UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA

UNAN - MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDISCIPLINARIA DE CHONTALES

DOCTORADO EN MATEMÁTICA APLICADA

(I Edición)

Propuesta Didáctica para el Módulo *Matemáticas aplicadas a las Ciencias agrícolas* de la carrera de Ingeniería Agrícola de la Facultad de Agronomía, UNA

Tesis para optar al grado de Doctor en Matemática aplicada

Autor:

MSc. Mauricio Alexander González Salazar

Tutor:

Dr. Ramón Antonio Parajón Guevara

Juigalpa, Chontales – Febrero 2018

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, todas las universidades del país, están haciendo sus esfuerzos por modernizar el diseño curricular de sus carreras y orientar el proceso educativo al logro de aprendizajes significativos y a la promoción del pensamiento complejo, como corresponde a una institución de educación superior. En este contexto, la Universidad Nacional Agraria (UNA) está realizando una *transformación curricular*, pasando de un modelo tradicional al modelo por competencias (competencias laborales) con el fin de responder de una mejor manera a los retos que le plantea el empleo, el entorno laboral, la productividad y la competitividad a la educación superior en Nicaragua.

Por lo anterior, en el año 2016, la UNA estructura su nueva oferta académica en carreras cuyos *Planes de estudio* se organizan por módulos que tienen como fin desarrollar competencias laborales del perfil del egresado de la universidad. Dentro de la gama de carreras ofrecidas por la Universidad Nacional Agraria se encuentra la carrera de *Ingeniería agrícola* como respuesta a las necesidades de los sistemas agrarios nicaragüenses que se han visto afectados por las variaciones del clima y la baja productividad de los suelos. Respuesta que se concreta con la formación de ingenieros agrícolas capaces de contribuir al desarrollo del país en el área de las ciencias agrícolas desde una perspectiva científica y tecnológica.

Para tal fin (formador), cada uno de los módulos del plan de estudios debe contribuir al desarrollo de las *competencias genéricas* definidas por la universidad así como de las *competencias específicas* (laborales) precisadas en el perfil profesional. Es así, pues, que el módulo de Matemáticas aplicadas a las Ciencias agrícolas debe desarrollar en el estudiante habilidades y destrezas (matemáticas) en la resolución de situaciones problemáticas y análisis de otras situaciones propias de ciertas áreas de la matemática (Geometría Analítica, Trigonometría, Cálculo Diferencial e Integral) afines y extensibles a otras áreas del conocimiento como Hidráulica, Dinámica, Cinemática, Optimización, Topografía, Redes, etc.

Lo anterior conlleva a que el aprendizaje de algunos elementos de Geometría Analítica, Trigonometría y Cálculo Diferencial e Integral no esté remitido solo a aquellos aspectos meramente matemáticos (conceptos abstractos) sino también a los aplicables en esas áreas (algunas mencionadas en el párrafo anterior) necesarias en la formación ingenieril inherentes al campo agrícola permitiendo al futuro egresado ser capaz de tener un desempeño eficiente en las situaciones de su campo laboral. Es por ello que la formación profesional en su sentido formal tiene como misión fundamental la formación de recursos humanos de los niveles estandarizados que requieren los sectores productivos y de servicio; persigue el mejoramiento de las cualificaciones, en la cantidad de conocimientos básicos, y cierta flexibilidad que le permita a los trabajadores calificados adaptarse rápidamente a las nuevas necesidades, derivadas del desarrollo tecnológico y de una estructura productiva cada día en constante cambio.

Este cambio nos lleva a la adopción de una nueva concepción sobre la formación, que trascienda al rol tradicional, con el objetivo de responder a los requerimientos de un mundo globalizado. Además, es necesario que se tomen en consideración los niveles de calidad exigidos por los diversos contextos en los cuales participamos. Todas las personas no aprenden igual, ni con la misma velocidad.

En consecuencia, cada estudiante aprende a su propia y única manera, enfocada en los hechos, prácticas y teorías del medio. Unos son más visuales y otros más verbales. Y como el aprendizaje depende de muchos factores esto hace que se tengan diferentes preferencias en la manera de procesar la información, es decir *de estilo*. Para aprender mejor y tener un buen desempeño es necesario que los facilitadores comprendan cual es la modalidad de aprendizaje de los participantes y trabajar bien los diferentes estilos. El aprendizaje se genera cuando el estudiante es capaz de construir su propio conocimiento mediante un papel activo en la edificación de este, considerando sus experiencias como un factor significativo para elaborar su propio saber. En este rol el estudiante necesita tener a su disposición la exposición de la temática a estudiar de una manera amigable sin perder rigurosidad y que le ayude a construir y desarrollar las competencias matemáticas especificadas en el Programa Modular Silábico (PMS) del módulo en cuestión. Esto hace necesario que se establezca una metodología didáctica apegada al enfoque que se aplica.

El modificar algunas o muchas de las funciones que, tradicionalmente, tiene el docente en su práctica cotidiana, por el modelo de educación basado en competencias, trae como consecuencia modificar la forma en cómo se concibe la enseñanza y el aprendizaje. Entonces, el punto de partida como criterios orientadores para la docencia y su ejercicio será:

El saber.
El saber hacer.
El saber ser.

Según (Arias, 2016) el *saber* es la comprensión de la actividad productiva, en su conjunto, y del entorno en que esta se realiza. Es el conocimiento o saber teórico que descubrimos en la tecnología, y en lo científico, formativo e investigativo. Tanto el docente como el estudiante deben ser conscientes del progreso y la evolución acelerada de la ciencia, la tecnología y el saber en general, la caducidad y reducida vigencia de los conocimientos para el desempeño continuo de la profesión. Esto procura una educación permanente que permita la utilización adecuada de procedimientos, lenguajes, métodos de estudios y de investigación, hábitos de trabajo intelectual como la lectura, la reflexión y el procesamiento de la información. El *saber* está compuesto por aquellos elementos de contenidos que sostienen la parte teórica del desarrollo de la acción formativa, llamadas también *competencias intelectuales*.

El *saber hacer* es establecido en (Arias, 2016) como la ejecución del trabajo, una capacidad real y demostrada. Son las habilidades y destrezas o saber práctico propio de una técnica, investigación aplicada y prácticas de empresas, instituciones, etc. El *saber hacer* está enfocado en:

- *Habilidades* para el análisis de los elementos, relaciones y criterios de situaciones problemáticas en el ejercicio profesional, para proponer soluciones o alternativas de solución de problemas afines al perfil profesional que permitan la toma de decisiones pertinentes o capacidad para asumir las responsabilidades de tales decisiones en la práctica laboral.

- *Destrezas* para la utilización eficiente del instrumental, equipos y materiales propios del ejercicio profesional.

Este pilar hace referencia a las competencias profesionales que deben mostrar los estudiantes.

El *saber ser* es la capacidad de valorarse como persona, valorar e incorporar a los demás en una sana convivencia social. Son actitudes, comportamientos y valores. Son aquellos aprendizajes cuya función esencial es desarrollar las capacidades y valores humanos, para lograr una participación crítica en las transformaciones de la vida social. A este saber están ligadas las competencias interpersonales e intrapersonales y las sociales. Son las que fomentan las actitudes y valores que complementan al estudiante con el fin de que la formación de este sea integral.

En la presente investigación se plantea el diseño de un material didáctico que permita el desarrollo de habilidades y destrezas en la realización de actividades donde haga uso de aquellos conceptos matemáticos que den lugar a ser aplicados en la resolución de problemas inherentes a su carrera, en este caso la carrera de ingeniería agrícola. Dicho material, en primera instancia, desea permitir que el estudiante evidencie las conexiones entre la teoría matemática abordada y el mundo real (entorno social y laboral), facilitando su involucramiento activo en el proceso de enseñanza−aprendizaje. Esta conexión se verá materializada en el estudio de casos tempranos relacionados con Hidráulica, Dinámica, Cinemática, Optimización, Topografía, Redes, etc. y evidenciado durante el curso de los módulos subsiguientes afines a estas áreas.

Esta selección de áreas (las mencionadas en el párrafo anterior) se hizo de la información obtenida de las entrevistas con los especialistas de las áreas específicas; quienes expresaron que necesitaban que en el desarrollo de las actividades de aprendizaje del módulo de matemática, los contenidos fueran asociados a medida de lo posible con situaciones referentes a problemas propias de la carrera de Ingeniería agrícola pero de acuerdo al nivel del estudiante, esto debido a que hasta la fecha ha existido una gran desvinculación de lo que se impartía en las asignaturas de matemática con los contenidos de las áreas específicas (currículo anterior).

Por ello, éste servirá de apoyo para los estudiantes en el desarrollo de los módulos subsecuentes, pues ya tendrán al menos en su estructura cognoscitiva alguna noción de los procesos iniciales que realizarán ante situaciones introductorias de temáticas más complejas como levantamientos topográficos de terrenos, cálculo de áreas (mediante técnicas topográficas), diseño de sistemas de riego y drenaje, aplicaciones físicas, mecánica de fluidos, etc.

Así, sea plantea el siguiente **problema científico**:

¿Cómo diseñar el Material didáctico base del Módulo *Matemáticas aplicadas a las Ciencias agrícolas* del Plan de Estudio de la carrera de Ingeniería Agrícola de la Facultad de Agronomía, UNA abordado desde una visión acorde al Enfoque por competencias?

Para solucionar el problema científico se darán respuestas a las siguientes preguntas directrices:

1. ¿Cómo determinar la vinculación conceptual del módulo Matemática aplicada a las ciencias agrícolas con el resto de módulos de la carrera de ingeniería agrícola?
2. ¿De qué manera exponer los contenidos en el material empleando los criterios metodológicos del enfoque por competencias que permitan una conducción efectiva del proceso de enseñanza–aprendizaje?
3. ¿Qué actividades planificar que permitan evaluar efectivamente el proceso de enseñanza–aprendizaje mediante acciones planificadas para el uso adecuado del material didáctico?

Se plantea como **objetivo general** de la investigación:

Elaborar un Material Didáctico con un enfoque por competencias para el Módulo *Matemáticas aplicadas a las Ciencias agrícolas* para la carrera de Ingeniería Agrícola de la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional Agraria que contribuya a mejorar la calidad del proceso de enseñanza – aprendizaje en el área de Matemática.

Los **Objetivos Específicos** son:

1) Determinar la vinculación conceptual del módulo Matemática aplicada a las ciencias agrícolas con el resto de módulos de la carrera de ingeniería agrícola.
2) Conducir el proceso de enseñanza aprendizaje mediante el abordaje de los contenidos expuestos bajo criterios metodológicos del enfoque por competencias.
3) Aplicación del modelo híbrido Schoenfeld–Polya en la resolución de los problemas propuestos en el material didáctico.

El **aporte** de la investigación se da desde dos perspectivas: teórica y práctica.

a) **Teórica** pues a la par del desarrollo de los ejemplos, estudios de casos y problemas se hará el tratamiento de conceptos (de Geometría analítica, Trigonometría, Cálculo diferencial e integral) según lo especificado en el PMS y las necesidades de los otros módulos del plan de estudio.
b) **Práctico** (metodológico), pues la exposición de los contenidos se hará bajo el contexto del perfil del egresado de la carrera de Ingeniería agrícola mediante orientaciones metodológicas así como actividades y acciones para el empleo de un sistema de tareas que favorezcan su aprendizaje.

La metodología propuesta en el programa modular conduce al estudio y cumplimiento de la estructura diseñada del mismo y de las fases descritas, sobre las bases de los fundamentos teóricos necesarios que se establecerán en el material y las condiciones reales del contexto donde se apliquen.

La investigación es **viable** pues se dispone de los recursos necesarios para llevarla a cabo. Se cuenta con la autorización de la dirección del departamento que administra la carrera de Ingeniería agrícola. Así mismo la Dirección de Docencia está muy interesada en la conducción de la investigación por la necesidad de un material didáctico novedoso y coherente con el PMS. Dentro de los recursos necesarios destacan:

(1) materiales físicos y digitales,

(2) bibliografía recomendada (pedagógica y científica),

(3) formatos directores (establecidos por el nuevo currículo de la UNA),

(4) equipos (computador, impresora, USB, etc.),

(5) personal humano (los especialistas con experiencia en el área de matemática y de las otras áreas ya fueron abordados),

(6) recursos financieros autónomos puesto que no se cuenta con un financiamiento externo.

Por la finalidad es una Investigación aplicada (exploratoria desde el punto de vista de profundidad) con un enfoque cualitativo.

Como **Objeto de investigación** se tiene el proceso de enseñanza de los contenidos de matemática (ver anexo 2) en la educación universitaria del estudiante de la carrera ingeniería agrícola.

El **campo de acción** es el proceso de enseñanza de los contenidos matemáticos arriba mencionados a partir de la resolución de situaciones problemáticas y estudio de casos asociados a las ciencias agrícolas.

Como **tareas de investigación** se tiene:

1. Determinación de los referentes teóricos (estudio de la literatura):
    - Análisis de la bibliografía y de investigaciones afines con el objeto de precisar el tratamiento habitual de la enseñanza y aprendizaje de los contenidos a

desarrollar en las áreas de Geometría analítica, Trigonometría y Cálculo diferencial e integral según lo establecido en el PMS.

- Especificación del tratamiento temático que se hará para el posterior desarrollo de ejemplos en la propuesta mediante la resolución de problemas aplicados a su perfil profesional en vistas de su utilidad en los módulos subsiguientes bajo el modelo híbrido Schoenfeld–Polya.

2. Diseño del material didáctico que se propone.
   - Estructura de la propuesta. Componentes didácticos generales y específicos.
   - Tratamiento de la propuesta en el módulo; detalle de las etapas y del sistema de medios

3. Determinación de algunos elementos empíricos que evidencien la factibilidad de la propuesta:
   - Entrevistas abiertas a docentes expertos y especialistas.
   - Observaciones a estudiantes.

Para el desarrollo de la investigación se asume la dialéctica materialista como enfoque de la investigación científica concatenando diversos métodos integrados en el proceso lógico de la realidad investigada., lo que sustenta la propuesta para su funcionamiento en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Métodos. Para el estudio científico del objeto de investigación, se apoya en los siguientes métodos:

- ✓ **Método histórico y lógico:** para localizar y recopilar los antecedentes, qué enfatizar de las tendencias actuales del objeto que se investiga.
- ✓ **Enfoque sistémico:** para determinar las relaciones entre los diferentes componentes de la propuesta durante todo el proceso de investigación.
- ✓ **Tránsito concreto – abstracto – concreto:** partiendo en muchas situaciones específicas tratadas en la resolución de problemas hasta llegar a una

conceptualización general, y viceversa, permitiendo la realización de múltiples representaciones y determinaciones de la realidad.

- ✓ **Análisis documental:** para obtener la información contenida en documentos rectores relacionados con el tratamiento de los contenidos abordados en la propuesta.
- ✓ **Entrevistas:** a docentes del área de matemática y especialistas de áreas afines de la facultad con el objetivo de valorar el estado de la enseñanza y aprendizaje de dichos contenidos en este nivel educativo.

El presente documento se estructura de la siguiente manera: Introducción, tres Capítulos más Conclusiones, Bibliografía y Anexos.

En la *introducción* se presenta una breve panorámica de la importancia del tema, así como los elementos del diseño teórico-metodológico de la investigación.

En el primer capítulo *la enseñanza de las matemáticas desde un punto de vista agrario* se expone el contexto en torno a la temática en discusión, desde sus antecedentes hasta su posición actual, haciendo un pequeño bosquejo introductorio sobre el enfoque por competencias y el referente de la UNA.

En el segundo capítulo *perspectiva teórica de la investigación* se presenta el conjunto de supuestos teóricos de la investigación y sus elementos didácticos: enfoque por competencias (y la evaluación desde esta perspectiva), método de Schoenfeld, método de Polya, un método híbrido de ambos y una exposición más detallada sobre el enfoque por competencias adoptado en el Modelo Educativo de la UNA (ME−UNA, 2012).

En el tercer capítulo *propuesta didáctica* se presenta en sí el material didáctico (propuesto) para el módulo *Matemáticas aplicadas a las ciencias agrícolas* atendiendo al enfoque por competencias. También se hace una descripción de la metodología y filosofía a seguir en el desarrollo de las actividades y contenidos de las unidades.

Finalmente, se concluye con la exposición de formas de cómo y qué aspectos impulsar dinamizando las interacciones de los estudiantes con sus compañeros, profesores y materiales didácticos, así como se indican las limitantes del presente proyecto.

CAPITULO I

DIAGNÓSTICO DE LA INVESTIGACIÓN: LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS DESDE UN PUNTO DE VISTA AGRARIO

1.1 Antecedentes

Si bien es cierto hay cierta cantidad de investigaciones que abordan la temática que contendrá el material del módulo, ninguna la aborda desde la perspectiva de las ciencias agrarias y su interrelación con el uso de las nuevas tecnologías (TIC) en la enseñanza de la geometría analítica, la trigonometría y el cálculo (diferencial e integral).

Razón por la cual esta investigación propone una enseñanza de estos tópicos buscando la incorporación de un tratamiento acabado y ajustado a cada etapa del desarrollo de este módulo según lo establecido en su PMS (dirigido por las subcompetencias, indicadores de logros y contenidos indicados) pero que a la vez dé un acercamiento a su utilización en los módulos subsiguientes afines, claro está, a la matemática.

Debido a que dentro del proceso educativo la educación se puede organizar mediante una sistematización asociada a los contenidos de los programas de manera que se estructure temporal y espacialmente en relación a la dosificación de las competencias y los indicadores de logros del programa, el material básico asociado a cada módulo debe tener una proyección rigurosa en su organización y estructura respecto al aprendizaje y de la manera en que debe ocurrir la enseñanza.

Así la previsión de acciones para la ejecución de las mismas en el proceso de enseñanza−aprendizaje que se desarrolla en el aula está íntimamente ligada a la microplaneación (plan de clases) y a los recursos didácticos con los que se cuente. Por ello la importancia de un material a la altura de este reto, el nuevo reto educativo que demanda la apropiación y aplicación de enfoques, métodos y estrategias didácticas constructivistas que guíen a los estudiantes a la obtención de aprendizajes significativos y relevantes. El PMS para el módulo Matemáticas aplicadas a las ciencias agrícolas establece cuales son las intenciones del ME−UNA y de su proyecto educativo, y sirve de guía para orientar la práctica educativa, así como el modelo educativo aporta datos y claves esenciales para sustentar la aplicación de determinados enfoques, métodos y estrategias de enseñanza–aprendizaje.

Con base a esta teoría constructivista (normada en el ME–UNA) y bajo el enfoque por competencias, se justifica la utilización o adopción por decirlo así, de técnicas, métodos y modelos educativos que tienen la idea común de construir los aprendizajes tanto de manera individual como colaborativamente en los contextos físicos, sociales y culturales. Entre estos, el aprendizaje basado en problemas, la enseñanza por comprensión, el aprendizaje por proyectos y los estudios de casos.

Por lo anterior, el **material didáctico** debe ser una herramienta que permita la ejecución de tales ideas posibilitando la búsqueda de respuestas y la construcción del conocimiento a partir del protagonismo de los estudiantes bajo la orientación del profesor.

En el marco de estas reflexiones es conveniente precisar que la sistematización de la enseñanza expresa la necesidad que la función docente del profesor sea consecuencia de una planificación y de una secuencia lógica, esto si se desea poner al estudiante como centro de la enseñanza y conseguir un aprendizaje atractivo y motivador.

Para esto, es de apoyo los estudios y experiencias previas afines a esta exposición, no congruentes en todos los aspectos pero sí semejantes, dentro del área (matemática) o al menos aplicable a ella, de acá por su importancia teórica por un lado, y la exposición metódica por otro, se quiere destacar algunas de las investigaciones indagadas sin ningún orden en particular.

1.2 Visión retrospectiva

Se encontró en la revisión de literatura, antecedentes del tema no aplicables al contexto, de hecho se encontró información no muy elaborada sobre módulos de matemática ninguno desde la perspectiva interdisciplinaria de la matemática y las ciencias agrícolas sino de la Escuela media o Superior.

Algunas experiencias y visiones acerca de los problemas del currículo modular aplicado en ciertos sectores de la UAM−X, México son compartidas en (Ehrlich, 2001). Con una visión muy objetiva destaca como una de las principales limitaciones el desconocimiento de las características particulares de los personajes que entran en juego, los estudiantes que recibimos versus el elemento docente. Y destaca al nuevo rol docente como *coordinador* de los procesos de enseñanza−aprendizaje.

(Padilla, 2012) expone las características del modelo educativo modular aplicado en la Universidad Autónoma Metropolitana Xochimilco, con una estructura curricular basada en conceptos de interdisciplinariedad y grupo operativo. Su proyecto académico expresa "La interacción de los procesos docentes de trabajo modular (docencia, investigación modular, servicio y extensión), descansa en el postulado de una educación problematizadora, la que conduce a que la fase de acción y de reflexión se alternen en forma tal, que el aprendizaje de categorías teóricas sea matizado y orientado con la necesidad de explicar una realidad histórica determinada. En consecuencia, se espera que con base en el nuevo conocimiento producido se consoliden, reinterpreten y propongan nuevas prácticas profesionales." Esto no se aleja de lo que reza el proyecto educativo de la UNA:

> *"La UNA garantiza mediante el currículo la articulación de las funciones docencia, investigación, innovación, extensión, proyección social y gestión, así como la formación generalista, desarrollando competencias básicas y específicas para el desempeño profesional efectivo."*

En (Vílchez, 2013) se expone un enfoque novedoso de enseñanza de la matemática con auxilio de herramientas tecnológicas, afirma "en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, la crisis demanda soluciones nuevas, que le permitan a los educandos aprender de una forma más interactiva (matemática asistida por computadora), como complemento de la educación tradicional. Es en este sentido, donde el uso de las tecnologías de la información y la comunicación cobra un lugar preponderante, hacia la búsqueda de ambientes de aprendizaje heurísticos donde el estudiante explore, conjeture y construya su propio conocimiento." Esta posición tan acertada, expone los retos a los que se enfrenta el docente moderno en el salón de clase para lograr mantener al estudiante enfocado en las actividades de aprendizaje. Los cambios en los nuevos modelos educativos de las universidades lo exigen, son cambios pedagógicos y metodológicos reclamados por justicia social, obviamente, como herramienta complementaria en el proceso no como herramienta indispensable. Esto dependerá del programa institucional y de las facilidades que ofrezca cada sector educativo. El ME−UNA dice:

> *"Las herramientas antes descritas [multimedia, hipertexto, hipermedia, plataforma virtual, e-learning, medios audiovisuales, etc.] perfectamente pueden usarse en el marco de un diseño metodológico constructivista en el grado y posgrado, a fin de brindar una enseñanza de calidad y buen uso de las TIC para: promocionar las buenas prácticas educativas, la investigación bibliográfica, promover el trabajo colaborativo y evaluar el trabajo institucional."*

Se expone en (Gutiérrez, 2003) de manera muy acertada y detallada los rasgos esenciales que tipifican la tarea docente, lo que permite poder elaborar un plan efectivo para la enseñanza recalcando que no basta solo con informar de las acciones que conduzcan al estudiante a aprender sino también precisar de las operaciones lógicas que le permitan lograrlo. Es innegable que la enseñanza de la matemática puede contribuir decisivamente con el desarrollo de las habilidades del pensamiento y destrezas cognitivas, que fortalecen la capacidad de razonamiento, la disciplina mental y el rigor en la toma de decisiones.

Del estudio exhaustivo que hace (Irazoqui, 2015) en su tesis sobre el aprendizaje del cálculo diferencial se retomarán acá dos aspectos muy importantes que abonan a algunos puntos del diseño:

- De usarse los *medios tecnológicos* como apoyo a la labor docente, el trabajo del estudiante debiera centrarse más en la comprensión de los conceptos matemáticos más que en la realización de estimación de cálculos engorrosos y que en muy poco aportan al conocimiento matemático. Esto que es muy cierto está en contraposición con el escaso saber matemático que poseen los estudiantes al inicio de sus carreras de pregrado, de modo que la realización de dichos cálculos, usando lápiz y papel está plenamente justificada por esta sencilla e importante razón, además depender de manera casi exclusiva de los medios informáticos también trae sus consecuencias que están a la vista, como no poder resolver un simple cálculo que bien puede realizarse sin estos medios.

- La competencia para *resolver problemas* es una de las habilidades fundamentales que deberían adquirir los estudiantes en su período de escolaridad, de ello no se puede inferir, sin embargo, que dicha habilidad será vital para enfrentar con éxito los problemas de la vida, que sin duda son de otro tenor, pero al menos algunas de las estrategias usadas en su solución podrán ayudarles a abordar un problema humano con otros recursos, como los que proveen las estrategias insinuadas por Polya.

  Textualmente:

  > *Lo realmente importante no es dar con la solución, sino más bien abordar caminos o el camino, según sea el caso, que conduzca a la solución del problema.*

En (Abarca, 2007) la autora le da una gran importancia a la función que realizan las acciones que se desarrollan durante el proceso de resolución de problemas considerando que el predominio de la fase de orientación debe extenderse aún hasta la búsqueda de las vías de solución, pues a pesar de ejecutarse las acciones descritas en las técnicas o mediante el uso de estrategias propias, la función principal de esas acciones es la de orientar en esa búsqueda. Igualmente plantea que el control no solo se debe realizar sobre el resultado final, sino en el proceso mismo de la resolución del problema, para evitar fracasos. Para tener éxito en la resolución de problemas es necesario trabajar sobre la habilidad matemática que en algunos casos es innata, pero en muchos otros se puede ir *limando* con estrategias y métodos que ayuden al estudiante a ser analítico.

Esto da una luz, en ese sentido, de que el enfoque didáctico que se requiere plantee incorporar como método la problematización no discontinua, la formulación de conjeturas y la revisión sistemática de los conocimientos adquiridos, utilizando trabajo colaborativo para el análisis y la discusión, así como técnicas expositivas y de indagación, apoyadas con recursos audiovisuales y tecnológicos (computadora, calculadora, etc.), procurando que la relación entre el estudiante y el objeto sea constructiva. Por ejemplo, en las actividades propuestas en las unidades de aprendizaje se utilizará un método híbrido de los métodos de Polya y Schoenfeld para la resolución de problemas pues estos métodos ayudan al estudiante a organizar sus conocimientos, mediante un dialogo alumno–problema tomando en cuenta, inclusive, la parte afectiva.

El trabajo de Schoenfeld basado en el trabajo de Polya de (*Cómo plantear y resolver problemas*, 1945) le imprime un toque más humanista, hace la observación de que las experiencias vividas por el sujeto (el estudiante en nuestro caso) son indispensables para el inicio de la resolución de ciertos problemas, dicho lo anterior, no cualquiera podría resolver problemas complejos sin antes haber pasado por ciertas experiencias matemáticas e incluso sociales. Al seguir con el método (Polyano, por cierto), se percibe que el sujeto aun utilizando todo su potencial heurístico, le hace falta tener el don, o mucha experiencia para saber utilizarlas.

Además, plantea la idea de que las creencias que tenemos de cómo deben ser las matemáticas, van a cambiar rotundamente en un futuro, la naturaleza del aprendizaje de las matemáticas que las clasifica en *lo que es posible*, *lo que es deseable* y *cuál es el mejor método*, nos hace reflexionar a donde queremos llegar. Podrán haber algunos que desde que nacen *Natura* les brinda herramientas especiales de manera que solo necesiten empujones para sobrellevar los problemas a los que se van a enfrentar (incluyendo el campo matemático) pero habrán otros (la mayoría, en nuestra realidad nicaragüense) que necesitarán de una mayor atención incluyendo aquellos con *desesperanza aprendida* y es esto donde Schoenfeld centra su atención.

La *desesperanza aprendida* (Seligman, 1975) en el contexto educativo es una sensación experimentada por los estudiantes de que sin importar lo que hagan ya están condenados al fracaso. De tal forma, la desesperanza aprendida es el resultado de tres tipos de déficit: emocional, cognoscitivo y afectivo, y con frecuencia provoca en los estudiantes depresión, ansiedad y apatía en situaciones académicas. De manera que la desesperanza aprendida es un peligro muy serio para los estudiantes con problemas de aprendizaje, antecedentes de fracaso escolar y para aquellos que son víctimas de discriminación por diversos motivos (género, raza, orientación, etc.) llegándose a convertir en un círculo vicioso. Consecuentemente, las conductas de los estudiantes se deben orientar principalmente a evitar el fracaso escolar.

Por ello, la selección de Schoenfeld para la resolución de problemas pues él incluye entre sus dimensiones de estudio la parte motivacional, las preconcepciones y sus conocimientos adquiridos. Esta forma de resolver problemas, lo hace al estudiante más crítico, más observador y analítico.

1.3 Planteamiento del problema

Como se dijo anteriormente, es en el año 2016 que la Universidad Nacional Agraria estructura su nueva oferta académica en la cual oferta la carrera Ingeniería agrícola. Respecto a esto en el apartado IV Oferta Académica 2016 y su fundamentación epistemológica dice:

> *La ingeniería agrícola estudia el desarrollo de tecnologías en las unidades de producción agrícolas y pecuarias para la planificación, diseño, construcción, supervisión, ejecución, manejo y aprovechamiento de sistemas de riego y drenaje, maquinaria e implementos agrícolas, obras de conservación de suelos, aprovechamiento de tecnologías energéticas, obras civiles como infraestructuras agrarias (bodegas, silos, caminos rurales, puentes) y obras hidrotécnicas (pequeñas presas, pozos, vertederos, canales de riego y drenaje) de tal forma que*

se contribuya al mejoramiento de la calidad de vida de los diferentes sectores de la sociedad, tomando en cuenta su entorno natural y considerando los avances tecnológicos sobre clima, agua y suelo para ser utilizados en procesos productivos sostenibles de manera racional , eficiente y con estudios de impacto ambiental.

Esto lleva al ingeniero agrícola como profesional a utilizar las matemáticas, las matemáticas aplicadas, la física, la química y otras ciencias tanto para el desarrollo de tecnologías, como para el manejo eficiente y productivo de recursos y fuerzas de la naturaleza en beneficio de la sociedad. Por ello en el plan de estudio de la carrera Ingeniería agrícola se define en el segundo semestre el módulo *Matemáticas aplicadas a las Ciencias agrícolas* en cuyo PMS se especifica exactamente las áreas de las matemáticas y los contenidos a desarrollar en función de las competencias que se desean alcanzar con su estudio.

Razón por la cual se plantea la necesidad de un documento de base para este módulo que permita al estudiante desarrollar las competencias esperadas así como la adquisición de los conocimientos de la Matemática útiles para la descripción, modelización y resolución de problemas analíticos de los fenómenos biológicos, físicos y químicos relacionados con su formación profesional y que son inherentes al programa modular asociado.

1.4 Justificación de la investigación

Teniendo presente lo expuesto en el parágrafo anterior, esta nueva transformación curricular exige la elaboración de un material didáctico que brinde todas las herramientas que permitan al estudiante de la carrera de ingeniería agrícola resolver problemas inherentes al campo agrícola asumiendo una formación plural e integradora a las demandas que generan las situaciones laborales en este contexto.

La idea de una formación integradora exige la formación y tratamiento de una base conceptual satisfactoria y pertinente de tal manera que el estudiante promocionado del módulo Matemática aplicada a las Ciencias agrícolas sea capaz de tomar decisiones

ejerciendo un análisis crítico en la resolución de problemas determinados presentes en otras áreas como Hidráulica, Mecánica de fluidos y Termodinámica, por citar algunas.
Se debe reconocer lo provechoso del enfoque por competencias pues esto permitirá hacer más tangible la aplicabilidad del tratamiento conceptual y práctico de los contenidos abordados y su importancia en el posterior desarrollo de los módulos subsecuentes vinculados directamente al área de matemática. Lo que hace palpable la necesidad de elaborar un material didáctico con el debido tratamiento que pueda solventar los requerimientos establecidos en el PMS.

Si bien desde el punto de vista curricular, cada módulo del plan de estudios de la carrera ingeniería agrícola mantiene una relación vertical y horizontal con el resto, el enfoque por competencias reitera la importancia de establecer este tipo de relaciones al promover el trabajo interdisciplinario, en similitud a la forma como se presentan los hechos reales en la vida cotidiana y/o el campo laboral.

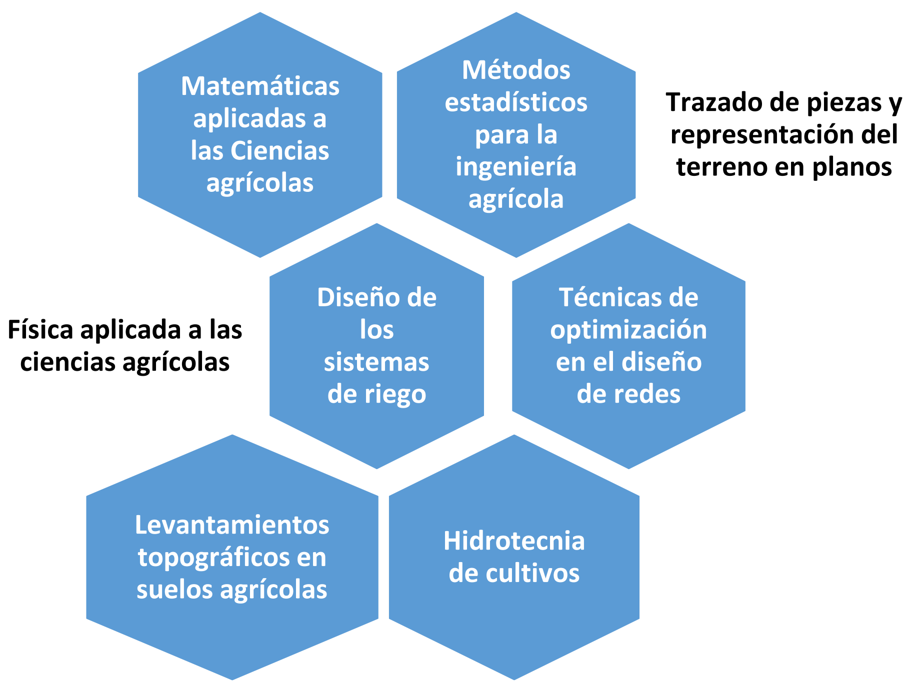


Fig. 1. Módulos afines al área de Matemática

En este caso, el módulo de Matemática aplicada a las Ciencias agrícolas alimenta otros módulos del campo de las Ciencias agrícolas y constituye un apoyo en cuanto a los módulos experimentales. Por ejemplo, en el módulo *Física aplicada a las Ciencias agrícolas* se requiere de herramientas matemáticas para el estudio del movimiento (rectilíneo uniforme, circular, parabólico), fuerza, variaciones de calor en un cuerpo, volumen, palancas, óptica, etc.; en el *módulo de Cultivos* para el análisis del aumento o disminución de poblaciones de bacterias, o para la determinación de la duración del efecto de un fertilizante; en *Optimización*, para obtener soluciones óptimas, o realizar predicciones sobre el efecto de variables económicas en la producción, la exportación, etc.

Por lo anterior, se realiza este estudio descriptivo (explicativo) para responder a qué enseñamos y cómo lo enseñamos con un enfoque centrado en el aprendizaje que privilegia la actividad permanente y sistemática del estudiante para guiar la acción pedagógica con un sentido orientador y facilitador.

El método central será la resolución de problemas, el estudio de modelos y el análisis de estudios de casos. Los casos deben ser inherentes al campo agrícola pero al nivel del requerimiento del estudiante en ese momento con orientaciones expositivas sobre los procedimientos a utilizar en la etapa de cálculos dentro del proceso de resolución de problemas en los ejemplos a abordar.

1.5 Alcances de la investigación

1. Estudio exploratorio.

   De la revisión de la literatura se asevera que son pocas las investigaciones en el área de matemática donde tratan estos conceptos enfocados en la resolución de problemas asociados al campo agrario. Por lo cual, existe tempranamente un alcance exploratorio de esta investigación (lo que justifica el uso del método de análisis documental).

2. Estudio descriptivo.

   Es una tarea fundamental realizar la descripción de la vinculación conceptual actual del módulo de Matemática y los módulos de la carrera de ingeniería agrícola asociados a las matemáticas en el proceso de enseñanza aprendizaje. Esta descripción consta de la siguiente estructuración:

   - Exposición breve de los contenidos desarrollados por el módulo.
   - Localización dentro de la malla curricular de los módulos vinculados.
   - Identificación de la necesidad de estos contenidos en otros módulos de la carrera.
   - Análisis de las respuestas a instrumentos aplicados.

3. Estudio explicativo.

   El diseño estructural en sí del material didáctico del módulo así como los procedimientos de implementación de las actividades del mismo.

1.6 Componentes del Diagnóstico y sus resultados

Con el enfoque por competencias dentro del nuevo modelo educativo, la Universidad Nacional Agraria se ve obligada a hacer esfuerzos por cambiar la enseñanza tradicional de las matemáticas por una acorde a las necesidades del nuevo modelo. Es por ello que se vuelve oportuno diagnosticar el papel (incidencia) de las matemáticas dentro del plan de estudio de la carrera de Ingeniería agrícola, haciendo énfasis en los materiales puesto que el diagnóstico nos permite determinar cualquier situación y sus tendencias en base a la información recopilada.

Desde un enfoque cualitativo se enmarcó el diagnóstico para tratar de comprender la naturaleza del problema de investigación a partir de entrevistas, descripciones, puntos de vistas de los especialistas y reconstrucciones de hechos. Mismos que mejor se acoplan al propósito del presente estudio sin perder la brújula con respecto al alcance descriptivo en busca de las caracterizaciones de procesos u objetos en cuestión que se someterán a análisis.

El diagnóstico se desarrolló en la Universidad Nacional Agraria, en base a que el módulo se impartirá en el segundo semestre de la carrera Ingeniería agrícola administrada por el Departamento de Ingeniería agrícola. El personal docente que labora en esta casa de estudios (23 docentes, permanentes y horarios) tiene un nivel académico que oscila entre licenciaturas, especializaciones y maestrías.

Fig.1 Parte del colectivo del departamento de Ingeniería agrícola

Producto del enfoque cualitativo de la presente investigación, se hizo una selección intencionada de los informantes, de manera que fuera una muestra pertinente donde los docentes tuvieran la competencia académica (conocimientos y habilidades) a la disposición de la investigación. En la práctica de la evaluación mediante el criterio de especialistas ha tenido aceptación la determinación de la competencia utilizando la autovaloración de la misma por el propio experto.

Para el desarrollo de las entrevistas se utilizó una guía como instrumento para registrar toda la información proporcionada por cada uno de los especialistas. El objetivo fue profundizar sobre el proceso de E–A como se dijo antes, especialmente sobre los materiales didácticos y actividades que utiliza el docente al impartir los contenidos de Matemática.

Una vez que se recolectó la información mediante las entrevistas con los especialistas, se hizo la transcripción fiel de todos los datos obtenidos, para su posterior estudio y extrayendo aquellos datos primordiales para la investigación, conocer la percepción de los docentes que han impartido los contenidos de matemáticas presentes en el módulo Matemáticas aplicadas a las ciencias agrícolas destacando los factores que favorecen y poco menos el proceso de E–A del módulo mediante la descripción de relaciones entre la filosofía del desarrollo de los contenidos en el PMS y lo hecho por el docente en la práctica.

También se hizo uso de la investigación documental para identificar la relación que existe entre el Plan de Estudios de la carrera de Ingeniería agrícola y el Programa del Módulo de Matemáticas aplicadas a las ciencias agrícolas. Este estudio será beneficioso para los docentes que impartan este módulo puesto que con los resultados obtenidos (diagnóstico y material) podrá tener elementos de juicio para adoptar medidas de acción para:

- ✓ instrumentar actividades pertinentes de intervención didáctica,
- ✓ reducir los índices de bajo rendimiento académico y de reprobados,
- ✓ mejorar el grado de aprendizaje significativo de los estudiantes.

Posterior a esto, se realizó un análisis intensivo de la información, lo que brindó observaciones importantes y relevantes para el diseño del material didáctico de manera que incluya elementos que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes del módulo Matemáticas aplicadas a las ciencias agrícolas.

Para el diseño del material metodológico se realizaron revisiones bibliográficas de propuestas didácticas y otros materiales educativos del área de Matemáticas específicamente lo referente a Trigonometría y Cálculo (Diferencial e Integral). Es importante destacar que con el objetivo de que la presente propuesta didáctica sea lo mejor posible fue revisada por los docentes coordinadores de las asignaturas de Matemática I y II del Currículo anterior.

Del análisis de la información se concluyó:

1. Los dos documentos oficiales, el Plan de estudio de la carrera de Ingeniería Agrícola y el Programa del Módulo de Matemáticas aplicadas a las ciencias agrícolas, están relacionados en lo que se pretende lograr con el estudiante una vez egresado de la carrera. Sin embargo, el tiempo asignado al módulo es muy ajustado en relación a lo que se quiere lograr con él. El material didáctico deberá presentar actividades que propicien la participación activa del estudiante administrando el tiempo correctamente.

2. El enfoque metodológico que asume el programa modular silábico se corresponde con el ME‒UNA bajo el enfoque por competencias laborales. Se centra en el aprendizaje mediante la resolución de problemas y el estudio de casos.
3. Las conferencias participativas, el desarrollo de clases prácticas, las asignaciones y revisiones de tareas, y la atención individualizada se realizan según lo planificado semestralmente en el sílabo.

4. Las actividades y los materiales didácticos existentes (del modelo anterior) no favorecen al nuevo modelo pedagógico, antes los planes de estudios se organizaban en asignaturas por objetivos no en módulos por competencias laborales. Lo cual aleja de contexto los anteriores materiales educativos que propiciaban un proceso de E‒A conductual y calculista. No hay resolución de problemas aplicados. El material didáctico deberá presentar actividades de resolución de problemas aplicados.

5. Algunos docentes tratan de contextualizar los contenidos en aplicaciones reales del perfil una vez que el estudiante domina la resolución de ejercicios mecánicos. Se debe mejorar la actitud de los docentes ante el cambio del nuevo currículo y asumir la planificación de manera responsable y proactiva.

Capítulo II

BASES DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA: PERSPECTIVA TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 E–A en la UNA: sus elementos

En la enseñanza basada en la construcción del conocimiento, el profesor introduce a sus estudiantes en situaciones seleccionadas o diseñadas de modo tal que presenten, en forma implícita u oculta, los principios de conocimiento que desea enseñarles (Stenhouse, 1987).

Es por ello que el proceso de aprendizaje significativo tiene como base la metódica constructivista, en la que toda actividad educativa debe generar una circunstancia que induzca a revisar las estructuras previas del conocimiento y obligue a un reacomodo del conocimiento previo para asimilar el nuevo según la situación diseñada por el docente.

Según el actual modelo de la UNA, en su diseño curricular el aprendizaje es concebido como un proceso en los que intervienen las siguientes fases:

1°. Equilibrio inicial

Se valoran los conocimientos previos del estudiante convirtiéndose en un diagnóstico del estado inicial en relación al área de conocimiento a trabajar en el semestre (evaluación diagnóstica).

2°. Desequilibrio

Se confronta el conocimiento previo con uno nuevo, que permitirá construir un conocimiento actualizado que sustituye, modifica o completa lo logrado previamente, el cual debe responder a una planificación previa de los contenidos a desarrollar en los módulos.

3°. Acomodamiento

Es el proceso psicológico en el que el sujeto interioriza la nueva situación que se evidenciará en los logros alcanzados mediante la evaluación formativa.

4°. Reequilibrio

Es la aplicación del nuevo conocimiento de manera contextualizada, convirtiéndose reiteradamente en un equilibrio inicial que lo prepara a aprender durante toda la vida, evidenciándose en los logros alcanzados mediante la evaluación formativa y sumativa.

Es así que el módulo se corresponde con la parte práctica en el diseño curricular por competencias. El módulo (responde a la competencia/descriptor) se encuentra integrado por **unidades didácticas** (responden a las subcompetencias), las cuales a la vez están constituidas por **actividades de aprendizajes** (responden a los indicadores de logros) donde se abordan los distintos contenidos.

Las actividades de aprendizajes en cada sesión deben estar organizadas explícita o implícitamente en tres momentos: Inicio, desarrollo, y cierre.

Las **actividades de inicio** son aquellas, a partir de las cuales es posible identificar y recuperar las experiencias, los saberes, las preconcepciones y los conocimientos previos de los estudiantes. A partir de tal identificación y recuperación, se realizan las **actividades de desarrollo** mediante las cuales se introducen nuevos conocimientos científico–técnicos para relacionarlos con los identificados y recuperados en las actividades de apertura. Las **actividades de cierre** son aquellas que permiten al educando hacer una síntesis de las actividades de apertura y de desarrollo, síntesis entendida como aquella que incluye los conceptos fundamentales y complementarios, construidos durante estas actividades.

Es absolutamente necesario abrirle las puertas del mundo de los procedimientos de tal manera que sea posible desarrollar la dimensión procedimental o metodológica. Por lo tanto, durante la realización de cada actividad es primordial que, además se recobren e identifiquen los procedimientos que utilizan o conocen los educandos para, en las actividades de desarrollo, introducirlos a nuevos conocimientos procedimentales o metodológicos. En las actividades de cierre, la síntesis consiste en dar cuenta no sólo de los contenidos fácticos, sino también de los procedimentales. Como consecuencia, durante el desarrollo de *cada* actividad es primordial, además de desarrollar los contenidos fácticos y procedimentales, que en cada una de las actividades se desarrollen actitudes, que les permitan lograr un aprendizaje integral.

El (ME–UNA, 2012) exige que las actividades de aprendizajes sean integradoras, es decir:

1. que respondan a los intereses de los estudiantes,
2. que permitan relacionar tales intereses con las exigencias y los retos comunitarios, estatales, regionales, nacionales y mundiales,
3. que permitan relacionar la vida cotidiana con el conocimiento científico–técnico,
4. que relacionen, en torno al aprendizaje, más de un contenido fáctico de una misma área del saber,
5. que permitan relacionar contenidos fácticos o conceptuales de más de un área,
6. que desarrollen contenidos procedimentales, y
7. que promuevan el desarrollo de valores en el estudiante.

Las actividades de aprendizaje deben promover:

1. La realización en forma integrada de operaciones intelectuales y actividades afectivas.
2. La participación activa de los estudiantes en la construcción de sus procesos de aprendizaje.
3. El trabajo en equipo, la confrontación y la construcción conjunta.
4. La relación teoría–práctica.
5. El desarrollo de competencias en torno a la resolución de problemas y estudios de casos en los cuales no sólo opere la racionalidad técnica sino también la comprensión del sentido de la situación.
6. El trabajo sobre los aspectos actitudinales del aprendizaje, vinculados con los conceptos y procedimientos como parte de un todo.
7. El aporte integrado de las distintas disciplinas en la construcción de las capacidades propuestas a partir de la idea de que las capacidades traducen, de hecho, saberes interdisciplinarios.

8. La flexibilidad y la creatividad en relación con tiempos variados, espacios diversificados y condiciones contextuales cambiantes.

El uso combinado de estrategias dará lugar a que en el desarrollo del módulo se realicen distintos tipos de actividades. Entre ellas:

- Conferencias expositivas por parte de los docentes.
- Exposición por parte de los estudiantes.
- Elaboración de informes.
- Realización de Investigaciones.
- Trabajos colaborativos.
- Trabajos individuales.
- Seminarios (y/o debates grupales).
- Estudios de casos.

2.2 Método de Schoenfeld

Allan Schoenfeld (1947 –) plantea en su trabajo (Schoenfeld, 1994) la existencia de cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas:

1. **Dominio del conocimiento**

   Incluye definiciones, hechos y procedimientos utilizados en el dominio matemático. Para fundamentar teóricamente, es necesario que el estudiante deba poseer conocimientos de todos los temas anteriores como actuales.

2. **Estrategias cognoscitivas**

   Incluyen métodos heurísticos tales como la descomposición de un problema en simples casos, establecer metas relacionadas, invertir el problema y dibujar diagramas. Este tipo de estrategias tienen como función principal ayudar a alcanzar la meta de cualquier empresa cognitiva en la que se esté ocupado.

3. **Estrategias metacognoscitivas**

   La metacognición consiste en ese “saber” que desarrollamos sobre nuestros propios procesos y productos del conocimiento, se relacionan con el monitoreo empleado al resolver el problema, por ejemplo, el proceso de selección de una estrategia y la necesidad de cambiar de dirección como una evaluación permanente del proceso.

4. **Sistemas de creencias**
   Incluye las ideas que tienen los estudiantes acerca de las matemáticas y cómo resolver problemas. Sus miedos, sus temores, sus creencias de no poder resolver solos los problemas o que solo las personas inteligentes pueden resolver problemas.

Además Schoenfeld planteó que la principal meta en el aprendizaje de las matemáticas es identificar las conexiones y entender el significado de las estructuras matemáticas. Para lograr estas metas los estudiantes tienen que discutir sus ideas, negociar, especular acerca de los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o a desaprobar sus ideas. El estudiante debe recordar que: encontrar una solución de un problema matemático no es el final, es apenas el principio, puesto que con ayuda de la resolución de un problema, podrá resolver otros problemas y buscar extensiones y generalizaciones.

El profesor debe ayudar al estudiante a explotar todo lo que sabe y usar sus conocimientos en forma efectiva, también se debe recordar que el principal objetivo en la instrucción matemática es ayudar a los estudiantes a ser autónomos, y se deben incorporar estrategias para aprender a leer, conceptuar y escribir argumentos matemáticos.

El hecho de aprender a escribir los argumentos, Schoenfeld descubre la quinta dimensión “actividades de aprendizaje” donde los estudiantes son expuestos a estrategias que los pueden ayudar a leer argumentos matemáticos. Por ejemplo, los estudiantes son motivados a organizar sus argumentos en una secuencia de tres fases: Convéncete a ti mismo, convence a un amigo y entonces convence a un enemigo.

2.3 Modelo de Polya

El modelo de G. Polya (Polya, 1987) considera cuatro etapas en la resolución de problemas:

1. **Comprensión del problema.**

   Es muy importante que el alumno comprenda el problema, pero además debe desear resolverlo. El maestro debe cerciorarse de ello pidiéndole al alumno que repita el enunciado sin titubeos. Rara vez el docente puede evitar hacer las siguientes preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?

   El alumno debe familiarizarse con el problema, tratando de visualizar el problema como un todo, tan claramente como pueda. En un principio los detalles no son importantes. La atención dedicada al problema puede también estimular su memoria y prepararla para recoger los puntos importantes.

   El docente puede ayudar al estudiante en la comprensión del problema recurriendo a preguntas que le ayuden a aislar las partes principales del problema.

2. **Concepción de un plan.**

   Esta etapa consiste en poner en pie un plan, concebir la idea de la solución, siendo ésta una de las etapas más cruciales en el proceso de resolución de problemas, y también la más importante, porque de ella depende el éxito o fracaso en la resolución de un problema. Para lograrlo hace falta toda una serie de condiciones como por ejemplo: conocimientos ya adquiridos para fundamentar claramente cada paso que se dé.

   La concepción del plan puede ser estructurada poco a poco, y después de algunos ensayos como ayuda, tener una idea brillante. Es importante que el docente conduzca al alumno a esa idea brillante ayudándole, sin por ello imponérselas. Las preguntas, usualmente son:

a. ¿Conoce algún problema relacionado?
b. Mire bien la incógnita; trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar.
c. ¿He aquí un problema relacionado con el suyo y ya resuelto? ¿Puede usted hacer uso de él?
d. ¿Puede enunciarse el problema de manera diferente?
e. Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema relacionado con él.
f. ¿Ha empleado todos los datos? ¿ha hecho uso de toda la condición?

El docente debe ayudar al alumno a encontrar una idea que le sea útil, tal vez una idea decisiva, haciéndole ver el conjunto del razonamiento o una parte de él.

3. **Ejecución del plan.**

Es la puesta en marcha del plan concebido en la etapa anterior, en esta etapa ya se obtiene en sí el modelo matemático y se sabe con mayor claridad que es lo que se está buscando y qué es lo que se quiere.

El plan proporciona una línea general. Se debe tener la seguridad de que los detalles encajen bien en esa línea. Se deben examinar los detalles uno tras otro, hasta que todo esté bien claro, porque en algún rincón podría disimularse un error.

4. **Visión retrospectiva.**

Esta etapa consiste en la verificación de los resultados, cosa que hasta el mejor alumno casi siempre omite, siendo ésta fase la más instructiva del trabajo, porque gracias a ella se puede no solo hacer una visión retrospectiva, sino también dar una mirada al futuro y analizar que aplicaciones puede tener la resolución del problema.

Al reconsiderar la solución, reexaminar el resultado y el camino que les condujo a ella, puede el alumno consolidar más aún sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes, y buscar otras vías de solución más rápidas y así mejorar la solución ya encontrada. En la resolución de problemas no se puede nunca afirmar que uno solo es el camino, siempre hay todavía algo que hacer.

2.4 Híbrido Polya-Schoenfeld

Para mejorar las habilidades en la resolución de problemas, (Abarca, 2007) plantea una estrategia didáctica, un híbrido de los métodos de Polya y Schoenfeld, mediante un conjunto de preguntas y acciones que se deben hacer durante la resolución de problemas, que con la práctica el estudiante podrá apropiarse de ella en un diálogo estudiante–problema. En este híbrido, las estrategias de Polya y Schoenfeld, fueron fortalecidas con las estrategias: justificación por pasos, el método comparativo, analogías, hábitos de estudio y los talleres grupales; y los mapas conceptuales que ayudan a organizar sus conocimientos.

En la siguiente página se muestra un resumen de la estrategia didáctica basada en el híbrido de los métodos de Polya y Schoenfeld que se emplea en la resolución de problemas. Este esquema (figura 2) nos muestra una correcta organización del proceso de aprendizaje que garantiza los componentes funcionales de toda actividad: la motivación, la orientación, la ejecución y el control; esquema que evidentemente está basado en las estructuraciones de los métodos de Polya y Schoenfeld.

La resolución de problemas es una escuela de la voluntad. Resolviendo problemas que parecen difíciles el estudiante aprende a perseverar pese a los fracasos, apreciar el menor de los progresos, a lograr la idea esencial, hacer un llamado a toda su concentración. Si el alumno no encuentra en esta escuela la oportunidad de familiarizarse con las diferentes emociones que ofrece el esfuerzo con vista a la solución, su educación matemática habrá fallado en su objeto más esencial.

	Método	Acción	
¿Quiero resolver el problema? ¿Con qué datos cuento?	Comprensión Releo	Motivar Eliminar creencias Leer y Releer Identificar datos Leer analíticamente Esbozar un diagrama Verificar los datos Asignar variables	ORIENTACIÓN
¿Puedo expresarlo de otra manera?		Leer nuevamente Aplicar estrategias cognoscitivas y metacognitivas Modelar la función y/o remodelar	
¿Qué estrategias utilizo? ¿Qué orientación sigo?	Concebir un plan	Identificar el tipo de problema Fundamento teóricamente Reducir en casos más simples Escribir ecuaciones principales y secundarias o auxiliares Eliminar alternativas no adecuadas Comparar con otros problemas	EJECUCIÓN
	Modelar la función Ejecutar	Justificar con propiedades y definiciones Haga cálculos necesarios	
¿Es correcto lo que hice?	Visión retrospectiva	Verificar si está bien el resultado Comparar con modelo ideal Analizar la solución	CONTROL

Fig. 2. Estructura general de la estrategia didáctica. Fuente: (Abarca, 2007)

Esta estrategia general para la resolución de problemas se puede plasmar de la siguiente manera en dos perspectivas:

Estudiante

1°. Leer el problema por lo menos dos veces.

2°. Analizar y tratar de entender el problema
   - (i) Verificar cuales son los datos
   - (ii) ¿Cuál es la condición? (En base a qué se resolverá el problema)
   - (iii) ¿Cuál es la incógnita? (lo que nos piden resolver)
   - (iv) Esbozar en una gráfica/diagrama el problema
   - (v) Colocar los datos en el diagrama utilizando variables adecuadas

3°. Plantear la estrategia de resolución del problema
   - (i) Identificar el tipo de problema
   - (ii) Dividir el problema en sub-problemas más sencillos (Escribir las ecuaciones principal y secundarias)
   - (iii) Eliminar las alternativas que no sean adecuadas

4°. Ejecutar la estrategia
   - (i) Modelar la función (significa escribir la función principal en función de la secundaria)
   - (ii) Aplique propiedades o teoremas de ser necesario

5°. Obtener y verificar la respuesta
   - (i) Es necesario preguntarse si se tienen las magnitudes correctas.
   - (ii) Probar un camino alternativo a la respuesta
   - (iii) Interpretar los resultados

6°. Visión retrospectiva
   - (i) Verificar los resultados
   - (ii) Preguntarse si el problema resuelto puede servir para resolver otros problemas.

Docente

1°. Caracterizar el grupo de estudiantes mediante una evaluación diagnóstica, esto podrá servir para verificar la solidez de conocimientos que tiene el estudiante, y su nivel de independencia en su actuación.

2°. Motivar al estudiante para que pueda sentirse en confianza y participe activamente en la interpretación, análisis y resolución de los problemas.

3°. Atender a los estudiantes en forma diferenciada según sus necesidades en su aprendizaje.

4°. Sistematizar la enseñanza con ayuda de mapas conceptuales y otros instrumentos pedagógicos que faciliten la fijación de cada modo de actuar.

5°. Formular preguntas que constituyan medios heurísticos para la búsqueda y el razonamiento matemático.

6°. Utilizar la ejemplificación para que el estudiante tenga un punto de partida en la resolución de problemas.

7°. Estimular el método reflexivo, métodos metacognitivos y cognitivos, para que de ese modo los estudiantes analicen, comparen, hagan analogías, generalicen y discutan sus resultados.

2.5 El enfoque por competencias

El enfoque por competencias surge como una alternativa para dar respuesta a las demandas de una sociedad, que muchos llaman hoy día la sociedad del conocimiento o de la información, en la que una de sus mayores exigencias es la búsqueda de una articulación entre la educación y la sociedad, en este último caso, en particular con el ámbito laboral, cuya finalidad sería que los estudiantes obtengan una formación acorde con los requerimientos sociales y que a su vez promueva una participación más efectiva en el sector productivo.

Las exigencias de este nuevo modelo de sociedad remiten a un cuestionamiento muy serio sobre el rol de las instituciones educativas, a las que les asigna la responsabilidad de propiciar espacios de aprendizaje, donde los estudiantes puedan aprender a aprender y así generar nuevos conocimientos, es decir que también se promueva la educación continua.

2.5.1 El enfoque por competencias en las universidades

Al respecto, (Salinas, 2006) menciona que “las instituciones universitarias se encuentran en transición debido a los cambios en el mundo productivo, la evolución tecnológica, la sociedad de la información, la tendencia a la comercialización del conocimiento, la demanda de sistemas de enseñanza–aprendizaje más flexibles y accesibles a los que pueda incorporarse cualquier ciudadano a lo largo de la vida”.

La situación que se describe debe entenderse dentro del contexto de la globalización que “…no es sólo, ni principalmente interdependencia económica, sino la transformación del tiempo y del espacio de nuestras vidas, principalmente a través de la interdependencia cibernética. Un mundo de comunicación electrónica instantánea en el que están implicados todos lo que viven en las regiones más pobres”. (Peralta, 2001).

Debemos ser conscientes de que ya no vivimos en el mundo moderno, sino en el mundo posmoderno, caracterizado por una nueva manera de pensar que ya ha dejado su huella en las artes, las humanidades y la literatura, así como en la filosofía, las ciencias exactas y las ciencias sociales. Ha ocurrido un cambio patente de valores que ha alterado la conciencia pública. Por lo tanto ha surgido en los países altamente industrializados un nuevo yo posmoderno que debemos tener en cuenta si queremos enseñar bajo esta condiciones y circunstancias cambiadas.

En pleno siglo XXI, los países de la región latinoamericana enfrentan el desafío de avanzar aceleradamente por la vía del crecimiento, al tiempo que se deben incorporar a una nueva economía sustentada en el conocimiento y en la denominada cultura global.

De la Conferencia Mundial sobre la Educación Superior para el Siglo XXI realizada en 1998 se decidió:

- Elevar la calidad en la formación del recurso humano.
- Cambiar la estructura tradicional de las carreras universitarias: no responde a las nuevas exigencias de la demanda social.

- Miren más hacia fuera,
- Aplicar los conocimientos con la práctica.
- Generar y fomentar la educación en valores.

El informe de IESALC 2000 – 2005 destaca dos reformas sustanciales que está viviendo la universidad latinoamericana:

- ✓ Reformas Estructurales (en mayor cuantía)
- ✓ Reformas de los modos de pensar.

En el año 2009 se realiza en París la Conferencia Mundial de Educación Superior, y casi diez años después los temas siguen vigentes y ampliados:

- Compromiso de la universidad con el desarrollo humano y social, la responsabilidad social de las universidades, entre otros.

(Barnett, 2001) analiza los *límites de la competencia* frente a la intersección entre el conocimiento, la educación superior y la sociedad, él las considera tres fuerzas con cierto grado de autonomía pero que interactúan entre sí. Por ejemplo, en el eje Sociedad–Conocimiento (ver figura 3), a la sociedad le interesan formas de conocimiento que tienen uso en el mercado laboral especialmente operacionales y computacionales, por su parte, el conocimiento tiene que recordar a la sociedad el potencial espectro de formas de conocimiento. En el eje Educación Superior – Conocimiento, la Educación Superior ejerce influencia porque le corresponde promover la comprensión del conocimiento a través de la enseñanza y el desarrollo del conocimiento a través de la investigación, por su parte, la forma cómo se genera el conocimiento (epistemología) ejerce un impacto sobre el currículo de la Educación Superior, es necesario recordar en el eje Educación Superior – Sociedad, por un lado, que la universidad ya no tiene el monopolio de la transmisión del conocimiento y por otro que la Educación Superior toma en cuenta las señales de la sociedad en cuanto a sus requerimientos.

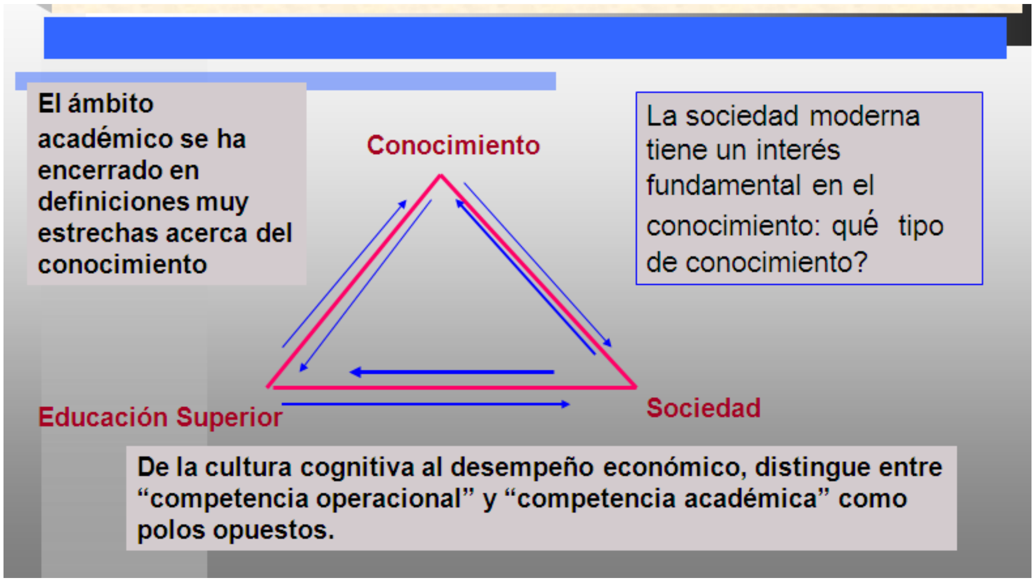


Fig. 3. Retos que debe asumir la institución universitaria

De esta manera, los cambios culturales deben ser tomados en cuenta en el campo de la educación, de manera que desarrollen proyectos curriculares que respondan a la posmodernidad con propuestas mucho más flexibles donde el currículo se visualice como un agente de cambio, lo que provoca la génesis del enfoque por competencias.

La *competencia* tiene diferentes acepciones desde el campo laboral o el educativo. En el primer caso, la gran mayoría de definiciones apuntan a la caracterización de ésta como aquel desempeño en situaciones laborales específicas, que por supuesto involucra un conjunto de capacidades y habilidades personales y sociales, necesarias para el trabajo en equipo. (Posada, 2004).

Por su parte, desde el campo educativo, se entiende por competencia aquella capacidad que solo puede ser demostrada en situaciones de evaluación educativa. Para (Orozco, 2006) el término incorpora, para lo efectos de su referencia a los procesos educativos, dos acepciones principalmente. Por una parte, remite a la idea de capacidad, habilidad, desarrollo de determinadas herramientas de orden cognitivo y pedagógico. Por otra, se asocia con la idea de competitividad, de desempeño, de suficiencia respecto al desarrollo de habilidades y al uso adecuado de las herramientas que facilitan el aprendizaje".

Barnett elaboró una tabla (Barnett, 2001) en la cual se identifican de manera precisa las diferencias entre estos dos tipos de competencias.

ASPECTO	COMPETENCIA LABORAL (OPERACIONAL)	COMPETENCIA ACADÉMICA (EDUCATIVA)
Epistemología	Saber cómo	Saber qué
Situaciones	Definidas pragmáticamente	Definidas por campo intelectual
Foco	Resultados	Proposiciones
Transferibilidad	Metaoperaciones	Metacognición
Aprendizaje	Experiencial	Proposicional
Comunicación	Estratégica	Disciplinaria
Evaluación	Económica	De verdad
Orientación hacia valores	De supervivencia económica	De la disciplina
Condiciones de límites	Normas organizativas	Normas del campo intelectual
Crítica	Para la mejor eficacia práctica	Para la mejor comprensión cognitiva

Tabla 1. Comparación de las competencias laborales y académicas según Barnett. Fuente: (Barnett, 2001)

Desde la óptica educativa se tienen dos percepciones de una competencia. De una visión conductista "competencia es una característica subyacente de un individuo que está causalmente relacionada con un estándar de efectividad y/o desempeño superior en un trabajo o situación" (Spencer & Spencer, 1993). De una visión constructivista "competencias son repertorios de comportamientos que algunas personas dominan mejor que otras, lo que las hace eficaces en una situación determinada. Estos comportamientos son observables en la realidad cotidiana del trabajo y en situaciones de test. Ponen en práctica, de forma integrada, aptitudes, rasgos de personalidad y conocimientos adquiridos" (Levi-Leboyer, 1997).

Sin embargo, una de las definiciones que ha sido de más frecuente uso en el contexto de la educación superior, es aquella que define la competencia como “el saber hacer en el contexto”, que involucra un manejo apropiado de conocimientos aplicables de manera oportuna y efectiva ante una situación determinada.

Fig. 4. Las competencias como resultado de aprendizaje

Otros aspectos a considerar para la definición de las competencias:

- Constituyen un conjunto de conocimientos, procedimientos y actitudes que de manera integrada le permiten al individuo un dominio de saberes que le faculta para actuar de manera eficiente en situaciones laborales.
- Las competencias se definen siempre en función de una acción, por lo tanto no prioriza en los recursos, sino más bien en la movilización de éstos.
- Es indispensable que las mismas sean evaluadas en procesos experienciales concretos, por ello no se trata de un simple entrenamiento.
- Siempre deben estar definidas en función de un determinado contexto.

Las competencias en su sentido más completo se entienden como:

- **Conocer y comprender** el conocimiento teórico de un campo académico, la capacidad de conocer y comprender.
- **Saber cómo actuar** en la aplicación práctica y operativa del conocimiento a ciertas situaciones.
- **Saber cómo ser** tomando en cuenta los valores como parte integrante de la forma de percibir a los otros y vivir en un contexto social.

2.5.2 Competencias en matemática

El proyecto α –Tuning para América latina estableció competencias genéricas y específicas para profesionales y estudiantes por áreas entre ellas, Matemática.

Las **competencias básicas** en matemática se relacionan con "el saber hacer en el contexto matemático, que no es otra cosa que el uso que el estudiante hace de la disciplina para comprender, utilizar, aplicar y comunicar conceptos y procedimientos matemáticos".

Las competencias matemáticas preparan a los estudiantes para utilizar la terminología correcta en formas de trabajo racional, el desarrollo del pensamiento lógico, en la resolución de problemas, así mismo, utilizar modelos y herramientas que contribuyen al entendimiento matemático, y el estímulo de la creatividad y la imaginación. También, favorecen el desarrollo del pensamiento crítico, inductivo y deductivo de los estudiantes, al desarrollar sus capacidades para modelar problemas y situaciones de la vida real en términos matemáticos.

Este tipo de competencias le permitirán al estudiante utilizar sus conocimientos matemáticos y su capacidad de razonamiento en un ambiente próximo a la vida cotidiana, para resolver problemas y situaciones vinculados a la realidad utilizando diferentes tipos de modelos (geométricos, simbólicos, físicos, mecánicos y topológicos) que describen un fenómeno real. Se pretende que los estudiantes entren en contacto, analicen, identifiquen, trabajen y abstraigan el contenido matemático del entorno cotidiano en que se desenvuelven, con el fin de comprenderlo mejor y poder desarrollar nuevas estrategias de acción sobre el mismo. Además de su aplicabilidad, constituye un lenguaje y marco indispensable para todas las ciencias, razón por la cual debe considerarse como un área prioritaria.

El abordaje de las matemáticas debe incluir elementos propios dentro de las estructuras conceptuales (datos culturales contextualizados, aplicaciones de los conceptos matemáticos) de manera que se presente no como un fenómeno intelectual aislado, sino como una forma específica de trabajo, desde un medio cultural más amplio, partiendo del conocimiento previo del estudiante. Así mismo debe permitirle formular y resolver problemas, utilizando las herramientas de la informática y las tecnologías disponibles en su entorno, lo que propiciará de una forma sencilla y eficaz el paso de la concreción a la abstracción y generalización, hasta llegar a la reconstrucción de conocimientos matemáticos.

Es importante recalcar que las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemáticas significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos.

En el conocimiento matemático se han distinguido dos tipos básicos: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. El primero está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué. Por su parte, el procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente.

Estos dos tipos de conocimiento (conceptual y procedimental) señalan nuevos horizontes para aproximarse a una interpretación enriquecida de la expresión ser *matemáticamente competente*. Esta noción ampliada de competencia está relacionada con el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo. De manera que se pueden determinar (no exhaustivamente) cinco procesos generales que respondan a esto:

1. **La formulación, tratamiento y resolución de problemas** suscitados por una situación problemática permiten desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas. Es importante abordar problemas abiertos donde sea posible encontrar múltiples soluciones o tal vez ninguna.

2. **La modelación.** Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también "una estructura"– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo.

3. **La comunicación.** La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos.

4. **El razonamiento.** Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas. En esas situaciones pueden aprovecharse diversas ocasiones de reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico–inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, al intentar

comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos.

5. **La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.** Este proceso implica comprometer a los estudiantes en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados "algoritmos", procurando que la práctica necesaria para aumentar la velocidad y precisión de su ejecución no oscurezca la comprensión de su carácter de herramientas eficaces y útiles en unas situaciones y no en otras y que, por lo tanto, pueden modificarse, ampliarse y adecuarse a situaciones nuevas, o aun hacerse obsoletas y ser sustituidas por otras.

(Miguel de Guzmán, 2005), señala que, más allá de las ramas tradicionales de las matemáticas: la aritmética y la geometría, en su devenir histórico "el espíritu matemático habría de enfrentarse con:

- la complejidad del símbolo (álgebra)
- la complejidad del cambio y de la causalidad determinística (cálculo)
- la complejidad proveniente de la incertidumbre en la causalidad múltiple incontrolable (probabilidad, estadística)
- la complejidad de la estructura formal del pensamiento (lógica matemática).

Conforme a estos planteamientos, la enseñanza de las matemáticas supone un conjunto de variados procesos mediante los cuales el docente debe planear, gestionar y proponer situaciones de aprendizaje matemático significativo y comprensivo –y en particular situaciones problema– para sus alumnos y así permite que ellos desarrollen su actividad matemática e interactúen con sus compañeros, profesores y materiales para reconstruir y validar personal y colectivamente el saber matemático.

2.6 La evaluación por competencias

La evaluación, en el proceso educativo es un instrumento que forma parte del proceso enseñanza–aprendizaje, imprescindible para apreciar el aprovechamiento del estudiante, verificar en qué medida ha logrado las competencias previstas y para que el docente mida su propia intervención educativa, reajustar así sus actividades subsiguientes.

La evaluación se convierte en un proceso más de la enseñanza– aprendizaje y presenta las siguientes características: formativa y formadora, continua, integral, sistemática, orientadora, cooperativa y flexible.

La evaluación por competencias difiere del método de evaluación tradicional, evita que el docente se transforme en un *inquisidor* más que en un maestro y que el estudiante aparezca como un *enjuiciado*, donde hay que encontrar específicamente lo que no sabe y que los períodos de exámenes se conviertan en un tiempo de tensiones, nerviosismo o fobias, transformándose en una especie de tortura psicopedagógica que llega a producir insomnio, pérdida de apetito, depresión y ansiedad.

En la evaluación por competencias es importante definir qué es lo que se va a evaluar (objetivo de la evaluación), se plantea evaluar la capacidad de los estudiantes, de interrelacionar lo aprendido y la manera creativa de resolver los problemas (evaluación conceptual). Otro aspecto importante es la evaluación del manejo de métodos, técnicas, destrezas y habilidades específicas (evaluación procedimental), finalmente se evalúan los aspectos que tienen que ver con la personalidad, el modo de ser y hacer del estudiante (evaluaciones actitudinales).

La evaluación debe ser continua y permanente, sin embargo existen tres momentos claves para ello:

Evaluación inicial, diagnóstica: proporciona al docente la información de las competencias previas adquiridas en los niveles anteriores, establece el nivel de conocimientos, habilidades, actitudes, valores, etc., que los estudiantes tienen al inicio de la tarea docente.

Evaluación formativa: o evaluación de proceso, se realiza durante el proceso enseñanza – aprendizaje, es el seguimiento que se da a lo largo del proceso e informa de los progresos del estudiante y las dificultades que va encontrando, proporciona, elementos de juicio que sirven para reajustar los métodos y estrategias pedagógicas.

Evaluación sumativa o de producto: se realiza al final del proceso de enseñanza – aprendizaje, es el análisis de los resultados obtenidos en cuanto al aprendizaje de los estudiantes, certifica y legitima en el sistema educativo, la promoción del estudiante a un nivel superior.

Desde una perspectiva constructiva la evaluación es un proceso dinámico, es decir, la evaluación no son momentos de asignación de calificaciones "objetivas" y fragmentadas del proceso de aprendizaje, marcados por la aplicación de dos, tres... exámenes parciales. Tampoco es el final del proceso educativo. La evaluación constructiva es un proceso continuo que se realiza a lo largo de las actividades de aprendizaje, por tanto, la evaluación diagnóstica, formativa y sumativa se convierten, también, en un proceso continuo, dinámico e interrelacionado. Esto significa que al realizar las actividades de apertura, desarrollo y cierre es posible diagnosticar, a la vez que identificar los aprendizajes significativos producidos por los estudiantes.

Se espera que el enfoque por competencias "rompa" con los modelos educativos tradicionales caracterizados por la separación de los conocimientos, de allí su estructura disciplinar que se caracteriza por la integración de conocimientos, para lo cual se requiere del trabajo interdisciplinario de los docentes y de propuestas curriculares que sean de mayor flexibilidad.

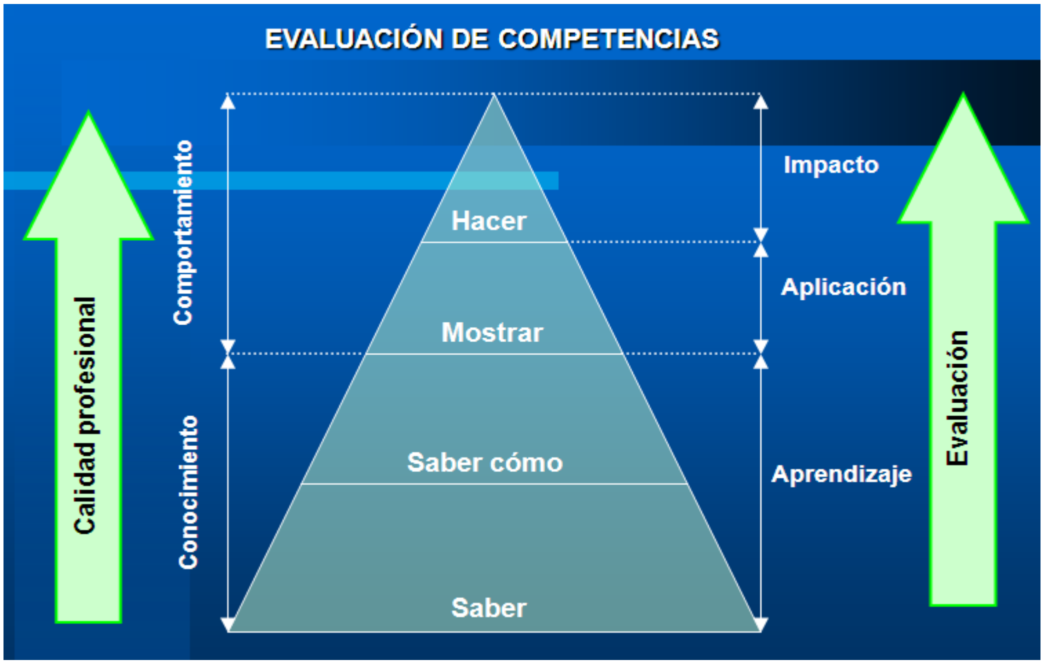


Fig. 5. Evaluación de competencias

En el diseño y elaboración del módulo de aprendizaje se toma en cuenta la pertinencia de las actividades con el fin de que se integraran cada uno de los saberes, de tal manera que la evaluación sea parte del proceso y se lleve a cabo de forma continua y holística; así también que las mismas sean aplicables en cada una de las comunidades educativas.

Los contenidos y el orden de los mismos no pueden modificarse, responden al programa modular silábico del Plan de estudio de la carrera Ingeniería Agrícola baja la supervisión y control de la Dirección de Docencia de la UNA.

2.7 La UNA y su enfoque por competencias

La UNA se encuentra actualmente inmersa en un profundo proceso de cambio cuyo propósito es reorientar su quehacer para responder adecuadamente a las necesidades del sector agrario de la Nicaragua del Siglo XXI. Este importante proceso está guiado por los más avanzados principios y postulados que hoy día inspiran los cambios en la educación superior contemporánea, tal como se desprenden de las declaraciones regionales y mundiales sobre la Educación Superior, que los países de todas las regiones del mundo han aprobado, bajo los auspicios de las grandes conferencias convocadas por la UNESCO en los últimos años.

Pieza clave del proceso de transformación de la UNA, es su Modelo Educativo, desde luego que su adopción compromete a toda la institución y genera una seria responsabilidad para toda su comunidad universitaria, autoridades docentes-investigadores, administrativos y estudiantes. Desde luego que un documento de tal naturaleza, a la vez que traduce en términos pedagógicos y didácticos la Misión y Visión institucional, señala un nuevo rumbo de la UNA hacia el ejercicio de sus funciones sustantivas.

El Modelo educativo de la UNA partiendo de esa realidad, asume el paradigma constructivista ecológico con un diseño curricular basado en la construcción de competencias humanas y laborales, cuyo objetivo es la formación integral del estudiante, en respuesta a las actuales demandas del país y del sector agrario en particular.

La formación profesional en la UNA se gestiona desde un currículo por competencias humanas, laborales y ciudadanas, en correspondencia con lo planteado por la comunidad universitaria y el sector externo, lo que permite favorecer que los actores construyan sus aprendizajes al identificarse con lo que produce, reconstruir el proceso de cómo realiza ese producto, y elaborar metodologías de trabajo que es capaz de validar en el contexto de la práctica.

Esto comprende, la construcción de las capacidades desde una dinámica de combinación de atributos (respecto al conocimiento, habilidades, actitudes y valores), que permite un desempeño competente de los sujetos, finalidad del proceso educativo en la universidad, al vincular la oferta educativa de la UNA con el desarrollo agrario y el manejo sostenible de los recursos naturales.

La formación basada en competencias plantea la necesidad de facilitar a los sujetos estrategias que les permita enfrentar las variables existentes en el contexto personal y profesional, por lo que se hace énfasis en la meta cognición, solución de problemas, comunicación, creatividad y autoformación que se logran con los siguientes grupos de competencias.

a) **Competencias Básicas o Instrumentales**, construidas en la formación general y asociadas a conocimientos fundamentales dirigidas a la comprensión y resolución de los problemas cotidianos, que contribuyan a la formación profesional y el ingreso al trabajo; por ejemplo: comunicación oral, escrita, lectura, procesamiento de datos, uso de las TIC.

b) **Competencias genéricas o transversales:** se relacionan con capacidades, atributos, actuaciones y actitudes amplias, transversales a su formación y a distintos ámbitos profesionales. Podemos citar trabajar en equipo, planificar, toma de decisiones.

c) **Competencias Específicas o Especializadas**, construidas en la formación profesionalizante y se relacionan con los aspectos técnicos vinculados con el perfil profesional de la carrera, teniendo como referente las competencias instrumentales y las transversales.

La concepción del socio-constructivismo ecológico explícito en el modelo educativo de la UNA facilita la construcción de las competencias siguientes, que caracterizan al egresado de la UNA:

- Trabaja autónomamente y en equipo transdisciplinario con una actitud proactiva, ética y de respeto.
- Comunica eficazmente de forma oral y escrita.
- Valora los procesos con carácter formativo.
- Realiza y promueve prácticas amigables con el medio ambiente.
- Utiliza las TIC para un mejor desempeño laboral y educación permanente.
- Gestiona la información y la aplica de forma contextualizada.

- Actitud proactiva, liderazgo y emprendedora.
- Aplica metodologías de extensión para facilitar procesos de aprendizaje.
- Actúa conforme valores éticos en su praxis profesional.

Si bien, el nuevo modelo pone énfasis en el aprendizaje de los sujetos, el papel del docente será hacer sentir al estudiante que en ese proceso no está solo y que cuenta con la asesoría y tutoría que la función del docente lleva siempre implícita.

El modelo educativo de la UNA considera que la relación docente-estudiante en el proceso de formación, es fundamental; la cual debe ser honesta, equitativa, respetuosa y de mutua exigencia. El docente instruye, forma, comparte sus experiencias, su visión del mundo y de la vida; para ello tiene que modificar su rol, transformándose de expositor en moderador, facilitador o mediador del conocimiento, además es un elemento más dentro de dicho proceso.

El constructivismo ecológico supone también condiciones que le permite conocer los intereses y necesidades de sus estudiantes, así como los estímulos siguientes: familiares, comunitarios y educativos, para contextualizar las actividades de aprendizaje en un clima afectivo, armónico, por consiguiente ayuda a que los estudiantes se vinculen positivamente en la construcción del aprendizaje significativo.

Retomando los tres saberes que se mencionaron en la introducción (saber, saber hacer y sabe ser) se puede explicitar en cada uno de ellos, qué se enseña y cómo se enseña según el enfoque adoptado por la UNA.

2.7.1 ¿Qué se enseña en el *saber* y cómo?

En el *saber* se enseñan: conceptualizaciones, características, fundamentos, leyes, clasificaciones, y teorías, entre otros (INFOTEP, 2016).

Para enseñar este saber se pueden usar diversas técnicas y estrategias como:

- Mapas conceptuales / Lecturas comentadas

- Presentaciones / Esquemas
- Análisis fraccionado
- Rompecabezas, etc.

Fig.6. Grupo de estudiantes del primer año de ingeniería agrícola defendiendo un estudio de casos.

En la formación con enfoque de Competencias es muy esencial el cómo se enseña, es decir, la forma de conducir el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es por esto que en el saber se resaltan los criterios de desempeño con los cuales se desarrollarán o guiará el proceso; dentro de estos se tiene que el docente debe:

a) Verificar la comprensión de los temas o contenidos expuestos

   Esto implica que a medida que el docente va explicando el contenido, debe ir verificando qué tanto el participante ha entendido. No esperar terminar el tema o agotar media o una hora de clase sin realizar el proceso de aseguramiento.

b) Identificar el nivel de dominio que tienen los participantes del contenido que se va a abordar

   Esto permite precisar el nivel de profundidad y estrategias a utilizar para desarrollar o explicar la temática. Esto puede ser indagado mediante una lluvia de ideas o un estudio de casos, por ejemplo.

c) Seleccionar ejemplos relacionados con el tema tratado

   Esto permite contextualizar a los estudiantes, es decir, llevarlos a la realidad donde puedan ejecutar los conocimientos tratados. En este caso el docente debe presentar ejemplos, pero a la vez guiar a que los estudiantes describan o presenten también.

d) Usar la técnica expositiva

Esta permite presentar un tema de manera oral, ante un grupo de estudiantes, para lograr la reflexión de los oyentes sobre la información que se desarrolla. Estimular la interacción entre los participantes de un grupo.

e) Guiar los equipos a interactuar entre ellos y docentes/participantes

Establecer estrategias y actividades que estén enfocadas al aprendizaje colaborativo, al trabajo en equipo, y que además propicie la relación y sociabilidad entre estudiante-estudiante y docente-estudiante para asegurar un mayor logro de los objetivos propuestos

f) Técnica de diálogo

Esta permite obtener información, actualización, opiniones o puntos de vista de cierta significación o importancia. Obtener datos diversos de dos fuentes a la vez. Hacer reflexionar a los estudiantes. Mantener despierta la atención del grupo

g) Técnica de discusión

Esta permite intercambiar ideas y llegar a una conclusión sobre un asunto previamente estudiado. Es recomendable colocar el grupo en círculo.

2.7.2 ¿Qué se enseña en el *saber hacer* y cómo?

En el *saber hacer* se enseñan: operaciones, procesos, instalaciones, aplicaciones, entre otros (INFOTEP, 2016).

Para enseñar este saber se pueden usar diversas técnicas y estrategias como:

- Demostraciones
- Dinámicas / Prácticas
- Simulaciones
- Estudios de casos
- Resolución de problemas

Fig.6. Práctica de estudiantes

El desarrollo del *saber hacer* en los procesos de enseñanza y aprendizaje conlleva la utilización de estrategias y actividades que genere la construcción, aplicación de los conocimientos adquiridos en el saber. Es de vital importancia que el docente pueda desarrollar técnicas que propicien la construcción y aplicación como la técnica de ejecución / demostración.

La técnica de ejecución / demostración permite desarrollar habilidades prácticas, como el uso de una herramienta, equipo o material y la ejecución de una operación práctica, en donde las manos, los pies y la coordinación juegan un papel importante. Aplicar de manera inmediata los aprendizajes adquiridos al trabajo real, cumpliendo con la característica de *aprender haciendo*.

2.7.3 ¿Qué se enseña en el *saber ser* y cómo?

En el *saber ser* se enseñan: actitudes, valores, desarrollo personal, convivencia, entre otros (INFOTEP, 2016).

Para enseñar este saber se pueden utilizar estrategias y recursos como:

- Murales
- Diario reflexivo
- Videos / Rompecabezas
- Proyecto de vida

El saber ser a nivel metodológico tiene varias formas de cómo abordarlo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, entre ellos está:

1. Como contenido, el cual requiere planificar cantidad de horas, medios o recursos didácticos, etc. El mismo se trabaja siguiendo los criterios metodológicos de conducción, como lo mencionamos en el *saber*.

2. Integrado a los contenidos temáticos a desarrollar, o más bien en las actividades, ejercicios y reflexiones que se realicen dentro del contenido que se esté impartiendo. De esta forma se pueden ir trabajando los valores o el saber ser que corresponda.

2.7.4 La evaluación

Si bien es cierto que el proceso educativo debe comprometerse con el desarrollo integral de los estudiantes y que se encamina por ello a hacerlo más competente, y además, que las competencias se desarrollan y se vinculan con el impacto de la acción educativa. La verificación de dichos logros se hace también imprescindible para hablar de la calidad de la educación. Pareciera entonces que la enseñanza por competencias va ligada a la evaluación por competencias y debe ser una evaluación lo suficientemente abarcadora para cubrir los aspectos cognitivos, actitudinales e instrumentales implicados en el modelo de enseñanza y aprendizaje basado en competencia.

Según el ME–UNA la evaluación está presente en todo proceso de enseñanza y aprendizaje, como una forma de verificar la adquisición de los conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes por parte de los estudiantes. En el campo de la formación, tanto el rol que juega la evaluación como las técnicas a aplicar, están indisolublemente ligadas a la cuestión de cómo se aprende. La evaluación puede tener lugar en distintos momentos del proceso formativo (antes, durante y al finalizar una asignatura, módulo o sesión) y se orienta a medir los aprendizajes (previos, en proceso o finalmente logrados) en relación con los objetivos propuestos.

En síntesis, la evaluación del aprendizaje consiste en una interpretación técnica de un conjunto de observaciones y mediciones, cuyo propósito es comprobar de manera sistemática, en qué medida se han logrado los objetivos de aprendizaje.

La evaluación es definida como la evaluación de logros. El propósito de la evaluación consiste en realizar juicios acerca del desempeño individual. Para ser juzgado como competente, el estudiante deberá demostrar su habilidad para desempeñar roles de acuerdo con normas esperadas (instrumentos de evaluación) para el empleo en ambientes reales de trabajo.

El ME–UNA establece que

"*la evaluación es instrumento de aprendizaje significativo, es decir que este proceso sea parte integral de la formación, que permita a los estudiantes una guía apropiada para mejorar su experiencia y desarrollo. Se trata de un proceso de múltiples dimensiones, que implica observar y juzgar el desempeño de cada uno, basándose en criterios objetivos, en la autoevaluación y retroalimentación del estudiante y del docente, para que puedan profundizar sus fortalezas y superar sus debilidades*"

Implicación sobre el concepto de competencias	Consecuencia de la Evaluación	Posible instrumento
Integrar conocimientos, habilidades y actitudes	Oportunidades de exhibir esta integración	Proyecto final Practicum
Realizar ejecuciones	Evaluar desempeño, ejecuciones	Tablas de observación
Actuar de forma contextual	Evaluar el conocimiento de cuándo y cómo aplicar los conocimientos disponibles	Simulaciones
Entenderlo de forma dinámica	Evaluar el desarrollo	Rúbricas Evaluación a lo largo del tiempo (diagnóstica)
Actuar con autonomía y responsabilidad ante el aprendizaje	Evaluar la capacidad de autorreflexión, haciéndose responsable de sus decisiones	Portafolios Autoevaluación estructurada

Tabla 2. Implicaciones del proceso de evaluación según ME–UNA.

La evaluación de la formación por competencias supone instrumentos de continuidad para lograr evidencias necesarias donde se articule la unidad de competencia, los elementos de la competencia y los componentes normativos: criterios, conocimientos y rangos.

Capítulo III

PROPUESTA DIDÁCTICA

3.1 Elementos metodológicos de la propuesta

La propuesta didáctica **está estructurada** en tres unidades de aprendizaje donde se desarrollan los contenidos, actividades de aprendizaje (presenciales y no presenciales) y las formas de presentación de los resultados (evaluación).

Cada unidad presentará los datos generales de la misma: temas, subcompetencia, indicadores de logro. Luego, se pasará al desarrollo de los contenidos contextualizados en forma mediada y con racionalidad, donde en la resolución de los problemas planteados se usará el método híbrido de Polya–Schoenfeld.

Los lineamientos para las unidades de aprendizaje dados en el PMS del módulo *Matemáticas aplicadas a las ciencias agrícolas* se detallan a continuación.

Primera unidad: *Aplicaciones trigonométricas en actividades agrícolas*

Inicie la segunda unidad con la definición dinámica de ángulo con sus diferencias de la definición euclidiana. Expone las razones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo, llevándolas a un triángulo cualquiera mediante la generalización de ángulo de referencia. Inicia las funciones trigonométricas de números reales apelando a sus conocimientos de la educación media. A forma de *pinceladas* muestra las funciones trigonométricas como aquellas utilizadas en los modelos de fenómenos periódicos. Explica que se entenderá por *resolver un triángulo* y destaca la importancia de las funciones trigonométricas para el cumplimiento de tal meta. Es fundamental en esta parte que el estudiante aprenda a usar la calculadora para tal efecto. Todo esto, es suficiente para introducirlo en el cálculo de áreas de polígonos donde necesariamente deba utilizar trigonometría.

Segunda unidad: *Funciones elementales y su derivada*

Si bien el concepto de función no es ajeno al estudiante, no sólo por su experiencia con la matemática en la escuela media sino por el hecho de estar presente en el entorno.

Por eso se sugiere usar esto como punto de partida hasta llevarlo a ejemplos propios del campo agrícola sin entrar a la rigurosidad matemática. Una vez logrado esto inicie el estudio general de las funciones y sus distintas representaciones. Destaque que de las funciones algebraicas se profundizará únicamente en las polinomiales por sus características especiales (a nivel de conocimiento se presentan todas las funciones algebraicas) y en el caso de las trascendentes, se estudiarán todas. Introduzca las funciones multivariadas a partir de ejemplos concretos para que el estudiante aprenda a manipularlas y de sentido a las mismas. Intuitivamente, presente la interpretación geométrica de la derivada una vez dada su definición formal utilizando el límite del cociente de Newton. Se le deben presentar al estudiante las distintas notaciones de derivada (de Newton, Leibniz, Lagrange, etc.) y destacar que la escogencia se hará de acuerdo a las necesidades del problema o asunto en cuestión. Mencione la importancia de elaborar la tabla de fórmula de las derivadas de funciones trascendentes. Cuando defina la derivada de funciones en varias variables, muestre la interpretación geométrica pero haciendo énfasis en el cálculo de la misma. El estudio que se pretende en Optimización de funciones es principalmente en la búsqueda de soluciones a problemas de valores mínimos y máximos.

Tercera Unidad: *Integral de funciones elementales*

Inicie la cuarta unidad introduciendo ejemplos de cálculos de áreas de figuras y muestre el problema para figuras limitadas por curvas. Mencione que al final de la unidad estarán en capacidad de resolver dicho problema. Recapitule un poco de derivadas, introduzca la noción de antiderivada y defina la antiderivada más general. Luego, presente esta última como la integral indefinida de una función. Retome funciones trabajadas en los ejemplos de la unidad anterior de manera que los estudiantes puedan evidenciar los procesos inversos:

$$\text{Derivación} \Longleftrightarrow \text{Integración.}$$

Similarmente a la elaboración de la tabla de derivadas hecha en la unidad anterior, elaboren un formulario de integrales. Una vez interiorizado este concepto de integral indefinida pase la integral definida. Antes de utilizar la integral definida para hallar áreas de figuras (en general), recuerde primero introducir área bajo una curva (sobre el eje x, bajo el eje x, ambos casos) y luego el área entre dos curvas. Luego, estudie algunos modelos físicos y calcule únicamente volúmenes de sólidos de revolución.

El enfoque de cada una de las unidades está centrado en el aprendizaje que privilegia la actividad permanente y sistemática del estudiante para guiar la acción pedagógica con un sentido orientador y facilitador. El método central será la resolución de problemas, estudio de casos y análisis de modelos inherentes al campo agrícola. Esto como respuestas a las necesidades que se han planteado como resultado de los dos estudios que se realizaron, las observaciones al aula de clases para determinar las dificultades de los estudiantes al momento de resolver problemas y su participación en el salón de clases y las entrevistas a los especialistas en las áreas afines de las matemáticas y los profesores con experiencia en la impartición de la matemática.

3.2 Propuesta didáctica

Se detallan a continuación las tres unidades de aprendizaje que constituyen la propuesta didáctica.

APLICACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN ACTIVIDADES AGRÍCOLAS

Unidad de aprendizaje 1

Subcompetencia

Emplea la Trigonometría como herramienta para resolver problemas del campo agrícola inherentes a triangulaciones de polígonos y modelaciones de fenómenos periódicos

Introducción

Una de las aplicaciones más tempranas de las matemáticas fue en la *medición indirecta*, tal como el encontrar la distancia entre dos puntos cuando al menos uno de ellos era inaccesible. Por ejemplo, se tienen registros que Tales (aproximadamente 600 a.C.), matemático griego y comerciante, midió la altura de la Gran Pirámide en Egipto usando medidas indirectas. La forma geométrica fundamental utilizada en la medición indirecta es el **triángulo**. Como consecuencia, los matemáticos involucrados en la medición indirecta le llamaron **trigonometría** a partir de las palabras griegas usadas para triángulo y medición.

En tiempos recientes la trigonometría facilita la medición del entorno próximo y del lejano con métodos precisos y eficaces. Sirve como herramienta en la *Topografía* con la medición de alturas, distancias y cálculo de áreas, así como en la triangulación mediante GPS (consiste en averiguar la distancia de cada una de las tres señales respecto al punto de medición. Conocidas las tres distancias se determina fácilmente la propia posición relativa respecto a los tres satélites. Y conociendo las coordenadas o posición de cada uno de los satélites se obtiene la posición absoluta o las coordenadas reales del punto de medición).

Figura 1. La posición sobre la tierra se puede determinar de forma precisa utilizando el sistema de posicionamiento global mediante la sistematización de los conceptos básicos de Trigonometría.
[Fuente: http://4.bp.blogspot.com]

En el *Arte y Arquitectura* ayuda al estudio de perspectivas, espacios creados, áreas y volúmenes, sombras proyectadas, etc. En la figura de abajo, se muestra una fotografía del Teatro Popular Oscar Niemeyer de Niterói, en su diseño se utilizó la función trigonométrica *seno*.

Figura 2. Teatro Popular Oscar Niemeyer en Niterói, Brasil. [Fuente: Wikimedia Commons]

En las *Ingenierías*, se utiliza en los diseños de vehículos aerodinámicos, fuentes de energía sostenibles (placas solares cada vez más eficientes que buscan un ángulo determinado para aprovechar la energía solar el mayor tiempo posible), etc.

Varias de estas aplicaciones serán estudiadas en esta unidad. Iniciaremos con la definición dinámica de ángulo con sus diferencias de la definición euclidiana dada en el módulo anterior. Expondremos las razones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo formalizando con la definición de las seis funciones trigonométricas, llevándolas éstas últimas a un triángulo cualquiera mediante la generalización de ángulo de referencia. Continuaremos con el estudio de las funciones trigonométricas de números reales apelando a sus conocimientos de la educación media. A forma de *pinceladas* mostraremos las funciones trigonométricas como aquellas utilizadas en los modelos de fenómenos periódicos.

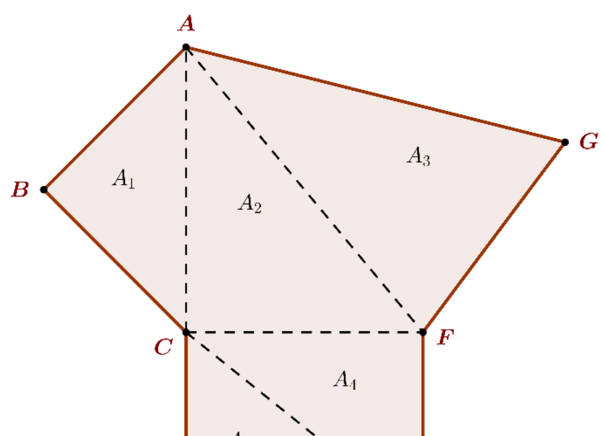


Figura 3. Una de las posibles triangulaciones del polígono $ABCDEFG$. Evidentemente, el área A de éste coincide con la suma de las áreas de los triángulos (por el postulado de la adición de las áreas), es decir,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5.$$

Explicaremos qué entender por **resolver un triángulo**, destacando la importancia de las funciones trigonométricas para el cumplimiento de esta meta. Es fundamental, el manejo correcto de la calculadora para tales efectos. Concluiremos con el cálculo de áreas de polígonos donde necesariamente utilicemos trigonometría.

Indicador de logro 1

Resuelve problemas asociados a modelaciones de fenómenos periódicos que se explican mediante funciones trigonométricas para ángulos cualesquiera y para números reales.

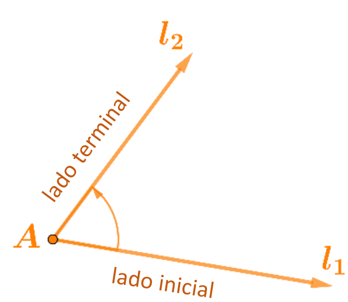
Actividad Exploratoria 1

Recuerde y responda:

- ✓ ¿Qué es un rayo en geometría? ¿y segmento?
- ✓ ¿A qué se le llama ángulo?
- ✓ ¿Cuándo dos ángulos son congruentes?
- ✓ ¿Cuál es la diferencia entre circunferencia y círculo?
- ✓ ¿A qué se le llama ángulo central de una circunferencia?
- ✓ ¿Cómo se define un triángulo? ¿cuándo es rectángulo?
- ✓ ¿Qué establece el teorema de Pitágoras?
- ✓ ¿Qué significa que dos triángulos sean semejantes?

Ángulos en un sistema de coordenadas circular. En geometría, el concepto de ángulo se toma desde un punto de vista estático, pues este no es más que la unión de dos rayos que tienen un mismo punto de partida llamado vértice. Por el contrario, en trigonometría el concepto de ángulo es dinámico. Un ángulo resulta de la rotación de un rayo, más exactamente:

Un **ángulo** está determinado por la rotación de un rayo alrededor de su punto extremo, el vértice del ángulo, desde una posición inicial, el lado inicial del ángulo (l_1), hasta una posición terminal, el lado terminal (l_2) del ángulo.



Definición 1

La perspectiva de la trigonometría sobre el concepto de ángulo permite dos cosas: (1) que la medida de un ángulo pueda ser arbitrariamente grande o pequeña, y (2) que haya dos direcciones.

Así, si un ángulo es generado por una rotación en sentido contrario a la rotación de las manecillas del reloj (anti horario), el **ángulo** es **positivo**; y si está generado por una rotación a favor de la rotación en el sentido de las manecillas del reloj (horario), el **ángulo** es **negativo**.

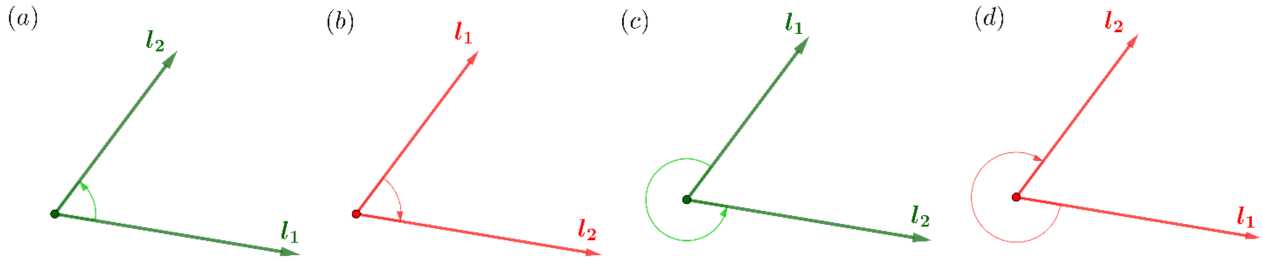


Figura 4. Los ángulos de los incisos (a) y (c) son positivos; los de (b) y (d), negativos.

Medida de ángulos. Las unidades de medidas de ángulos más usuales son los grados y los radianes.

Medida en grados. La medida en grados de un ángulo positivo determinado por n revoluciones es igual a $n \cdot 360°$ (entendida una revolución o rotación completa como la medida de una vuelta que hace que el lado terminal del ángulo coincida con su lado inicial).

Por ejemplo, la medida del ángulo positivo que describe un cuarto de revolución es igual a $\frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$. La medida del ángulo que determina un rayo al efectuar 7 revoluciones alrededor de su vértice en sentido antihorario es de $7 \cdot 360° = 2\,520°$.

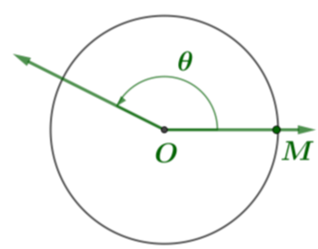


Figura 5. Para n revoluciones, la medida del ángulo formado es $\theta = n \cdot 360°$.

La medida en grado de un ángulo negativo se define de forma análoga con la diferencia de que se toma con signo negativo. Así, la medida en grados del ángulo determinado por $\frac{2}{3}$ de una vuelta completa en sentido horario es igual a $-\frac{2}{3} \cdot 360° = -270°$.

De lo anterior se deduce que: un **grado**, el cual se denota por $1°$, es la medida de un ángulo positivo formado por $\frac{1}{360}$ de revolución. Un grado a su vez, puede ser dividido en 60 partes iguales llamadas **minutos** y un minuto puede ser dividido en 60 partes iguales llamadas **segundos**.

Nota: por brevedad identificaremos cuando sea necesario un ángulo con su medida. Por ejemplo, en lugar de escribir "sea el ángulo $\angle A$ con medida $\theta = 85°$" escribiremos "sea el ángulo $\theta = 85°$.

Ejemplo 1. Exprese $\alpha = 175.43°$ en términos de grados, minutos y segundos.

De $\alpha = -175.43°$, dejaremos la parte entera en grados y convertiremos la parte decimal a minutos. Así, la parte decimal de α es $0.43°$ y puesto que un grado contiene 60 minutos resulta que

$$0.43° = 0.43° \times \frac{60'}{1°} = (0.43)(60') = 25.8'.$$

Convirtamos ahora la parte decimal de la expresión anterior a segundos, usando la equivalencia $1' = 60''$:

$$0.8' = 0.8' \times \frac{60''}{1'} = (0.8)(60'') = 48''.$$

Concluimos que $\alpha = -175°\,25'\,48''$.

Refuerce lo aprendido

✓ Dé una medida exacta o aproximada en grados, minutos y segundos de los ángulos siguientes.

a. $\alpha = -286.47°$
b. $\beta = 120.32°$
c. $\gamma = 48.13°$
d. $\varepsilon = 687.55°$
e. $\theta = \left(45\frac{3}{4}\right)^{°}$
f. $\rho = -450°$

Problema 1. Supongamos que se desean ubicar en la *laguna de Apoyo* dos estaciones de bombeo (A y B) para mejorar el abastecimiento de agua en los sectores de *El Charco* y *El Hormigón* en el departamento de Granada (ver fig. 6). En unas pasantillas, a un estudiante de ingeniería agrícola se le asignó realizar las siguientes mediciones: $m\angle ACD = 132.51°$, $m\angle BDC = 50.08°$, $m\angle CDA = 28.55°$ y $m\angle BCD = 92.76°$. Determine la medida exacta o aproximada en grados, minutos y segundos de $\angle A$ y $\angle B$.

Los ángulos $\angle ACD, \angle CDA$ y $\angle A$ son los ángulos internos del triángulo $\triangle ACD$. En consecuencia, sus medidas suman $180°$, luego

$$m\angle ACD + m\angle CDA + m\angle A = 180°$$

$$132.51° + 28.55° + m\angle A = 180°$$

$$161.06° + m\angle A = 180°$$

$$m\angle A = 180° - 161.06° = 18.94°.$$

Figura 6. Los puntos A y B representan las ubicaciones de las estaciones de bombeo. [Fuente: Dirección general de Geodesia y Cartografía, 2002]

Ahora, convirtamos la parte decimal a minutos como sigue

$$0.94° = 0.94° \times \frac{60'}{1°} = (0.94)(60') = \ 56.4'.$$

Los segundos los obtenemos haciendo

$$0.4' = 0.4' \times \frac{60''}{1'} = (0.4)(60'') = \ 24''.$$

Por lo tanto, el ángulo $\angle A$ mide exactamente $18°\, 56'\, 24''$.

Similarmente ocurre para $\angle B$. Los ángulos $\angle BDC, \angle BCD$ y $\angle B$ son los ángulos internos del triángulo $\triangle\, BCD$. De acá que

$$m\angle B + m\angle BDC + m\angle BCD = 180°$$

$$m\angle B + 50.08° + 92.76° = 180°$$

$$m\angle B + 142.84 = 180°$$

$$m\angle B = 180° - 142.84° = 37.16°.$$

Dejamos la parte entera y determinamos los minutos a partir de la parte decimal así

$$0.16° = 0.16° \times \frac{60'}{1°} = (0.16)(60') = \ 9.6'.$$

Los segundos los obtenemos haciendo

$$0.6' = 0.6' \times \frac{60''}{1'} = (0.6)(60'') = \ 36''.$$

Por lo tanto, el ángulo $\angle B$ mide exactamente $37°\, 9'\, 36''$.

Refuerce lo aprendido

Resuelva el problema anterior nuevamente, pero esta vez primero aproxime las mediciones dadas en el enunciado del problema a grados, minutos y segundos, y luego determine las medidas de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$.

Problema 2. Un estudiante de una clase de Dibujo, mide un ángulo de $-95°\,30'45''$ mientras que otro estudiante mide el mismo ángulo como de $-96°$. Determine la diferencia entre estas medidas al minuto y segundo más cercanos. Dibuje el ángulo para $-96°$.

Expresemos el ángulo $-95°\,30'45''$ en grados decimales. Para los cálculos omitiremos el signo pues este solo nos indica el sentido (horario o antihorario) del ángulo. Entonces,

$$30' = 30' \times \frac{1°}{60'} = \frac{30°}{60} = 0.5°.$$

$$45'' = 45'' \times \frac{1°}{3600''} = \frac{45°}{3600} = 0.0125°.$$

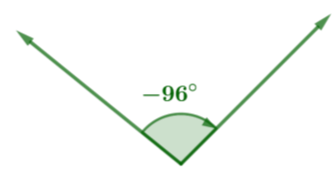


Figura 7. El signo negativo indica el sentido a favor del movimiento de las manecillas del reloj.

Luego,

$$-95°\,30'45'' = -(95° + 0.5° + 0.0125°) = -95.5125°.$$

Éste difiere de $-96°$ en $29'\,15''$.

Medida en radianes. Al rotar un rayo $\overrightarrow{OM}$ alrededor de su eje el punto M recorre cierta distancia d a lo largo de la circunferencia de centro O y radio $r = OM$. La medida en radianes del ángulo determinado por la rotación es igual al cociente

$$\frac{d}{r}$$

si el ángulo es positivo. Si el ángulo es negativo su medida en radianes será igual a

$$-\frac{d}{r}.$$

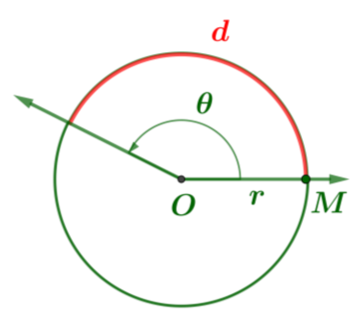


Figura 8. La medida θ en radianes es $\frac{d}{r}$.

Por ejemplo, si un rayo $\overrightarrow{OM}$ realiza una revolución completa alrededor de su vértice en sentido antihorario, el punto M habrá recorrido toda la circunferencia completa. La circunferencia de centro O y radio $r = OM$ tiene una longitud de $2\pi r$ por lo que la medida del ángulo determinado por la rotación será de

$$\frac{2\pi r}{r}\ \text{rad} = 2\pi\ \text{rad}.$$

Si la rotación es completa, pero en sentido horario la medida del ángulo correspondiente será de -2π rad. De la exposición anterior podemos concluir como sigue.

> Un **radián** es la medida de un ángulo central de un círculo que intercepta un arco de longitud igual al radio r del círculo. Se escribe abreviadamente rad.
>
> **Definición 2**

Es muy frecuente en trigonometría que un ángulo expresado en grados se cambie a radianes y viceversa. Note que un ángulo formado por una rotación completa en sentido antihorario mide $360°$ o 2π rad, esto es $360° = 2\pi$ radianes.

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación anterior por $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ y $\frac{1}{12}$ respectivamente se obtienen las siguientes conversiones:

$$180° = \pi\ \text{rad}, \qquad 90° = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}, \qquad 45° = \frac{\pi}{4}\ \text{rad}.$$

Utilizando el hecho de que $180° = \pi$ radianes se obtienen las siguientes fórmulas que son útiles para convertir grados en radianes y radianes en grados.

- ✓ $1° = \frac{\pi}{180}\ \text{rad}$
- ✓ $1\ \text{rad} = \frac{180°}{\pi}$

Note que si $\theta = m°$ (θ está dado en grados), para convertir a radianes hacemos

$$m° = m° \times \frac{1\ \text{rad}}{\frac{180°}{\pi}} = m° \times \frac{\pi}{180°}\ \text{rad} = \frac{m}{180}\pi\ \text{rad}.$$

En otras palabras, si queremos convertir grados en radianes simplemente se multiplica por $\frac{\pi}{180°}$.

Un razonamiento análogo nos conduce a que la conversión de radianes en grados se realiza multiplicando por $\frac{180°}{\pi}$.

Ejemplo 2. Convierta 0.65 radianes en grados, minutos y segundos.

Como se van a cambiar radianes a grados se multiplica por $\frac{180°}{\pi}$, así

$$
\begin{aligned}
(0.65)\left(\frac{180°}{\pi}\right) &\approx 37.242° \\
&= 37° + (0.242)(60') \\
&= 37° + 14.52' \\
&= 37° + 14' + (0.52)(60'') \\
&= 37° + 14' + 31.2''
\end{aligned}
$$

luego, $0.75 \text{ rad} \approx 37°\, 14'\, 31.2''$.

Ejemplo 3. Convierta $125°\, 50'$ en radianes.

Primero escribamos $125°\, 50'$ en forma decimal

$$
\begin{aligned}
125°\, 50' &= 125° + 50' \\
&= 125° + \left(\frac{50}{60}\right)^{\text{o}} \\
&\approx 125° + (0.83)° \\
&= 125.83°.
\end{aligned}
$$

Ahora convirtamos los grados en radianes multiplicándolos por $\frac{\pi}{180°}$ así

$$125.83° = (125.83°)\left(\frac{\pi}{180°}\right) \approx 0.7\pi \text{ rad.}$$

Concluimos que $125°\, 50' \approx 0.7\pi$ radianes.

Refuerce lo aprendido

Convierta cada una de las siguientes expresiones en radianes. Conserve π en su respuesta.

a. $-330°$

b. $120.32°$

c. $48°\, 7'\, 48''$

d. $687°\, 33'$

e. $\left(\frac{220}{\pi}\right)^{\circ}$

f. $900°$

Refuerce lo aprendido (cont.)

Dé una medida exacta o aproximada en grados, minutos y segundos de los siguientes ángulos.

a. 9π

b. $-\frac{7\pi}{3}$

c. -15

d. 2.1

e. 0.95

f. 24

Convierta los ángulos obtenidos en el ejercicio anterior a grados decimales y utilizando el transportador dibújelos. Encuentre un ángulo complementario y un suplementario de cada uno de ellos.

Introduzcamos ahora un sistema de coordenadas rectangulares para definir un ángulo en posición estándar.

Dado un sistema de coordenadas rectangulares, un **ángulo en posición estándar o normal** es aquél que tiene su vértice en el origen del sistema y su lado inicial está a lo largo del eje x positivo.

Definición 3

Si el lado terminal de un ángulo en posición estándar está en uno de los cuadrantes, entonces diremos que el ángulo está en ese cuadrante. En las figuras 9 (a) y 9 (b) se muestra dos ángulos α y β en posición normal.

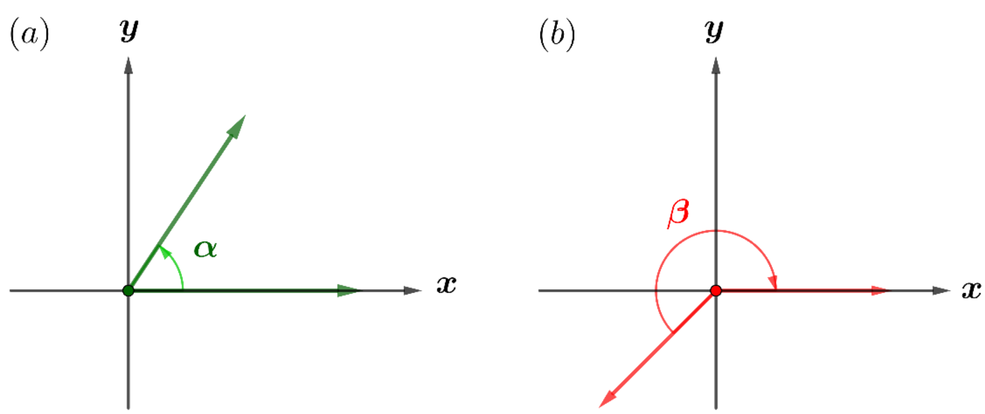


Figura 9. Los ángulos α y β están en el primer y tercer cuadrante, respectivamente, siendo α positivo y β negativo.

Un ángulo en posición estándar que tiene su lado terminal en uno de los ejes coordenados se denomina **ángulo cuadrantal**. Por ejemplo, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tiene su lado terminal en el eje y negativo y $\beta = -180°$ en el eje x negativo.

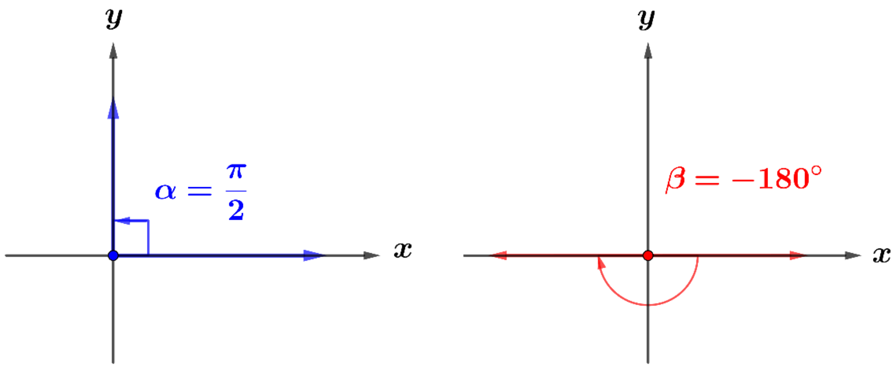


Figura 10. Ángulos cuadrantales

Ángulos coterminales. Un giro completo de un rayo da como resultado un ángulo que mide $360°$. Si se continúa el giro, se pueden formar ángulos que midan más de $360°$. Los ángulos de la figura 11 que miden $60°$ y $420°$ tienen los mismos lados iniciales y terminales pero diferentes giros. Estos ángulos se llaman **ángulos coterminales**, sus medidas difieren por un múltiplo de $360°$. Los ángulos cuyas medidas son $110°$ y $830°$ también son coterminales.

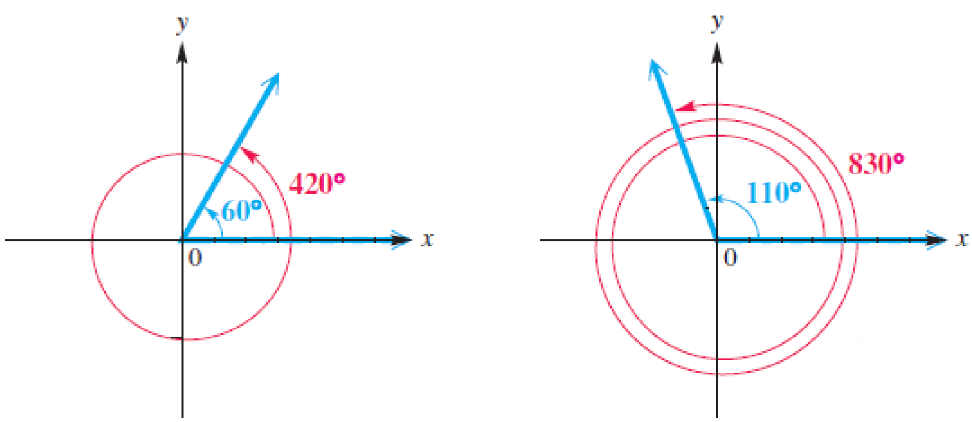


Figura 11. Parejas de ángulos coterminales: 60° y 420°, y, 110° y 830°.

Para encontrar un ángulo positivo coterminal con α, se suma a éste $360°$ o cualquier múltiplo positivo de $360°$. Es decir,

$$\alpha_i = \alpha + [n \cdot 360°], \quad n \in \mathbb{N}.$$

En el caso que queramos encontrar ángulos coterminales negativos con α, sumaremos a este ángulo $-360°$ o cualquier múltiplo negativo de éste. Es decir,

$$\alpha_i = \alpha + [n \cdot (-360°)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 3. Encuentre dos ángulos coterminales con $\alpha = 30°$, uno positivo y el otro negativo.

En la figura de la derecha se muestran los ángulos pedidos. Para el caso de α_1, se utilizó exactamente $360°$. Así,

$$\alpha_1 = 30° + 360°$$
$$= 390°.$$

que efectivamente es coterminal con α.

Para α_2, tomamos $n = 2$ obteniendo

$$\alpha_2 = 30° + [(2)(-360°)]$$
$$= 30° + (-720°)$$
$$= -690°.$$

Recordemos que el signo menos nos indica el sentido horario del ángulo.

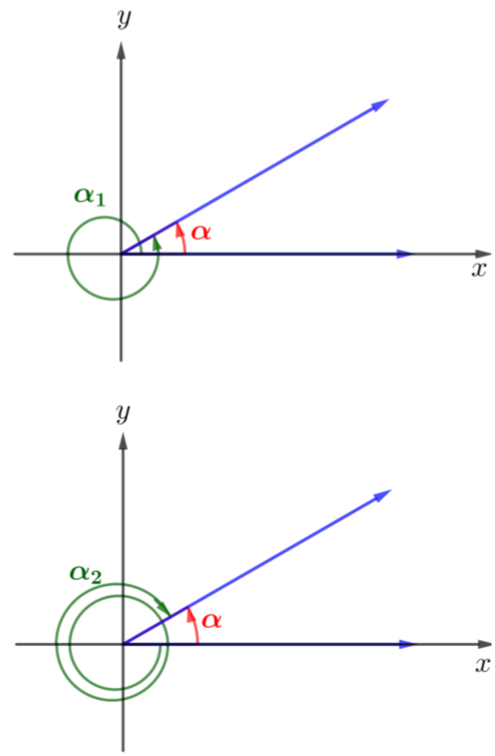


Figura 12. Para $\alpha = 30°$, los ángulos $\alpha_1 = 390°$ y $\alpha_2 = -690°$ son coterminales con él.

Refuerce lo aprendido

Determine los ángulos de medida positiva más pequeña posible coterminales con cada ángulo.

a. $908°$
b. $539°$
d. $-75°$
e. -203

Dibuje cada ángulo en posición estándar, mostrando la cantidad y sentido del giro. Determine la medida de dos ángulos coterminales con el ángulo dado, uno positivo y uno negativo. Indique el cuadrante al que pertenece cada ángulo.

a. $75°$
b. $89°$
c. $-61°$
d. $-159°$
e. $512°$
f. $174°$

Funciones trigonométricas para triángulos rectángulos. Introduciremos las funciones trigonométricas en la forma en que se originaron históricamente: como razones entre los lados de un triángulo rectángulo. Pero antes de ellos recordemos algunas ideas asociadas a dos conceptos importantes estudiados en la Escuela media: *triángulos* y *funciones*.

A cerca de triángulos

Dados tres puntos no colineales A, B y C, llamamos **triángulo** a la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. Los tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llaman lados del triángulo y los puntos A, B y C, vértices. Los ángulos $\angle ABC$, $\angle BAC$ y $\angle ACB$ se llaman ángulos interiores del triángulo. El triángulo se indica con el símbolo $\Delta\, ABC$.

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$.

Un triángulo que tenga un ángulo recto se llama triángulo **rectángulo**.

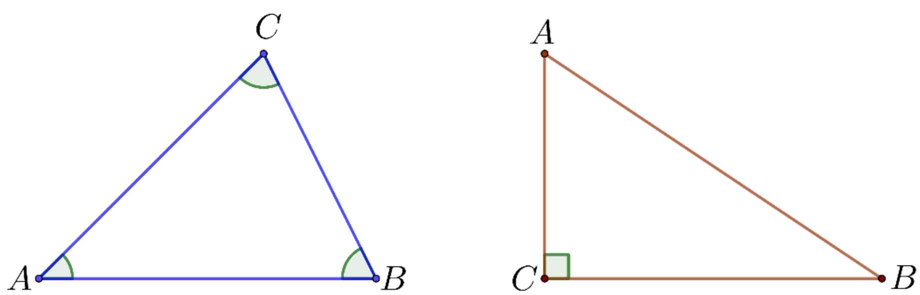


Figura 13. A la izquierda un triángulo destacando sus ángulos interiores y a la derecha un triángulo rectángulo.

Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Dados $\Delta\, ABC$ y $\Delta\, A'B'C'$, y la correspondencia $ABC \leftrightarrow A'B'C'$. Si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes proporcionales, entonces la correspondencia se llama una **semejanza** y decimos que los triángulos son semejantes.

Complemente

- Dados $\Delta\, ABC$ y $\Delta\, A'B'C'$, y la correspondencia $ABC \leftrightarrow A'B'C'$. ¿Cuándo esta correspondencia es una congruencia?
- ¿Cómo se clasifican los triángulos según las medidas de sus ángulos interiores?
- ¿Qué características tienen los ángulos no rectos en un triángulo rectángulo?

Complemente (cont.)

- Indague sobre la veracidad de los enunciados: "Si en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos agudos es congruente con un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, ellos son semejantes" y "Dos triángulos son semejantes si dos ángulos de uno de ellos son congruentes con dos ángulos del otro".

A cerca de funciones

Si bien es cierto haremos un estudio de las funciones elementales en la unidad subsiguiente, recordaremos acá a *grosso modo* las nociones dadas en la escuela media que por lo pronto necesitaremos.

Una **función** $f: D \longrightarrow V$ de un conjunto D en un conjunto V asigna a cada elemento x de D, un único elemento en el conjunto V, denotado por $f(x)$, y denominado imagen de x bajo (la acción de) f. El conjunto D es el dominio y V es el codominio de f.

Si $f: D \longrightarrow V$ es una función, en la expresión $f(x)$, x se denomina argumento de la función f y si $f(x) = y$, entonces y es un valor de la función f. El valor de f en x.

Así, si b es la **imagen** de un elemento a bajo la acción de una función f, es decir, si $b = f(a)$, entonces se dice que a es una **preimagen** de b bajo f.

De acuerdo con esto, cada elemento de su dominio tiene exactamente una imagen en el codominio. Sin embargo, algunos elementos del codominio pueden tener distintas preimágenes o bien no tener ninguna.

Este conjunto de valores (del codominio) que toma una función $f: D \longrightarrow V$, se denomina imagen o **rango** de f, y se denota por Imf. Es decir,

$$Imf = \{f(x): x \in D\}.$$

Ejemplo 4. Sea la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la ley de asignación $f(x) = 3x^2 - x$. Esta es una función cuyo dominio y codominio es el conjunto de los números reales. Encontremos $f(-2)$, $f(0)$, $f(\sqrt{3})$ y $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Entonces,

$$f(-2) = 3(-2)^2 - (-2) = 3(4) + 2 = 12 + 2 = 14,$$

$$f(0) = 3(0)^2 - (0) = 3(0) + 0 = 0 + 0 = 0,$$

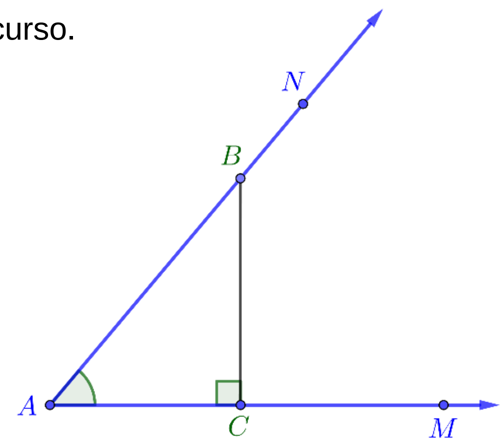
$$f(\sqrt{3}) = 3(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3}) = 3(3) - \sqrt{3} = 9 - \sqrt{3} \approx 7.268.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

El rango de esta función es el conjunto $\left[-\frac{1}{12},\ \infty\right)$, ¿por qué?

Cuando una función está definida por una ecuación $y = f(x)$ (como en el ejemplo anterior) entonces su gráfica es el conjunto de puntos $\big(x, f(x)\big)$, es decir, todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación.

Ahora estamos en capacidad de continuar nuestro discurso.



Sea $\angle MAN$ un ángulo agudo, es decir, cuya medida es menor que $90°$. Tracemos desde un punto cualquiera B (distinto de A) de uno de los lados del ángulo, una perpendicular al otro lado, formando así el triángulo rectángulo $\Delta\, ABC$.

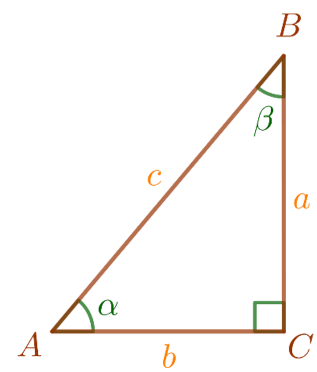
Designemos por las letras griegas α, β y γ las medidas de los ángulos y por las letras a, b y c las longitudes de los lados opuestos correspondientes en el triángulo rectángulo. Sabemos por la Geometría que los lados y ángulos de un triángulo son mutuamente dependientes. Es pues, la Trigonometría la que comienza por enseñar la naturaleza exacta de esta dependencia, para lo cual emplea las seis razones de sus lados.

Estas razones (trigonométricas) es lo que se denomina **funciones trigonométricas**. Las seis funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo como α designadas como seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente se definen respectivamente como sigue:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}, \quad \csc\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}},$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}, \quad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}.$$



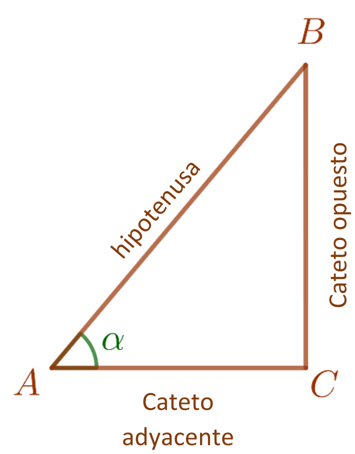


Figura 14. Los adjetivos "adyacente" y "opuesto" dependen de la escogencia del ángulo agudo dentro del triángulo.

Las razones anteriores no dependen del tamaño del triángulo, sino solamente del ángulo. Así, estas funciones tienen como dominio el conjunto de los ángulos agudos, $0° < \theta < 90°$ y como las longitudes de los lados de un triángulo son números reales positivos, los valores de las funciones trigonométricas son siempre números reales positivos.

Ejemplo 5. Determine las seis funciones trigonométricas del ángulo α para el triángulo de la figura 15.

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3.39\ cm}{5.27\ cm} = 0.6433,$$

$$\cos\beta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4.04\ cm}{5.27\ cm} = 0.7666,$$

$$\tan\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3.39\ cm}{4.04\ cm} = 0.839,$$

$$\csc\beta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{5.27\ cm}{3.39\ cm} = 1.554,$$

$$\sec\beta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5.27\ cm}{4.04\ cm} = 1.304,$$

$$\cot\beta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{4.04\ cm}{3.39\ cm} = 1.192.$$

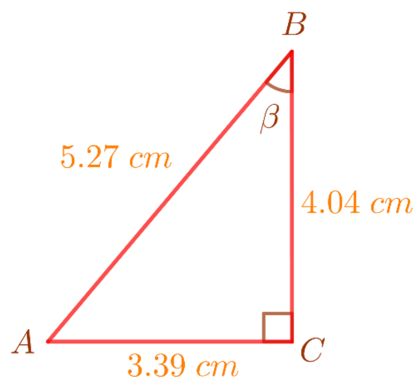


Figura 15

Ejemplo 6. Determine las seis funciones trigonométricas del ángulo α en el triángulo rectángulo con $a = 2\sqrt{3},\ b = 2$ y $c = 4$.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$\csc\alpha = \frac{c}{a} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

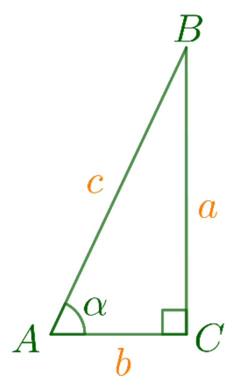


Figura 16

Complemente

Evidentemente, como en todo triángulo rectángulo cada cateto es menor que la hipotenusa, se sigue que $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ son valores menores que 1.

- ¿Cuál es el rango entonces de seno? ¿Y el de coseno?
- ¿Por qué no puede ser el valor de estas funciones igual a 1?
- ¿Por qué los valores de $\sec\alpha$ y $\csc\alpha$ son mayores que 1?

Si conocemos el valor de una de las seis funciones trigonométricas, podemos entonces calcular sin problemas el valor de las restantes funciones trigonométricas, haciendo uso de la definición de éstas y el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 7. Si $\operatorname{sen}\beta = \frac{7}{\sqrt{58}}$ y β es un ángulo agudo, determine el valor de las otras funciones trigonométricas.

Puesto que $\operatorname{sen}\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, el cateto opuesto es igual a 7 y la hipotenusa es $\sqrt{58}$ (dibuje un triángulo que ilustre esta situación). Calculemos el cateto adyacente a β. Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$(\text{cateto opuesto})^2 + (\text{cateto adyacente})^2 = (\text{hipotenusa})^2,$$

y así,

$$(\text{cateto adyacente})^2 = \left(\sqrt{58}\right)^2 - 7^2 = 58 - 49 = 9.$$

Extrayendo raíz cuadrada, obtenemos $\text{cateto adyacente} = 3$.

Aplicando las definiciones de las funciones trigonométricas se obtiene:

$$\cos\beta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{\sqrt{58}} = \frac{3}{\sqrt{58}} \cdot \frac{\sqrt{58}}{\sqrt{58}} = \frac{3\sqrt{58}}{58},$$

$$\tan\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{7}{3}, \qquad \cot\beta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{3}{7},$$

$$\csc\beta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\sqrt{58}}{7}, \qquad \sec\beta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\sqrt{58}}{3}.$$

Refuerce lo aprendido

¿Por qué se descarta que el cateto adyacente valga -3?

Las funciones $\tan\theta$ y $\cot\theta$ pueden tomar cualquier valor real positivo. ¿Por qué? ¿Por qué no puede ser cero el valor de $\tan\theta$? ¿Puede $\cot\theta$ ser cero?

a. $908°$
b. $539°$
d. $-75°$
e. -203

Identidades trigonométricas. Las funciones trigonométricas guardan entre sí muchas relaciones, pero hay algunas que son básicas y de gran utilidad, debido a esto se les llama *identidades fundamentales*. De la definición de las seis funciones trigonométricas se desprenden las siguientes identidades fundamentales.

Identidades recíprocas

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades cocientes

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades Pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta, \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

Dado el valor de una función trigonométrica y usando las identidades fundamentales podemos encontrar el valor de las otras funciones trigonométricas, tal como podemos ver en el siguiente ejemplo.

FUNCIONES ELEMENTALES Y SU DERIVADA

Unidad de aprendizaje 2

Subcompetencia

Utiliza las funciones elementales diferenciables polinomiales y trascendentes para el estudio de modelos de comportamiento de sistemas bajo estudios en el campo agrícola

Concepto de función. En la vida real muchos problemas expresan la variación de una cantidad en dependencia de la variación de otra. Así, es común plantear situaciones como:

- ✓ El precio de un fertilizante depende del costo de producción.
- ✓ La demanda de cierto producto se comporta de acuerdo con su calidad.
- ✓ El salario de un obrero está en dependencia de su jornada laboral.

El concepto que engloba esta relación es el concepto de función.

Sean dos conjuntos A y B distintos del conjunto vacío. Una **función** f es una correspondencia que asocia a cada elemento $x \in A$, un único elemento $y \in B$. El conjunto A se llama dominio de la función y B su codominio.

En una función se dice que existe una relación entre los elementos $x \in A$ y los elementos $y \in B$, es decir, la variable x se relaciona con la variable y o que y depende de x. Hay una regla funcional o de dependencia. Para denotar esta dependencia se usa la expresión

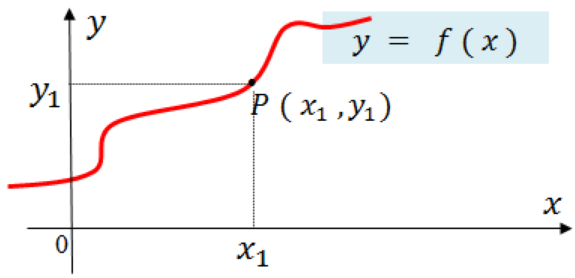
$$f(x) = y.$$

x se llama variable independiente o pre imagen de y.

y se llama variable dependiente o imagen de x.

f es la regla funcional.

Representación gráfica de funciones. Por gráfica de una función real de una variable real se entiende el conjunto de puntos $P(x, y)$ del plano que satisfacen o hacen verdadera la expresión $y = f(x)$, es decir, (x, y) es un par ordenado de f.



Las gráficas de funciones algebraicas elementales se logran a partir de conocer sus características específicas y tabular algunos de sus puntos.

Función constante. Es una función cuya ley de asignación tiene la forma

$$y = f(x) = k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Dominio: $\mathbb{R}$ Rango: $\{k\}$

Su gráfica es una recta paralela al eje x.

Función lineal. Es una función cuya ley de asignación tiene la forma

$$y = f(x) = ax + b, \; a \neq 0.$$

Dominio: $\mathbb{R}$, Rango: $\mathbb{R}$.

Su gráfica es una recta con pendiente a e intercepta al eje y en el punto $(0, b)$.

Función cuadrática. Es una función cuya ley de asignación tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0.$$

Su gráfica es una parábola de vértice $V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

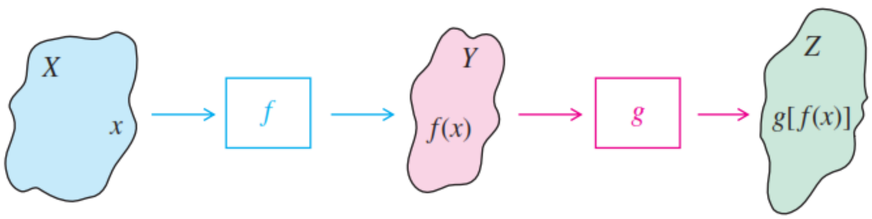
Si $a > 0$ entonces su dominio es $\mathbb{R}$ y su rango el conjunto $\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), +\infty\right)$. Su gráfica es una parábola cóncava hacia arriba. Su eje de simetría es la recta $x + \frac{b}{2a} = 0$.

Si $a < 0$ entonces su dominio es $\mathbb{R}$ y su rango el conjunto $\left(-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$. Su gráfica es una parábola cóncava hacia abajo. Su eje de simetría es la recta $x + \frac{b}{2a} = 0$.

Composición de funciones. Recordemos que si f, g son funciones. La *función compuesta*, o *composición* de g y f es la función cuyos valores están dados por

$$g[f(x)]$$

para toda x del dominio de f tal que $f(x)$ está en el dominio de g.



Ejemplo 12 (Composición de funciones)

Sea $f(x) = 2x^2 + 5x$y$g(x) = 4x + 1$. Halle $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.

Usando las funciones dadas, tenemos

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= f[4x+1] \\ &= 2(4x+1)^2 + 5(4x+1) \\ &= 2(16x^2 + 8x + 1) + 20x + 5 \\ &= 32x^2 + 16x + 2 + 20x + 5 \\ &= 32x^2 + 36x + 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g[f(x)] &= g[2x^2 + 5x] \\ &= 4(2x^2 + 5x) + 1 \\ &= 8x^2 + 20x + 1. \end{aligned}$$

FUNCIONES EXPONENCIALES

La función $f(x) = 2^x$ es llamada *función exponencial* porque la variable, x, es el exponente. No debe confundirse con la función potencial $g(x) = x^2$, en la cual la variable es la base.

En general, una **función exponencial** es una función de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde a es una constante positiva distinta de 1. Recordemos lo que esto significa:

i) Si $x = n$, un entero positivo, entonces

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n \text{ veces}}.$$

ii) Si $x = 0$, entonces $a^0 = 1$.

iii) Si $x = -n$, siendo n un entero positivo, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

iv) Si x es un número racional, $x = \frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y $q > 0$, entonces

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p.$$

v) Si x es un número irracional, entonces

$$a^x = \lim_{r \to x} a^r, \qquad r \text{ racional.}$$

Las gráficas de los miembros de la familia de funciones $y = a^x$ se muestran abajo en la figura de la izquierda para distintos valores de la base a. Observe que todas estas gráficas pasan por el punto $(0, 1)$ puesto que $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Note asimismo que a medida que aumenta la base a, la función exponencial crece más rápidamente (para $x > 0$).

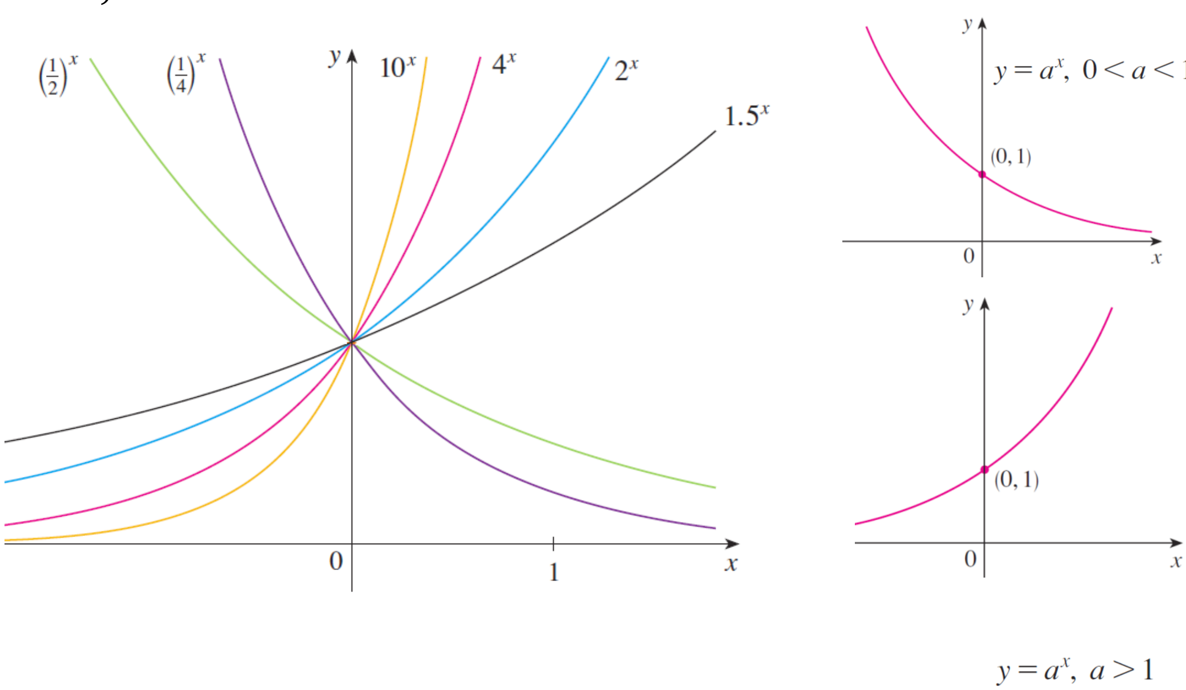


Fig. 4 Familia de funciones de la forma $f(x) = a^x$ (izquierda). Cambios en la gráfica de una función exponencial según el valor de a (derecha).

Puede verse a partir de la figura izquierda que existen básicamente dos clases fundamentales de funciones exponenciales $y = a^x$. Si $0 < a < 1$, la función exponencial disminuye; si $a > 1$, se incrementa.

También, como $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, la gráfica de $y = (1/a)^x$ es justamente la reflexión de la gráfica de $y = a^x$ respecto al eje y.

Las propiedades de la función exponencial se resumen en el siguiente cuadro:

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces $f(x) = a^x$ es una función continua con dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. En particular, $a^x > 0$ para todo x. a^x. Si $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ es una función decreciente; si $a > 1$, f es una función creciente. Si $a, b > 0$ y $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

1. $a^{x+y} = a^x \, a^y$
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x \, b^x$

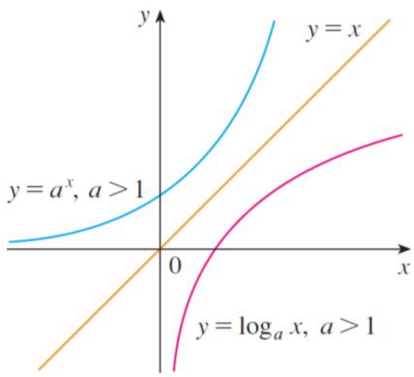
De todas las bases posibles para una función exponencial, existe una que es más conveniente para los propósitos del cálculo. La elección de una base a se ve influida por la manera en que la gráfica de $f(x) = a^x$ cruza el eje y. Resulta que algunas de las fórmulas del cálculo se simplifican en gran medida si se elige la base a de manera que la pendiente de la recta tangente a $y = a^x$ sea exactamente 1. De hecho, existe tal número y es denotado por e. El valor correcto de e hasta cinco lugares decimales es $e \approx 2.71828$. De esta manera queda definida la función exponencial natural por

$$f(x) = e^x.$$

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función exponencial f dada por $f(x) = a^x$ o bien crece o decrece en todo su dominio y por ello es uno a uno. Debido a esto tiene una función inversa f^{-1} que recibe el nombre de **función logarítmica con base a** y se denota por $f(x) = \log_a x$, de manera que

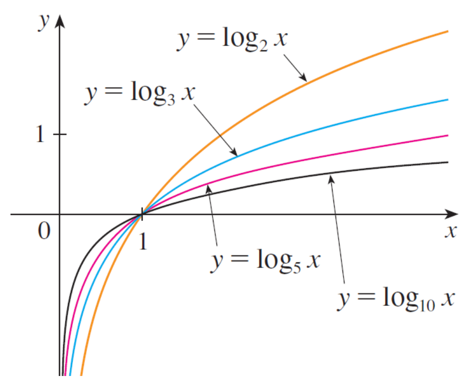
$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x.$$



La función logarítmica $\log_{\mathrm{a}}$ tiene dominio $(0,\ \infty)$ y rango $\mathbb{R}$; y es continua pues es la inversa de una función continua, a saber, la función exponencial. Su gráfica es el reflejo de la gráfica de $y = a^x$ respecto a la línea $y = x$.

Si $a = e$, entonces $\log_a x = \log_{\mathrm{e}} x = \ln x$, denominada logaritmo natural.

La figura de arriba muestra el caso que $a > 1$. [Las funciones logarítmicas más importantes tienen base $a > 1$.] El hecho de que $y = a^x$ sea una función que aumenta muy rápidamente para $x > 0$ se refleja en el hecho que $y = \log_a x$ es una función que aumenta muy lentamente para $x > 1$.



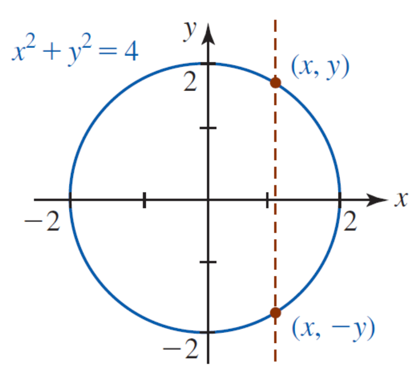
La figura de la derecha muestra las gráficas de $y = \log_a x$ con varios valores de la base $a > 1$. Las gráficas de todas las funciones logarítmicas pasan por el punto $(1, 0)$.

El siguiente cuadro resume las propiedades de las funciones logarítmicas:

Si $a > 1$, entonces $f(x) = \log_a x$ es uno a uno, continua, una función creciente con dominio $(0,\ \infty)$ y $\mathbb{R}$. Si $x, y > 0$ y r es cualquier número real, entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$.

Funciones Implícitas



Las gráficas de las diversas ecuaciones que se estudian en matemáticas no son todas gráficas de funciones. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad (1)$$

describe un círculo de radio 2 con centro en el origen. La ecuación (1) no es la ley de asignación de ninguna función, puesto que para cualquier elección de x que se haga corresponden dos valores de y

como se puede apreciar en la figura de la derecha. Sin embargo, las gráficas de ecuaciones como la anterior pueden tenerrectas tangentes en varios puntos (x, y). ¿Cómo encontrarlas?

La ecuación (1) define *por lo menos* dos funciones f y g sobre el intervalo $[-2, 2]$. Evidentemente, las gráficas de estas funciones son la mitad superior y la mitad inferior del círculo. A fin de obtener las ecuaciones (leyes de asignación) para éstas, se despeja y de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ en términos de x:

$$y = f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{y} \quad y = g(x) = -\sqrt{4 - x^2}.$$

Se dice que una función donde la variable dependiente y se expresa sólo en términos de la variable independiente x, a saber, $y = f(x)$, es una **función explícita** determinada por la ecuación $y = f(x)$. Por ejemplo, $y = \frac{2}{5}x^3 - 1$ determina una función explícita. Por otra parte, supongamos que los valores x, y se encuentran ligados mediante una ecuación que, simbólicamente, escribimos así:

$$F(x, y) = 0,$$

[por ejemplo, $y^2 - y - x^2 = 0,\ x^2y - xy^2 + x^2 = 0$.] Si la función f con ley de asignación $y = f(x)$ definida en cierto intervalo (a, b) es tal que al sustituir y en $F(x, y) = 0$ por $f(x)$, la ecuación se convierte en una identidad respecto a x, entonces la función f recibe el nombre de **función implícita** definida por la ecuación $F(x, y) = 0$.

Así, las ecuaciones $3x^2y^2 - 5xy^3 + x = 5,\ x^2 - x = 5xy - y^4$ que no pueden ser resueltas explícitamente para y en términos de x definen dos funciones implícitas f y g en la perspectiva:

$$x^2[f(x)]^2 - 5x[f(x)]^3 + x = 5, \qquad x^2 - x = 5x[g(x)] - [g(x)]^4.$$

Es necesario señalar que los términos “función explícita” y “función implícita” no caracterizan la naturaleza de una función, sino la manera en la que ésta viene dada. Toda función explícita, $y = f(x)$, puede ser representada en forma implícita como $y - f(x) = 0$. En cambio, no siempre es fácil expresar en forma explícita una función dada implícitamente, es todo un desafío algebraico incluso para actuales Sistemas de Álgebra Computacional.

FUNCIONES MULTIVARIADAS

Recuerde que una función f de una variable es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x en el subconjunto X de los números reales $\mathbb{R}$, denominado el dominio de f, uno y sólo un número real y en otro subconjunto Y de números reales. El conjunto $\{\, y \mid y = f(x),\ x \in X \,\}$ se llama rango de f.

Sin embargo, muchos problemas comunes son funciones de dos o más variables (independientes). Por ejemplo, el área de un rectángulo $[A = xy]$ y el volumen de un cilindro circular recto $[V = \pi r^2 h]$ son funciones de dos variables. El volumen de un sólido rectangular $[V = lwh]$ es una función de tres variables.

La notación para una función de dos o más variables es similar a la utilizada para una función de una sola variable. Por ejemplo,

$$f(x, y) = y^2 + xy;$$
$$f(x, y, z) = 2x - 3y + zx.$$

La definición formal de una función de dos variables se presenta a continuación:

> Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un único número real $f(x, y)$, entonces se dice que f es **una función de x** e **y**. El conjunto D es el dominio de f, y el correspondiente conjunto de valores $f(x, y)$ es el rango de f.

Una definición alternativa es:

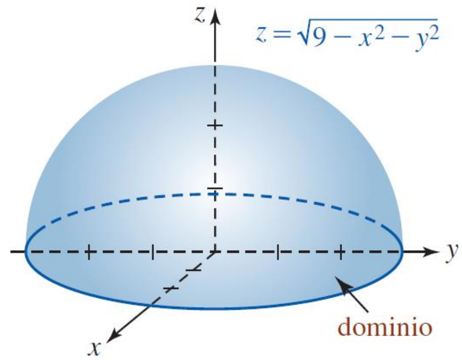
> Una **función de dos variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada par ordenado (x, y) de números reales en el subconjunto del plano xy uno y sólo un número z en el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

Una función de dos variables suele escribirse $z = f(x, y)$ y se lee "f de x, y". Las variables x y y se denominan variables independientes de la función f y z es la variable dependiente.

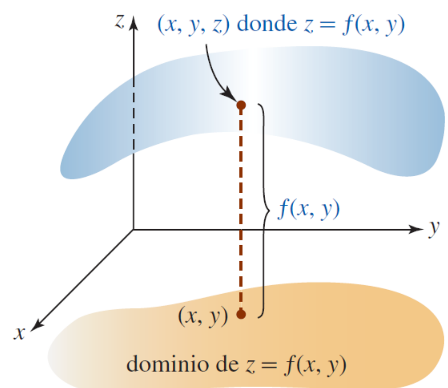
Como ocurre con las funciones de una variable, la manera más común para describir una función de varias variables es por medio de una *ecuación*, y a menos que se diga explícitamente lo contrario, se puede suponer que el dominio es el conjunto de todos los puntos para los que la ecuación está definida.

Por ejemplo, el dominio de la función dada por $f(x, y) = x^3 - 2y^2$ se supone que es todo el plano xy. El dominio de $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ es el conjunto de todos los puntos $(x,\ y)$ tales que $x^2 + y^2 \leq 9$.

Similarmente, el dominio de $f(x,y) = \ln xy$ en el plano para los que $xy > 0$.



Como en el caso de las funciones de una sola variable, se puede saber mucho acerca del comportamiento de una función de dos variables dibujando su gráfica. La gráfica de una función f de dos variables es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) para los que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en el dominio de f. Esta gráfica puede interpretarse geométricamente como una superficie en el espacio.



Las definiciones de funciones de tres o más variables son simplemente generalizaciones de la definición que dimos para funciones de dos variables. Por ejemplo, una **función de tres variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada triada ordenada de números reales $(x,\ y,\ z)$ en un subconjunto del espacio tridimensional, uno y sólo un número w en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Una función de tres variables suele denotarse por medio de $w = f(x,\ y,\ z)$ o $w = F(x,\ y,\ z)$. Una *función polinomial* de tres variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n z^k$ donde $m, n, k \in \mathbb{Z}^+$. El cociente de dos funciones polinomiales se llama *función racional*.

Por ejemplo, el volumen V y el área de la superficie S de una caja rectangular son funciones polinomiales de tres variables: $V = xyz$ y $S = 2xy + 2xz + 2yz$.

La ley de Poiseuille establece que la tasa de descarga, o tasa de flujo, de un fluido viscoso (como la sangre) a través de un tubo (como una arteria) es

$$Q = k\frac{R^4}{L}(p_1 - p_2)$$

donde k es una constante, R es el radio del tubo, L es su longitud, y p_1 y p_2 son las presiones en los extremos del tubo. Éste es un ejemplo de una función de cuatro variables. Puesto que se requieren cuatro dimensiones, no es posible graficar una función de cuatro variables.

Los problemas algebraicos considerados en el curso anterior trataron con situaciones *estáticas*:

- ¿Cuál es la renta al vender 100 fertilizantes?
- ¿Cuánto interés se puede acumular en tres años a determinada tasa?
- ¿Cuál es el número de suscripciones de telefonía celular para los años entre 2012 y 2017?
- ¿Cómo determinar la edad de una persona en función de la edad de otra persona?

En Cálculo, por otro lado, se trata con situaciones *dinámicas*:

- ¿Cuán rápido se está moviendo un tractor después de 2 horas?
- ¿En qué momentos el crecimiento de una población comienza a decaer?
- ¿A qué razón está la demanda para un producto en constante cambio?

Las técnicas del cálculo nos permitirán responder a éstas y a preguntas similares. La idea base del cálculo es el concepto de límite que informalmente estudiamos en la sección anterior.

Recordemos que, el **límite** de una función f cuando x tiende a a (por la izquierda o por la derecha) es L si se pueden acercar los valores arbitrariamente de $f(x)$ a L, tanto como deseemos eligiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a. Esto lo escribimos como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Es importante recalcar que el límite nos sirve como herramienta para determinar si una función es o no continua en un punto dado c. Una función f es **continua** en $x = c$ si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1° $f(c)$ está definida,

2° $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, y

3° $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$.

Para examinar si una función es continua en un punto dado, estos tres pasos son usados y si cualquiera de los tres pasos falla, la función no es continua en ese punto.

Podemos pues, ahora introducirnos a definir la derivada de una función.

Indicador de logro 2

Aplica correctamente los procedimientos para la derivación de funciones elementales en la resolución de problemas aplicados al campo agrario.

Derivada de una función. En geometría, una recta tangente a un círculo es definida como una línea recta que toca a la circunferencia en un único punto. Si pensamos al semicírculo de la figura como una parte de una carretera curva en la que vamos manejando en la noche, entonces la recta tangente indica la dirección de los rayos de luz de los faros delanteros cuando pasamos a través del punto P. Intuitivamente, la recta tangente a una curva arbitraria en un punto P sobre la curva debería tocar la curva en P pero no en ningún punto cercano, y debería indicar la dirección de la curva.

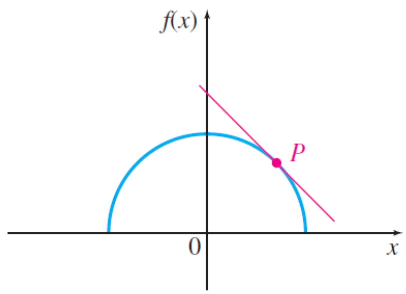


Figura X. Recta tangente al semicírculo en el punto P.

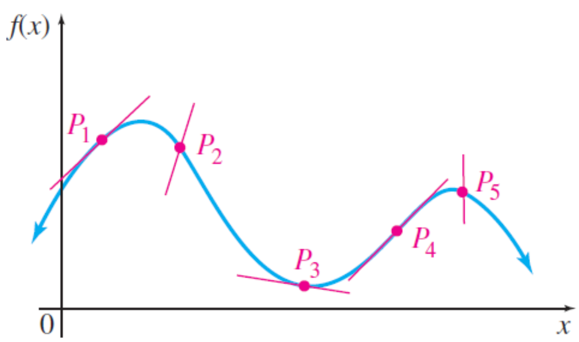


Figura X.

Por ejemplo, en la figura de abajo, las rectas que pasan por P_1 y P_3 son tangentes, mientras que las rectas que pasan por P_2 y P_5 no lo son. Las rectas tangentes justamente tocan la curva e indican su dirección, mientras que las otras pasan a través de la curva en otras direcciones. Para decidir sobre la recta que pasa por P_4 necesitamos definir más cuidadosamente la idea de una recta tangente a la gráfica de una función.

La **recta tangente** a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa a través de este punto con pendiente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

provisto de que este límite existe. Si este límite no existe, entonces no existe recta tangente en el punto.

Definición 11

Ejemplo 16. Encuentre la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en $x = -1$.

Usando la definición dada previamente con $f(x) = x^2 + 2$ y $a = -1$, la pendiente m de la recta tangente a la gráfica de f se calcula así:

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[(-1+h)^2 + 2] - [(-1)^2 + 2]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[h^2 - 2h + h^2 + 2] - [1 + 2]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (-2+h) = -2.
\end{aligned}
$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^2 + 2$ en el punto $(-1, 3)$ es -2. Puesto que la ecuación de una recta puede ser encontrada con la fórmula *punto–pendiente*, tenemos que

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - 3 &= -2[x - (-1)] \\
y - 3 &= -2(x + 1) \\
y - 3 &= -2x - 2 \\
y &= -2x + 1.
\end{aligned}
$$

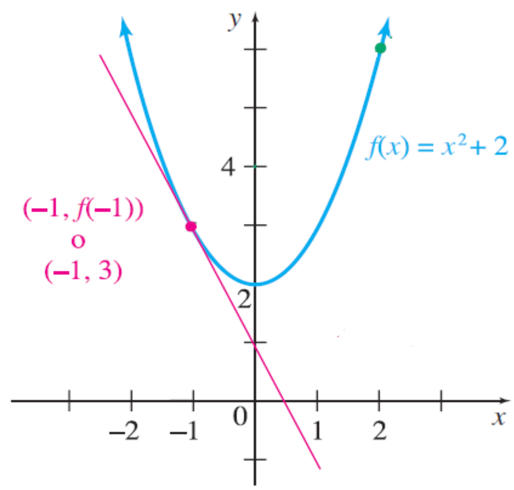


Figura X.

La recta tangente en $y = -2$ se muestra en la figura X.

Si $y = f(x)$ es la ley de asignación de una función real f de variable real y a es un número de su dominio, entonces usaremos el símbolo $f'(a)$ para denotar el límite especial

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

(provisto que él exista, claro está). Esto significa que a cada número a le podemos asignar el número $f'(a)$ encontrado mediante el cálculo de este límite. Esta asignación define una importante nueva función.

La **derivada** de la función f en x se define como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

si este límite existe.

Definición 12

La notación $f'(x)$ se lee "f prima de x". La función $f'(x)$ se llama la derivada de f con respecto a x. Si x es un valor del dominio de f y $f'(x)$ existe, entonces f es *diferenciable* en x. El proceso que produce f' es llamado **diferenciación**.

La derivada de una función tiene muchas interpretaciones. Entre ellas:

1. La función $f'(x)$ representa la *razón de cambio instantánea* de $y = f(x)$ con respecto a x.
2. La función $f'(x)$ representa la *pendiente* de la gráfica de $f(x)$ en cualquier punto x. Si la derivada es evaluada en el punto $x = a$, entonces representa la pendiente de la curva, o la pendiente de la recta tangente a la curva, en ese punto.

Problema 5. Un profesor de Nutrición encontró que, tras introducir a su perro Káiser a una nueva marca de comida, el peso de Káiser comenzó a incrementarse. Después de x semanas de usar la nueva comida, el peso de Káiser (en libras) estaba dado aproximadamente por $w(x) = \sqrt{x} + 40$ para $0 \le x \le 6$. Encuentre la proporción de incremento tras 4 semanas de haber cambiado la marca de la comida.

Hagamos dos cálculos auxiliares:

$w(x+h) = \sqrt{x+h} + 40$

$w(x+h) - w(x) = \sqrt{x+h} + 40 - \left(\sqrt{x} + 40\right) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$

Racionalicemos el miembro derecho de la expresión

$$\frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

de la siguiente manera:

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

Así,

$$\frac{w(x+h)-w(x)}{h}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

Aplicando la definición de derivada de una función tenemos:

$$w'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{w(x+h)-w(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Tras 4 semanas de haber iniciado a consumir la nueva marca de comida para perro, Káiser pesa

$$w(4)=\sqrt{4}+40=42\ lb.$$

Su peso se incrementó en una razón de

$$w'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}\ lb$$

por semana.

Existencia de la Derivada. La derivada existe cuando una función f satisface todas las condiciones siguientes en un punto.

1. f es continua,
2. la gráfica de f es una curva suave, y
3. f no tiene rectas tangentes verticales.

Refuerce lo aprendido

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada para el valor indicado.

- $h(x) = x^2 + 2x; \quad x = 5.$
- $p(t) = -4t^2 + 9t + 2; \quad t = -1.$

b) Para la gráfica de $g(x) = x^2 - x$ encuentre la pendiente de la recta tangente en $x = -2$. Describa su ecuación.

c) Usando la definición de derivada, halle $f'(x)$. Entonces encuentre $f'(-2),\ f'(0)$ cuando las derivadas existan.

- $f(x) = 3x - 7$
- $f(x) = -2x^3 + 10$
- $f(x) = -4x^2 + 9x + 2$
- $f(x) = \frac{12}{x}$

d) El costo en dólares de manufacturar x fertilizantes está dado por $C(x) = -0.005x^2 + 20x + 150$ cuando $0 \leq x \leq 2\,000$. Encuentre la razón de cambio del costo con respecto al número manufacturado cuando 100 fertilizantes son hechos y cuando $1\,000$.

Teoremas de Derivación. Usar la definición para calcular la derivada de una función es un proceso que involucra varios procesos aun para funciones simples. Por ello, desarrollaremos reglas (teoremas) que hagan el cálculo de derivadas mucho más fácil. Mantendremos en mente que aunque el proceso de hallar una derivada se simplificará de sobremanera con estas reglas, la interpretación de la derivada no cambiará. Pero primero, veamos un poco sobre notación que nos servirá para dicho fin.

En adición a $f'(x)$, existen muchas otras notaciones comúnmente usadas para la derivada. La derivada de $y = f(x)$ puede ser escrita en cualquiera de las siguientes maneras:

$$f'(x), \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[f(x)].$$

Con la notación de arriba, la derivada de $y = f(x) = 2x^3 + 4x$, por ejemplo, puede ser escrita:

$$f'(x) = 6x^2 + 4, \qquad D_x(2x^3 + 4x) = 6x^2 + 4.$$

$$\frac{d}{dx}(2x^3 + 4x) = 6x^2 + 4, \qquad \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 4,$$

Una variable distinta de x con frecuencia es usada como variable independiente. Por ejemplo, si $y = h(t)$ da el crecimiento poblacional como una función del tiempo, entonces la derivada de y con respecto a t puede escribirse

$$h'(t), \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d}{dt}[h(t)], \quad D_t[h(t)].$$

Regla de la Constante

Si $f(x) = k$, donde k es cualquier número real, entonces:

$$f'(x) = 0.$$

(La derivada de una constante es 0.)

Teorema 1

Ejemplo 17. Determine la derivada de las siguientes funciones constantes.

a. Si $f(x) = 9$, entonces $f'(x) = 0$.

b. Si $h(t) = \pi$, entonces $h'(t) = 0$.

c. Si $y = 7^3$, entonces $dy/dx = 0$.

Regla de la Potencia

Si $f(x) = x^n$, para cualquier número real n, entonces:

$$f'(x) = n\,x^{n-1}.$$

Teorema 2

Ejemplo 18.

a. Si $f(x) = x^6$, halle $f'(x)$.

$$f'(x) = 6x^{6-1} = 6x^5.$$

b. Si $y = t$, halle $\frac{dy}{dt}$.

$$\frac{dy}{dt} = 1t^{1-1} = t^0 = 1.$$

c. Si $y = \frac{1}{x^3}$, halle dy/dx.

Como $y = 1/x^3 = x^{-3}$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

d. Encuentre $D_x\left(x^{4/3}\right)$.

$$D_x\left(x^{4/3}\right) = \frac{4}{3}x^{(4/3)\,-1} = \frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\,.$$

e. Si $y = \sqrt{z}$, halle $\dfrac{dy}{dz}$.

Puesto que $y = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$, entonces

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2}z^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}z^{-1/2} = \frac{1}{2z^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}\,.$$

Regla del Múltiplo escalar

Sea k un número real. Si $g'(x)$ existe. Entonces la derivada de $f(x) = k \cdot g(x)$ es:

$$f'(x) = k \cdot g'(x).$$

Teorema 3

Ejemplo 19.

a. Si $f(x) = 8x^4$, entonces

$$f'(x) = 8 \cdot (x^4)' = 8 \cdot (4x^3) = 32x^3.$$

b. Si $y = -\frac{3}{4}x^{12}$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4} \cdot (x^{12})' = -\frac{3}{4} \cdot [12x^{11}] = -\frac{3 \cdot 12}{4}x^{11} = -9x^{11}.$$

c. Sea $h(t) = -8t$. Entonces

$$D_t(-8t) = -8 \cdot D_t(t) = -8(1) = -8.$$

d. Sea $f(x) = 10x^{\frac{3}{2}}$. Entonces,

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}\left(10x^{\frac{3}{2}}\right) = 10 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = 10\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = 15x^{1/2} = 15\sqrt{x}.$$

Problema 6. Investigadores han determinado que los requerimientos energéticos diarios de un sabueso hembra de al menos un año de edad cambian con respecto a la edad de acuerdo con la función

$$E(t) = 753t^{-0.1321},$$

donde $E(t)$ es el requerimiento de energía diaria (en $kJ/W^{0.67}$) para un perro que tenga t años de edad.

a) Halle $E'(t)$.

b) Determine la razón de cambio del requerimiento energético diario para un sabueso hembra de 2 años de edad.

Usando las reglas de diferenciación hallamos que

$$\begin{aligned} E'(t) &= 753(-0.1321)t^{-0.1321-1} \\ &= -99.4713t^{-1.1321}. \end{aligned}$$

Determinar la razón de cambio del requerimiento energético diario para un sabueso hembra de 2 años de edad, no es más que calcular $E'(2)$.

$$\begin{aligned} E'(2) &= -99.4713(2)^{-1.1321} \\ &\approx -45.4. \end{aligned}$$

Luego, el requerimiento energético diario para un sabueso hembra de 2 años de edad ha disminuido un $45.4\ kJ/W^{0.67}$.

Regla de la Suma o Diferencia

Si f, g son funciones derivables, entonces:

$$D_x[f(x) \pm g(x)] = D_x[f(x)] \pm D_x[g(x)].$$

(La derivada de una suma/resta es la suma/resta de las derivadas.)

Teorema 4

Ejemplo 20.

a. Si $y = 6x^3 + 15x^2$, entonces

$$\begin{aligned} y' &= D_x[6x^3 + 15x^2] = D_x[6x^3] + D_x[15x^2] = 6 \cdot D_x[x^3] + 15 \cdot D_x[x^2] \\ &= 6(3x^2) + 15(2x) = 18x^2 + 30x. \end{aligned}$$

b. Sea $p(t) = 12t^4 - 6\sqrt{t} + \frac{5}{t}$. Entonces $p(t)$ puede reescribirse como $p(t) = 12t^4 - 6t^{1/2} + 5t^{-1}$, luego

$$\begin{aligned} p'(t) &= \frac{d}{dt}\left[12t^4 - 6t^{1/2} + 5t^{-1}\right] \\ &= \frac{d}{dt}[12t^4] - \frac{d}{dt}\left[6t^{1/2}\right] + \frac{d}{dt}[5t^{-1}] \\ &= 12\,\frac{d}{dt}[t^4] - 6\,\frac{d}{dt}\left[t^{1/2}\right] + 5\,\frac{d}{dt}[t^{-1}] \\ &= 12(4t^3) - 6\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\right) + 5(t^{-2}) \\ &= 48t^3 - 3t^{-1/2} + 5t^{-2}. \end{aligned}$$

Esto último podemos reescribirlo y concluir que

$$p'(t) = 48t^3 - \frac{3}{\sqrt{t}} + \frac{5}{t^2}.$$

c. Derive $f(x) = (4x^2 - 3x)^2$. Usando productos notables, $f(x)$ puede expresarse como $f(x) = 16x^4 - 24x^3 + 9x^2$. Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 16\,D_x[x^4] - 24\,D_x[x^3] + 9\,D_x[x^2] \\ &= 16(4x^3) - 24(3x^2) + 9(2x) \\ &= 64x^3 - 72x^2 + 18x. \end{aligned}$$

Regla del Producto

Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, y si $u'(x),\ v'(x)$ existen, entonces:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

(La derivada de un producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función multiplicada por la segunda función más la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función.)

Teorema 5

Ejemplo 21.

a. Sea $f(x) = (2x + 3)(3x^2)$. Aquí f está dada como el producto de dos funciones $u(x) = 2x + 3$ y $v(x) = 3x^2$. Por la regla del producto y el hecho que $u'(x) = 2$ y $v'(x) = 6x$, se tiene

$$\begin{aligned} f(x)' &= \boldsymbol{u'(x)} \cdot v(x) + u(x) \cdot \boldsymbol{v'(x)} \\ &= (\mathbf{2})(3x^2) + (2x+3)(\mathbf{6x}) \\ &= 6x^2 + 12x^2 + 18x \\ &= 18x^2 + 18x. \end{aligned}$$

b. Sea $g(x) = (4x^2 + x)(3x - 2)$. Si hacemos $u(x) = 4x^2 + x$, entonces $u'(x) = 8x + 1$. Además, con $v(x) = 3x - 2$, se tiene $v'(x) = 3$. Aplicando la regla del producto

$$\begin{aligned} g(x)' &= \boldsymbol{u'(x)} \cdot v(x) + u(x) \cdot \boldsymbol{v'(x)} \\ &= (\mathbf{8x+1})(3x-2) + (4x^2 + x)(\mathbf{3}) \\ &= 24x^2 - 16x + 3x - 2 + 12x^2 + 3x \\ &= 36x^2 - 10x - 2. \end{aligned}$$

Regla del Cociente

Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ siendo $v(x) \neq 0$ y si todas las derivadas indicadas existen, entonces

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Teorema 6

¡Precaución!

Así como la derivada del producto **NO** es el producto de las derivadas, la derivada del cociente **TAMPOCO** es el cociente de las derivadas. Es decir,

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] \neq \frac{d}{dx}[u(x)] \cdot \frac{d}{dx}[v(x)]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] \neq \frac{\frac{d}{dx}[u(x)]}{\frac{d}{dx}[v(x)]}.$$

Ejemplo 22.

a. Halle $f'(x)$ si $f(x) = \frac{2x-1}{4x+3}$.

Sea $u(x) = 2x - 1$, con $u'(x) = 2$. Sea también, $v(x) = 4x + 3$ con $v'(x) = 4$. Entonces por la regla del cociente,

$$f(x)' = \frac{\boldsymbol{u'(x)} \cdot v(x) - u(x) \cdot \boldsymbol{v'(x)}}{[v(x)]^2}$$

$$= \frac{(\mathbf{2})(4x+3) - (2x-1)(\mathbf{4})}{[4x+3]^2}$$

$$= \frac{8x + 6 - 8x + 4}{(4x+3)^2}$$

$$= \frac{10}{(4x+3)^2}.$$

b. Halle $D_x\left[\frac{(3-4x)(5x+1)}{7x-9}\right]$.

Este cociente tiene un producto en el numerador. En lugar de multiplicar los factores en el numerador (lo cual es una opción), podemos usar la regla del cociente junto con la del producto, como sigue. Usemos primero la regla del cociente para obtener

$$D_x\left[\frac{(3-4x)(5x+1)}{7x-9}\right] = \frac{D_x[(3-4x)(5x+1)](7x-9) - [(3-4x)(5x+1)D_x[7x-9]]}{(7x-9)^2}.$$

Ahora usemos la regla del producto para hallar $D_x[(3-4x)(5x+1)]$ y obtener

$$D_x\left[\frac{(3-4x)(5x+1)}{7x-9}\right] = \frac{(7x-9)[(-4)(5x+1) + (3-4x)(5)] - (-20x^2 + 11x + 3)(7)}{(7x-9)^2}$$

$$= \frac{(7x-9)(-20x - 4 + 15 - 20x) + 140x^2 - 77x - 21}{(7x-9)^2}$$

$$= \frac{(7x-9)(-40x+11) + 140x^2 - 77x - 21}{(7x-9)^2}$$

$$= \frac{-280x^2 + 437x - 99 + 140x^2 - 77x - 21}{(7x-9)^2}$$

$$= \frac{-140x^2 + 360x - 120}{(7x-9)^2}.$$

Regla de la Cadena

Si $y = f[g(x)]$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = f'[g(x)] \cdot g'(x)\,.$$

(Forma Alterna)

Si y es una función de u, digamos $y = f(u)$, y si u es una función de x, digamos $u = g(x)$, entonces $y = f(u) = f[g(x)]$, y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\,.$$

Teorema 7

Ejemplo 23.

a. Use la regla de la cadena para determinar $D_x[(x^2 + 5x)^8]$.

Si pensamos a $f(x) = x^8$ y $g(x) = x^2 + 5x$. Entonces

$$f[g(x)] = (x^2 + 5x)^8$$

y

$$D_x[(x^2 + 5x)^8] = f'[g(x)] \cdot g'(x).$$

Como $f'(x) = 8x^7$ entonces $f'[g(x)] = 8(x^2 + 5x)^7$, y $g'(x) = 2x + 5$. Luego,

$$D_x[(x^2 + 5x)^8] = 8(x^2 + 5x)^7(2x + 5) = (x^2 + 5x)^7(16x + 40).$$

b. Halle dy/dx si $y = \sqrt{3x^2 - 5x} = (3x^2 - 5x)^{1/2}$.

Haciendo $y = u^{1/2}$ y $u = 3x^2 - 5x$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot (6x - 5).$$

Reemplazando u con $3x^2 - 5x$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x^2 - 5x)^{-1/2}(6x - 5) = \frac{6x - 5}{2\sqrt{3x^2 - 5x}}\,.$$

Refuerce lo aprendido

1) Derive aplicando los teoremas estudiados en clase. Justifique cada paso.

a. $y = 12x^3 - 8x^2 + 7x + 5$

b. $y = 8x^3 - 5x^2 - \frac{x}{12}$

c. $y = 5x^4 + 9x^3 + 12x^2 - 7x$

d. $f(x) = -100\sqrt{x} - 11x^{2/3}$

e. $f(t) = \frac{14}{t} + \frac{12}{t^2} + \sqrt{2}$

f. $g(x) = (3x^2 + 2)(3x - 1)$

g. $h(x) = (4x - 5x^2)(3x - 2)$

h. $p(x) = \frac{6x+1}{3x+10}$

i. $q(x) = \frac{x^2-4x}{x+3}$

j. $m(t) = \frac{t^2+7t-2}{t^2-2}$

k. $y = (8x^4 - 5x^2 + 1)^4$

l. $k(x) = -2(12x^2 + 5)^{-6}$

m. $g(t) = -3\sqrt{7t^3 - 1}$

n. $s(t) = 12(2t^4 + 5)^{3/2}$.

2) Resuelva.

a. La velocidad típica (en centímetros por segundo) de un organismo marino de longitud l (en cm) está dada por $v = 2.69l^{1.86}$. Halle la razón de cambio de la velocidad con respecto a la longitud del organismo.

b. El número de americanos (en miles) que esperan vivir más de 100 años puede ser aproximado por la función

$$f(t) = 0.00943t^3 - 0.470t^2 + 11.085t + 23.441,$$

donde t es el año, con $\mathrm{t} = 0$ correspondiente al año 2000, siendo que $0 \leq t \leq 50$.

i. Halle la fórmula que da la razón de cambio del número de americanos que sobrepasarán los 100 años de edad.

ii. Halle el número de americanos que se espera vivan más de 100 años para el año 2018.

Fórmulas de Derivación de Funciones trascendentes. Las funciones trascendentes que estudiamos en secciones anteriores (exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) tienen fórmulas de derivación especiales a las que les dedicaremos este apartado. Pero antes recordemos algunos aspectos.

Actividad Exploratoria 3

- ¿Cuándo decimos que una función es exponencial?
- ¿Qué forma debe tener la ley de asignación de f para que sea considerada una función logarítmica? ¿Cuál es su dominio?
- Dé ejemplos de funciones exponenciales y logarítmicas.
- ¿Qué relación guardan las funciones exponenciales y las logarítmicas? ¿Cuál es la expresión matemática que representa está relación?
- ¿Qué características poseen la función exponencial natural y la función logaritmo natural?
- ¿Cuáles son las funciones trigonométricas de números reales?
- ¿Qué cambios en la ley de asignación de la función seno ocasiona un desplazamiento de su gráfica de 2 unidades a la izquierda y 7 unidades hacia abajo?
- Si desplazamos la gráfica de la función coseno π unidades a la derecha y la ampliamos en 3 unidades, ¿cuál sería la nueva ley de asignación?

Derivada de funciones exponenciales. Para los casos particulares en los que el exponente sea x tenemos dos fórmulas en función del tipo de base ($a \neq e$ y $a = e$):

$$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x(\ln a) \qquad\qquad \frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

Ahora vemos porque e es la mejor base para trabajar con funciones exponenciales: tiene la derivada más simple de todas las funciones exponenciales. Por su aplicabilidad de acá en adelante haremos más énfasis en las funciones exponenciales naturales. La regla de la cadena puede usarse para hallar la derivada de funciones exponenciales más generales de la forma $y = a^{g(x)}$. Al final, se obtienen las fórmulas:

$$\frac{d}{dx}\left[a^{g(x)}\right] = a^{g(x)}(\ln a)\cdot g'(x) \qquad\qquad \frac{d}{dx}\left[e^{g(x)}\right] = e^{g(x)}\cdot g'(x).$$

Ejemplo 24.

a. Halle $f'(x)$ si $f(x) = 6^x$.

Tenemos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[6^x]$$
$$= 6^x(\ln 6)$$
$$\approx 6^x(1.7918).$$

Es decir, con algún grado de aproximación se tiene $f'(x) = (1.7918)6^x$.

b. Halle $D_x\,[e^{7x}]$.

En este caso, $g(x) = 7x$, y evidentemente $g'(x) = 7$. Lo que al sustituir en la fórmula correspondiente produce que

$$D_x[e^{7x}] = e^{7x} \cdot (7) = 7e^{7x}.$$

c. Halle $D_x\,[4^{-3x}]$.

Haciendo, $g(x) = -3x$ se obtiene que $g'(x) = -3$. Luego,

$$\frac{d}{dx}[4^{-3x}] = 4^{g(x)}(\ln 4) \cdot g'(x)$$
$$= 4^{-3x}(\ln 4) \cdot (-3)$$
$$\approx 4^{-3x}(1.3863) \cdot (-3)$$
$$= (-4.1589)4^{-3x}.$$

d. Halle $h'(x)$ si $h(x) = e^{x^2-7x+1}$.

De $g(x) = x^2 - 7x + 1$ resulta $g'(x) = 2x - 7$. En consecuencia,

$$h'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$
$$= \left(e^{x^2-7x+1}\right)(2x - 7).$$

e. Si $f(x) = (e^x + 2x)^3$, entonces

$$f'(x) = 3(e^x + 2x)^2 \cdot D_x[e^x + 2x]$$
$$= 3(e^x + 2x)^2(e^x + 2)$$
$$= (3e^x + 6)(e^x + 2x)^2.$$

Problema 7. La cantidad en gramos de una muestra de uranio 239 años después de t años está dada por

$$A(t) = 100e^{-0.362t}.$$

Encontremos la razón de cambio de la cantidad presente después de tres años.

La razón de cambio está dada por la derivada dA/dt. Es decir,

$$\begin{aligned} A'(t) &= \frac{dA}{dt} \\ &= 100(e^{-0.362t})(-0.362) \\ &= -36.2e^{-0.362t}. \end{aligned}$$

Después de tres años $(t = 3)$, la razón de cambio es

$$A'(3) = -36.2e^{-0.362(3)} = -36.2e^{-1.086} \approx -12.2$$

gramos por año.

Derivada de funciones logarítmicas. Sea u una función derivable en x, digamos $h(x)$. Entonces se cumplen las igualdades siguientes:

$$\frac{d}{dx}[\log_{\mathrm{b}} x] = \frac{1}{x(\ln b)} \qquad \frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{d}{dx}[\log_{\mathrm{b}} u] = \frac{1}{u(\ln b)} \cdot \frac{d}{dx}(u) \qquad \frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$$

Ejemplo 25.

a. Halle $f'(x)$ si $f(x) = \log x$.

Sabemos que $\log x = \log_{10} x$. Entonces $b = 10$. Así,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x(\ln b)} \\ &= \frac{1}{x(\ln 10)} \\ &\approx \frac{1}{x(2.3026)}. \end{aligned}$$

Es decir, con algún grado de aproximación se tiene $f'(x) = {}^{1}/_{2.3026x}$.

b. Halle $D_x\left[\log_3 x\right]$.

En este caso, $b = 3$, luego,

$$D_x[\log_3 x] = \frac{1}{x(\ln 3)} \approx \frac{1}{x(1.0986)} = \frac{1}{1.0986x}.$$

c. Halle $D_x\ [\log_4 3x]$.

Tenemos que $b = 4,\ u = 3x$ y $\frac{d}{dx}(u) = 3$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} D_x[\log_4 3x] &= \frac{1}{3x(\ln 4)}(3) \\ &= \frac{1}{x(\ln 4)} \\ &\approx \frac{1}{x(1.3863)} \\ &= \frac{1}{1.3863x}. \end{aligned}$$

d. Halle $h'(x)$ si $h(x) = \ln\left(3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1\right)$.

De $u = 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$ resulta $u' = 9x^2 + x$. En consecuencia,

$$h'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{9x^2 + x}{3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1}.$$

Problema 8. Basados en la proyección de *Kelly Blue Book* el precio de reventa (en dólares) de una Toyota Corolla sedán 2010 de cuatro puertas puede ser aproximado mediante la función

$$f(x) = 15\,450 - 13\,915\log(x + 1),$$

donde x es el número de años a partir del 2010. Halle e interprete $f(8)$ y $f'(8)$.

Reconociendo esta función como una logarítmica común (de base 10), tenemos

$$\begin{aligned} f(8) &= 15\,450 - 13\,915\log(8) \\ &\approx 2\,171.72. \end{aligned}$$

En el año 2018 el precio promedio de reventa de una Toyota Corolla 2010 sería de aproximadamente \$ 2,171.72.

La derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = \frac{-13\,915}{2.3026(x+1)}.$$

De manera que $f'(8) \approx -671.46$. En el año 2018, el precio promedio de reventa de una Toyota Corolla 2010 disminuye en $\$\,671.46$ por año.

Estudiemos ahora más ejemplos sobre derivación de funciones exponenciales y logarítmicas con algún grado de mayor complejidad donde hagamos uso de los resultados estudiados sobre derivada.

Ejemplo 26.

a. $y = 10e^{3x^2}$ implica que

$$y' = 10\left(e^{3x^2}\right)(6x) = 60xe^{3x^2}.$$

b. Siendo $y = e^{-x}$ se tiene que su derivada es

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = -e^{-x}.$$

c. Sea $y = 3x^2e^{-x^2}$. Entonces por la regla del producto y la derivada de una función exponencial se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(3x^2) \cdot \left(e^{-x^2}\right) + (3x^2) \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\right)\\ &= (6x)\left(e^{-x^2}\right) + (3x^2)\left(-2xe^{-x^2}\right)\\ &= 6xe^{-x^2} - 6x^3e^{-x^2}\\ &= (6x - 6x^3)e^{-x^2}.\end{aligned}$$

d. Sea $y = e^{x^2+1}\sqrt{5x+2}$. Reescribamos y como $y = e^{x^2+1}(5x+2)^{1/2}$, usando la regla del producto y la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(e^{x^2+1}\right) \cdot (5x+2)^{1/2} + \left(e^{x^2+1}\right)\frac{d}{dx}\left[(5x+2)^{1/2}\right]\\ &= \left[e^{x^2+1} \cdot 2x\right](5x+2)^{1/2} + e^{x^2+1}\left[\frac{1}{2}(5x+2)^{-1/2} \cdot 5\right]\\ &= e^{x^2+1}(5x+2)^{-1/2}\left[2x(5x+2) + \frac{5}{2}\right]\end{aligned}$$

$$= e^{x^2+1}(5x+2)^{-1/2}\left[\frac{4x(5x+2)+5}{2}\right].$$

$$= e^{x^2+1}(5x+2)^{-1/2}\left[\frac{20x^2+8x+5}{2}\right]$$

$$= \frac{e^{x^2+1}(20x^2+8x+5)}{2\sqrt{5x+2}}.$$

e. $y = x\ln x$ implica que

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}[x\ln x] \\ &= \frac{d}{dx}(x)\cdot\ln x + x\cdot\frac{d}{dx}(\ln x) \\ &= (1)\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \ln x + 1. \end{aligned}$$

f. Siendo $y = (\ln x)^3$ se tiene que su derivada es

$$\frac{dy}{dx} = 3(\ln x)^2\frac{d}{dx}(\ln x) = 3(\ln x)^2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3(\ln x)^2}{x}.$$

En el pasado, se utilizaban las propiedades de los logaritmos para simplificar cálculos con productos, cocientes y potencias. Por supuesto, actualmente con las calculadoras a nuestra disposición hay poco lugar para esas aplicaciones de los logaritmos. Sin embargo, es de gran valor el uso de las propiedades de los logaritmos para simplificar la derivada de productos, cocientes y potencias.

Ejemplo 27. Derive la función dada por la ley de asignación

$$f(x) = \ln\sqrt{x+1}.$$

Como $f(x) = \ln\sqrt{x+1}$ se puede reescribir como

$$f(x) = \ln\sqrt{x+1} = \ln(x+1)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(x+1),$$

entonces su derivada puede escribirse como

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2(x+1)}.$$

Problema 9. Derivemos la función f dada por:

$$f(x)=\ln\frac{(x^2+3)^2}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.$$

En el ejemplo 12 obtuvimos que $f(x)$ puede reescribirse como

$$f(x)=2\ln(x^2+3)-\ln x-\frac{1}{3}\ln(x^2+1).$$

Esta forma equivalente es más fácil de derivar que la ecuación original. Por tanto,

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{d}{dx}[2\ln(x^2+3)]-\frac{d}{dx}[\ln x]-\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}\ln(x^2+1).\right]\\
&=\frac{2(2x)}{x^2+3}-\frac{1}{x}-\frac{2x}{3(x^2+1)}\\
&=\frac{2(2x)(3x)(x^2+1)-(x^2+3)(3)(x^2+1)-2x(x)(x^2+3)}{(x^2+3)(3x)(x^2+1)}\\
&=\frac{12x^4+12x^2-(3x^4+12x^2+9)-(2x^4+6x^2)}{3x^5+12x^3+9x}.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$f'(x)=\frac{7x^4-6x^2-9}{3x^5+12x^3+9x}.$$

Refuerce lo aprendido

1) Derive las funciones dadas por las siguientes leyes de asignación.

a. $y=e^{4x}$

b. $y=-8e^{3x}$

c. $y=-16e^{2x^2+1}$

d. $y=xe^x$

e. $y=(x+3)^2e^{4x}$

f. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{x}$

g. $p(t)=\frac{10\,000}{9+4e^{-0.2t}}$

h. $f(z)=\left(2z+e^{-z^2}\right)^2$

i. $y=\ln x$

j. $y=\ln(4x^2-9x)$

k. $y=\ln\sqrt{x+5}$

l. $s=t^2\ln t$

m. $y=\frac{2\ln(x+3)}{x^2}$

n. $y=(\ln(x+1))^4$

o. $f(t)=\frac{\ln(t^2+1)+t}{\ln(t^2+1)+1}$

p. $f(x)=\ln(\ln x)$

Refuerce lo aprendido (cont.)

2) Derive las siguientes funciones cuyas leyes de asignación son combinaciones de funciones trascendentes.

a. $g(x) = e^{x^2} \ln x$

b. $h(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

c. $p(y) = \frac{\ln y}{e^y}$

d. $s(t) = \sqrt{e^{-t} + \ln 2t}$

e. $g(z) = (e^{2z} + \ln z)^3$

Derivada de funciones trigonométricas. Las derivadas de las seis funciones trigonométricas son

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

Además, si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \cdot \frac{d}{dx}(u) \qquad \frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u \cdot \frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \cdot \frac{d}{dx}(u) \qquad \frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \cdot \frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \cdot \frac{d}{dx}(u) \qquad \frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \cdot \frac{d}{dx}(u)$$

Ejemplo 27.

a. Si $y = x^3 \operatorname{sen} x$ entonces

$$\begin{aligned} y' &= (x^3)'(\operatorname{sen} x) + (x^3)(\operatorname{sen} x)' \\ &= 3x^2 \operatorname{sen} x + x^3 \cos x. \end{aligned}$$

b. Siendo $y = \cos^2 x = \cos x \cos x$ se tiene que su derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos x) \cdot \cos x + \cos x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \cos x\,(-\operatorname{sen} x)$$
$$= -2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

c. Sea $f(x) = \tan(3x^2 - 5x)$. Entonces de $u = 3x^2 - 5x$ se tiene que $u' = 6x - 5$. Por tanto la derivada de f es

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \tan u$$
$$= \sec^2 u \cdot \frac{d}{dx}(u)$$
$$= \sec^2(3x^2 - 5x) \cdot (6x - 5).$$

d. Si $p(t) = \operatorname{sen}(-7t^3 + 5t^2)$, entonces su derivada es

$$p'(t) = \cos(-7t^3 + 5t^2) \cdot \frac{d}{dt}(-7t^3 + 5t^2)$$
$$= \cos(-7t^3 + 5t^2) \cdot (-21t^2 + 10t)$$
$$= (-21t^2 + 10t) \cos(-7t^3 + 5t^2)$$

e. Para $s(t) = \csc t^3$, se sigue que

$$s'(t) = -\csc t^3 \cot t^3 \cdot \frac{d}{dt}(t^3)$$
$$= -\csc t^3 \cot t^3 \cdot (3t^2)$$
$$= -3t^2 \csc t^3 \cot t^3.$$

f. De $f(x) = \left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} x - 2x\right)^3$ se deduce que

$$f'(x) = 3\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} x - 2x\right)^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} x - 2x\right)$$
$$= 3\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} x - 2x\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\cos x - 2\right)$$
$$= (\cos x - 6)\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} x - 2x\right)^2$$

Refuerce lo aprendido

1) Derive las funciones dadas por las siguientes leyes de asignación.

a. $y = x^3 - \cos x$

b. $y = 1 + 7\,\text{sen}\,x - \tan x$

c. $y = 5x^3 - x + 4\,\text{sen}\,x$

d. $y = x^3 \cos x - x^3\,\text{sen}\,x$

e. $y = \left(3\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x}\right)\cos x$

f. $y = \dfrac{5}{\cos x \cot x}$

g. $p(t) = \dfrac{\cot t}{t+1}$

h. $f(x) = (3\,\text{sen}\,3x - 2\cos x)^2$

i. $y = x\,\text{sen}\,x$

j. $y = 5\cos x - 3\cot x$

k. $y = \csc 5x$

l. $s(t) = t^2 \tan t$

m. $y = \dfrac{2+\text{sen}\,x}{x^2}$

n. $f(z) = \csc z \tan z$

o. $f(t) = \dfrac{t^2-6t}{1+\cos t}$

p. $f(x) = (\text{sen}\,2x)^3$

Derivación Implícita. La derivación implícita nos permitirá obtener la derivada $\frac{dy}{dx}$ para ecuaciones del tipo $x^2 + y^2 = 4$ así como para ecuaciones más complicadas de la forma $F(x,y) = 0$, sin necesidad de resolver la ecuación para la variable y.

Este proceso consiste en diferenciar ambos miembros de una ecuación con respecto a x, usando los teoremas de diferenciación y luego resolviendo para $\frac{dy}{dx}$. Puesto que se considera que y está determinada por la ecuación dada como una función diferenciable de x, la regla de la cadena, en forma de la regla de potencias para funciones, proporciona el resultado útil:

$$\frac{d}{dx}(y^n) = ny^{n-1}\frac{dy}{dx},$$

o lo que es lo mismo,

$$(y^n)' = ny^{n-1}y',$$

donde n representa un número real cualquiera.

Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2, \text{ pero } \frac{d}{dx}\left(y^3\right) = 3y^2\frac{dy}{dx}.$$

Procedimiento para derivar implícitamente:

Dada una ecuación que contiene a x e y, suponiendo que y es una función derivable en x. Entonces, la derivada de y con respecto a x, denotada $\frac{dy}{dx}$, se determina mediante el siguiente procedimiento:

1°. Diferencie con respecto a x ambos miembros de la ecuación, use los teoremas de derivadas y considere a y como una función diferenciable de x. Para potencias del símbolo y, use $(y^n)' = ny^{n-1}y'$.

2°. Agrupe todos los términos donde aparece el símbolo de derivada en un solo miembro. Mueva todos los otros términos al miembro opuesto.

3°. Factorice el miembro que contiene todos los términos con $\frac{dy}{dx}$.

4°. Despeje $\frac{dy}{dx}$.

Asumiremos en los siguientes ejemplos que la ecuación dada determina por lo menos una función diferenciable implícitamente.

Ejemplo 28. Derive la función $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$.

Siguiendo el procedimiento descrito tenemos:

$$\frac{d}{dx}(y^3 + y^2 - 5y - x^2) = \frac{d}{dx}(-4)$$

$$\frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(5y) - \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(-4)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 2y - 5\,) = 2x$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 - 2y - 5}}.$$

Ejemplo 29. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si $x^2+y^2=4$.

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}}.$$

Ejemplo 30. Derivar la función $x^2y+xy^2=-2$.

$$D_x(x^2y+xy^2) = D_x(-2)$$

$$D_x(x^2y) + D_x(xy^2) = D_x(-2)$$

$$2xy + (x^2)y' + 1(y^2) + 2yy'(x) = 0$$

$$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = 0$$

$$x^2y' + 2xyy' = -2xy - y^2$$

$$y'(x^2 + 2xy) = -2xy - y^2$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{-2xy - y^2}{x^2 + 2xy}}.$$

Ejemplo 31. Derive la función $(x+y)^3 = x^3+y^3$.

$$\frac{d}{dx}[(x+y)^3] = \frac{d}{dx}(x^3+y^3)$$

$$3(x+y)^2(1+1y') = 3x^2 + 3y^2y'$$

$$3(x+y)^2(1+y') = 3x^2 + 3y^2y'$$

$$3(x^2+2xy+y^2)(1+y') = 3x^2+3y^2y'$$

$$(3x^2+6xy+3y^2)\,(1+y') = 3x^2+3y^2y'$$

$$3x^2+6xy+3y^2+3x^2y'+6xyy'+3y^2y' = 3x^2+3y^2y'$$

$$3x^2y'+6xyy'+3y^2y'-3y^2y' = 3x^2-3x^2-6xy-3y^2$$

$$3x^2y'+6xyy'+\cancel{3y^2}y'-\cancel{3y^2}y' = \cancel{3x^2}-\cancel{3x^2}-6xy-3y^2$$

$$3x^2y'+6xyy' = -6xy-3y^2$$

$$3y'\,(x^2+2xy) = -3(2xy+y^2)$$

$$y' = \frac{-3(2xy+y^2)}{3(x^2+2xy)}$$

$$\boldsymbol{y' = -\frac{2xy+y^2}{x^2+2xy}}.$$

Problema 10. Determine una ecuación para la recta tangente a la gráfica de la ecuación $x^2+y^2+6y = 4x+24$ en el punto $(1,3)$.

Derivemos la ecuación $x^2+y^2+6y = 4x+24$ y evaluemos en el punto dado para obtener la pendiente de la recta tangente buscada, así:

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2+6y) = \frac{d}{dx}(4x+24)$$

$$2x+2yy'+6y' = 4$$

$$2yy'+6y' = 4-2x$$

$$2y'(y+3) = 2(2-x)$$

$$y' = \frac{2(2-x)}{2(y+3)}$$

$$y' = \frac{2-x}{y+3}.$$

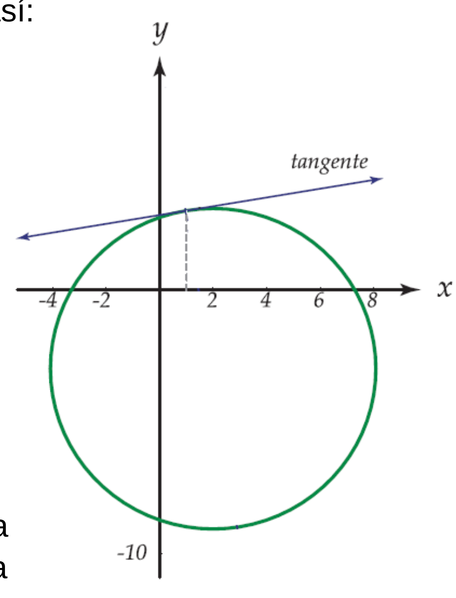


Figura X.

Evaluando y' en $(1,3)$ obtenemos que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $x^2+y^2+6y = 4x+24$ en el punto $(1,3)$ es $m = \frac{1}{6}$. Luego, la ecuación de la recta tangente es $\boldsymbol{y = \frac{1}{6}x + \frac{17}{6}}$.

Derivadas de orden superior. Si una función f tiene una derivada f', entonces la derivada de f', si existe, es la segunda derivada de f, escrita f''. La derivada de f'', si existe, es llamada la tercera derivada de f, y así sucesivamente. Continuando este proceso, podemos encontrar la cuarta y otras derivadas superiores. Por ejemplo, si $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 5x + 7$, entonces

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x - 5,$$
$$f''(x) = 12x^2 + 12x + 6,$$
$$f'''(x) = 24x + 12,$$

y

$$f^{(4)} = 24.$$

En general, una derivada de orden n puede denotarse

$$f^{(n)}(x), \qquad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad D_x^n[f(x)].$$

Observación. Si bien es cierto, una función diferenciable tiene infinitas derivadas, las funciones polinomiales de grado n tienen exactamente n derivadas no nulas.

¡Precaución!

Observe que $f^{(4)}(x)$ indica la cuarta derivada de f, en cambio $f^4(x)$ indica que $f(x)$ está elevada a su cuarta potencia.

Ejemplo 32.

a) Encuentre f''' de $f(x) = x^3 + 6x^2 - 9x + 8$.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 9$$
$$f''(x) = 6x + 12$$
$$f'''(x) = 6.$$

b) Encuentre f''' de $f(x) = (x^2 - 1)^2$.

$$f'(x) = 2(x^2 - 1)(2x) = 4x(x^2 - 1).$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4x(2x) + (x^2 - 1)(4) \\ &= 8x^2 + 4x^2 - 4 \\ &= 12x^2 - 4 \end{aligned}$$

$$f'''(x) = 24x$$

Ejemplo 32. Encuentre d^2y/dx^2 si $x^2+y^2=4$.

Del ejemplo 29 sabemos que

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Luego, para hallar la segunda derivada de la función debemos derivar la primera derivada, es decir,

$$\begin{aligned} y''&=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\\ &=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{y}\right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$y''=\frac{-1(y)-\ y'\,(-x)}{y^2}$$

$$y''=\frac{-y+xy'}{y^2}$$

$$y''=\frac{-y+x\left(\frac{-x}{y}\right)}{y^2}$$

$$y''=\frac{-y-\frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$y''=\frac{\frac{-y^2-x^2}{y}}{y^2}$$

$$y''=\frac{-y^2-x^2}{y}\times\frac{1}{y^2}$$

$$y''=\frac{-\,(y^2+x^2)}{y^3}$$

$$\boldsymbol{y''=-\frac{4}{y^3}}.$$

Problema 11 (Aplicación física de la derivada). Si $s(t)$ es una función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su función *velocidad* $v(t)$ es $v(t) = s'(t)$, y su función *aceleración* $a(t)$ es $a(t) = s''(t) = v'(t)$.

Supongamos que un carro se mueve en línea recta, con su posición (en metros) a partir de un punto inicial en un tiempo t (en segundos) dada por

$$s(t) = t^3 - 2t^2 - 7t + 9.$$

Halle:

i) La velocidad en cualquier tiempo t,

ii) La aceleración en cualquier tiempo t

Sabemos que si la posición de un cuerpo está dada mediante una ecuación $s(t)$, entonces su velocidad y aceleración quedan determinadas mediante $s'(t)$ y $s''(t)$, respectivamente. Entonces, para el caso del carro que nos compete, su velocidad (en metros por segundo) está dada por

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 4t - 7,$$

y su aceleración (en metros por segundos cuadrados) está dada por

$$a(t) = s''(t) = 6t - 4.$$

Si bien es cierto, la aceleración es la segunda derivada de la posición, pero también puede ser vista como la primera derivada de la velocidad ($a(t) = v'(t)$).

Refuerce lo aprendido

1) Suponiendo que en cada inciso existe una función derivable f tal que $f(x)$ está definida por la ecuación dada, calcular su derivada.

- **a.** $x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$
- **b.** $x^2 - xy + y^2 = 3$
- **c.** $3x^2y^2 - 5xy^3 + x = 5$
- **d.** $x^2 - x = 5xy^2 - y^4$.

2) Determine la derivada de segundo orden de

- **a.** $x^3 - xy + y^3 = 0$
- **b.** $ax^2 + 2xy + by^2 = 1$.

Refuerce lo aprendido (cont.)

3) Determine todas las derivadas no nulas de:

a. $y = 3x^2 - x + \sqrt{7}$

b. $y = -5x^4 + x - \pi x^2$

c. $f(x) = (x - x^2)^2$

d. $g(x) = (5x^2)(x - x^3)$

e. $2xy = x^2 - 1.$

4) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación $y^2 = 1 + x^2 y + 2x$ en $(-2, 1)$.

5) Investigue en los contextos de ciencias, ingenierías y negocios, (i) que representan las siguientes funciones, (ii) cuál es su primer derivada, y, (iii) interprete el significado de esta última.

a. $A(r) = \pi r^2$

b. $r(\theta) = 4\theta^2 - 3\theta$

c. $D(p) = 800 - 129p + p^2.$

Derivadas de Funciones en varias variables. Para el estudio de las derivadas parciales es conveniente repasar algunas ideas dadas anteriormente sobre funciones multivariadas.

Actividad Exploratoria 4

- ¿Cómo se define una función en dos variables? ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su codominio?
- ¿Cómo se define una función en tres variables? ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su codominio?
- Generalice las definiciones anteriores para el caso de una función de n variables.
- ¿Cómo se interpreta la gráfica de una función bivariada?
- Dé ejemplos de funciones en dos y tres variables.
- ¿Cómo se define la derivada de una función univariada?

Derivadas parciales. Sea la función de dos variables reales ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y^2 + y^3.$$

Consideremos el *símbolo* y como si fuera una constante, digamos y_0, resulta entonces una función g de una sola variable x, a saber,

$$g(x) = f(x, y_0) = x^3 + 2x^2{y_0}^2 + {y_0}^4.$$

Su derivada es

$$g'(x) = 3x^2 + 4x{y_0}^2.$$

Reemplacemos la constante y_0 otra vez por y, resulta una nueva función h de dos variables

$$h(x) = 3x^2 + 4xy^2.$$

Esta función h se denomina la derivada parcial de f respecto a x y se representa de entre otras maneras como f_x, o sea,

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 4xy^2.$$

Si, en cambio, consideramos como constante al *símbolo* x, sea por ejemplo x_0, se obtiene también una función de una variable, a saber

$$r(y) = {x_0}^3 + 2{x_0}^2y^2 + y^3,$$

cuya derivada es

$$r'(y) = 4{x_0}^2y + 3y^2.$$

Si ahora sustituimos x_0 por x, se obtiene una nueva función de dos variables denominada derivada parcial de f respecto a y que se representa de entre otras formas como f_y, o sea,

$$f_y(x, y) = 4x^2y + 3y^2.$$

Esta definiciones meramente intuitivas indican que si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables reales entonces para hallar f_x se considera y constante y se deriva con respecto a x. De manera similar, para calcular f_y se considera x constante y se deriva con respecto a y.

Notación. Si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales f_x y f_y se denotan por

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Recordando la definición de derivada de una función de una variable, resulta que las derivadas parciales pueden también definirse como los siguientes límites:

Si $z = f(x,y)$ es una función de dos variables, entonces la **derivada parcial con respecto a x** es la función

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h},$$

y la **derivada parcial con respecto a y** es

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

siempre que estos límites existan.

Definición 13

Ejemplo 33.

a) Encuentre las derivadas parciales f_x y f_y de la función definida por

$$f(x,y) = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1.$$

Si se considera y como constante y se deriva con respecto a x se obtiene:

$$f_x(x,y) = (12x^2)y^2 - 8x + 0 + 0 = 12x^2y^2 - 8x.$$

Ahora tratando a x como constante, obtenemos

$$f_y(x,y) = (4x^3)2y - 0 + 6y^5 + 0 = 8x^3y + 6y^5.$$

b) Encuentre las derivadas parciales f_x y f_y de la función definida por

$$f(x,y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y.$$

Si se considera y como constante y se deriva con respecto a x se obtiene:

$$f_x(x,y) = 3 - (2x)y^2 + (6x^2)y = 3 - 2xy^2 + 6x^2y.$$

Si se considera a x como constante, y se deriva con respecto a y obtenemos

$$f_y(x,y) = -(x^2)2y + (2x^3)(1) = -2x^2y + 2x^3.$$

Ejemplo 34. Dada $z = x^3 + 7x^2y + 8y^3 + 3x - 2y + 7$, encuentre las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Si $z = x^3 + 7x^2y + 8y^3 + 3x - 2y + 7$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 14xy + 3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 7x^2 + 24y^2 - 2.$$

Problema 12. La función $S = 0.1091w^{0.425}\,h^{0.725}$ relaciona el área superficial (en pies cuadrados) del cuerpo de una persona como una función del peso w (en libras) y la altura h (en pulgadas). Encuentre $\frac{\partial S}{\partial w}$ cuando $w = 150$ y $h = 72$. Interprete.

La derivada parcial de S respecto a w, es

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial w} &= (0.425)(0.1091)w^{-0.575}(h^{0.725})\\ &= \frac{0.0463675\,h^{0.725}}{w^{0.575}}.\end{aligned}$$

La cual evaluada en $(150, 72)$ es

$$\left.\frac{\partial S}{\partial w}\right|_{(150,72)} = \frac{(0.0463675)(72^{\,0.725})}{150^{\,0.575}} \approx 0.058.$$

La derivada parcial $\frac{\partial S}{\partial w}$ es la tasa a la cual el área superficial de una persona de altura fija h, como un adulto, cambia con respecto al peso w. Puesto que las unidades para la derivada son ${pies^2}/{lb}$ y $\frac{\partial S}{\partial w} > 0$, advertimos que el aumento de 1 *lb*, mientras h se mantiene fija en $72\,pies$, produce un aumento en el área de la piel de aproximadamente $0.058\,pie^2$.

El concepto de derivada parcial puede extenderse de manera natural a funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$ existen tres derivadas parciales cada una de las cuales se forma manteniendo constantes las otras dos variables. Es decir, para definir la derivada parcial de w con respecto a x, se consideran y y z constantes y se deriva con respecto a x. Para hallar las derivadas parciales de w con respecto a y y con respecto a z se emplea un proceso similar.

En general, si $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hay n derivadas parciales denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Para hallar la derivada parcial con respecto a una de las variables, se mantienen constantes las otras variables y se deriva con respecto a la variable dada.

Ejemplo 35. Halle la derivada parcial con respecto a la variable z de $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz$.

Si se consideran x y y constantes, tenemos entonces

$$f_z(x, y, z) = y(2z) + x = 2yz + x.$$

¿A qué son iguales $f_x(x, y, z)$ y $f_y(x, y, z)$?

Derivada total. Recordemos que para una función f de una sola variable independiente hay dos diferenciales $\Delta x = dx$ y $dy = f'(x)\,dx$. Podemos pues definir entonces la derivado total o diferencial de una función en dos variables de la siguiente manera.

Sea $z = f(x, y)$ una función para la cual las primeras derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ existen. Entonces la **derivada total de z** es la función

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Definición 14

Ejemplo 36. Hallar la derivada total de las funciones de los ejemplos anteriores.

Para $z = f(x, y) = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$ tenemos

$$\begin{aligned} dz &= f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy \\ &= (12x^2y^2 - 8x)dx + (8x^3y + 6y^5)dy. \end{aligned}$$

Para $z = f(x,y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$ resulta

$$\begin{aligned} dz &= f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy \\ &= (3 - 2xy^2 + 6x^2y)dx + (-2x^2y + 2x^3)dy. \end{aligned}$$

Para $z = x^3 + 7x^2y + 8y^3 + 3x - 2y + 7$ se obtiene

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \\ &= (3x^2 + 14xy + 3)dx + (7x^2 + 24y^2 - 2)dy. \end{aligned}$$

Derivada parcial implícita. La diferenciación parcial implícita se lleva a cabo de manera similar que para funciones en una variable, sólo que aplicando las reglas de derivación parcial.

Supóngase que x y y están relacionadas por la ecuación $F(x,y) = 0$, donde se supone que $y = f(x)$ es una función derivable de x. Entonces, si la ecuación $F(x,y) = 0$ define a y implícitamente como función derivable de x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}, \qquad F_y(x,y) \neq 0.$$

Si la ecuación $F(x,\ y,\ z) = 0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x y y entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \quad F_z(x,y,z) \neq 0.$$

Ejemplo 37. Suponga que la ecuación $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz = 5$ define implícitamente a z como una función de x y y. Encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Entonces, formemos la función auxiliar

$$F(x,y,z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5.$$

Luego, sus derivadas parciales están dadas por:

$$\begin{aligned} F_x(x,y,z) &= 6xz - 2xy^2, \\ F_y(x,y,z) &= -2x^2y + 3z, \\ F_z(x,y,z) &= 3x^2 + 6z^2 + 3y. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{6xz - 2xy^2}{3x^2 + 6z^2 + 3y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = \frac{-2x^2y + 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}.$$

Ejemplo 38. Suponga que la ecuación $z^2 = x^2 + xy^2z$ define implícitamente a z como una función de x y y. Encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Al mantener y constante,

$$\frac{\partial}{\partial x}z^2 = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy^2z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}z^2 = \frac{\partial}{\partial x}x^2 + y^2\frac{\partial}{\partial x}(xz).$$

Por la regla de la cadena junto con la regla del producto:

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + z\right).$$

Después de que resolvamos la última ecuación para $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + y^2z}{2z - xy^2}.$$

Por otro lado, al mantener ahora x constante,

$$\frac{\partial}{\partial y}z^2 = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy^2z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}z^2 = \frac{\partial}{\partial y}x^2 + xz\frac{\partial}{\partial y}(y^2).$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2yz\right)$$

Al resolver para $\frac{\partial z}{\partial y}$ se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xyz}{2z - xy^2}.$$

Problema 13. Suponga que la temperatura del agua en un punto de un río donde una planta de energía nuclear descarga su agua residual caliente se aproxima mediante

$$T(x,y) = 2x + 5y + xy - 4,$$

donde x representa la temperatura del agua del río (en grado Celsius) antes de que llegar a la planta y y es el número de megavatios (en cientos) de electricidad que son producidos por la planta. Entonces, (a) encuentre T_x e interprete $T_x(9,5)$, y, (b) encuentre T_y e interprete $T_y(9,5)$.

a) Primero, encontremos la derivada parcial $T_x(x,y)$:

$$T_x(x,y) = 2 + y.$$

Esta derivada parcial nos da la razón de cambio de T con respecto a x. Reemplazando x con 9, y, y con 5 obtenemos

$$T_x(9,5) = 2 + 5 = 7.$$

Este resultado, 7, es el cambio aproximado en la temperatura del agua de salida si la temperatura del agua de entrada cambia 1 grado, a partir de $x = 9$ a $x = 10$, mientras y permanece constante en 5 (500 megavatios de electricidad producida).

b) La derivada parcial $T_y(x,y)$ es

$$T_y(x,y) = 5 + x.$$

Esta derivada parcial nos da la razón de cambio de T con respecto a y como

$$T_y(x,y) = 5 + 9 = 14.$$

Este resultado, 14, es el cambio aproximado en la temperatura resultado de incrementar una unidad en la producción de electricidad de $y = 5$ a $y = 6$, (de 500 a 600 megavatios), mientras la temperatura del agua de entrada x permanece constante en $9°C$.

Complemente

- Redacte los pasos a utilizar para determinar la derivada total de una función en tres variables.
- Investigue sobre la relación entre la derivación parcial implícita para el caso $F(x,y) = 0$ y la derivación implícita para $F(x,y) = 0$.

Refuerce lo aprendido

1) Asumiendo que las siguientes ecuaciones definen funciones derivables, encuentre su derivada total.

a. $z = x^2y^2 - y^3 + 3x^4 + 5$

b. $w = \frac{x^2 - z^2}{y^2 + z^2}$

c. $z = 5x^4y^3 - x^2y^6 + 6x^5 - 4y$

d. $z = \frac{4\sqrt{x}}{3y^2+1}$

e. $f(x,y) = -4x^3 - 3x^2y^3 + 2y^2$

f. $g(x,y,z) = 2x^2yz^2 + 3xy^2 - 4yz.$

2) Encuentre las derivadas parciales implícitas de:

a. $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$

b. $x^2 - xy + y^2 - x + y = 0$

c. $\frac{x}{x^2+y^2} - y^2 = 6$

3) El gráfico de la ecuación $x^3 + y^3 = 9xy$ como se muestra en la primer figura se conoce como la hoja de Descartes. La gráfica no es la gráfica de una función pero si restringimos la curva a la vecindad de $(2,4)$ que mostramos en la segunda figura, la curva si representa la gráfica de una función y podemos calcular su derivada mediante derivación implícita. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(2,4)$.

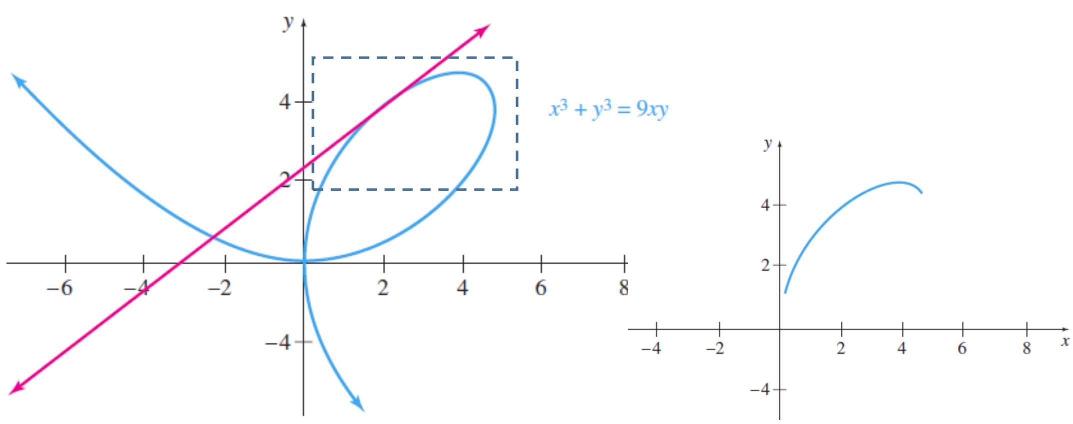


Figura X. Gráfico de la ecuación $x^3 + y^3 = 9xy$ y su restricción funcional.

Aplicación física de la derivada

Una de las principales aplicaciones de la derivada ocurre en el movimiento rectilíneo. Una función $s(t)$ que proporciona la coordenada del objeto sobre una recta horizontal o vertical se denomina función *posición*. La variable t representa el tiempo y el valor de la función $s(t)$ representa una distancia dirigida, que se mide en centímetros, metros, pies, millas, etc., a partir de un punto de referencia $s = 0$ sobre la recta. Recordemos que sobre una escala horizontal, consideramos la dirección s positiva a la derecha de $s = 0$, y sobre una escala vertical, la dirección s positiva la consideramos hacia arriba. Asociado a esta función tenemos dos más: *velocidad* y *aceleración*.

Si $s(t)$ es una función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su función *velocidad* $v(t)$ es

$$v(t) = s'(t),$$

y su función *aceleración* $a(t)$ es:

$$a(t) = s''(t) = v'(t).$$

Un objeto en movimiento rectilíneo

- desacelera cuando su velocidad y aceleración tienen signos algebraicos opuestos, y
- acelera cuando su velocidad y aceleración tienen el mismo signo algebraico.

La posición de una partícula está dada por la siguiente función:

$$d = s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t.$$

donde t se mide en segundos y d en metros.

a) Determine la velocidad en el instante t.

Como la velocidad está dada por $v(t) = s'(t)$, entonces la velocidad de la partícula en el instante t es igual a la primera derivada de la función es decir:

$$v(t) = \frac{d}{dt}(t^3 - 6t^2 + 9t) = 3t^2 - 12t + 9$$

La velocidad de la partícula en el instante t está dada por $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$.

b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 segundos?

Evaluando $t = 2$ en la ecuación de la velocidad, resulta:

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

$$\begin{aligned} v(2) &= 3(2)^2 - 12(2) + 9 \\ &= 3(4) - 24 + 9 \\ &= 12 - 24 + 9 \\ &= -3. \end{aligned}$$

La velocidad de la partícula después de 2 segundos es $-3\ m/s$.

Evaluando $t = 4$ en la ecuación de la velocidad se tiene:

$$\begin{aligned} v(4) &= 3(4)^2 - 12(4) + 9 \\ &= 3(16) - 48 + 9 \\ &= 48 - 48 + 9 \\ &= 9. \end{aligned}$$

La velocidad de la partícula después de 4 segundos es $9\ m/s$.

c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?

Para encontrar el momento en el que la partícula está en reposo se resuelve la ecuación $v(t) = 0$.

La partícula va a estar en reposo cuando la velocidad sea igual a 0.

Evidentemente,

$$3t^2 - 12t + 9 = 0$$

$$3(t^2 - 4t + 3) = 0$$

$$3(t - 3)(t - 1) = 0$$

$$t - 3 = 0 \quad \vee \quad t - 1 = 0$$

$$t = 3 \quad \vee \quad t = 1$$

Así, la partícula está en reposo cuando $t = 3$ y cuando $t = 1$.

d) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros 5 segundos.

Para encontrar la distancia recorrida durante 5 segundos, se evalua dicho número en la función de posición.

$$d = s(5) = (5)^3 - 6(5)^2 + 9(5)$$

$$= 125 - 150 + 45$$

$$= 20.$$

La velocidad de la partícula durante los primeros 5 segundos es igual a $= 20\, m/\, s$

e) Halle la aceleración para un tiempo t y después de 4 segundos.

Como la aceleración está dada por $a(t) = s''(t) = v'(t)$, entonces la aceleración para el tiempo t es igual a:

$s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

$a(t) = \; s''(t)$

$v'(t) = a(t) = 6t - 12.$

La aceleración de la partícula para un tiempo t es $a(t) = 6t - 12$.

Para encontrar la aceleración de la partícula después de 4 segundos, se sustituye dicho valor donde se encuentre t en la ecuación de la aceleración.

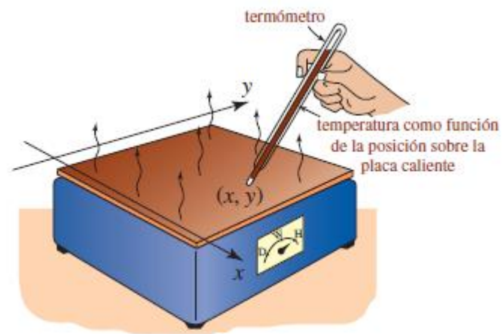
$a(4) \; = 6(4) - 12$

$\quad = 24 - 12$

$\quad = 12.$

La aceleración de la partícula después de 4 segundos es $12m/s^2$.

La ecuación de Laplace es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de tipo elíptico, que recibe ese nombre en honor al matemático Pierre-Simon Laplace. La ecuación de Laplace en dos dimensiones es



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Una solución $u(x,y)$ de la ecuación de Laplace puede interpretarse como la distribución de la temperatura independiente del tiempo a través de una delgada placa bidimensional.

Verifique que la función $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ satisface la ecuación de Laplace.

Para verificar que la función $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ satisface la ecuación de Laplace derivaremos dos veces parcialmente u respecto a x y u respecto a y.

La derivada parcial de u respecto a x, es

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[In(x^2+y^2)]=\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{2x}{x^2+y^2}.$$

La segunda derivada parcial de u respecto a x, es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)$$

$$=\frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x)(x^2+y^2)-2x\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{2(x^2+y^2)-2x(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

La derivada parcial de u respecto a y, es

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[\ln(x^2+y^2)]=\frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

La segunda derivada parcial de u respecto a y, es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2y)(x^2 + y^2) - (2y)\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2(x^2 + y^2)^2 - 2y(2y)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Para verificar que la función $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$satisface la ecuación de Laplace, se sustituye en dicha ecuación las segundas derivadas parciales de u respecto a x y respecto a y. Resultando,

$$\frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$\frac{-2x^2 + 2y^2 + 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$\frac{0}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$0 = 0$$

Entonces, al final concluimos que la función $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ satisface la ecuación en dos dimensiones de Laplace.

.

INTEGRAL DE FUNCIONES ELEMENTALES

Unidad de aprendizaje 3

Subcompetencia

Aplica las técnicas de integración en el cálculo de áreas de regiones, volúmenes de sólidos de revolución y la explicación de fenómenos físicos

INTRODUCCIÓN

A este punto se han analizado las definiciones, propiedades y aplicaciones de la derivada. Ahora, después del estudio que se ha hecho en la unidad anterior pasaremos del *cálculo diferencial* al *cálculo integral*. Leibniz denominó calculus summatorius a esta segunda de las dos divisiones más importantes del cálculo.

En 1696, persuadido por el matemático suizo Johann Bernoulli, Leibniz cambió el nombre a calculus integralis.

En la unidad anterior vimos que el problema de la tangente conduce de manera natural a la derivada de una función. El problema del área, el problema motivacional del cálculo integral, en el que se desea encontrar el área acotada por la gráfica de dos funciones llevó al concepto de integral definida.

Indicador de logro 1

Calcula áreas de regiones irregulares limitadas por curvas y volúmenes de sólidos de revolución.

Actividad Exploratoria 1

Recuerde y responda:

- ✓ ¿Qué es la derivada de una función?
- ✓ ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada de una función? ¿y la interpretación física? Dé ejemplos de ello.
- ✓ ¿Cuál es la derivada de $f(x) = (3x^3 - x^2)\left(x - \frac{7}{-}\right)$? ¿Y de $g(x) = 7e^x$?
- ✓ ¿Cuántas derivadas no nulas tiene $h(x) = 2x^7$? ¿Cuáles son?

- ✓ Determine la derivada total de $z = -x^2 + 4xy - 6y^2$.

Antiderivada. Se ha abordado el problema básico:

Dada una función f, encontrar su derivada f'.

En este tema y en los subsecuentes se estudiará el problema:

Dada una función f, encontrar una función F cuya derivada sea f.

En otras palabras, para una función dada f, ahora se pensará en f como una derivada. Se desea encontrar una función F cuya derivada sea f; es decir, $F'(x) = f(x)$, para toda x en algún intervalo. Planteado en términos generales, es necesario diferenciar en reversa. Sea la definición siguiente.

> Se dice que una función F es una **antiderivada** de una función f sobre algún intervalo I si
>
> $$F'(x) = f(x),$$
>
> para toda x en I.
>
> Definición 1

Ejemplo 1

Una antiderivada de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2$ pues $F'(x) = 2x$.

Una función siempre tiene más de una antiderivada. Así, en el ejemplo anterior, $F_1(x) = x^2 - 1$ y $F_2(x) = x^2 + 10$ también son antiderivadas de $f(x) = 2x$ puesto que $F_1'(x) = F_2'(x) = 2x$.

Ejemplo 2

Encuentre tres antiderivadas de la función $h(x) = 2x^3$.

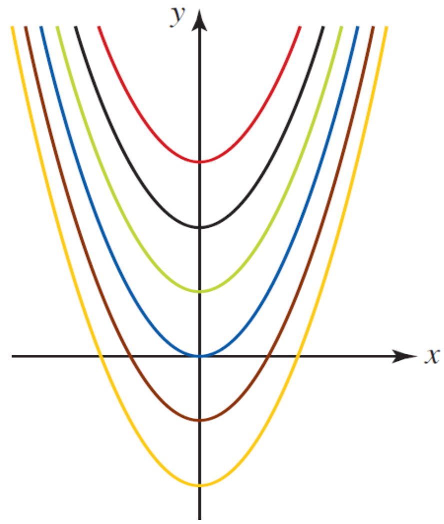
Son antiderivadas de la función $h(x) = 2x^3$ las funciones $H_1(x) = \frac{1}{2}x^4$, $H_2(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3$ y $H_3(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{7}{5}$ pues

$$H_1'(x) = H_2'(x) = H_3'(x) = 2x^3.$$

Se puede ver que cualquier antiderivada de f debe ser de la forma

$$G(x) = F(x) + C,$$

donde C es un número real cualquiera; es decir, dos antiderivadas de la misma función pueden diferir a lo más en una constante. Por tanto, $F(x)+C$ es la **antiderivada más general** de $f(x)$.



La notación $F(x)+C$ representa una *familia de funciones*; cada miembro tiene una derivada igual a $f(x)$.

Volviendo al ejemplo 1, la antiderivada más general de $f(x)=2x$ es la familia $G(x)=x^2+C$. Como se ve en la figura de al lado, la gráfica de la antiderivada más general de $f(x)=2x$ es una familia de curvas formadas por la traslación vertical de la gráfica de x^2 en C unidades.

Se puede establecer el siguiente resultado.

Sean a, C dos números reales y $n \in \mathbb{Q}$ pero $n \neq -1$. Si $f(x)=ax^n$, entonces la antiderivada más general de $f(x)$ denotada por $F(x)$ está dada por:

$$F(x)=\frac{ax^{n+1}}{n+1}.$$

Ejemplo 3

Encuentre la antiderivada más general de las funciones (i) $f(x)=2x^4$, (ii) $h(x)=3x^2$, (iii) $g(x)=-3x^{-4}$, (iv) $p(x)=4x^{\frac{1}{2}}$.

(i) La antiderivada más general de $f(x)=2x^4$ es:

$$F(x)=\frac{2x^{4+1}}{4+1}+C=\frac{2x^5}{5}+C=\frac{2}{5}x^5+C.$$

(ii) La antiderivada más general de $h(x)=3x^2$ es:

$$H(x)=\frac{3x^{2+1}}{2+1}+C=\frac{3x^3}{3}+C=x^3+C.$$

(iii) La antiderivada más general de $g(x)=-3x^{-4}$ es:

$$G(x)=\frac{-3x^{-4+1}}{-4+1}+C=\frac{-3x^{-3}}{-3}+C=x^{-3}+C=\frac{1}{x^3}+C.$$

(iv) La antiderivada más general de $p(x)=4x^{\frac{1}{2}}$ es:

$$P(x)=\frac{4x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{4}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3}+C.$$

La Integral indefinida. Por conveniencia, se introducirá la notación para una antiderivada de una función. Si $F'(x)=f(x)$, la antiderivada más general de f se representa por

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

El símbolo $\int$ fue introducido por Leibniz y se denomina **signo integral**. La notación $\int f(x)\,dx$ se denomina **integral indefinida** de $f(x)$ respecto a x. La función $f(x)$ se denomina **integrando**.

El proceso de encontrar una antiderivada se denomina antidiferenciación o **integración**. El número C se denomina **constante de integración**. Justo como $\frac{d}{dx}(\quad)$ denota la operación de diferenciación de ( ) con respecto a x, el simbolismo $\int(\quad)\,dx$ denota la operación de integración de ( ) con respecto a x.

La diferenciación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas. Si $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, entonces F es la antiderivada de f; es decir, $F'(x)=f(x)$, y así,

$$\int F'(x)\,dx=F(x)+C.$$

Además,

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right]=\frac{d}{dx}(F(x)+C)=F'(x)=f(x).$$

En palabras, una antiderivada de la derivada de una función es esa función más una constante; y, la derivada de una antiderivada de una función es esa función.

A partir de esto, se concluye que siempre que se obtiene la derivada de una función, al mismo tiempo se obtiene una fórmula de integración.

Ejemplo 4

Evalúe:

(i) $\int x^2\,dx$ (ii) $\int \frac{1}{x^3}\,dx$ (iii) $\int y^{\frac{1}{2}}\,dy$ (iv) $\int x^0\,dx$

(i) $\int x^2\,dx = \dfrac{x^{2+1}}{2+\;1} + C = \dfrac{1}{3}\;x^3 + C$

(ii) $\int \dfrac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\dfrac{1}{2}x^{-2} + C = -\dfrac{1}{2x^2} + C.$

(iii) $\int y^{\frac{1}{2}}\,dy = \dfrac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}\;y^{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{2}{3}\sqrt[2]{y^3} + C$

(iv) $\int x^0\,dx = \dfrac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C.$

En el siguiente teorema se proporcionan algunas propiedades de la integral indefinida.

Teorema. Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Entonces

i) $\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx = k \cdot F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R},$

ii) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x).$

Ejemplo 5

Resuelva las siguientes integrales indefinidas aplicando sus propiedades:

(i) $\int 2x^4\,dx$ (ii) $\int (3y^2 - 2y + 4)\,dy$ (iii) $\int \dfrac{4t^2 - 3t + 5}{\sqrt{t}}\,dt$

(i) $\int 2x^4\,dx = 2\int x^4\,dx = 2\left(\dfrac{x^{4+1}}{4+\;1}\right) + C = 2\left(\dfrac{x^5}{5}\right) + C$

$= \dfrac{2x^5}{5} + C = \dfrac{2}{5}x^5 + C.$

(ii) $\int (3y^2 - 2y + 4)\,dy = \int 3y^2\,dy - \int 2y\,dy + \int 4\,dy$

$= 3\int y^2\,dy - 2\int y\,dy + 4\int dy$

$$= 3\left(\frac{y^{2+1}}{2+1}\right) - 2\left(\frac{y^{1+1}}{1+1}\right) + 4\left(\frac{y^{0+1}}{0+1}\right) + C$$

$$= 3\left(\frac{y^{3}}{3}\right) - 2\left(\frac{y^{2}}{2}\right) + 4(y) + C$$

$$= y^3 - y^2 + 4y + C.$$

(ii) $$\int \frac{4t^2 - 3t + 5}{\sqrt{t}}\,dt = \int \left(\frac{4t^2}{\sqrt{t}} - \frac{3t}{\sqrt{t}} + \frac{5}{\sqrt{t}}\right) dt$$

$$= \int \frac{4t^2}{\sqrt{t}}\,dt - \int \frac{3t}{\sqrt{t}}\,dt + \int \frac{5}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \int \frac{4t^2}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt - \int \frac{3t}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt + \int \frac{5}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt$$

$$= \int 4t^2 t^{-\frac{1}{2}}\,dt - \int 3tt^{-\frac{1}{2}}\,dt + \int 5\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= 4\int t^{\frac{3}{2}}\,dt - 3\int t^{\frac{1}{2}}\,dt + 5\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= 4\left(\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{5}{2}}\right) - 3\left(\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}\right) + 5\left(\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}\right) + C$$

$$= 4\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right) - 3\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) + 5\left(2t^{\frac{1}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{8}{5}t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + 10t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{8}{5}t^2\sqrt{t} - 2t\sqrt{t} + 10\sqrt{t} + C$$

Cambio de variable. En esta parte se analizará la “reversa de la regla de la cadena”. En este análisis, el concepto de diferencial de una función desempeña un papel importante. Recuerde que si $u = g(x)$ es una función diferenciable, entonces su diferencial es $du = g'(x)dx$.

Teorema. Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I, f es una función continua sobre I y F es una antiderivada de f sobre I, entonces

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du.$$

La idea básica consiste en poder reconocer una integral indefinida en una variable x que sea la inversa de la regla de la cadena al convertirla en una integral indefinida diferente en la variable u por medio de la sustitución $u = g(x)$.

Algunos casos especiales de esta regla son:

Si $f(g(x)) = g(x)^n$, entonces $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ y

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq 1.$$

Ejemplo 6

Resuelva aplicando cambio de variable:

(i) $\int (2x-5)^{11}\, dx$ (ii) $\int \frac{x}{(4x^2+3)^6} dx$

(i) Para $\int (2x-5)^{11}\, dx$ se hace $u = 2x-5$, así $du = 2dx$. Luego,

$$\int (2x-5)^{11}\, dx = \int u^{11} \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{11}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{12}}{12} + C = \frac{1}{24} u^{12} + C = \frac{1}{24}(2x-5)^{11}.$$

(ii) Reescribas $\int \frac{x}{(4x^2+3)^6} dx$ como $\int (4x^2+3)^{-6} x\, dx$.

Luego, $u = 4x^2+3$ y $du = 8xdx$. Entonces

$$\int \frac{x}{(4x^2+3)^6} dx = \int (4x^2+3)^{-6} x\, dx = \int u^{-6} \frac{du}{8} = \frac{1}{8}\int u^{-6}\, du$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{u^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{40}(4x^2+3)^{-5} + C$$
$$= -\frac{1}{40(4x^2+3)^5} + C.$$

1) Resuelva las siguientes integrales aplicando propiedades, fórmulas y cambio de variable donde sea pertinente:

1) $\int 2(1+2x)^4 \; dx$

2) $\int (-2x)\sqrt{9-x^2} \; dx$

3) $\int x^2 \, (x^3-1)^4 \, dx$

4) $\int \left(4y^5 - 7y + \frac{1}{2}y^3\right) \, dy$

5) $\int x^2(x^3-1)^4 \, dx$

7) $\int \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2} \; dx$

INTEGRALES INDEFINIDAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Anteriormente dijimos que la diferenciación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas. Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, entonces F es la antiderivada de f; es decir, $F'(x) = f(x)$, y así,

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Al aplicar esto a las derivadas de las funciones trigonométricas siempre considerando $u = g(x)$ una función diferenciable, obtenemos:

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C \qquad \int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$$
$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C \qquad \int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C \qquad \int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C.$$

Otras integrales trigonométricas especiales son:

$$\int \tan u \, du = \ln|\sec u| + C = -\ln|\cos u| + C \qquad \int \cot u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C \qquad \int \csc u \, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

Ejemplo 7

Determine:

(i) $\int 5 \operatorname{sen} x \, dx$ (ii) $\int -5\cos(3x+1)\, dx$ (iii) $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx$

(i) $\int 5 \operatorname{sen} x \, dx = 5 \int \operatorname{sen} x \, dx = 5(-\cos x) + C = -5\cos x + C.$

(ii) Haciendo $u = 3x + 1$. Luego $du = 3\,dx$, es decir, $\frac{du}{3} = dx$. En fin,

$$\int -5\cos(3x+1)\,dx = -5\int \cos(3x+1)\,dx = -5\int \cos u \frac{du}{3}$$

$$= -\frac{5}{3}\int \cos u \, du = -\frac{5}{3}(\operatorname{sen} u) + C$$

$$= -\frac{5}{3}\operatorname{sen}(3x+1) + C.$$

(iii) Haciendo $u = \cos x$. Luego $du = -\operatorname{sen} x \; dx$. Así, $-du = \operatorname{sen} x \; dx$ y consecuentemente,

$$\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx = -\int u^4 \, du = -\frac{u^5}{5} + C$$

$$= -\frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Ejemplo 8

Determine:

(i) $\int \cos 2y\, dy$ (ii) $\int \sec^2(1-4x)\, dx$ (iii) $\int \cos^2 t\, dt$

(i) Si $u = 2y$, entonces $du = 2\, dy$ y $\frac{du}{2} = dy$. En consecuencia, se escribe

$$\int \cos 2y\, dy = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\, du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2y + C.$$

(ii) Si $u = 1-4x$, entonces $du = -4\, dx$ y $-\frac{du}{4} = dx$. Así,

$$\int \sec^2(1-4x)\, dx = \int \sec^2 u \frac{du}{-4} = -\frac{1}{4}\int \sec^2 u\, du = -\frac{1}{4}\tan u + C$$

$$\int \sec^2(1-4x)\, dx = -\frac{1}{4}\tan(1-4x) + C.$$

(iii) Usando la igualdad $\cos^2 u = \dfrac{1+\cos 2u}{2}$. Entonces

$$\int \cos^2 t\, dt = \int \left[\frac{1+\cos 2t}{2}\right] dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int 1\, dt + \int \cos 2t\ dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right] + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + C.$$

Ejemplo 9

Determine:

(i) $\int \sec^3 x \tan x\, dx$ (ii) $\int x \cos \pi x^2\, dx$ (iii) $\int \dfrac{\sec^2 x}{1-\tan x} dx$

(i) Hagamos $u = \sec x$, $du = \sec x \tan x\, dx$. Entonces

$$\int \sec^3 x \tan x\, dx = \int \sec^2 x\,(\sec x \tan x) dx = \int u^2\, du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sec^3 x + C.$$

(ii) Hagamos $u = \pi x^2$, $du = 2\pi x\, dx \Rightarrow \frac{du}{2\pi} = x\, dx$. Por tanto,

$$\int x \cos \pi x^2 \, dx = \int \cos \pi x^2 \cdot x\, dx = \int \cos u \frac{du}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int \cos u \; du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} u + C = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} \pi x^2 + C.$$

(iii) Hagamos $u = 1 - \tan x$, $-du = \sec^2 x \; dx$. Así,

$$\int \frac{\sec^2 x}{1 - \tan x} dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|1 - \tan x| + C.$$

1) Resuelva las siguientes integrales aplicando propiedades, fórmulas y cambio de variable donde sea pertinente:

1) $\int y \cos(y^2 + 1) \; dy$

2) $\int x^2 (x^3 - 1)^4 \, dx$

3) $\int \frac{\operatorname{sen} \ln x}{x} \; dx$

4) $\int \frac{3}{1 + x^2} \; dx$

5) $\int \csc^2(2x + 1) \; dx$

6) $\int (2x + 1) \operatorname{sen}(x^2 + x + 1) \; dx$

TECNICAS DE INTEGRACIÓN

TEOREMA **INTEGRACIÓN POR PARTES**

Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas, entonces

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Estrategia para integrar por partes

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
2. Intentar tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando.

Observe que dv siempre incluye dx del integrando original.

2) Resuelva las siguientes integrales aplicando integración por partes.

a) $\int x\cos 5x\,dx$ **b)** $\int x\csc^2 3x\,dx$ **c)** $\int x\sec 4x\tan 4x\;dx$

d) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$ **e)** $\int \operatorname{sen} 2x\ln\cos 2x\,dx$ **f)** $\int x^2e^{3x}\,dx$

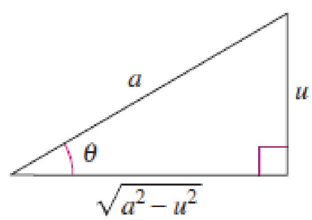
g) $\int e^{-x}\operatorname{sen} x\,dx$ **h)** $\int \operatorname{sen}\ln x\,dx$ **i)** $\int (\ln x)^2\,dx$

SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS ($a > 0$)

1. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2-u^2}$, sea

   $u = a\operatorname{sen}\theta.$

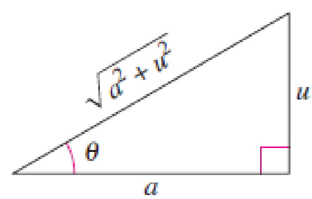
   Entonces $\sqrt{a^2-u^2} = a\cos\theta$, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.



2. Para integrales que contienen $\sqrt{a^2+u^2}$, sea

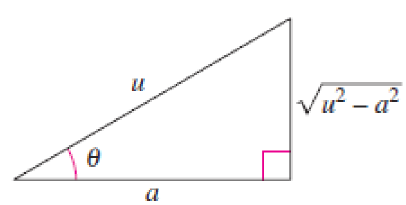
   $u = a\tan\theta.$

   Entonces $\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\theta$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.



3. Para integrales que contienen $\sqrt{u^2-a^2}$, sea

   $u = a\sec\theta.$



   Entonces

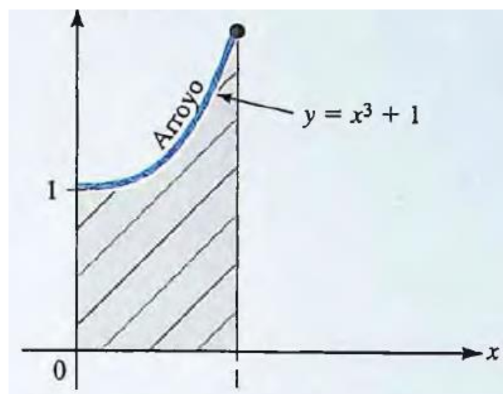
$$\sqrt{u^2-a^2} = \begin{cases} a\tan\theta, \text{ si } u > a, \text{ donde } 0 \le \theta < \pi/2 \\ -a\tan\theta \text{ si } u < -a, \text{ donde } \pi/2 < \theta \le \pi. \end{cases}$$

a) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$ **b)** $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$ **c)** $\int \frac{1}{x\sqrt{9+x^2}}\,dx$

d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$ **e)** $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}dx$ **f)** $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}\,dx$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}dx$ **h)** $\int x\sqrt{1+x^2}dx$ **i)** $\int \frac{1}{\sqrt{49-x^2}}\,dx$

Introducción a la integral definida. Supóngase que un agente de bienes y raíces desea evaluar una parcela sin construir que tiene 100 metros de ancho y que está limitada por calles en tres de sus lados y por un arroyo en el cuarto lado. El agente determina que si establece un sistema coordenado, tal como se muestra en la figura de abajo, el arroyo se puede describir por medio de la curva $y = x^3 + 1$, donde x y y están medidas en cientos de metros. Si el área de la parcela es A metros cuadrados y el agente estima que su tierra vale $\$\,12$ por metro cuadrado, entonces el valor total de la parcela es de $12A$ dólares. Si la parcela fuera de forma rectangular o triangular, e incluso trapezoidal, se podría determinar su área sustituyendo en una fórmula bien conocida; sin embargo, la frontera superior de la parcela es curva, por tanto ¿cómo puede el agente determinar el área y después determinar el valor total de la parcela?



El objetivo de este es demostrar que se puede expresar el área bajo la curva como el límite de una suma de términos, que recibe el nombre de **integral definida**. Más adelante, se introducirá un resultado conocido como el **teorema fundamental del cálculo** que permite calcular integrales *definidas* y después su área y otras cantidades empleando los métodos de la integración *indefinida* (antiderivación) aprendidos en las sesiones anteriores.

El área es sólo una de las muchas magnitudes que se pueden expresar como el límite de una suma. Para manejar todos los casos, incluyendo aquellos para los que no necesariamente $f(x) \geq 0$ o aquellos en los que no se emplean puntos extremos izquierdos, se requiere de la siguiente terminología y notación.

INTEGRAL DEFINIDA

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $a \leq x \leq b$. Subdividamos este intervalo en n partes iguales, cada una con un ancho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

elijiendo un número x_k en cada k –ésimo subintervalo (con $k = 1, 2, \ldots, n$). Definamos la suma

$$[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x,$$

denominada **suma de Riemann**.

Entonces, la integral definida de f en el intervalo $[a, b]$, denotada por

$$\int_a^b f(x)dx,$$

es el límite de la suma de Riemann cuando $n \to \infty$; es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x.$$

La función $f(x)$ recibe el nombre de *integrando*, y los números a, b se conocen como los límites inferior y superior de integración, respectivamente. El proceso de calcular una integral definida se denomina integración definida.

El símbolo $\int_a^b f(x)dx$ utilizado para la integral definida es el mismo que el símbolo $\int f(x)dx$ para la integral indefinida, aunque la integral definida es un número específico y la indefinida, una familia de funciones (a saber, las antiderivadas de f).

Por otro lado, si el cálculo del límite de una suma fuera la única manera para evaluar una integral definida, el proceso de integración probablemente sería un poco más que una novedad matemática. Por fortuna, existe una fórmula más fácil para efectuar este cálculo, gracias al siguiente resultado notable que relaciona la integral definida con la antiderivación.

Teorema Fundamental del Cálculo

Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, entonces

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

donde $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$ en $a \leq x \leq b$.

Ejemplo 10

Primero calcule $\int 4t^3 dt$ y luego evalúe

$$\int_1^2 4t^3 dt.$$

Por la regla de la potencia, la integral indefinida es

$$\int 4t^3\, dt = t^4 + C.$$

Por el teorema fundamental, el valor de la integral definida se halla evaluando $[t^4]_1^2$, pues no se requiere de la constante.

$$\int_1^2 4t^3 dt = [\, t^4\,]_1^2 = 2^4 - 1^4 = 16 - 1 = 15.$$

Ejemplo 11

Calcule $\int (x^2 - 4)\, dx$ y luego evalúe

$$\int_{-2}^{3} (x^2 - 4)\, dx.$$

Por la regla de la potencia y las propiedades de la integral indefinida, tenemos

$$\int (x^2 - 4)\, dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x + C.$$

Luego, por el teorema fundamental del cálculo resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} (x^2 - 4)\, dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{3} \\
&= \left(\frac{1}{3}(3)^3 - 4(3)\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 - 4(-2)\right) \\
&= \left(\frac{27}{3} - 12\right) - \frac{8}{3} + 8 \\
&= -3 - \frac{16}{3} \quad = -\frac{25}{3} \\
&\approx -8.33.
\end{aligned}$$

Propiedades de la integral definida

1. **Igualdad de límites**. Si a está en el dominio de f, entonces
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$
2. **Inversión de límites.** Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$
3. **Múltiplo escalar.** Si f es una función integrable sobre $[a, b]$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces
$$\int_a^b [k \cdot f(x)]\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$
4. **Adición / Sustracción de funciones.** Si f, g son funciones integrables sobre $[a, b]$, entonces
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$
5. **Aditividad.** Si f es una función integrable sobre un intervalo cerrado que contiene a los números a, b, c, entonces
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$
6. **Constantes.** Para cualquier constante $k \in \mathbb{R}$, (en el entendido que $f(x) = k$) se tiene que
$$\int_a^b k\,dx = k(b-a).$$
7. **No negatividad.** Si f es integrable y $0 \leq f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces
$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$
8. **Comparación.** Si f, g son funciones integrables en $[a, b]$ y además $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in [a, b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

EJEMPLO 12

a) $\int_{\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 0$

b) $\int_{2}^{8} 5\, dm = 5\int_{2}^{8} dm = 5(8-2) = 30.$

c)
$$\int_{3}^{0} (x+2)\, dx = -\int_{0}^{3} (x+2)\, dx = -\left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^3$$
$$= -\left[\left(\frac{3^2}{2} + 2(3)\right) - \left(\frac{0^2}{2} + 2(0)\right)\right]$$
$$= -\left(\frac{21}{2} - 0\right) = -\frac{21}{2}$$

d)
$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} -x\, dx + \int_{0}^{1} x\, dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= \left(-\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{2}(-1)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(0)^2\right)$$
$$= \left(0 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

e) Evaluar la integral

$$\int_{1}^{3} (-x^2 + 4x - 3)\, dx$$

utilizando los valores

$$\int_{1}^{3} x^2\, dx = \frac{26}{3}, \quad \int_{1}^{3} x\, dx = 4, \quad \int_{1}^{3} dx = 2.$$

$$\int_{1}^{3} (-x^2 + 4x - 3)\, dx = \int_{1}^{3} (-x^2)\, dx + \int_{1}^{3} 4x\, dx - \int_{1}^{3} (3)\, dx$$
$$= -\int_{1}^{3} x^2\, dx + 4\int_{1}^{3} x\, dx - 3\int_{1}^{3} dx$$
$$= -\left(\frac{26}{3}\right) + 4(4) - 3(2) = \frac{4}{3}.$$

f) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}-6\right) - \left(\frac{1}{3}-3\right) = -\frac{2}{3}.$

g) $\displaystyle\int_1^4 3\sqrt{x}\;dx = 3\int_1^4 x^{1/2}\,dx = 3\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 3\left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2}$

$\displaystyle = 14\,.$

h) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (3x^2 - x + 1)\,dx = \left[\left(x^3 - \frac{x^2}{2} + x\right)\right]_{-2}^{2} = (8-2+2)—(8-2-2) = 20.$

i) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos x\,dx = \Big[\operatorname{sen} x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = [\tan x]_0^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1\,.$

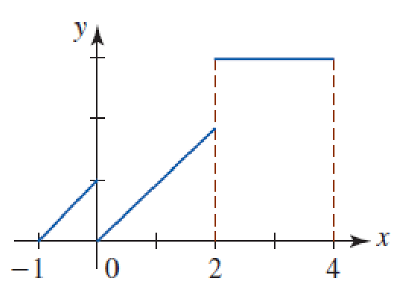
k) Evalúe la integral

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x < 2 \\ 3, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

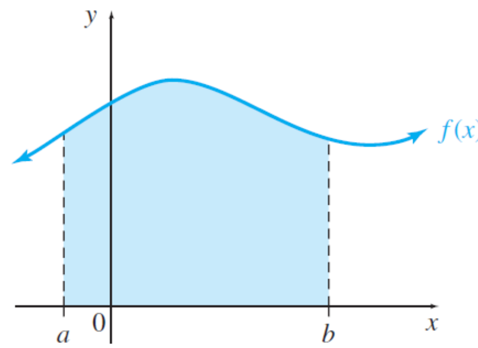
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x+1)\,dx + \int_0^2 x\,dx + \int_2^4 3\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 + \Big[\,3x\,\Big]_2^4 \\
&= \frac{17}{2}.
\end{aligned}$$



BREVE INTRODUCCIÓN AL ÁREA COMO UNA INTEGRAL DEFINIDA

Si $f(x)$ es continua y $f(x) \geq 0$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, entonces la región R bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ tiene un área A dada por la integral definida

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$



Determinemos el área de la parcela de tierra descrita en la introducción; es decir, el área bajo la curva $y = x^3 + 1$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, donde x, y están en cientos de metros. Si la tierra en la parcela se avalúa a $\$\,12$ por metro cuadrado, ¿cuál es el valor total de la parcela?

El área de la parcela está dada por la integral definida

$$A = \int_0^3 (x^3 + 1)\,dx.$$

Entonces

$$A = \int_0^3 (x^3 + 1)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x\right]_0^1 = \left[\frac{1}{4}(1)^4 + 1\right] - \left[\frac{1}{4}(0)^4 + 0\right] = \frac{5}{4}.$$

Como x y y están medidas en cientos de metros, el área total es

$$\frac{5}{4} \times 100 \times 100 = 12\,500\,m^2;$$

y como la tierra en la parcela vale $\$\,12$ por metro cuadrado, el valor total de la parcela es

$$V = \left(\$\,12/_{m^2}\right)(12\,500\,m^2) = \$\,150\,000.$$

CAMBIO DE VARIABLE PARA INTEGRALES DEFINIDAS

Si la función $u = g(x)$ tiene una derivada continua en el intervalo $[a, b]$ y f es continua en el recorrido o rango de g, entonces

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$$

Ejemplo 13

Calcule

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$$

Para calcular esta integral, sea $u = x^2 + 1$. Después,

$$u = x^2 + 1 \implies du = 2x\,dx.$$

Antes de sustituir hay que determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Cuando $x = 0,\ u = 0^2 + 1 = 1$

Cuando $x = 1,\ u = 1^2 + 1 = 2$

Ahora, es posible sustituir para obtener

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^3(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{15}{8}.$$

Ejemplo 14

Calcule

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

Multiplicando y dividiendo por 2 se tiene

$$\int_0^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^3$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 1)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 10 \approx 1.151.$$

Ejemplo 15

Calcule

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 x}\; dx$$

Como $1+\tan^2 x = \sec^2 x$, podemos escribir

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 x}\; dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x}\; dx$$
$$= \int_0^{\pi/4} \sec x\, dx$$
$$= \Big[\ln|\sec x + \tan x|\Big]_0^{\pi/4}$$
$$= \ln\big(\sqrt{2}+1\big) - \ln 1$$
$$\approx 0.881.$$

Ejemplo 16

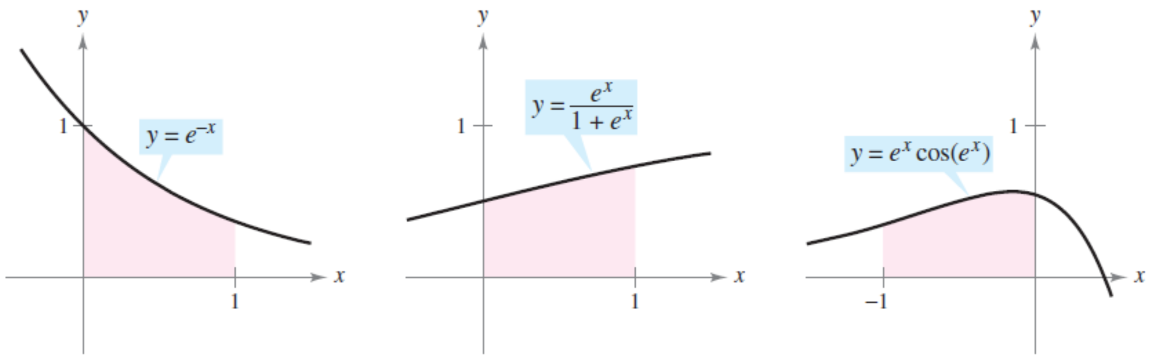
Evaluar cada una de las siguientes integrales

$$\boldsymbol{a})\ \int_0^1 e^{-x}\,dx \qquad \boldsymbol{b})\ \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \qquad \boldsymbol{c})\ \int_{-1}^0 [e^x\cos(e^x)]\,dx$$

$$\boldsymbol{a})\ \int_0^1 e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 = -e^{-1} - (-e^{-0}) = -\frac{1}{e} - (-1) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632.$$

$$\boldsymbol{b})\quad \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \Big[\ln(1+e^x)\Big]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2 \approx 0.620.$$

$$\boldsymbol{c})\quad \int_{-1}^0 [e^x\cos(e^x)]\,dx = \Big[\operatorname{sen}(e^x)\Big]_{-1}^0 = \operatorname{sen} e^0 - \operatorname{sen} e^{-1} = \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0.482.$$



a) ***b)*** ***c)***

MÁS SOBRE INTEGRALES DEFINIDAS

Ejemplo 17

Evalúe

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$$

Se identifica $u = x$ y $a = 1$, y usamos las sustituciones $x = \sec\theta$ y $dx = \sec\theta\tan\theta\,d\theta$. En este caso suponemos que $\pi/2 < \theta \leq \pi$ puesto que el intervalo de integración indica que $x \leq -a$, donde $-a = -1$. Obtengamos los límites θ de integración a partir de los límites de integración originales:

$$x = -2 \implies \theta = \sec^{-1}(-2) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$x = -1 \implies \theta = \sec^{-1}(-1) = \pi.$$

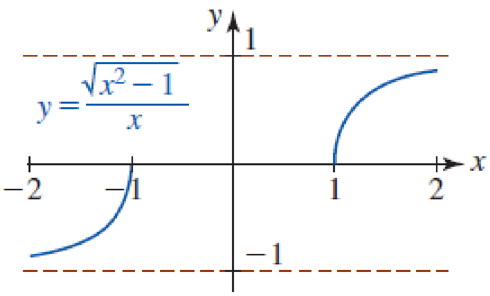
En consecuencia,

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sec\theta}(\sec\theta\tan\theta\,d\theta) = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sqrt{\tan^2\theta}\;(\tan\theta\,d\theta)$$

Como $\pi/2 < \theta \leq \pi$ entonces $\tan\theta \leq 0$ y en consecuencia $\sqrt{\tan^2\theta} = |\tan\theta| = -\tan\theta$. La última integral se vuelve

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \tan^2\theta\,d\theta$$

$$= -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta$$



$$= -\Big[\tan\theta - \theta\Big]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}$$

$$= -\left[(0-\pi) — \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}6849.$$

1) Evalúe las siguientes integrales aplicando el TFC:

1) $\displaystyle\int_0^2 (y^4 - 2y^3)\,dy$

2) $\displaystyle\int_{-3}^2 (-6t^2 + t + 5)\,dt$

3) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)^3\;dx$

4) $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{x}\right)\;dx$

5) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^2 \left(\frac{\ln x}{x}\right)\;dx$

6) $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{x}\right)\;dx$

2) Supóngase que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}, \quad \int_1^2 f(x)\,dx = 3, \quad \int_0^2 g(x)\,dx = 2\sqrt{25}.$$

Utilice las propiedades de la integral definida para calcular

$$\int_0^2 \left[2f(x) - \frac{3}{4}g(x)\right] dx.$$

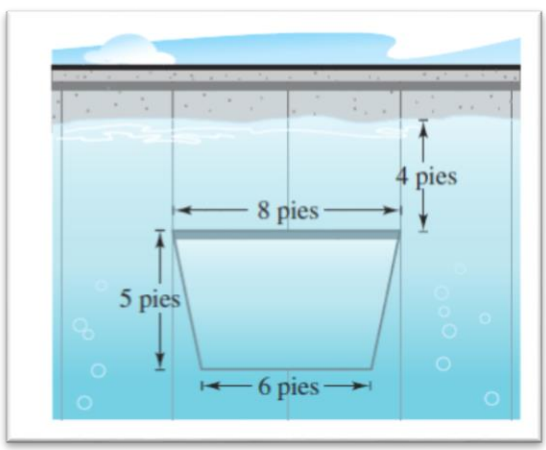
Aplicación de la integral en física

La fuerza F ejercida por un fluido de peso-densidad constante w (por unidad de volumen) sobre una región plana vertical sumergida desde $y = c$ hasta $y = d$ es

$$F = w\int_c^d h(y)L(y)\,dy$$

donde $h(y)$ es la profundidad del fluido en y y $L(y)$ es la longitud horizontal de la región en y.

Una compuerta de una presa vertical en un dique tiene la forma de un trapecio, con 8 pies en la parte superior y 6 pies en el fondo, con una altura de 5 pies, como se muestra en la figura de la derecha. ¿Cuál es la fuerza del fluido en la compuerta cuando la parte superior está 4 pies debajo de la superficie del agua? Considere la densidad del agua como 62.4 libras por pie cúbico.



Sugerencia: si se pone el eje x sobre la superficie del agua, y se coloca el eje y de manera que biseque la compuerta se obtiene la figura de abajo.

Al estar la figura en el plano cartesiano, está obtiene dos puntos coordenados en la parte derecha (el cuarto cuadrante), entonces podemos ocupar estas coordenadas para encontrar la ecuación del segmento que contiene a los puntos $(4;-4), (3;-9)$.

Entonces la ecuación utilizando los puntos coordenados $(4;-4), (3;-9)$ es:

$$(y-\ y_1)=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$

$$(y-(-4))=\frac{-4-(-9)}{4-3}(x-4)$$

$$(y+4)=\tfrac{5}{1}(x-4)$$

$$(y+4)=5x-20$$

Hasta acá se ha encontrado la ecuación del segmento $(4;-4),(3;-9)$, pero al obtenerla esta queda en función de dos variables x,y, de aquí se deduce que se debe de hacer un despeje de variables en la ecuación, ya que al momento de plantear la integral está debe quedar en función de una variable, todo esto con el fin de encontrar la longitud horizontal del trapecio.

Entonces: $$(y+4)=5x-20$$

$$\frac{(y+4+20)}{5}=x$$

$$x=\frac{y+24}{5}$$

Como la parte derecha del trapecio ubicado en el cuarto cuadrante del plano cartesiano tiene el valor de x, entonces la parte izquierda, es decir el tercer cuadrante tiene el mismo valor x:

Longitud horizontal $=2x$

$$2x\ =2\left(\tfrac{y+24}{5}\right)$$

De aquí se determina que $2\left(\frac{y+24}{5}\right)$ es la longitud horizontal que se necesita para formar la integral.

Formando la integral: $F=w\int_c^d h(y)L(y)\,dy$.

Como el problema da el valor de la densidad, la profundidad y los límites de la integral $(-4;4)$ dados al ubicar la compuerta en el plano cartesiano.

Entonces:

$$f=62.4\int_4^{-4}(-y)$$

Ahora se sustituye el valor de la longitud horizontal que se encontró mediante el despeje de las variables en la ecuación de la recta:

$$F = 62.4 \int_{4}^{-4} (-y)(2)\left(\frac{y+24}{5}\right) dy$$

$$= 62.4 \int_{4}^{-4} \frac{-2y^2 - 48y}{5} dy$$

$$= \frac{62.4}{5} \int_{4}^{-4} (-2y^2 - 48y)\, dy$$

$$= \frac{62.4}{5} \int_{4}^{-4} (-\frac{2}{3}y^3 - 24y^2)$$

$$= \frac{62.4}{5} \left[-\frac{2}{3}y^3 - 24y^2\right]_{4}^{-4}$$

$$= \frac{62.4}{5} \left(\left[\frac{-2}{3}(-4)^3 - 24(-4)^2\right] - \left[\frac{-2}{3}(4)^3 - 24(4)^2\right]\right)$$

$$= \frac{62.4}{5} \left(\left[\frac{128}{3} - 384\right] - \left[\frac{-128}{3} - 384\right]\right)$$

$$= \frac{62.4}{5} \left(\left[\frac{-1{,}024}{3}\right] - \left[\frac{-1{,}280}{3}\right]\right)$$

$$= \frac{62.4}{5} \left(\frac{256}{3}\right) = 1{,}064.96$$

$$= 1{,}064.96$$

Entonces la fuerza ejercida del fluido de agua en la compuerta de la presa es aproximadamente $1{,}064.96$.

Aplicación geométrica de la integral

Se sabe que si una función f tiene una primera derivada continua sobre un intervalo $[a, b]$, entonces se dice que su gráfica es suave, es decir que carece de picos.

Longitud de arco. Si f' es continua sobre $[a, b]$, entonces la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ es

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

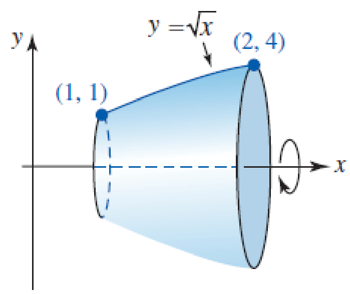
Área de una superficie de revolución. Cuando f es positiva y tiene una derivada continua, el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ en torno al eje x se define como

$$A = \int_{a}^{b} 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Sea la función dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Encuentre la longitud de la gráfica de f desde el punto $(1, 1)$ hasta el punto $(2, 4)$.

b) Encuentre el área A de la superficie que se forma al girar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre el intervalo $[1, 2]$ alrededor del eje x.



Sea la función dada por $f(x) = \sqrt{x}$, que puede ser reescrita como

$$y = x^{\frac{1}{2}}.$$

Su primera derivada es:

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

El estudio se hará en el intervalo $[1, 2]$ donde x tomará los valores, los extremos de dicho intervalo serán los límites de integración utilizados que se para determinar la longitud de la curva.

Para determinar la longitud de la curva en el intervalo $[1, 2]$ se auxiliará de la fórmula

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Entonces sustituyendo con los valores previamente encontrados se obtiene:

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx.$$

Como se necesita sacar el término $(4x+1)/4$ de la raíz cuadrada, la expresión $4x+1$ se iguala a u^2 $(4x+1 = u^2)$, por lo tanto,

$$x = \frac{u^2 - 1}{4}$$

y además su derivada es

$$x' = \frac{u}{2} du.$$

Con el valor de x encontrado se sustituye cada x de la integral, obteniendo:

$$L = \int_1^2 \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{4\left(\frac{u^2-1}{4}\right) + 1}{4\left(\frac{u^2-1}{4}\right)}}\, \frac{u}{2} du = \int_1^2 \sqrt{\frac{u^2 - \cancel{1} + \cancel{1}}{u^2 - 1}} * \frac{u}{2} du$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{u^2}{u^2-1}}\, \frac{u}{2}\, du = \int_1^2 \frac{\sqrt{u^2}}{\sqrt{u^2-1}}\, \frac{u}{2}\, du = \int_1^2 \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} \frac{u}{2}\, du = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u^2}{\sqrt{u^2-1}}\, du$$

Ahora apliquemos sustitución trigonométrica:

Tenemos que $\sqrt{u^2-1} = \sqrt{u^2 - a^2}$, por lo tanto

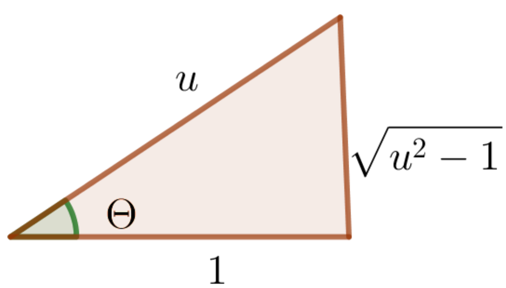
$u = a \sec\theta$

$u = \sec\ \theta$

$du = \sec\theta\ \tan\theta\ d\theta.$

$\theta = \sec^{-1}\theta$

$\tan\theta = \sqrt{u^2-1}$



Entonces

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u^2}{\sqrt{u^2-1}}\, d\,u = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{sec^2\theta}{\sqrt{sec^2\theta - 1}} \sec\theta \tan\theta\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{sec^2\theta}{\sqrt{tan^2\theta}}\ sec\theta\ \ tan\theta\ \ d\theta = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{sec^2\theta}{tan^2\theta}\ sec\theta\ \ tan\theta\ \ d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{sec^2\theta}{\cancel{tan\theta}}\ sec\theta\ \cancel{tan\theta}\ d\theta = \frac{1}{2}\int_1^2 sec^2\theta\ sec\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\int_1^2 sec^3\theta\ d\theta$$

Para integrar el resultado obtenido, utilizaremos la técnica de integración por parte, siendo este el siguiente:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

donde

$u = \sec\theta$

$du = \sec\theta \tan\theta$

$dv = sec^2\theta\ d\theta$

$v = \int sec^2\theta\ d\theta$

$v = \tan\theta$

Cabe señalar que para integrar la expresión $\left(\frac{1}{2}\int_1^2 sec^3\theta\ d\theta\right)$, utilizando la técnica de integración por parte, haremos un cálculo aparte en donde representaremos dicha expresión de una forma indefinida (sin límites); se utilizará dicha estrategia debido a que la integral definida depende de la integral indefinida, por lo tanto, es válido hacer aparte el cálculo de la indefinida y luego sustituir el valor que dé la integral indefinida, y por ultimo retomar los límites para luego evaluar. Así.

$$\frac{1}{2}\int sec^2\theta\ sec\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\left(u\ v - \int v\ du\right) = \frac{1}{2}\left(sec\theta\ tan\theta - \int tan\theta\ sec\theta\ tan\theta\ d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(sec\theta\ tan\theta - \int tan^2\theta\ sec\theta\ d\theta\right) = \frac{1}{2}\left(sec\theta\ tan\theta - \int (sec^2\theta - 1)sec\theta\ d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(sec\theta\ tan\theta - \int (sec^3\theta - sec\theta\ )d\theta\right) = \frac{1}{2}\left(sec\theta\ tan\theta - \int sec^3\theta\ d\theta + \int sec\theta\ d\theta\right)$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\int sec^3\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\left(sec\theta\ tan\theta - \int sec^3\theta\ d\theta + \int sec\theta\ d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\int sec^3\theta\ d\theta = sec\theta\ tan\theta + \int sec\theta\ d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}sec\theta\, tan\theta + \frac{1}{2}ln|sec\theta + tan\theta| + c\right)$$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}sec\theta\, tan\theta + \frac{1}{2}ln|sec\theta + tan\theta| + c\right)$g

Ahora retomando los límites para luego evaluar se tiene:

$$\int_1^2 sec^3\theta\, d\theta = \left[\frac{1}{2}sec\theta\, tan\theta + \frac{1}{2}ln|sec\theta + tan\theta|\right]_1^2$$

Sin embargo para poder evaluar dicha expresión es necesario reescribirla con la variable original (x), tomado en cuenta que $sec\theta = u, tan\theta = \sqrt{u^2 - 1}$ y $u^2 = 4x + 1$, entonces:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}ln|sec\,\theta + tan\,\theta|\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - 1} + \frac{1}{2}ln\left|u + \sqrt{u^2 - 1}\right|\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{4x + 1}\sqrt{4x + 1 - 1} + \frac{1}{2}ln\left|\sqrt{4x + 1} + \sqrt{4x + 1 - 1}\right|\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{4x + 1}\sqrt{4x} + \frac{1}{2}ln\left|\sqrt{4x + 1} + \sqrt{4x}\right|\right]_1^2$$

Luego al evaluar los límites se obtiene:

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{4(2) + 1}\sqrt{4(2)} + \frac{1}{2}ln\left|\sqrt{4(2) + 1} + \sqrt{4(2)}\right|\right) - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{4(1) + 1}\sqrt{4(1)} + \frac{1}{2}ln\left|\sqrt{4(1) + 1} + \sqrt{4(1)}\right|\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{9}\sqrt{8} + \frac{1}{2}ln\left|\sqrt{9} + \sqrt{8}\right|\right) - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{4} + \frac{1}{2}ln\left|\sqrt{5} + \sqrt{4}\right|\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)(3)(2.82842712) + \frac{1}{2}ln|3 + 2.82842712|\right) - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2.236067977)(2) + \frac{1}{2}ln|2.236067977 + 2|\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(4.24264068 + \frac{1}{2}ln|5.82842712|\right) - \left[\frac{1}{2}(2.236067977 + \frac{1}{2}ln|4.236067977|)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(4.24264068 + 0.881373586) - \left[\frac{1}{2}(2.236067977 + 0.721817737)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(5.124014266) - \left[\frac{1}{2}(2.957885714)\right]$$

$$= 2.562007133 - 1.478942857$$

$$L = 1.083064276$$

Por lo tanto la longitud de la gráfica es de $1.083\ u$.

Trabajando ahora el segundo inciso ocurre que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ es la primer derivada de $f(x)$, entonces el área de la superficie viene dada por:

$$A = \int_a^b 2\pi\, f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Al sustituir los datos se obtiene:

$$A = \int_1^2 2\pi\left(\sqrt{x}\,\right)\left(\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]^2}\ dx\right) = 2\pi\int_1^2 \sqrt{(x)\left(1 + \frac{1}{4x}\right)}\ dx$$

$$= 2\pi\ \int_1^2 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\ dx$$

$$= 2\pi\ \int_1^2 \left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

Para calcular esta integral se utiliza cambio de variable para integrales definidas, entonces sea $u = x + \frac{1}{4}$. Después,

$$u = x + \frac{1}{2}\ \Rightarrow du = dx.$$

Antes de sustituir hay que determinar los nuevos límites superior e inferior de integración.

Cuando $x = 1, u = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

Cuando $x = 2,\ u = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.

Ahora es posible sustituir para obtener

$$A = 2\pi \int_1^2 \left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dx = 2\pi \int_{5/4}^{9/4} u^{\frac{1}{2}}\, du = 2\pi \left[\frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{5}{4}}^{\frac{9}{4}}$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{2}{3}\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{2\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^3}}{3} - \frac{2\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^3}}{3}\right]$$

$$= 2\pi(2.25 \; - 0.93169499)$$

$$= 2\pi(1.31830501)$$

$$= 8.283174039$$

Por tanto, el área de la superficie es aproximadamente $8.28\, u^2$.

3.4 Implementación de la propuesta

El escenario de implementación de la Propuesta didáctica para el módulo de Matemáticas aplicadas a las ciencias agrícolas se efectuó en la sección $C - 18$, con los estudiantes del grupo 1 de primer año de la carrera de Ingeniería Agrícola de la UNA durante el segundo semestre del año 2017.

Se detallará acá la metodología empleada en las sesiones de manera general y a detalle de tres, una por unidad de aprendizaje. La metodología empleada a lo largo de las sesiones se basa en el aprendizaje por competencias bajo el enfoque de resolución de problemas donde destaca el trabajo colaborativo.

En el trabajo con los estudiantes se partió de los conocimientos previos e ideas intuitivas que poseen para formar los conceptos, formalizarlos y su posterior profundización. Se inicia con un problema motivacional y se promueve a la reflexión de la necesidad de las herramientas matemáticas para su resolución, lo cual lleva al propósito de las sesiones, la construcción y aplicación de estas herramientas en la resolución de los problemas propuestos con nivel creciente de dificultad. Para mayor objetividad y lograr un aprendizaje significativo donde el estudiante construya su conocimiento se procuró que los problemas a tratar en las sesiones no fueran conocidos con antelación por los estudiantes, salvo si fuese una asignación de trabajo no presencial.

Esta propuesta fue implementada en los meses de agosto a noviembre del año lectivo 2017 en la Universidad Nacional Agraria, en la ciudad de Managua con una frecuencia semanal de seis horas de docencia directa. Fue aplicada a los estudiantes del primer año de la carrera de ingeniería agrícola cuyas edades están en el rango de los 15 a 23 años. Del total de quinces estudiantes que conformaban el grupo, dos de ellas eran mujeres.

A continuación, se detalla en generalidades la metodología de la implementación.

La metodología utilizada a lo largo de las sesiones de clases se basó en al aprendizaje basado en la resolución de problemas con el método híbrido de Schoenfeld-Polya, mediante el trabajo colaborativo e individual de acuerdo a lo propuesto en el programa modular siendo que el alumno **construya su propio conocimiento** la meta a lograr. Se partió de los conocimientos previos para la realización de las actividades exploratorias descritas en el material para que el estudiante pudiese aproximar en cierto grado los conceptos a estudiar, socializarlos al procedimiento de cálculo y aplicarlos en la resolución de problemas. Respecto a las evaluaciones (sumativa o no) se realizaron una inicial, otra durante el proceso y la final, que por la naturaleza de nuestro modelo debe ser un híbrido entre coevaluación y heteroevaluación.

Hay un interés por analizar en el estudiante:

- Su capacidad de formular, tratar y resolver problemas asociados al campo agrícola al nivel de su año académico.
- Su nivel comunicativo en el lenguaje matemático,
- Su habilidad para razonar aspectos, espaciales, métricos y geométricos, y,
- Su capacidad para hacer generalizaciones o especificaciones, de acuerdo al caso (de lo abstracto a lo concreto, y viceversa.

En la primer sesión, se presentó el indicador de logro del trabajo a realizar y mediante una lluvia de ideas controlada se realizó la actividad exploratoria 1 (inicial) tomando en cuenta los diferentes puntos de partida, hasta recaudar la información suficiente y pertinente. Luego, se formalizaron los conceptos destacando el ahora dinamismo del concepto de ángulo, alejado de la idea euclidiana del mismo.

Con las nuevas cualidades del concepto de ángulo y las relaciones de geometría euclidianas (retomadas de la exploración) se procedió a resolver, en una primera aproximación, un problema aplicado sobre las medidas de ángulos, para luego concatenar con los nuevos conceptos (ángulo en posición normal, cuadrantal, y terminales).

Mediante una conferencia expositiva se hace la formulación de las funciones trigonométricas para números reales a partir del establecimiento de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

CONCLUSIONES

Basado en los planteamientos expuestos en los capítulos anteriores, la enseñanza de las matemáticas (según el PMS del módulo) supone un conjunto de variados procesos mediante los cuales el docente planea, gestiona y propone situaciones de aprendizaje matemático significativo y comprensivo –y en particular situaciones problémicas o estudios de casos– para sus estudiantes y así permite que ellos desarrollen su actividad matemática e interactúen con sus compañeros, profesores y **materiales didácticos** para reconstruir y validar personal y colectivamente el saber matemático.

Por esto se propone algunas maneras de cómo y qué aspectos impulsar dinamizando estas interacciones:

- ✓ **Partir de situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas.**

  Las situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo en las matemáticas universitarias son situaciones que superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar productivamente materiales manipulativos, representativos y tecnológicos.

  La **situación-problema** apunta siempre a distintos contenidos y hacia diversas estructuras matemáticas, pero éstos no son evidentes en sí mismos, sino que tienen que ser interpretados activamente por los estudiantes. En esta interpretación intervienen tanto factores sociales y culturales propios de la clase de matemáticas, como los que median a través del ambiente de aprendizaje y el clima institucional y los que provienen del contexto extraescolar. Es importante señalar que un mismo contenido matemático puede –y en ocasiones debe– presentarse a través de diversas situaciones, como es el caso de las fracciones y sus diversas interpretaciones, etc.

- ✓ **Diseñar actividades que propicien procesos de aprendizaje mediados por escenarios afines a su perfil, culturales y sociales**.

  El aprendizaje se propone como un proceso activo que emerge de las interacciones entre estudiantes y contextos, entre estudiantes y estudiantes y entre estudiantes y profesores en el tratamiento de las situaciones matemáticas.

  Estas formas de interacción tienen importancia capital para la comunicación y la negociación de significados. Por ello se enfatiza en el diseño de situaciones matemáticas que posibiliten a los estudiantes tomar decisiones; exponer sus opiniones y ser receptivos a las de los demás; generar discusión y desarrollar la capacidad de justificar las afirmaciones con argumentos. Todo ello conlleva a incluir en la organización del aprendizaje matemático el trabajo en equipo y a fomentar la cooperación entre los estudiantes, la cual no excluye momentos de competición sana y leal entre ellos o con otros cursos.

- ✓ **Fomentar en los estudiantes actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia las matemáticas.**

  Al momento de iniciar el aprendizaje de un nuevo concepto, lo que el estudiante ya sabe sobre ese tema de las matemáticas (formal o informalmente), o sea, sus concepciones previas, sus potencialidades y sus actitudes, son la base de su proceso de aprendizaje. Así al docente le parezca que las concepciones previas son erróneas, las potencialidades mínimas y las actitudes negativas, no dispone de otra base para que el estudiante mismo inicie activamente sus procesos de aprendizaje. Sólo a partir de ellas puede empezar a cuestionar las preconcepciones, a incrementar las potencialidades y a modificar las actitudes para que el progreso en los saberes conceptuales y procedimentales le vaya dando la seguridad y la confianza en que puede avanzar hacia nuevos aprendizajes (lo que es facilitado por los procesos de Schoenfeld).

Esta construcción y reconstrucción de sentidos y significados matemáticos, que el estudiante vive en la tensión entre lo que ya sabe o cree saber y lo que se le propone para aprender, genera en él una posición activa y una actitud positiva para enfrentar esos nuevos aprendizajes.

- ✓ **Controlar la estabilidad e inercia de las prácticas de la enseñanza.**

Se había dicho que desarrollar las competencias matemáticas supone organizar procesos de enseñanza y aprendizaje basados en estructuras curriculares dinámicas que se orienten hacia el desarrollo de competencias. Esto obliga al diseño de procesos, situaciones y actividades contextualizadas en situaciones que portan una visión integral del conocimiento matemático, enfocadas en el desarrollo de las competencias matemáticas, orientadas a alcanzar las dimensiones necesarias de la educación matemática.

De igual modo, es necesario ampliar la visión de un material didáctico, que posea pertinencia, concordancia y coherencia con los fines de la educación, los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias según el Programa Modular Silábico del módulo, el Modelo y Proyecto Educativo de la UNA, y el Plan de estudio de la Carrera.

- ✓ **Aprovechar la diversidad y eficacia de los recursos didácticos.**

Los recursos didácticos, entendidos no sólo como el conjunto de materiales apropiados para la enseñanza, sino como todo tipo de soportes materiales o virtuales sobre los cuales se estructuran las estudios de casos o situaciones-problemas más apropiadas para el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, deben ser analizados en términos de los elementos conceptuales y procedimentales que efectivamente permiten utilizarlos si ya están disponibles, o si no existen, diseñarlos y construirlos.

- ✓ **Refinar los procesos de evaluación.**

  La evaluación formativa ha de centrarse en la valoración continua de las distintas actuaciones de los estudiantes cuando interpretan y tratan situaciones matemáticas y a partir de ellas formulan y solucionan problemas. Estas actuaciones se potencian cuando el docente mantiene siempre la exigencia de que los estudiantes propongan interpretaciones y conjeturas; proporcionen explicaciones y ampliaciones; argumenten, justifiquen y expliquen los procedimientos seguidos o las soluciones propuestas.

  El registro de las evidencias por parte del docente, complementado con los registros que cada estudiante debe llevar de su propio trabajo –portafolios, archivos de informes– ayuda para que los estudiantes se apropien de su propio avance y asuman la responsabilidad conjunta en su aprendizaje.

PLAN A FUTURO

El estudio realizado posee gran generalidad. No obstante se toman en consideración las siguientes limitantes que se reflejan en los resultados y que deben ser considerados para posteriores estudios:

- ✓ El abordaje de los contenidos, así como las actividades de aprendizajes están limitadas por el factor tiempo, así que no es pedagógicamente correcto estar recargando las actividades no presenciales con temáticas que deben abordarse en el aula de clases.
- ✓ El uso de los medios didácticos se remite a los facilitados por la institución, en este contexto las actividades deben planificarse bajo esta realidad.
- ✓ Si bien es cierto algunos, estudios de casos pueden extrapolarse a contextos no cercanos al estudiante o al medio nacional, no puede abusarse o priorizar ejemplificaciones en términos ideales.
- ✓ El factor estudiante se debe manejar en función del estudiante que se posee, no del que se desea tener.
- ✓ No todos los contenidos se prestan a contextualizaciones.

BIBLIOGRAFIA

Abarca Nancy (2007). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral mediante la resolución de problemas, una propuesta motivadora*. Revista Tecnociencia Universitaria, Bolivia.

Addine, F y García, G. (2003). *La interacción: núcleo de las relaciones interdisciplinarias en la formación de profesores de perfil amplio*. Una propuesta. CD del Congreso Internacional Pedagogía 2003. Cuba.

Barnett, R. (2001). Los límites de la competencia. Barcelona: Editorial GEDISA.

Crespo Borges, T. (2007). *Respuestas a 16 preguntas sobre el empleo de expertos en la investigación pedagógica*. San Marcos. Lima.

Ehrlich Quintero, Patricia (2001). *El currículo modular. Una experiencia de currículo universitario integrado*. Anuario 2000, UAM–X, México.

González Castro, V. (1986). *Teoría y práctica de los medios de enseñanza*. Ed. Pueblo y Educación. La Habana.

Gutiérrez Moreno, R. (2003). Artículo: *Metodología para el trabajo con la tarea docente*. Revista Pedagógica. Maestros nº 21, V. 9. Lima Perú, Noviembre.

Guzmán, M. de (2005). *Tendencias e innovaciones en educación matemática*. Conferencia en el Seminario de Educación Matemática. (Documento inédito disponible en la OEI). OEI. Bogotá.

Hernández Sampieri, R; Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill/Interamericana. México, D. F.

Irazoqui, Elías (2015). *El aprendizaje del cálculo diferencial: una propuesta basada en la modularización*. UNED.

INFOTEP (2016). *Guía para enseñar, aprender y evaluar por competencias*. Gerencia de Normas y desarrollo docente.

Klingberg, L. (1978). *Introducción a la didáctica general*. Pueblo y Educación. La Habana.

Larson Ron, Edwards Bruce. (2010). Cálculo 2. McGrawHill Interamericana Editores S. A. de C. V. Novena Edición.

Levy-Leboyer, C. (1997). Gestión de las competencias. Capellades: Gestión.

Orozco, J. C. (2006). *Formación por competencias en educación superior*. Universidad Pedagógica de Honduras (material mimeografiado).

Padilla Arias, Alberto (2012). *El sistema modular de enseñanza: una alternativa curricular de educación superior universitaria en México*. Revista de Docencia Universitaria REDU, volumen 10 (3).

Peralta, Víctor (2001). *Globalización y construcción curricular. Tensiones y posibilidades. Una perspectiva desde Latinoamérica*. Chile (material mimeografiado).

Polya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México. Novena reimpresión.

Posada, R. (2004). *Formación superior basada en competencias, interdisciplinariedad y trabajo autónomo del estudiante*. Revista iberoamericana de educación.

Rodríguez Izquierdo, Rosa María (2009). *Innovación metodológica docente en el marco del espacio europeo de educación superior: algunas reflexiones desde los retos de la sociedad del conocimiento. XXI, Revista de Educación, 11*. Universidad de Huelva.

Salinas, J. (2006). *Nuevos escenarios de aprendizaje*. Grupo CIFO: IV Congreso de formación para el trabajo. Fundación Forcem y Universidad de Vigo.

Schoenfeld, M. (1987). *Pólya, problem solving and education*. Math, Mag 60.

Schoenfeld, M. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Studies in Mathematical thinking and learning. Lawrence Erlbaum Associates Inc. Hillsdale NJ 339.

Schoenfeld, M. (2007). *Assesing mathematical proficiency*. Mathematical Sciences Research Institute Publications Vol. 53. Cambridge University Press.

Spencer, L. M. & Spencer, S. M. (1993). *Competence at work. Models for superior performance*. New York: Wiley & Sons.

Stenhouse, L (1987). *Investigación y desarrollo del currículo*. EDICIONES MORATA, S. A.

Vílchez Quesada, E. (2013). *Sistemas expertos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación superior*. IV CIEMAC. En http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/memorias/4toCIEMAC/Ponencias/SistemasExpertosparalaEnsenanzayAprendizajedelaMatematica.pdf 4 de abril de 2013

Zamudio, Z; Paredes, M. (2014). *La capacidad de resolver situaciones problemáticas en el campo laboral del futuro profesor de educación secundaria en agronomía*. Importancia de la Matemática. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.

Zill, D., Wright W. (2011). Cálculo: Trascendentes tempranas. McGrawHill Interamericana Editores S. A. de C. V. Cuarta Edición.

Anexo 1

Resumen de los competencias, subcompetencias e indicadores de logros presentes en el Programa Modular Silábico del módulo matemática aplicada a las ciencias agrícolas. Transformación curricular 2016.

Descriptor del módulo

Fórmula y aplica los procedimientos matemáticos para la comprensión y resolución de problemas relacionados con las ciencias agrícolas. Los contenidos principales que se abordan en este módulo corresponden a tres áreas de las matemáticas: Trigonometría, Cálculo diferencial e Integral. En *Trigonometría* se estudiarán algunos modelos de fenómenos periódicos que se expliquen mediante funciones trigonométricas. Los contenidos de *Cálculo* se concentrarán en tres aspectos: estudio de funciones elementales, derivación de funciones e integración de las mismas con el objetivo de ampliar el cálculo de áreas de figuras geométricas con lados rectos a figuras irregulares, volúmenes de sólidos y modelaciones de fenómenos físicos. Este módulo es teórico-práctico, organizado por unidades de aprendizaje.

Unidad de Competencia	Sub-competencias	Indicadores
Formula y aplica los procedimientos matemáticos para la comprensión y resolución de problemas inherentes a las ciencias agrícolas.	1.1. Emplea la Trigonometría como herramienta para resolver problemas del campo agrícola inherentes a triangulaciones de polígonos y modelaciones de fenómenos periódicos.	1.1.1. Resuelve problemas asociados a modelaciones de fenómenos periódicos que se explican mediante funciones trigonométricas para ángulos cualesquiera y para números reales. 1.1.2. Resuelve problemas contextualizados al campo agrícola asociados a la triangulación de polígonos mediante la aplicación de identidades trigonométricas y las leyes de los senos y los cosenos.

	1.2. Utiliza las funciones elementales diferenciables (algebraicas y trascendentes) para el estudio de modelos de comportamiento de sistemas bajo estudios en el campo agrícola.	1.2.1. Analiza modelos funcionales de comportamiento de sistemas bajo estudios en el campo agrícola. 1.2.2. Aplica correctamente los procedimientos para la derivación de funciones elementales en la resolución de problemas aplicados al campo agrario.
	1.3. Aplica las técnicas de integración en el cálculo de áreas de regiones, volúmenes de sólidos de revolución y la explicación de fenómenos físicos.	1.3.1. Calcula áreas de regiones irregulares limitadas por curvas y volúmenes de sólidos de revolución. 1.3.2. Resuelve problemas aplicados sobre fenómenos físicos mediante integración.

Anexo 2

Resumen de los contenidos presentes en los programas de Matemática aplicada a las ciencias agrícolas.

Trigonometría

1. Ángulos en un sistema de coordenadas (circular).
2. Razones trigonométricas de triángulos rectángulos.
3. Triángulos semejantes.
4. Trigonometría de triángulos cualesquiera.
5. Funciones trigonométricas para números reales.
6. Modelos que se describen mediante las funciones trigonométricas.

Calculo diferencial

1. Definición formal de función.
2. Representación de una función.
3. Funciones multivariadas.
4. Álgebra de funciones
   a. Suma, producto y composición
   b. Tipos de funciones y su clasificación
5. Forma explícita e implícita de una función.
6. Modelos funcionales
7. Análisis de modelos funcionales asociados a sistemas del campo agrícola.
8. Derivada de funciones elementales.
   a. Definición. Interpretación geométrica.
   b. Teoremas de derivación.
   c. Fórmulas de derivación de funciones trascendentes.
   d. Derivación implícita
   e. Derivadas de funciones en varias variables.
9. Estudio de la derivada de funciones elementales.

Calculo Integral

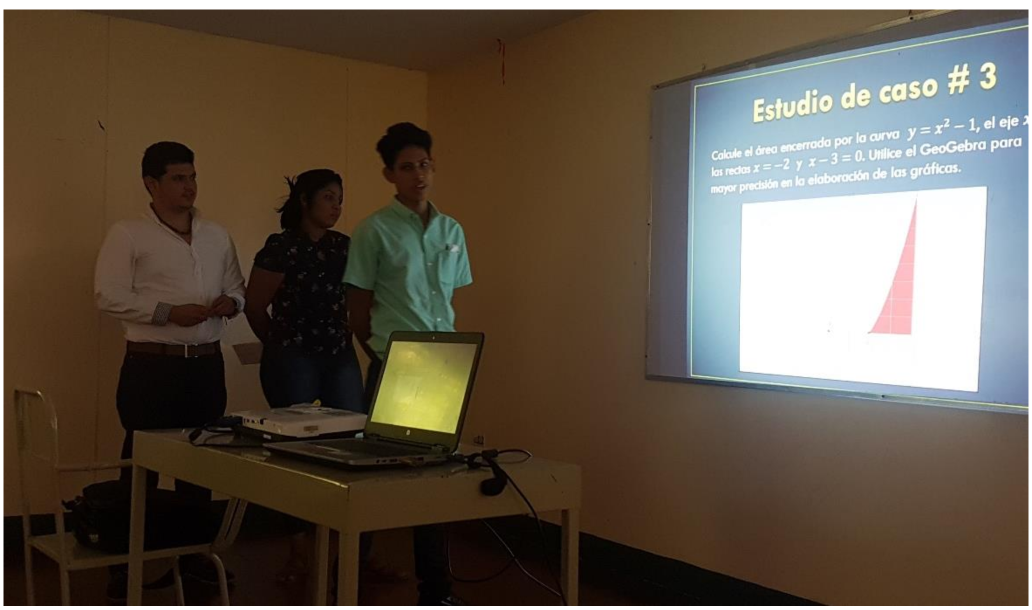
1. Iniciación a las integrales. El problema del área bajo una curva.
2. Cálculo de antiderivadas de una función. La antiderivada más general.

3. La integral indefinida de funciones elementales.
    a. Reglas para el cálculo de integrales indefinidas
    b. Cambio de variable para integrales indefinidas
4. Estudio de la integral indefinida de funciones elementales.
5. La integral definida de funciones elementales. El área bajo una curva.
6. El área entre dos curvas.
7. Caso especial. La integral definida y el volumen de un sólido de revolución.
8. Aplicaciones de la integral al cálculo de áreas y volúmenes.

Anexo 3 (Galería de Fotos)

Conversatorio con la Ing. Carmen Castillo
coordinadora de la carrera de Ingeniería Agrícola

Entrevista con la Esp. María Auxiliadora Rosales coordinadora de la asignatura de Matemática II

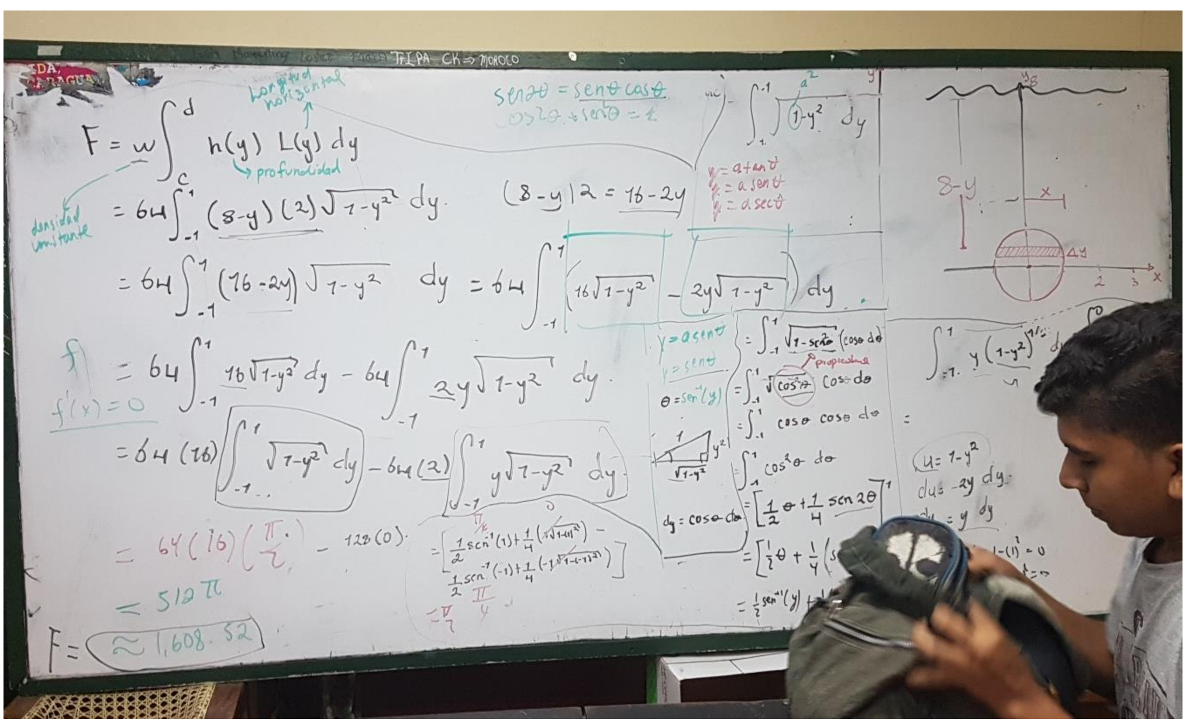


Estudiantes del primer año de ingeniería agrícola exponen Estudio de casos

Atención individualizada para el trabajo de las actividades no presenciales

Reforzamiento de contenidos abordados

Grupo de estudiantes de primer año después de
una sesión de clases



Evidencia de trabajo independiente (reunión grupal de estudiantes)