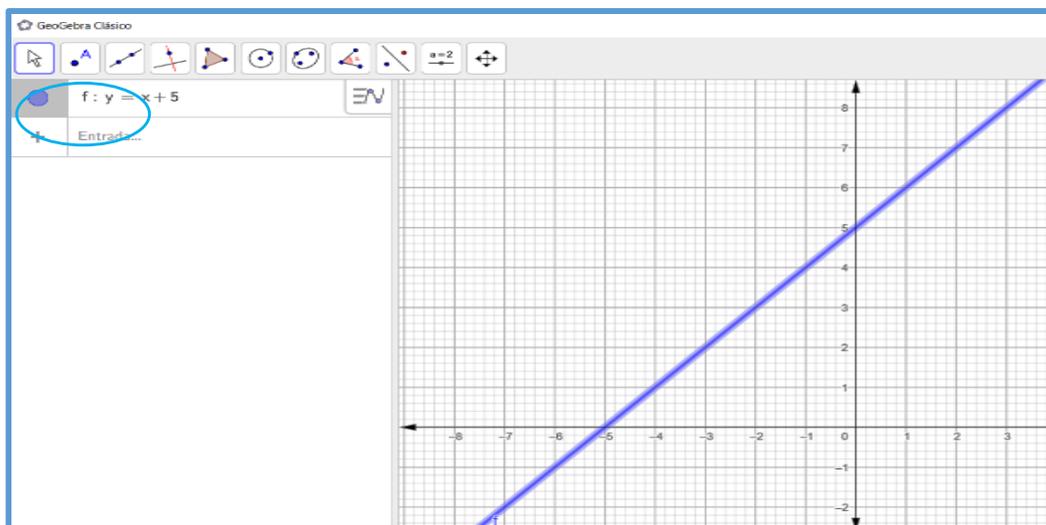
Comparando:

La pendiente m es 1 (el coeficiente de x).

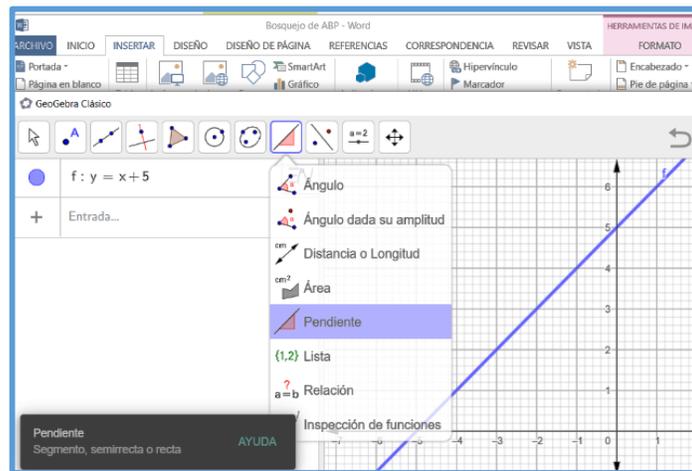
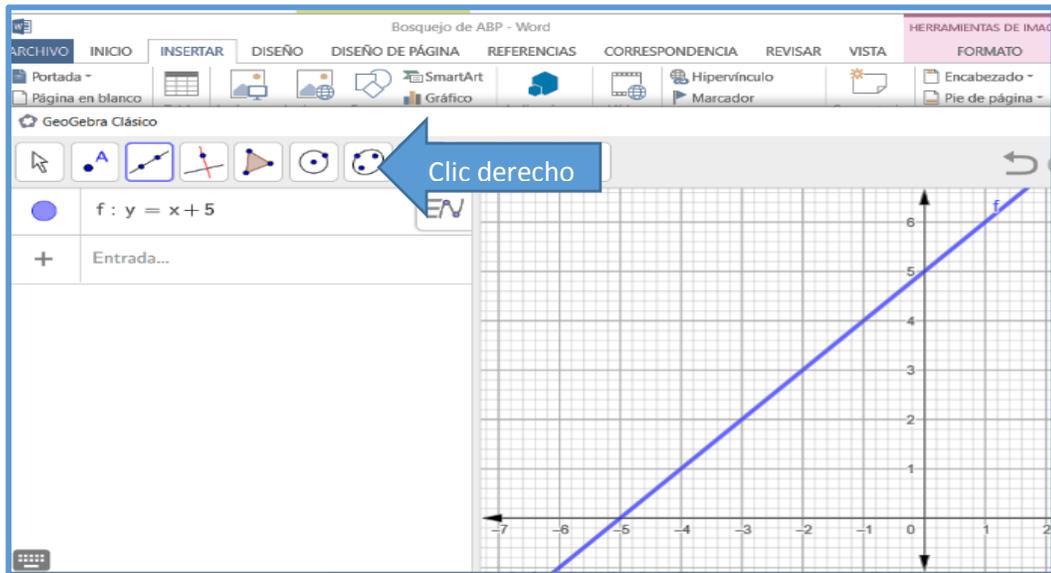
El intercepto con el eje y es 5 (cuando $x=0$).

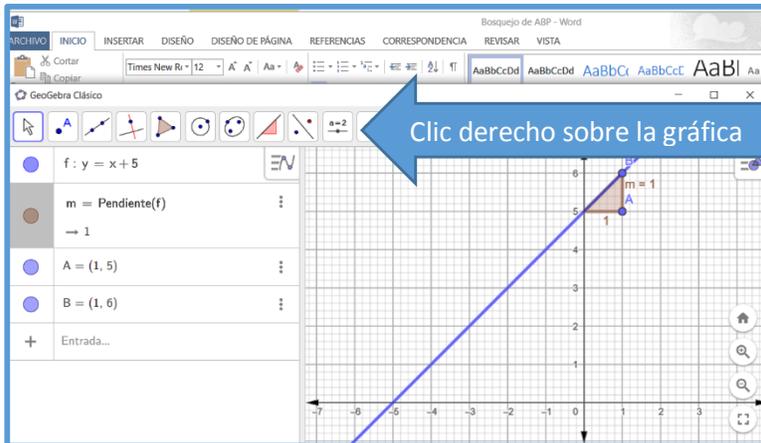
Ahora, vamos a auxiliarnos de GeoGebra para trazar la gráfica del modelo encontrado guiándonos con los siguientes pasos

a. Al abrir el programa seleccionamos, en el ícono de “**Entrada**”, vamos a escribir la expresión obtenida anteriormente, ($y = x + 5$).



- b. Al ubicar el puntero en el ícono que se muestra a continuación y presionar la opción “Pendiente”, obtendremos dicha gráfica.





Fase 4: Evaluación

¿El modelo es correcto?

Verificar si la ecuación $y = x + 5$ satisface las condiciones dadas en el problema. Se puede observar que la gráfica en GeoGebra nos muestra una línea recta que corta el eje y en (0,5) y tiene una pendiente de 1, lo que indica que por cada equipo adicional, el costo mensual aumenta en \$1.

¿Las respuestas son coherentes?

La pendiente de 1 y el intercepto de 5 son correctos según la ecuación lineal dada. La gráfica debe corroborar estos valores visualmente.

¿Cómo puedes usar esta información?

Este modelo permite calcular el costo total mensual para cualquier número de equipos adicionales y entender cómo cambia el costo con el número de equipos.

Por ejemplo, para 4 equipos adicionales que se contraten, el costo de pago será:

$$y = 4 + 5$$

$$y = 9$$

El resultado nos indica que se pagarán 9 dólares en total, si se instalan 4 equipos adicionales.

NOTA: El o la docente debe estar consciente de que no todos aprendemos al mismo ritmo, por ello debe promover el fortalecimiento de los conocimientos adquiridos por los estudiantes, puede ser a través de la atención directa a quienes tienen mayor dificultad, asignación de trabajos en casa, entre otros, recordando que la práctica continua implica el desarrollo de habilidades para resolver problemas con más efectividad.

Problema propuesto

En el siguiente apartado se plantea una situación problemática real, para resolverla, se propone hacer uso de las fases del ABP, desarrolladas en el ejemplo anterior.

La señora Julia cuenta con un servicio de agua potable que cuesta 5 dólares el mes, quien la utiliza únicamente para los quehaceres del hogar. Si ella ocupa más agua de lo normal para aguar su ganado deberá pagar 1.5 dólares por mes

- Formule un modelo lineal matemático para el pago por mes “y” por “x” equipos
- Encuentra la pendiente y el intercepto con el eje y.
- Trace la gráfica de la ecuación dada.



Contenido: Ecuación punto–pendiente de la recta



La ferretería “Alex”, ubicada en la comunidad de Susulí Central vendió al inicio del segundo trimestre 7999 artículos ferreteros, cerrando dicho trimestre con la venta de 6130 artículos.

- a. Asumiendo que las ventas del trimestre mantuvieron siempre el mismo ritmo, ¿cuál es la tasa promedio de variación?
- b. Realice una interpretación del valor de la tasa de variación en las ventas.
- c. Escriba un modelo matemático para hallar los artículos “y” vendidos cada día x del segundo trimestre y realice su gráfica en GeoGebra para una mejor interpretación del resultado obtenido.

Fase 1: Activación

Esta etapa es fundamental, ya que implica en primera instancia la conformación de equipos de trabajos para reunir en conjunto ideas que puedan orientar la solución al problema. Para esta fase se formarán a los estudiantes en equipos de 5 y serán seleccionados quienes sacarán de una caja un papelito, los que estarán enumerados del 1 al 5, luego se juntarán quienes hayan seleccionado el mismo dígito.

A continuación, cada integrante dará una idea en su equipo, cuyo fin esté referido a posibles soluciones de la situación planteada. Este proceso es fundamental, ya que el estudiante siempre tendrá algo que aportar.

Conocimientos previos activados:

Algunos conocimientos previos que seguramente serán útiles serán:

- a. La expresión de la recta puede ser en su forma ordinaria $y = mx + b$.
- b. Sustitución de datos.

Fase 2: Investigación

A continuación, se sugiere la visita a los siguientes links que contienen ejemplos resueltos relacionadas con la situación planteada y así se facilite la solución. Posteriormente se orienta la presentación del trabajo realizado mediante un **video Explicativo**, para el cual los miembros de cada equipo deben grabarse donde expliquen el problema y la solución de manera clara y creativa. Luego, muéstralo a la clase.

Con el propósito de brindar un material de apoyo, en caso de que se amerite, se facilita el siguiente enlace:

<https://www.youtube.com/watch?v=ZEu4EiCF51Q>

<https://www.geogebra.org/m/KbmxXyBb>

Fase 3: Resolución

Vamos a hacer uso de los datos que se nos da en el problema, por ejemplo:

Empleando (1, 7999), (90, 6130). → El 1 del primer punto es porque al inicio del trimestre, o sea el día 1 se tenían 7999 artículos y el punto (90, 6130) porque al finalizar los tres meses (90 días, asumiendo que cada mes tiene 30 días) se vendieron 6130 artículos.

Se necesita calcular el valor de la pendiente “m”, cuya ecuación es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ donde } x_1 = 1, y_1 = 7999, x_2 = 90, y_2 = 6130$$

Sustituimos los datos anteriores en la ecuación de la pendiente, dado dos puntos de la recta, con sigue a continuación:

$$\Rightarrow m = \frac{6130-7999}{90-1}, \Rightarrow m = \frac{-1869}{89}, \Rightarrow m = -21$$

b. Realice una interpretación del valor de la tasa de variación en las ventas.

Las ventas de los artículos disminuyeron a razón de 21 artículos por día. (se dice que la venta de artículos disminuyó, porque la pendiente encontrada es negativa).

c. Escriba un modelo matemático para para hallar los artículos “y” vendidos cada día x del segundo trimestre y realice su gráfica en GeoGebra para una mejor interpretación del resultado obtenido.

Se sabe que la ecuación punto – pendiente de la recta es $y - y_1 = m(x - x_1)$

En el problema dado se sabe que $x_1 = 1$, $y_1 = 7999$, y $m = -21$

Sustituyendo los datos en la ecuación punto-pendiente de la recta, se tiene:

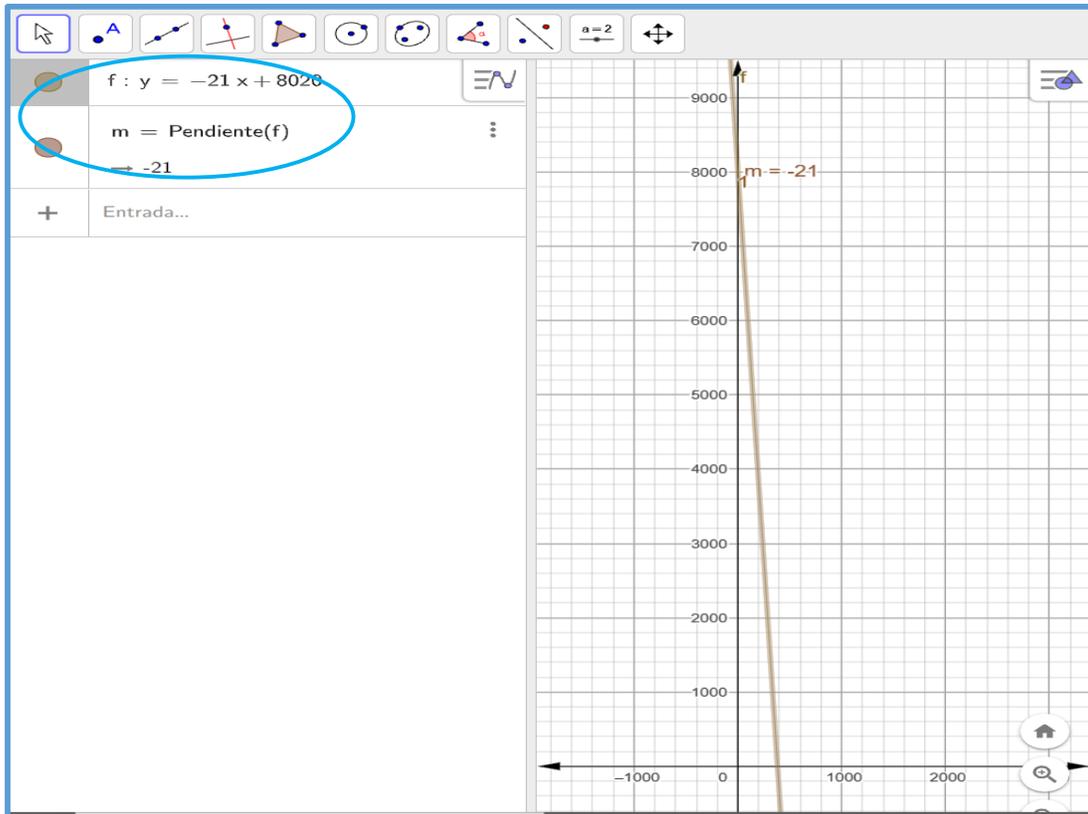
$$y - 7999 = -21(x - 1), \Rightarrow y - 7999 = -21x + 21$$

$$y = -21x - 21 + 7999,$$

$$\Rightarrow y = -21x + 8020$$

Ahora es momento de que hagamos uso de GeoGebra para representar la situación planteada.

Vamos a escribir la ecuación $y = -21x + 8020$ y damos “**Enter**”, así mimos programamos el software de 1000 en 1000 para lograr visualizar la gráfica.



Fase 4: Evaluación

Revisamos y verificamos la solución proporcionada por GeoGebra para asegurarnos de que es correcta.

Observamos la recta en la vista gráfica de GeoGebra que corresponde a la ecuación

$$y = -21x + 8020, \text{ expresión que habíamos encontrado anteriormente.}$$

Vamos a verificar el modelo con unos pocos puntos:

Para $x = 1$

$$y = -21(1) + 8020$$

$$y = -21 + 8020 \Rightarrow y = 7999$$

Para $x = 90$

$$y = -21(90) + 8020$$

$$y = -1890 + 8020$$

$$y = 6130$$

Discutimos sobre la precisión de GeoGebra y su utilidad para resolver problemas geométricos.

Reflexionamos: ¿qué significa que la pendiente sea negativa?

Como $m = -21$ significa que la tasa promedio de variación es de 21 córdobas por cada artículo. Consideramos otras aplicaciones de GeoGebra para problemas similares en Matemática y otras disciplinas.

NOTA: Es necesario que los estudiantes queden claros, por eso habrá un espacio don ellos expresarán dudas frente al o la docente, quien debe garantizar la aclaración a los planteamientos hecho por los educandos. Para este proceso se pueden implementar dinámicas, una de estas es **Bingo de Conceptos**, su desarrollo consiste en crear tarjetas de bingo con términos clave y definiciones del tema. Los estudiantes deben emparejarlas correctamente. Quien no pueda completar, significa que aún no ha adquirido los conocimientos esperados.

Problema propuesto

Para profundizar sobre los conocimientos acerca de la aplicación de la “ecuación punto–pendiente de la recta”, se te presenta la siguiente situación para que seas capaz de resolverla, empleando las fases del ABP.

1. La avenida del Bulevar de San Dionisio necesita nuevas farolas a lo largo de su tramo recto. Las farolas se instalarán siguiendo una línea recta que pasa por los puntos $C(1, 2)$ y $D(6, 12)$. Determinar la ecuación de la recta para la instalación de las farolas.
3. Don Juan es liniero y necesita trazar la ruta de su vehículo que se mueve desde el punto A al punto B en una de las comunidades. El punto A se encuentra en la coordenada $(2, 5)$ y el punto B en $(8, 11)$. Él quiere saber la ecuación de la ruta de su vehículo para ajustar sus sistemas de viaje.

Contenido: Ecuación general de la recta



La señora María cuenta con un servicio básico de televisión por cable que cuesta 450 córdobas el mes el cual dispone de 45 canales. Ella desea contratar un servicio plus adicional, el cual amplía canales con costo mensual de 20 córdobas por cada canal solicitado.

- a) Formule un modelo lineal matemático para el pago por mes “y” por “x” canales y exprese el resultado en la forma $Ax + By + C = 0$. Realice su gráfica en GeoGebra para una mejor interpretación del resultado obtenido.

Fase 1: Activación

Con el propósito de hacer una clase más motivacional y divertida, se realizará la conformación de equipos de trabajos de 5 integrantes, desarrollando la dinámica “animalitos”, donde se asignará a cada participante el nombre de un animal y se les pedirá que hagan el sonido del animal para encontrar a su equipo. Esta dinámica puede ser muy divertida y romper el hielo rápidamente. Esto ayudará a romper el hielo y establece confianza entre compañeros de clases.

Una vez que se han conformado los equipos de trabajos, serán capaces de dar cada quien aportes o ideas que conlleven a una vía de solución de la situación planteada.

Conocimientos previos activados:

Se considera importante recordar algunos aspectos para dar solución al problema, tales como:

- La importancia de asignar determinada variable al dato desconocido
- Habilidades para despejar una ecuación, (manejar las propiedades).

Fase 2: Investigación

Esta fase es vital, porque el estudiante, empieza a asumir el protagonismo en la búsqueda, recopilación, selección y organización de información que les ayudará a encontrar una solución satisfactoria al problema. Mediante una “**Lluvia de Ideas**” los estudiantes propondrán y discutirán diferentes soluciones antes de presentar la solución final.

En caso de que se considere necesario, proporcionan los siguientes links, que contienen ejemplos similares al problema planteado:

<https://www.youtube.com/watch?v=7TmFncC9cmw>

Fase 3: Resolución

Vamos a asignar una variable a cada dato desconocido y realizar algunas sustituciones para determinar el modelo matemático que representa la situación propuesta, para ello supondremos que:

x = el pago por cada equipo instalado

y = renta fija que se paga

Pago mensual = renta fija + costo x número de equipo instalado

La ecuación de la recta es

$$y = mx + b$$

De acuerdo con el problema:

$$m = 20 \text{ (pendiente)} \quad y \quad b = 45$$

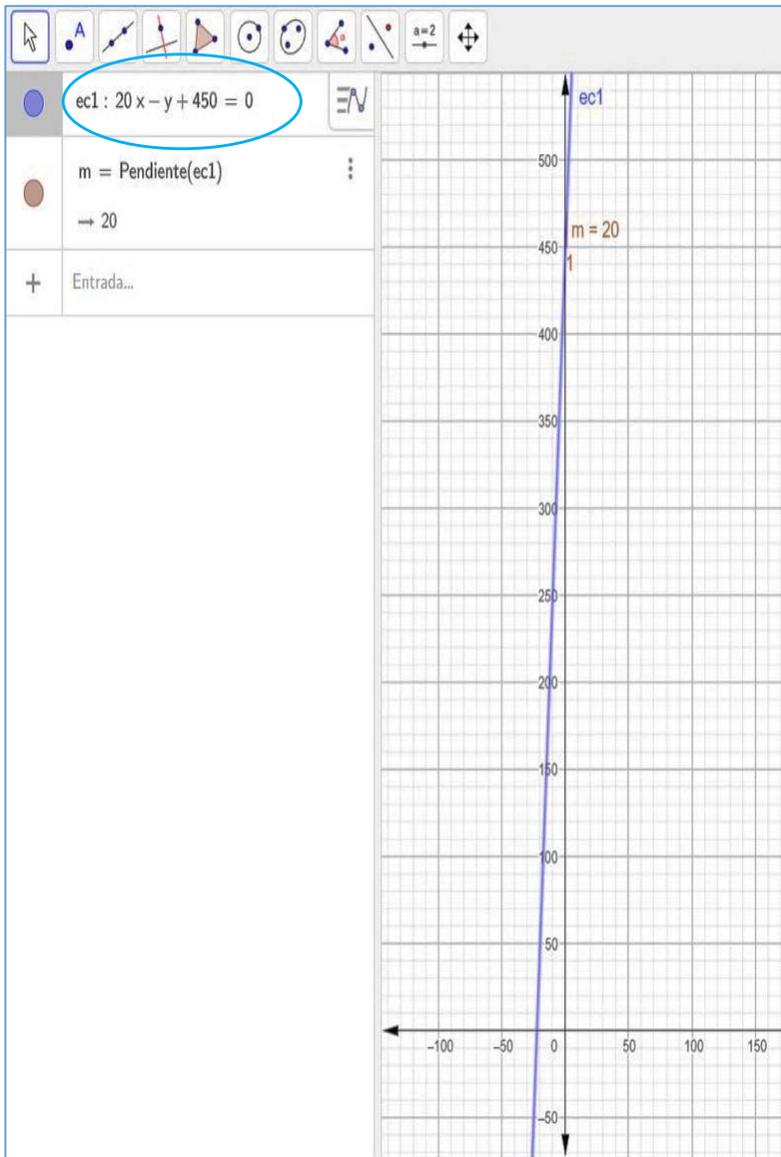
Sustituimos el valor de la pendiente en la ecuación ordinaria o ecuación pendiente-ordenada de la recta.

$y = 450 + 20x$ modelo matemático para el pago por mes de “y” por “x” canales.

$20x - y + 450 = 0$ (Forma general de la ecuación).

Como una herramienta de apoyo didáctico, vamos a hacer uso de GeoGebra para representar el modelo matemático encontrado e interpretar de manera más efectiva la solución del problema.

A continuación, nos dirigimos a “**Entrada**” en el programa y escribimos la ecuación $20x - y + 450 = 0$, programando previamente GeoGebra de 50 en 50 para lograr visualizar la gráfica.



Fase 4: Evaluación

Objetivo: Revisar y reflexionar sobre la solución obtenida.

1. Comprobar diferentes escenarios:

Por ejemplo, si la señora María contrata 5 canales adicionales:

$$y = 450 + 20(5)$$

$$y = 450 + 100$$

$$y = 550 \text{ Córdobas}$$

Si contrata 10 canales adicionales:

$$y = 450 + 20(10)$$

$$y = 450 + 200$$

$$y = 650 \text{ córdobas.}$$

Discutimos sobre cómo utilizar la ecuación lineal para calcular costos.

Reflexionamos sobre el uso de GeoGebra para visualizar cómo varía el costo total según el número de canales adicionales.

NOTA: Una vez finalizado el proceso de implementación del ABP, se realizará una retroalimentación a cargo del docente, en aras de fortalecer los aprendizajes adquiridos por los estudiantes.

Problema propuesto

En este apartado se te presenta el siguiente problema de aplicabilidad la ecuación de la recta, el debes resolver aplicando el ABP, específicamente sus cuatro fases.



de

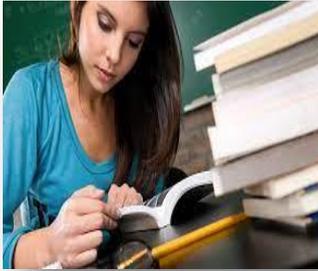
- a. Interprete el significado que tiene en este caso la pendiente de la recta.

Como ($m = 20$), significa en este caso el costo en córdobas por cada canal adicional que se está cobrando.

Recuerde que la pendiente es el coeficiente numérico que acompaña a la variable x

- b. Utilice este modelo para calcular el pago mensual si tiene acceso a 48 canales. Utilice los pasos abordados en el problema anterior.

Contenido: Ecuaciones de rectas paralelas a los ejes coordenados



Martha y Luis están planeando una fiesta de cumpleaños en un parque rectangular. El parque tiene un área de juegos ubicada en un lugar específico y ellos quieren delimitar áreas para actividades específicas, tales como juegos, comida, y descanso. María quiere asegurarse de que las delimitaciones sean claras y fáciles de entender, por lo que decide usar ecuaciones de rectas paralelas a los ejes coordenados para delimitar estas áreas.

Martha tiene las siguientes coordenadas para las esquinas del área de juegos en el parque: (3, 4), (3, 8), (7, 4) y (7, 8). Ella quiere:

1. Delimitar el área de juegos con rectas paralelas a los ejes coordenados.
2. Encontrar las ecuaciones de estas rectas.

Fase 1: Activación

Para dar solución al problema planteado, nos organizamos en equipo de trabajo de 5 integrantes, activando nuestros presaberes que poseemos, que nos pueden aportar alguna idea válida para esta situación. Para ello hacemos una lluvia de ideas entre los integrantes del equipo de trabajo.

Conocimientos previos activados

Recordamos:

Concepto de Rectas paralelas

Puntos y Coordenadas.

Plano Cartesiano

Fase 2: Investigación

Este proceso implica que los estudiantes, sean capaces de realizar una búsqueda de información físicos o digitales, para posteriormente seleccionar y organizar el material que ellos consideren necesario para la solución al problema. Al finalizar el proceso de solución, a través de la “**Mesa Redonda**” los estudiantes organizados, discuten el problema y la solución desde diferentes perspectivas.

Si se presentan algunas dificultades, se sugiere el siguiente material disponible en link que a continuación se proporciona:

<https://www.youtube.com/watch?v=xQ47KSJjIW0>

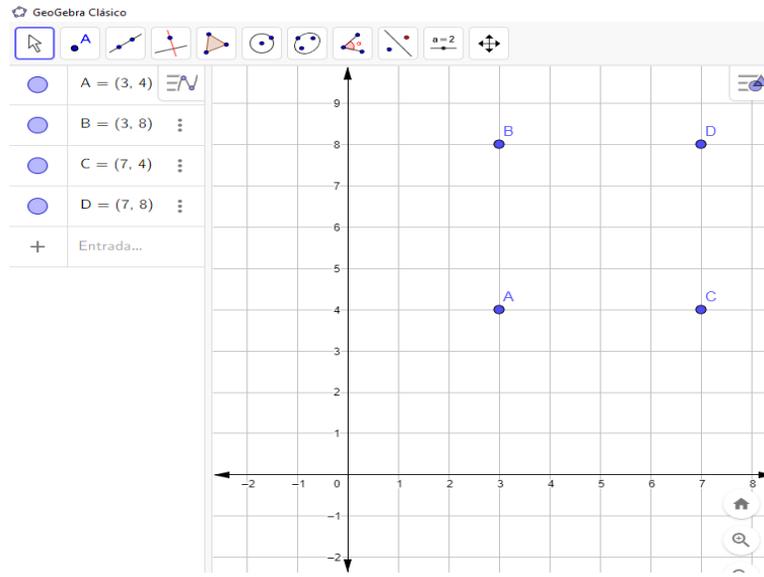
Fase 3: Resolución

A continuación, identificamos algunos datos que nos proporciona el problema, tales como las siguientes coordenadas para las esquinas del área de juegos en el parque:

- A (3, 4)
- B (3, 8)
- C (7, 4)
- D (7, 8)

Como recurso didáctico utilizaremos GeoGebra para determinar las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes coordenados que delimitan el área de juegos.

- a. Vamos a ingresar ingresamos los puntos: (3, 4), (3, 8), (7, 4) y (7, 8) en el software.



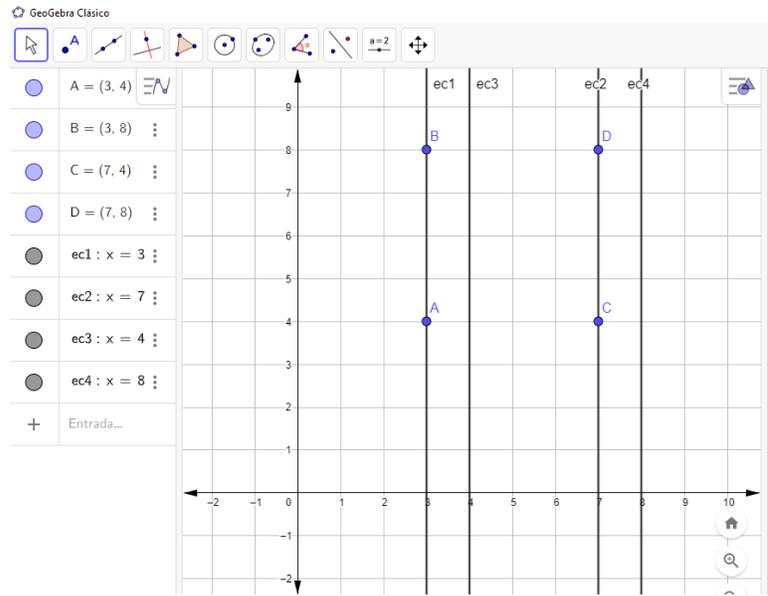
c. Delimitamos el área de juegos con rectas paralelas a los ejes coordenados:

Para la recta vertical que pasa por $x = 3$: escribimos $x = 3$.

Para la recta vertical que pasa por $x = 7$: escribimos $x = 7$.

Para la recta horizontal que pasa por $y = 4$: escribimos $y = 4$.

Para la recta horizontal que pasa por $y = 8$: escribimos $y = 8$.



- d. Para darle mayor realce a cada gráfica y diferenciarlas unas de otras, damos clic sobre cada una de ellas y presionamos la opción “Propiedades”, posteriormente le damos el color y grosor de nuestra preferencia.

GeoGebra Clásico

Objetos:

- A = (3, 4)
- B = (3, 8)
- C = (7, 4)
- D = (7, 8)
- ec1 : $x = 3$
- ec2 : $x = 7$
- ec3 : $x = 4$
- ec4 : $x = 8$

Recta ec1

Ecuación $a x + b y = c$

Ecuación $y = a x + b$

Forma paramétrica

Ecuación $a x + b y + c = 0$

- Objeto visible
- Etiqueta visible
- Mostrar rastro
- Renombrar
- Borrar

Programa de guion (scripting)

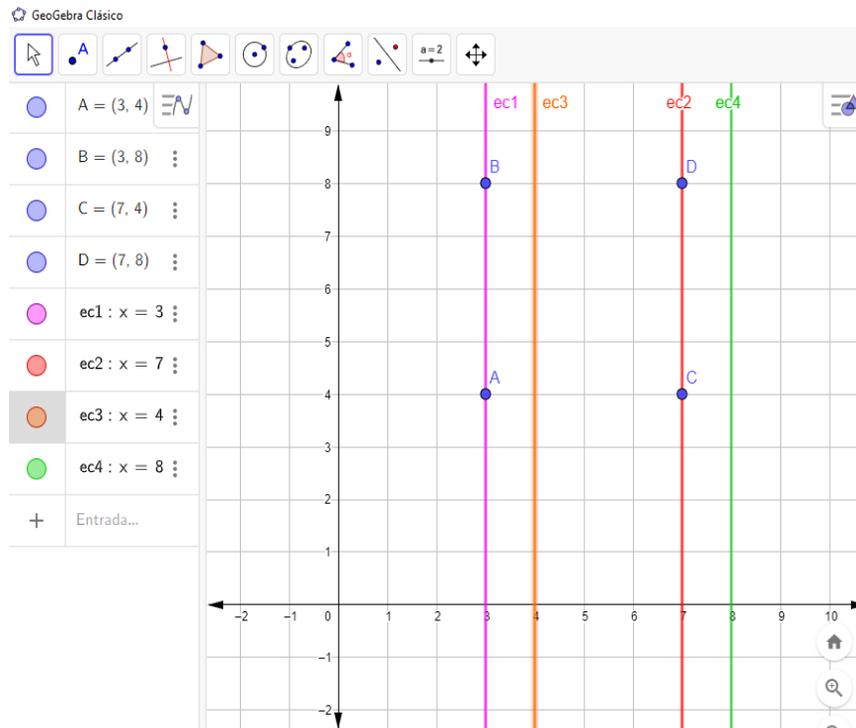
Reciente

Otro

Vista previa

Negro 0, 0, 0 (#000000)

Activar Windows
Vea a Configuración para activar l



Fase 4: Evaluación

Revisamos y verificamos la solución utilizando GeoGebra para asegurarnos de que es correcta.

Observamos las rectas en la vista gráfica de GeoGebra para asegurarnos de que delimitan correctamente el área de juegos con las esquinas dadas.

Confirmamos que las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes coordenados son las siguientes:

$$x = 3, x = 7, x = 4 \text{ y } x = 8.$$

Reflexionamos sobre el proceso de encontrar las ecuaciones de rectas paralelas a los ejes coordenados y cómo el uso de software puede facilitar este tipo de problemas.

El uso de GeoGebra ha permitido a los estudiantes visualizar y resolver el problema de manera efectiva, confirmando las ecuaciones de las rectas que delimitan el área de juegos en el parque:

$$x = 3, x = 7, x = 4 \text{ y } x = 8.$$

NOTA: El o la docente realizará una retroalimentación de lo abordado, aclarando dudas o inquietudes de los estudiantes, aportando ideas de mejoras o estimulando los buenos resultados obtenidos por parte de cada grupo de trabajo.

Problemas propuestos

Con el propósito de poner en práctica lo aprendido, se plantea el siguiente problema, para su solución se recomienda desarrollar la metodología aplicada en el ejemplo anterior. ¡Ánimo!



En un teatro local, los precios de las entradas varían según la sección del teatro en la que se encuentren. Las secciones están organizadas en filas, y cada fila tiene un precio fijo que aumenta conforme te alejas del escenario.

Problema:

En el teatro, las entradas para la primera fila cuestan \$50, y el precio aumenta en \$10 por cada fila adicional. Las filas están organizadas verticalmente (paralelas al eje y).

- Escribe la ecuación del precio P en función del número de fila y .
- ¿Cuál es el precio de una entrada en la fila 8?

VI. Sección 3: La circunferencia

Contenido: Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

En la comunidad de Susulí, Sector “Los Vanegas”, debido a la escasez de agua y al crecimiento sucesivo de la población, las familias de este sector demandan a las autoridades municipales la construcción de un pozo comunitario. Si el Sr. Alcalde, Ing. Fredys Zeledón ha decidido construir un pozo de forma circular, de manera que tenga un radio de 3 metros y cuyo centro está en el origen $C(0, 0)$, determine un modelo matemático que describe esta situación y grafique dicho modelo.



Fase 1: Activación

Esta vez, mediante la dinámica “**Sorpresa en Bolsas**”, se conformarán los equipos de trabajos de 5 integrantes, para esto se colocarán diferentes objetos en bolsas y los estudiantes deben agruparse según el objeto que obtienen al azar. Posterior a esto realizarán una lista de ideas que aportará cada integrante, (una idea por cada uno).

También es necesario, la activación de conocimientos previos, tales como:

Concepto de circunferencia

Radio r de una circunferencia

Ecuación de la circunferencia con centro en el origen $C(0, 0)$

Fase 2: Investigación

Haremos uso de diferentes fuentes que estén a nuestro alcance para la adquisición de información necesaria que permita resolver de manera satisfactoria el problema. Una vez que logremos resolver la situación, compartiremos con el resto de equipos de trabajos, **mediante una presentación oral** con la siguiente estructura: introducción, desarrollo y conclusión sobre el problema y la solución, (pueden hacer el uso de aparatos tecnológicos, como data show, computadoras y el software).

Complementar la información nunca estará de más, por ello se entrará a los siguientes enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=rkSLhJcY_zk

<https://www.youtube.com/watch?v=FrlyVp9oAaQ>

1. Resolución

Para ello, identificamos algunos datos que proporciona el problema, por ejemplo, nos dice que el pozo circular con radio r y centro en el origen de coordenadas $C(0,0)$ se describe mediante una ecuación en coordenadas cartesianas.

Recordemos que una circunferencia de radio r y centro en el origen, la ecuación es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

En este caso, el radio r es 3 metros, así que:

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

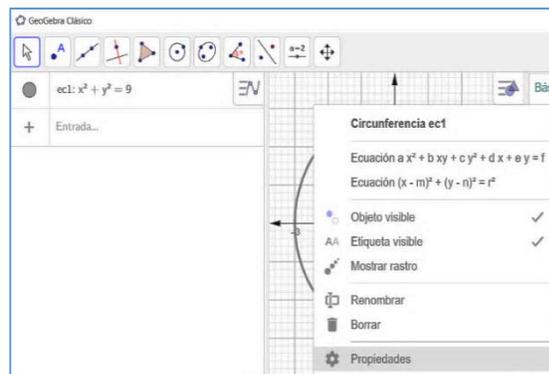
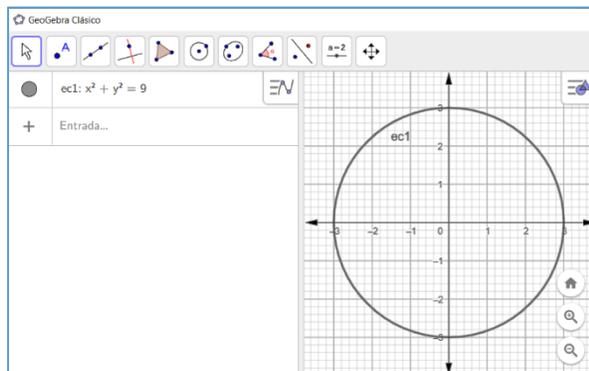
Simplificando:

$$x^2 + y^2 = 9$$

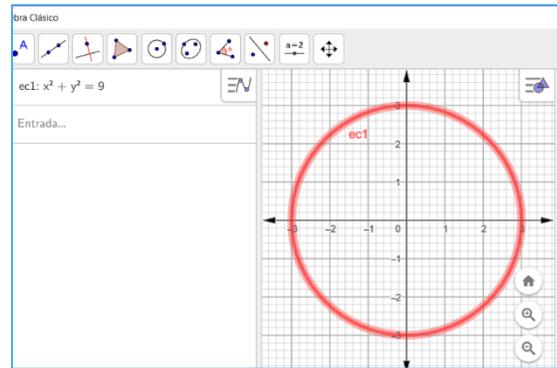
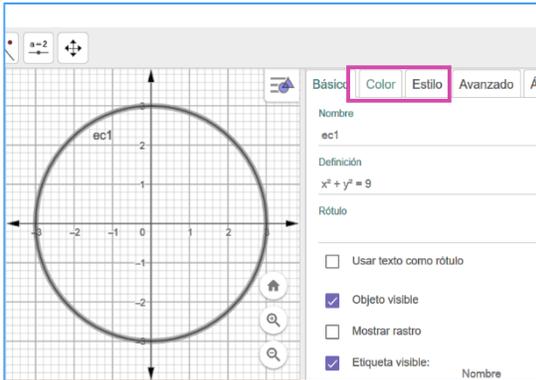
Modelo Matemático que representa la situación planteada

Como ya hemos encontrado la ecuación que corresponde al problema propuesto, vamos a graficar dicho modelo en GeoGebra para lograr una mejor comprensión.

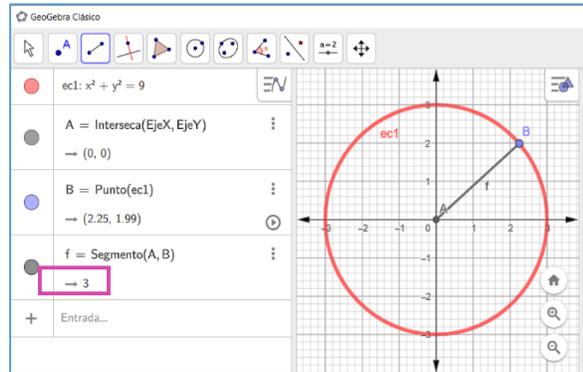
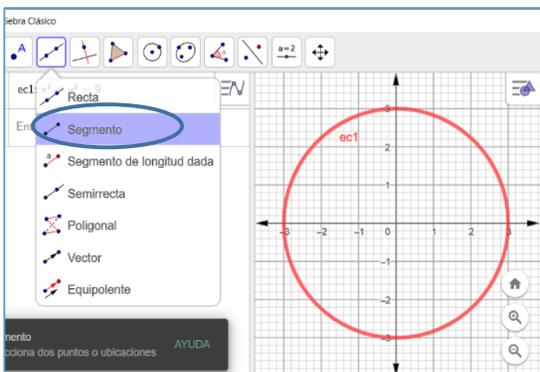
- Introduciremos $x^2 + y^2 = 9$ en la barra de “Entrada” del programa.



➤ Damos el color y estilo de nuestra preferencia



➤ A continuación, clic derecho en “Segmento”, luego clic en el centro de la circunferencia y clic en cualquier punto de dicha circunferencia y trazamos su radio que vale 3 en este caso como se aprecia a continuación:



Fase 4: Evaluación

Revisión y reflexión

¿El modelo es correcto?

La ecuación $x^2 + y^2 = 9$ es correcta para una circunferencia con radio 3 y centro en el origen. GeoGebra debería mostrar un círculo con estas características.

¿La gráfica es precisa?

La gráfica debe mostrar una circunferencia que toca el eje x y el eje y en los puntos $(3, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$, confirmando que el radio es 3 metros.

¿Cómo se utiliza esta información?

La ecuación de la circunferencia puede ser utilizada para planificar el área del pozo y para cualquier cálculo relacionado con la construcción y el diseño del pozo.

Al finalizar, has formulado un modelo matemático y lo has visualizado usando GeoGebra, facilitando la comprensión del tamaño y la ubicación del pozo comunitario en el espacio.

NOTA: Una vez culminado el proceso de implementación del ABP, el docente habrá identificado en qué aspectos se deben hacer mayor énfasis para brindar acompañamiento y lograr los resultados esperados. Así mismo se pueden sugerir la visita a algunos sitios confiables de internet para que los estudiantes puedan potenciar más sus habilidades.



Problemas planteados

Es hora de llevar a la práctica lo aprendido, por ello se te presenta la siguiente situación, empleando la metodología desarrollada en el apartado anterior. ¡Adelante!

Por motivos de falta del líquido vital (el agua) la familia Pérez, ha decidido construir una pila para almacenar agua de forma circular, cuyo centro es $(0, 0)$ y radio 4 metros, determine un modelo matemático que describe esta situación y grafique dicho modelo en el programa de GeoGebra.

Para la situación anterior, deduzca un modelo matemático, asumiendo que el radio es de 6 metros y realice su gráfica en GeoGebra.



Contenido: Ecuación de la circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r

El Instituto Nicaragüense de Estudios Territoriales (INETER) detectó un sismo con origen en el Municipio de Rivas, 5 km al Este y 3 km al Sur del centro de la ciudad con un radio de 4 km a la redonda. Determine la ecuación de la circunferencia del área afectada. Utilice la ecuación encontrada para indicar si afectó al municipio de Rivas.

Fase 1: Activación

Esta vez los estudiantes se organizarán por afinidad en equipos de 6 integrantes, donde cada uno de ellos será responsable de aportar ideas de cara a la solución del problema.

Algunos conocimientos previos que se deben activar sobre:

Ecuación de la circunferencia con centro en $C(h, k)$

Fase 2: Investigación

Para llevar a cabo esta fase, puedes hacer uso de aparatos tecnológicos, como teléfonos inteligentes, tablets, computadoras u otro recurso donde tengas acceso a internet para obtener información útil ante la solución de la problemática planteada. Al finalizar tu trabajo mediante un **Podcast**, debes presentarlo donde tú y otros estudiantes discutan el problema y la solución en un formato de entrevista o panel.

Si se presentan dificultades, se proporcionan, algunos sitios donde se puede visitar y complementar la información requerida:

<https://www.youtube.com/watch?v=y8R2ckT226U>

<https://www.youtube.com/watch?v=D8oER8uN0qQ>

Fase 3: Resolución

Al leer detenidamente el problema, podemos determinar que corresponde a una **circunferencia** con centro en (h, k) y radio r , cuya ecuación para este caso es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

En este caso:

- El centro de la circunferencia es $(5, -3)$, (5 km Este y 3 km Sur del centro de Rivas).
- El radio es 4 km.
- Supongamos que el municipio de Rivas se encuentra ubicado en el origen
- $Rivas = (0, 0) \rightarrow (x, y)$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la circunferencia:

En este caso: $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$

Simplificando $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$

Verificamos si afectó al Municipio de Rivas:

Para verificar si la circunferencia afecta el municipio de Managua suponiendo que el centro de Rivas está en el origen $(0,0)$:

Calcula la distancia entre el centro de la circunferencia y el centro de Rivas

La distancia d entre los puntos $(5, -3)$ y $(0,0)$ se calcula usando la fórmula de distancia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(0 - 5)^2 + (0 - (-3))^2}$$

$$d = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2}$$

$$d = \sqrt{25 + 9}$$

$$d = \sqrt{34}$$

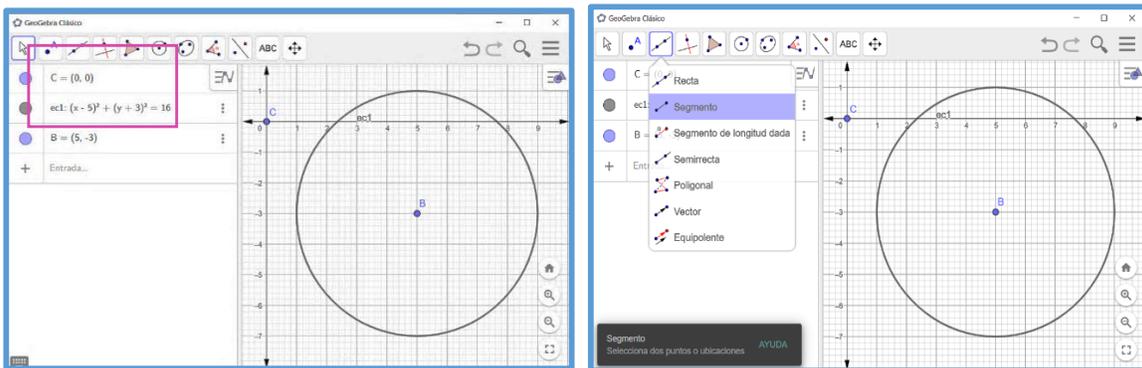
$$d \approx 5.83$$

$$5.83 > 4$$

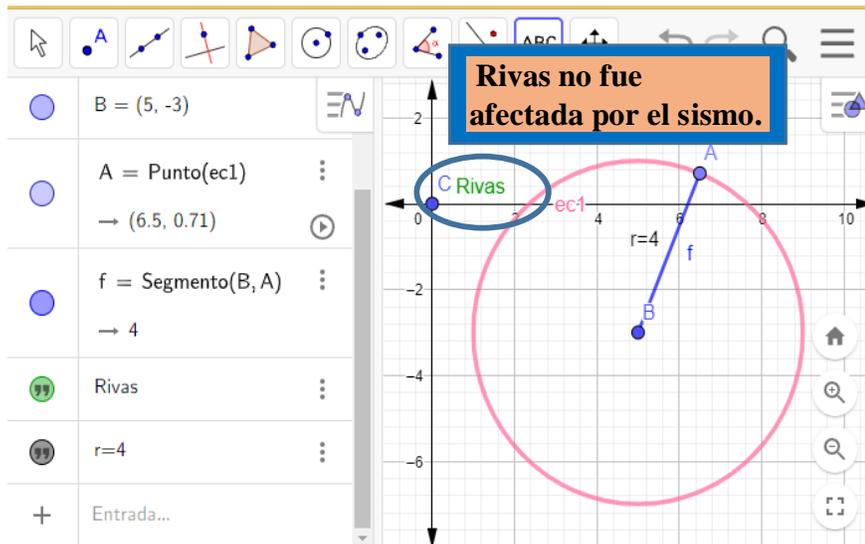
El radio de la circunferencia es 4 km. Como la distancia $d \approx 5.83$ km es mayor que el radio de dicha circunferencia, el área afectada no cubre el centro de Rivas.

- a. Para reafirmar y tener una mejor percepción del resultado que hemos obtenido, haremos uso de GeoGebra e introducimos el punto $C(0,0)$ correspondiente a Rivas, la ecuación,

$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$ y el punto $B(5, -3)$ centro de la circunferencia.



- b. En este paso damos clic derecho en el punto “B” que es el centro de nuestra circunferencia y clic en cualquier punto de la circunferencia para trazar su radio.



Fase 4: Evaluación

¿El modelo es correcto?:

La ecuación de la circunferencia $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$ está correctamente formulada para el área afectada por el sismo.

¿La gráfica es precisa?

La gráfica en GeoGebra muestra una circunferencia con centro en $(5, -3)$ y radio de 4 km, lo que corresponde a la descripción del problema.

¿La verificación es correcta?:

La distancia calculada desde el centro de Managua hasta el centro de la circunferencia (aproximadamente 5.83 km) es mayor que el radio de 4 km. Por lo tanto, el sismo no afecta al centro de Managua.

¿Cómo se usa esta información?

Esta información es útil para determinar el alcance del área afectada por el sismo y planificar la respuesta y las medidas necesarias en función del área que fue realmente impactada.

Con estos pasos, habremos formulado un modelo matemático, graficado el área afectada y verificado si el municipio de Managua fue afectado por el sismo.

NOTA: El docente solicitará a cada equipo que realicen preguntas referidas a dudas que tengan respecto a la temática abordada. Si el tiempo no es suficiente se puede orientar hacer uso de otros medios para hacer preguntas y el docente pueda responderlas, por ejemplo, a través de grupos de WhatsApp, Teklegran, entre otros.

Problema propuesto



Lea, analice y resuelva el siguiente problema desarrollando los pasos empleados anteriormente, utilizando en GeoGebra para una mejor comprensión del resultado obtenido.

El Instituto Nicaragüense de Estudios Territoriales (INETER) detectó un sismo con origen en el municipio de Mateare 4 km Este y 5 km Sur del centro de la ciudad con un radio de 5km a la redonda. Determine la ecuación de la circunferencia del área afectada. Utilice la ecuación encontrada para indicar si afectó al municipio de Managua.

Contenido: Forma general de la ecuación de una circunferencia

El pasado 25 de mayo la Vice-Presidenta de Nicaragua Rosario Murillo, Coordinadora de Comunicación y Ciudadanía en su acostumbrada comunicación al medio día dio a conocer sobre un sismo de magnitud 5.1 con origen en el Municipio de León 4 km al Este y 2 km al Sur del centro de la ciudad con un radio de 5 km a la redonda. Determine la ecuación de la circunferencia del área afectada. Utilice la ecuación encontrada para indicar si afectó al municipio de León y exprese dicha ecuación en su forma general.

Fase1: Activación

Por ser un problema más complejo se sugiere conformar equipos de 7 integrantes, con la intención de obtener información diversa en función de resolver el problema. Así mismo se orienta que los participantes asuman un papel activo en todo el proceso a fin de obtener resultados satisfactorios.

Conocimientos previos activados sobre:

Ecuación de la circunferencia con centro en $C(h, k)$

Ecuación ordinaria y ecuación general de la circunferencia

Discutimos con los estudiantes sobre sismos, su impacto y cómo se representan matemáticamente. También introducimos el concepto de circunferencia y su ecuación.

Fase 2: Investigación

Se recomienda hacer uso de libros, enciclopedias, entre otros, disponibles en la biblioteca, en donde se puede encontrar una variedad de información pertinente para la solución al problema propuesto, así como medios digitales. Los estudiantes grabarán un “**Vídeo Tutorial**” explicativo mostrando cómo resolver el problema de manera creativa y dinámica, este video será subido en algunas plataformas, (Facebook, Tik Tok, entre otras).

A continuación, sugiere la lectura del libro de texto de 11 grado, específicamente en la página 91, cuyo link de acceso es el siguiente:

https://nicaraguaeduca.mined.gob.ni/wp-content/uploads/2020/03/Lmatematicas11mo_unlocked.pdf

Fase 3: Resolución

Para esta situación identificaremos el centro de la circunferencia relacionado al problema

El sismo tiene su origen a 4 km Este y 2 km Sur del centro de la ciudad de León.

Si asumimos que el centro de León es el punto (0,0), el centro de la circunferencia sería (4, -2).

La ecuación de una circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r es: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Según el problema, tenemos:

$$h = 4Km, k = -2 Km \text{ y } r = 5Km,$$

Vamos a sustituir estos datos en la ecuación de la circunferencia:

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 5^2$$

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

Para expresar la ecuación anterior en su forma general, desarrollaremos cada binomio:

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$$

Supongamos que el municipio de León se encuentra ubicado en el origen

$$\text{León} = (0, 0) \rightarrow (x, y) \text{ en el origen } O(0, 0).$$

De acuerdo a los datos del problema tenemos el par $(4, -3)$.

Reemplazamos valores de $(0, 0)$ por (x, y) .

$$d^2 = (x - 4)^2 + (y - (-3))^2$$

$$d^2 = (0 - 4)^2 + (0 - (-3))^2$$

$$d^2 = (-4)^2 + (3)^2$$

$$d^2 = 16 + 9$$

$$\Rightarrow d^2 = 25$$

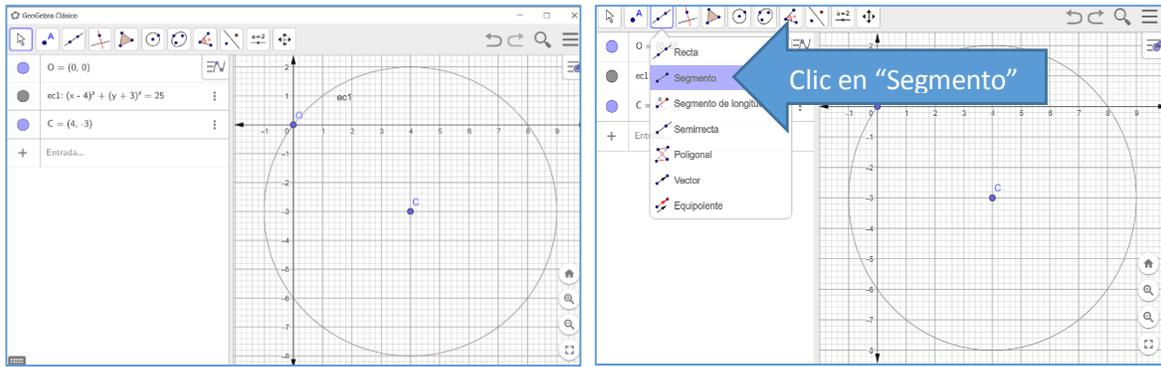
$$\Rightarrow d = \sqrt{25}$$

$$\Rightarrow d = 5$$

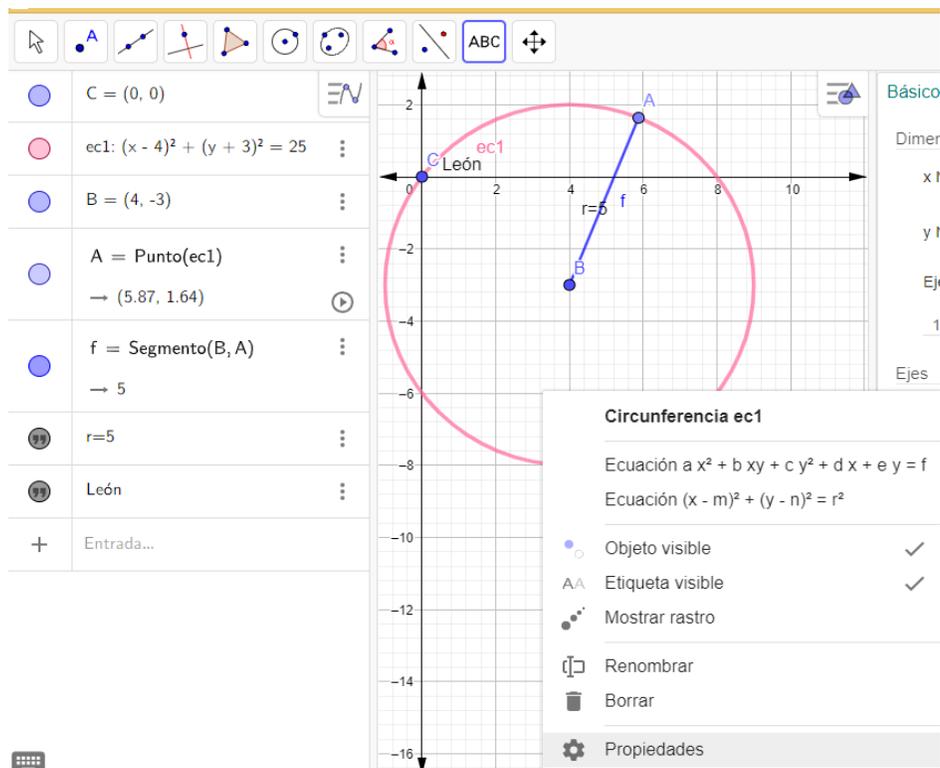
Como el resultado de la ecuación es igual que el radio de afectación del sismo, por tanto, se puede concluir que el municipio de León fue afectado por el sismo.

Es momento de hacer uso de la tecnología, para esto nos auxiliamos de GeoGebra, en el cual vamos a representar la solución al problema y darnos una mejor Comprensión al respecto.

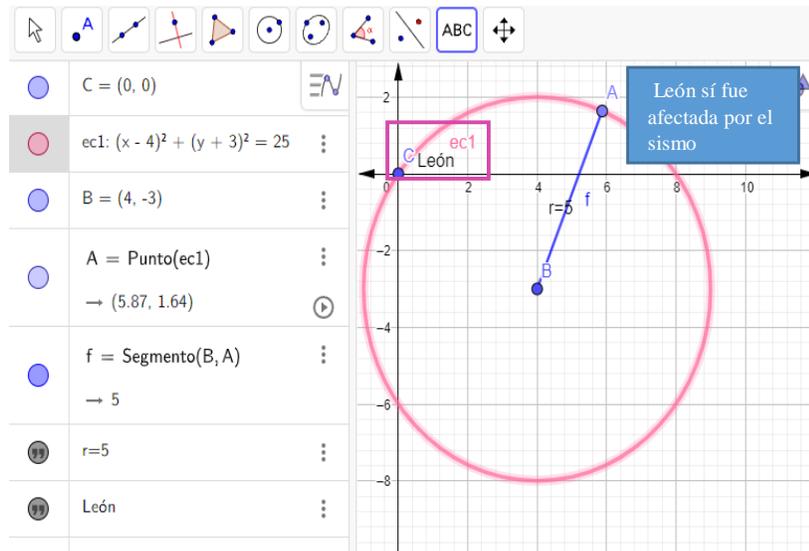
- a. Una vez que tengamos abierto el software, corresponde introducir el punto $O(0, 0)$, la ecuación de la circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$ y el punto $C(4, -3)$.



- b. Para cambiar color y estilo, damos clic sobre la gráfica y luego clic en “**propiedades**” y seleccionamos el color y estilo que queremos.



- c. Finalmente obtenemos la gráfica buscada, donde podemos observar que el sismo sí ha afectado la Ciudad de León



Fase 4: Evaluación

Revisión y Reflexión:

¿El modelo es correcto?: La ecuación de la circunferencia $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$ está correctamente formulada para el área afectada por el sismo.

¿La gráfica es precisa?

La gráfica en GeoGebra mostrará una circunferencia con centro en $(4, -3)$ y radio de 4 km, lo que corresponde a la descripción del problema.

¿La verificación es correcta?:

La distancia calculada desde el centro de León hasta el centro de la circunferencia (5 km) es igual al radio de 5 km. Por lo tanto, el sismo afecta al centro de León.

¿Cómo se usa esta información?

Esta información es útil para determinar el alcance del área afectada por el sismo y planificar la respuesta y las medidas necesarias en función del área que fue realmente impactada.

Con estos pasos, habrás formulado un modelo matemático, graficado el área afectada y verificado si el municipio de León fue afectado por el sismo.

NOTA: Se orientará a los estudiantes a formular un problema contextualizado, relacionado con el contenido abordado y que presenten su solución. El equipo que termine primero será el ganador. Esto permitirá identificar quienes tienen mayor dificultad y poder fortalecer sus debilidades.

Problema propuesto

El siguiente problema está vinculado a la aplicación de la circunferencia con centro fuera del origen. Para darle solución, es necesario apropiarse de la estrategia del ABP, utilizando como recurso didáctico el software GeoGebra.

El pasado 10 de septiembre la Vicepresidenta de Nicaragua Rosario Murillo, Coordinadora de Comunicación y Ciudadanía en su acostumbrada comunicación al medio día dio a conocer sobre un sismo de magnitud 5.2 con origen en el Municipio de Chinandega a 6 km Este y 3 km Sur del centro de la ciudad con un radio de 7 km a la redonda. Determine la ecuación de la

circunferencia del área afectada. Utilice la ecuación encontrada para indicar si afectó al municipio de Chinandega y exprese dicha ecuación en su forma general.

Contenido: Transformación de la forma general a la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia

En la comunidad de Susulí Central del Municipio de San Dionisio, se ha identificado un área circular donde se construirá un pozo artesanal para proporcionar agua a las familias locales. La forma del área es circular, y se ha dado la ecuación de esta circunferencia en una forma no estándar. La tarea es expresar esta ecuación en su forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro y el radio del área afectada.

Problema:

La ecuación dada para el área circular es:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

1. Expresar la ecuación en su forma ordinaria.
2. Identificar las coordenadas del centro y el radio del círculo.

Fase 1: Activación

Para finalizar de manera motivada, se realizará la dinámica “**Símbolos matemáticos**”, cuyo objetivo es formar equipos de 7 integrantes. Se dará a cada estudiante un símbolo matemático. Los que tengan el mismo símbolo forman un equipo.

Cada equipo anotará las ideas que aporte cada integrante, después decidirán cuál o cuáles puede dar pautas de solución al problema.

No obstante, es crucial la activación de conocimientos previos activados a cerca de:

Ecuación de la circunferencia con centro en $C(h, k)$

Ecuación ordinaria y ecuación general de la circunferencia.

El objetivo consiste en:

1. Expresar la ecuación en su forma ordinaria.
2. Identificar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia.

El problema nos da la ecuación de una circunferencia: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

Fase 2: Investigación

Para desarrollar este proceso haremos uso de algunas herramientas que tengamos a la disposición para recopilar información que nos guíe a la solución del problema. Al obtener los resultados cada equipo de trabajo escribirá un **blog** en el que detalle los pasos de la solución.

Si considera necesario la complementación de la información, puede hacer uso del libro de texto de Matemática de undécimo grado, página 92 o herramientas tecnológicas, como teléfono celular, tablet, internet, entre otro, entando al siguiente sitio web:

<https://www.youtube.com/watch?v=5ewDVk484Cc>

<https://www.youtube.com/watch?v=C8NI8VYUuCc>

Fase 3: Resolución

El problema nos proporciona la ecuación de la circunferencia en su forma general, cuya expresión es $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, para expresarla en su forma ordinaria, necesitamos completar cuadrados.

La forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Donde (h, k) son las coordenadas del centro y r es el radio.

Vamos a completar cuadrados en la ecuación dada, llevando a cabo el siguiente proceso:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Agrupamos los términos de x y y

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) - 4 = 0$$

Completamos cuadrados dentro de los paréntesis:

$$(x^2 - 2x) \text{ se completa a } (x - 1)^2 - 1$$

$$(y^2 + 4) \text{ se completa a } (x + 2)^2 - 4$$

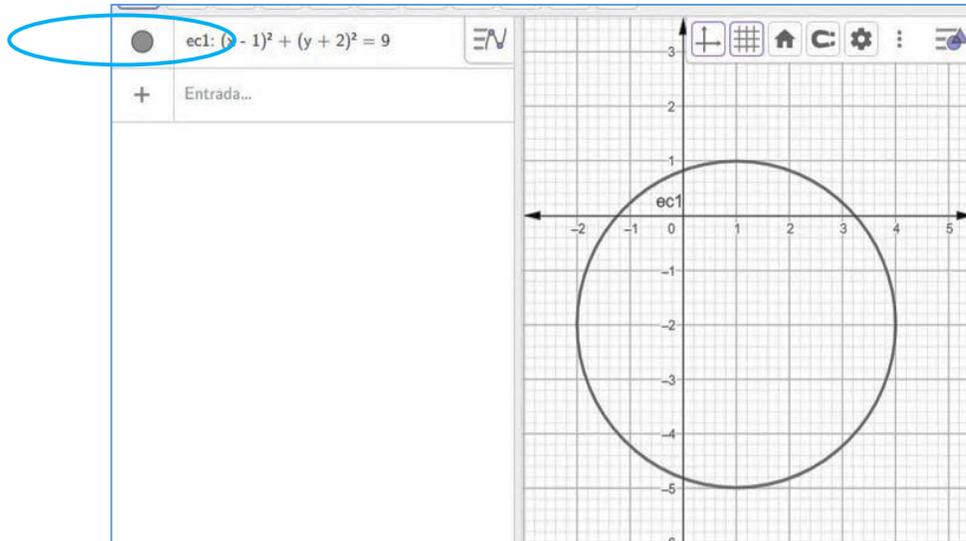
Entonces, tenemos:

$$(x - 1)^2 - 1 + (x + 2)^2 - 4 = 4$$

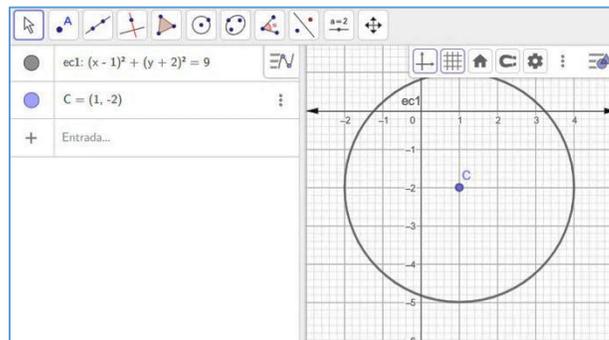
$$(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 9$$

Ya que hemos expresado la ecuación de la forma general a la forma ordinaria, seguiremos los siguientes pasos para representarlo en GeoGebra.

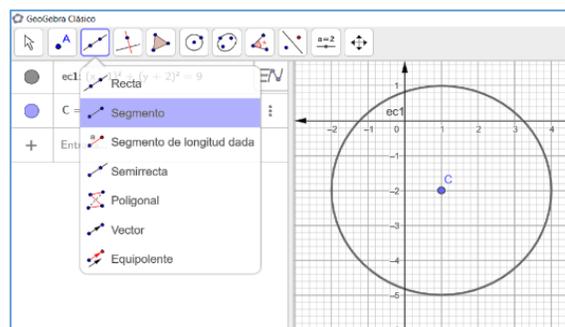
- a. Realizando la gráfica en GeoGebra, para la cual abrimos el programa.



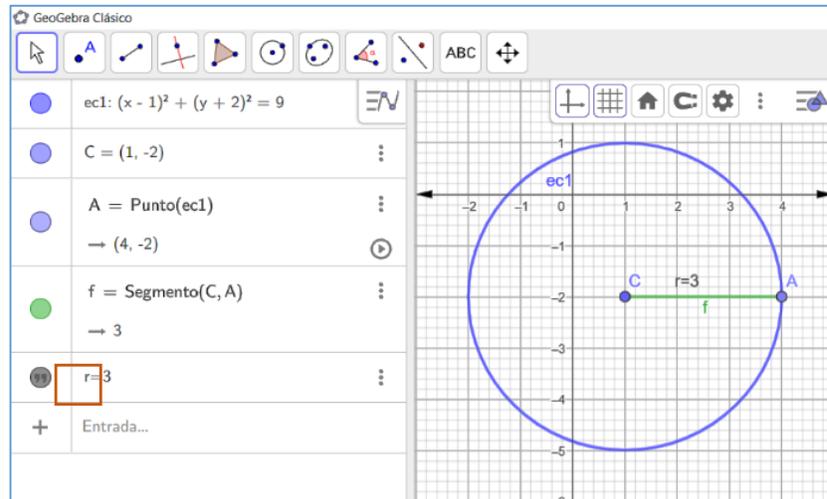
b. Ubicamos el centro $C(1, -2)$ y damos clic en “Segmento”.



c. Ubicamos el puntero en la opción “Segmento”, como se muestra a continuación:



- d. Luego, damos clic en el centro y clic en cualquier punto de la circunferencia para trazar su radio.



Fase 4: Evaluación

¿El modelo es correcto?

La ecuación de la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ está correctamente formulada para el área afectada por el sismo.

¿La gráfica es precisa?

La gráfica en GeoGebra muestra una circunferencia con centro en $(1, -2)$ y radio de 3, lo que corresponde a la descripción del problema.

¿La verificación es correcta?

Las coordenadas calculadas sí corresponden al centro de la circunferencia dada.

¿Cómo se usa esta información?

Esta información es útil para determinar el centro de la circunferencia dada.

Revisar y verificar la solución.

La ecuación en su forma ordinaria es:

$$(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 9$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia son $(1, -2)$ y el radio es $r = \sqrt{9}$, $r = 3$.

NOTA: A manera de retroalimentación se propondrá un problema relacionado con el contenido abordado, el equipo que lo resuelva primero obtendrá un premio, (puede ser puntos extras u otro estímulo por parte del docente).

Problema planteado

Para resolver el siguiente problema se sugiere implementar la metodología desarrollada en el ejemplo anterior.

La comunidad de El Zapote Central, en el Municipio de San Dionisio, enfrenta una grave escasez de agua. Para solucionar esta situación, la municipalidad ha decidido construir una pila de agua en un predio de forma circular. La ecuación que representa este predio es $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$. Esta pila permitirá almacenar agua suficiente para satisfacer las necesidades de las familias de la comunidad. Expresa dicha ecuación en su forma ordinaria, identifique las coordenadas del centro, la longitud del radio y realice su gráfica en GeoGebra.



“Geometría Analítica enfocada en el aprendizaje basado en la resolución de problemas, utilizando GeoGebra”

