Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua
UNAN - Managua

Facultad de Ciencias e Ingeniería

Departamento de Matemáticas y Estadística

Trabajo monográfico para optar al título de Licenciado en Matemática

La Integral de Stieltjes, clasificación de funciones integrables y fórmula generalizada cuando la función integradora presenta discontinuidad en el intervalo

AUTORES:

Br. Isel del Carmen Aguilar Sierra

Br. Brandon Elí Calero Guevara

TUTOR:

MSc. César Alejandro Vanegas Reyes

ASESOR METODOLÓGICO:

MSc. Pilar Angelina Marín Ruiz

Índice general

AGRADECIMIENTOS

Nuestros más sinceros agradecimientos a quienes nos han acompañado en estos cinco años de aprendizaje, crecimiento y superación, tanto académica como personal; en especial a:

- A Dios, primeramente, por inspirarnos y darnos la oportunidad de contribuir en la construcción de un futuro mejor, para nosotros y para el país.

- A nuestros padres y familiares, quienes con el esfuerzo diario de su trabajo, han logrado ver en nosotros, sus sueños cumplidos.

- A los profesores MSc. César Alejandro Vanegas Reyes y MSc. Pilar Angelina Marín Ruiz, quienes más que profesores excelentísimos en Matemática, han sido maestros para la vida.

- A nuestros compañeros, Br. Flor Esthela Mora Pilarte, Br. Norwin Antonio Vallejos Larios y Br. Noel Antonio Álvarez López con quienes tuvimos la oportunidad de compartir, más que el conocimiento, las experiencias de vida.

I. RESUMEN

El siguiente trabajo monográfico expone los aspectos básicos e importantes sobre la Integral de Stieltjes, teniendo como motivación la presentación de un análisis sencillo, pero puntual sobre este objeto. Desde luego, una exposición de este tipo sigue una serie de proposiciones, definiciones, teoremas y corolarios, los cuales justifican la obtención de diversas conclusiones, y es por esto que se sigue tal estructura a lo largo del documento. El contenido presentado a continuación no puede ser abordado en una sola lectura, sino que más bien que, debe ser gradual, pues una inspección rápida de los resultados, observaciones y demostraciones no haría más que confundir al lector, respecto a lo que implica la integral de Stieltjes.

Así, la comprensión sobre el concepto de integral inicialmente no está dirigido sobre el aspecto matemático, sino sobre el aspecto histórico, puesto que un entendimiento sobre la evolución de este concepto permite suponer la dirección que lleva. Ante esto, la sección **Antecedentes históricos** resume brevemente la transformación que ha tenido la integral desde su origen, hasta la actualidad, pasando por algunas de sus etapas claves: el desarrollo del Método Exhaustivo, la invención del Cálculo y la formulación de integral según Riemann. Tal descripción histórica no pretende solo presentar tal aspecto, sino que también permitir entender cómo la inserción de nuevos objetos, conceptos y nociones influyeron en tal concepto, y por ello es que en la sección **Preliminares sobre Integración** se encuentran definiciones y teoremas sobre intervalos y funciones que justifican los diversos procedimientos y conclusiones realizados.

Las secciones siguientes son más puntuales respecto a la integral, puesto que la sección **Integral definida** hace una descripción sobre la integral de Riemann, que usualmente se estudia en el curso de Cálculo, y que sirve de base para la generalización que en este trabajo se aborda. Tal sección también está compuesta, inicialmente, por una definición de integral, para luego obtener resultados que garanticen los tipos de funciones que son integrables en el sentido usual, pasando para ello por las propiedades que tal objeto posee;

todo esto para culminar con algunas fórmulas o estrategias que permitan el cálculo de integrales. Por su parte la sección **Variación acotada** introduce una nueva característica para las funciones; tal sección aunque breve, es muy poderosa, y su alcance se nota en las secciones finales del documento, por ello es que se examinan los tipos de funciones que son de variación acotada, así como los teoremas que aseguran las condiciones para que una función posea tal propiedad. Desde luego, todo esto es básico, y su importancia se nota en el propio desarrollo de la integral de Stieltjes.

Con tales bases, la construcción de la teoría de la integral de Stieltjes se vuelve más simple, ya que al ser una generalización, las definiciones y teoremas respectivos son también una extensión de los ya conocidos; debido a esto, es que la secuencia que tal integral posee, es análoga a la integral de Riemann. No por esto se descuidan algunas observaciones vitales, pues desde un inicio, en la sección **Definición de integral** se explican las razones por las cuales se presentan las distintas definiciones (por sumas integrales y por sumas de Darboux) de integral de Stieltjes, así como la interrelación entre las mismas, considerando para ello las restricciones impuestas. Una vez superada esta limitante, se logra continuar con el curso natural de tal propósito: la obtención de un criterio que permita determinar cuando una función f es integrable en el sentido de Stieltjes respecto de una función α; así como también una clasificación sobre los tipos de funciones que son integrables, a partir de las características que posea f o α, lo cual es abordado en la sección **Funciones integrables**.

Seguidamente, en la sección **Propiedades de la integral de Stieltjes** se exploran todas esas propiedades análogas a la integral usual, aunque para esta nueva formulación se tienen dos propiedades adicionales, debido a la inclusión de la función integradora α. Tales propiedades, presentadas como teoremas son un primer contacto con resultados previos, por lo que la demostración de los mismos permite una comprensión mayor del comportamiento de sumas integrales (arbitrarias, superior e inferior). Esta sección, junto con las anteriores, permite formalizar muchas nociones abordadas en la integración usual, y aún más, con ellas se logra proceder al cálculo de integrales, sin tener que preocuparse por la existencia de tales valores, o los tipos de funciones que son integrables en tal sentido.

Entonces, con esa teoría desarrollada se expone **Fórmulas integrales**, una sección destinada al estudio de fórmulas que permiten calcular integrales de Stieltjes, para ello primeramente se generalizan las estrategias de *cambio de variable* e *integración por partes*, y se incluye un nuevo resultado denominado *reducción a una integral de Riemann*. Luego, con el análisis y observaciones de tales fórmulas, se desglosan algunas suposiciones, las que se formalizan con la presentación de los teoremas de la subsección *Fórmulas para integrados discontinuos*, que hacen especial énfasis en ese tipo de integradores; igualmente, en *Fórmula integral para integradores continuos y diferenciables a trozos en un intervalo abierto* se estudian integradores con tal característica, lo cual representa una culminación de la teoría de la integral de Stieltjes.

Finalmente, la última sección **Integrabilidad y funciones de variación acotada**, concluye la parte teórica sobre la integral de Stieltjes, pues unifica los conceptos de integración y variación acotada, con el fin de justificar la elección de la definición de integral siguiendo el procedimiento de Darboux, aún más, permite conocer el alcance de tal teoría; por último, tal sección es breve pero muy poderosa, por lo que debe estudiarse con sumo cuidado. Para concluir se presenta una aplicación de la integral de Stieltjes.

II. INTRODUCCIÓN

Históricamente, la Matemática ha demostrado ser de gran importancia en las innovaciones de diversos campos de la ciencia, puesto que su carácter científico, expresado en ecuaciones e igualdades, muestra la verdad absoluta de problemas *empíricamente* irresolubles. Así, el estudio de tales problemas resulta ser más simple, pues el lenguaje matemático, describe no solo cantidad, sino también espacio, estructura y cambio.

Debido a esto, existen diversas relaciones con la Física, Química, Biología e Ingeniería. Y aunque todo este impacto de la Matemática es sumamente profundo, no es siquiera una pequeña parte del todo que verdaderamente constituye; adicionalmente, resulta erróneo no continuar una *expedición* en el conocimiento de las bases de la Matemática misma, o en el desarrollo de nuevos objetos trascendentes para nuevas investigaciones, pues si esta ciencia se caracteriza por algo, es por su continua reinvención, considerando para ello problemas, crisis y contradicciones.

En particular, la Integración es una teoría matemática que refleja todas estas descripciones anteriores, pues su necesidad de resolver problemas del mundo real evolucionó en un *deseo insaciable* por descubrir todas sus características. Actualmente, la Integral de Riemann es el objeto que mejor se posiciona en el estudio de la Integración, debido a su sencillez no solo desde el punto de vista teórico, sino también desde el punto de vista práctico, pues no requiere de un análisis tan profundo.

Sin embargo, si la búsqueda de una matemática superior, trae como primer paso investigar sobre la Integración, entonces debe analizarse inmediatamente un objeto superior a la Integral de Riemann: la Integral de Stieltjes. Es imposible describir en unos pocos párrafos lo que este nuevo análisis trae consigo, pero es seguro que una investigación de ello, debe plantear nuevos puntos de vista, nuevos resultados (algunos que se originen de lo particular a lo general, y viceversa) y en primeras instancias debe romper los esquemas de la intuición matemática, para obtener así una generalización de los conceptos y nociones ya conocidos.

Desde luego, la introducción de la Integral de Stieltjes no puede ser repentina, sino que debe ser oportuna; ésto solo ocurre cuando se conocen intrínsicamente muchos de los objetos que componen la Integración (funciones, subconjuntos, entre otros). Ésto reafirma que la obtención de una madurez matemática superior (y una madurez académica de calidad) sólo puede obtenerse mediante un profundo análisis de los objetos (y por tanto de sus propiedades) en cuestión de estudio. Por ésto, si la Integral de Stieltjes ha de presentarse, debe realizarse una exposición axiomática de todo lo que le constituye: proposiciones, definiciones y teoremas; además de una serie de ejemplos y contraejemplos que evidencien cada una de las observaciones y conclusiones que se obtengan en la investigación.

Finalmente, si la Integral de Stieltjes merece un estudio tan minucioso como se describe, entonces, no puede estar acompañado solo del aspecto matemático, sino que debe contener explicaciones *sencillas* con claridad y calidad. Así, una investigación sobre la Integral de Stieltjes sólo conduce a un desarrollo íntegro de los diversos componentes de la Matemática: nociones y generalizaciones, teoría y práctica, rigor e intuición.

III. OBJETIVOS

3.1. Objetivo General

Desarrollar la Integral de Stieltjes como suma integral superior e inferior, clasficando las funciones integrables.

3.2. Objetivos Específicos

- Definir la integral de Stieltjes como suma integral superior e inferior de Darboux.
- Enumerar las propiedades fundamentales de la clase de funciones integrables según Stieltjes.
- Realizar el cálculo de la integral de Stieltjes en forma generalizada, cuando la función integradora presenta una cantidad finita de puntos de discontinuidad.

IV. JUSTIFICACIÓN

Las innovaciones en los distintos campos de las ciencias no sólo se limitan a la creación de nuevas herramientas u objetos que permitan resolver problemas del mundo real; sino que también obedecen a una serie de investigaciones que logran enfocar desde otras perspectivas el desarrollo de una teoría o la discusión de la validez de la mismas bajo diferentes circunstancias. En estas condiciones, una investigación sobre la Integral de Stieltjes no viene a formular nuevas proposiciones o resultados, sino más bien, trae consigo un enfoque esclarecedor de lo que otros investigadores no desarrollan por diversas razones (grado académico, brevedad, estilo, etc.).

Si a ésto, se le añade otros factores como: el interés en otros objetos de la Teoría de Integración, la falta de referencias bibliográficas *respetables* o la importancia que se le asigne a la misma Integral de Stieltjes; resulta todo un *desafío* exponer los aspectos generales de tal objeto, aún más, si ésto trae consigo una búsqueda inmediata (y por tanto casi sin sentido) de soluciones a problemas de la vida real.

Considerando todos estos puntos, sólo se argumenta, que una verdadera comprensión de la Integral de Stieltjes se puede dar únicamente bajo un proceso gradual pero continuo, que primeramente profundice sus aspectos básicos, puesto que al avanzar a problemas de mayor complejidad, siempre se encontrará que todo está construido a partir de los conceptos y nociones más elementales. De esta manera quienes deseen profundizar en el tópico de la Integral de Stieltjes, tienen a su alcance un material de apoyo, que consta de resultados demostrados, explicaciones simples y breves, así como también de ejemplos esclarecedores que permitan evidenciar el impacto de esta teoría.

Desde luego, esto justifica el desarrollo de la Integral de Stieltjes y sus propiedades en funciones reales mediante el procedimiento de Darboux, pues un verdadero alcance de este tema, y la elaboración de una investigación sobre el mismo, se obtiene cuando se reformulan interrogantes, y se responden a ellas conforme se van obteniendo observaciones críticas y detalladas, que a la vez no se tornen aburridas, y que por el contrario fomenten investigaciones de mayor complejidad sobre el tópico. Finalmente, es la exposición simple de la integral de Stieltjes y sus propiedades, la principal motivación que impulsa este trabajo, pues pretende ser una base fundamental para estudiantes y futuros investigadores.

V. MARCO TEÓRICO

La Integración es una de las teorías matemáticas con aproximadamente más de 2000 años de antiguedad; tal edad se debe a extensas etapas de debate e investigación, las cuales han permitido obtener una teoría completa y eminente. Debido a esto, examinar el origen de la Integral de Riemann-Stieltjes (una generalización de la definición de Integral), implica un conocimiento breve de cada momento en que se discutió, formalizó y extendió el concepto de Integral, hasta lo que actualmente se conoce.

5.1. Antecedentes Históricos

La **Matemática**, como otras ciencias, tuvio su origen en la necesidad de solventar problemas imposibles para el empirismo. Esto fue constatado en el transcurso de la historia al surgir los siguientes dos problemas: *¿cómo trazar la recta tangente a una curva en un punto dado?* y *¿cómo calcular el área bajo una curva?*. Aunque tales problemas fueron de carácter geométrico, con la evolución de las **Matemáticas** se descubrió que una mezcla de las interpretaciones geométricas y el lenguaje algebraico, permitía un enfoque formal, así como intuitivo y práctico, bajo el cual la solución a tales problemas se simplificaba al uso de ecuaciones e identidades.

El estudio de tales problemas conllevó a la formulación del **Cálculo Infinitesimal**, impulsando así otras ciencias debido a las numerosas aplicaciones desarrolladas por la derivación (la operación desarrollada para el trazo de tangentes) y la integración (la operación desarrollada para el cálculo de áreas). Contradictoriamente estos *beneficios* originaron enormes discusiones acerca de la veracidad de la **Matemática**, pues cada vez más se plantearon interrogantes que, al responder con el bagaje matemático de la época, condujeron a contradicciones. Sobre esta línea, la derivada y la integral, forzosamente se sometieron a una *metamorfosis*, para obtener mejores bases teóricas, y así éstas sirvieran de fundamento a nuevas investigaciones.

5.1.1. Eudoxo, Arquímedes y el Método Exhaustivo

El concepto de integración, perteneciente a esa generación de problemas antiguos, nace de las nociones y pensamientos de la civilización griega, cuyo esplendor surgió del uso de razonamientos lógicos y demostrativos, que alcanzaron su auge con el conocimiento innato de la geometría. Si bien formularon diversos problemas (como la tangencia de una recta a un círculo, las relaciones entre los triángulos y sus elementos, etc.) quizás ninguno fue tan avanzado como el de calcular áreas de curvas y volúmenes de sólidos. Sobre esta línea sobresalieron **Eudoxo de Cnido** (390a.C. - 337a.C.) y **Arquímedes de Siracusa** (287a.C. - 212a.C.).

El primero, **Eudoxo**, creó de manera innovadora el **Método Exhaustivo**, que consistía en la aproximación sucesiva de cantidades a un número específico (*algo similar al concepto de límite*) el cual deseaba determinar. Pero no fue sino **Arquímedes**, quien destacó por el uso del **Método Exhaustivo**, al emplearlo de manera similar como se hace con los infinitesimales; es decir, **Arquímedes** proporcionaba magnitudes aproximadas a las verdaderas con cierto grado de precisión. Ejemplo de ello fue la aproximación de π, lo cual estuvo basada en el cálculo de áreas de polígonos inscritos, que determinaron el valor $3\frac{1}{7}$, y circunscritos, que determinaron el valor $3\frac{10}{71}$, respecto al círculo unitario de área π, entonces, esto supuso que $3\frac{10}{71} \leq \pi \leq 3\frac{1}{7}$. Es por esto que, tanto **Eudoxo** como **Arquímedes**, fueron los primeros matemáticos en desarrollar, en forma rudimentaria, una base para el cálculo integral. Tal base se mantuvo firme durante más de dieciocho siglos, hasta la invención del **Cálculo**.

5.1.2 Cálculo de áreas bajo las curvas en el siglo XVII

Hasta el siglo XVII el cálculo de áreas se determinaba a través del **Método Exhaustivo**; sin embargo, este concepto necesitaba avanzar para obtener mejores resultados respecto al cómputo de áreas. Estas observaciones fueron dadas principalmente por **Kepler** (1571-1630); aunque las respuestas a tales cuestionamientos fueron dados por **Cavalieri** (1598-1647), quien planteó la idea de utilizar los indivisibles (infinitesimales) en el cálculo de áreas de funciones tipo $f(x) = x^n$, donde n es entero; **Fermat** (1601-1665), también usó los infinitesimales para determinar áreas de funciones tipo $f(x) = x^n$, donde ahora n es fraccionario; y **Saint-Vincent** (1548-1667) quien resolvió el caso particular del área bajo $f(x) = x^n$, donde $n = -1$. Todo esto fue posible gracias al trabajo de **Descartes** (1596-1650), quien unificó Álgebra y Geometría, asociando así una curva a una función.

5.1.3. El Cálculo de Newton y Leibniz

Sin embargo, fueron **Newton** (1643-1727) y **Leibniz** (1646-1716), cada uno de manera independiente, quienes crearon el cálculo diferencial e integral basado en los trabajos anteriormente descritos y tomando como base sólida los infinitesimales. La diferencia entre los trabajos de **Newton** y **Leibniz** respecto a los de sus antecesores consistía en la manipulación de las funciones (en su forma analítica), y no en el tratamiento puramente geométrico, que aún se conservaba y, que se le había dado hasta entonces.

No obstante, el verdadero legado de **Newton**, fue la relación entre derivación e integración, tópicos que se estudiaban de manera independiente, y que luego de ésto se entendieron como operaciones inversas. Esta conexión se mostró evidente cuando se estableció el **Teorema Fundamental del Cálculo**. Tal teorema trajo consigo otros términos, como la primitiva de una función, que en los trabajos de **Bernoulli** (1667-1748) acerca de las ecuaciones diferenciales, permitía determinar funciones a partir de sus derivadas; aunque también trajo consigo un problema bastante crítico: para determinar una integral definida se necesita su primitiva, lo cual desde luego no siempre era posible encontrar.

5.1.4. La definición de Integral, según Riemann

En este sentido, la integración como concepto se relacionó más a su interpretación analítica que a su interpretación geométrica, principalmente porque **Cauchy** (1789-1857) adecuó el problema del cálculo de áreas de curvas descritas por funciones arbitrarias $f(x)$, unificando los trabajos de sus antecesores: el método exhaustivo de **Eudoxo de Cnido**, la geometría analítica de **Descartes** y el cálculo de **Newton** y **Leibniz**.

Sin embargo, la definición de integral presentada por **Cauchy**, descrita por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$

aunque no fallaba, tenía el defecto de considerar únicamente funciones de la época, es decir funciones continuas.

Puesto que el rigor matemático avanzaba a pasos agigantados, y surgían más preguntas que respuestas, se dieron algunas discusiones acerca de la validez de tal definición. Sin embargo, no fue sino hasta **Riemann** (1826-1866), que el problema mejoró pues para redefinir el concepto de integral, se auxilió en el trabajo de **Cauchy**, y afirmó que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

La pregunta que surge es ¿qué consideraciones hizo **Riemann** respecto a tal definición de integral propuesta por **Cauchy**, si ambas aparentan ser similares? La respuesta a ello radica en la elección del argumento de f al sustituirlo por $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$; luego está la consideración de la no-continuidad puesto que, por ejemplo, las funciones a trozos (con área bien definida) no podían ser integradas únicamente por la condición de continuidad tan requerida. Bajo esta observación **Riemann** considera la discontinuidad, al menos en un número finito de puntos con esta característica; obteniendo así una familia de funciones integrables más amplia. Estos detalles aparentemente verbales fueron desarrollados por **Riemann**, pues para redefinir (lo que **Cauchy** había establecido) recurrió no sólo a los elementos visualmente perceptibles de la integral como el intervalo $[a, b]$ o la función f, sino también a definiciones abstractas como partición de un intervalo y sumas integrales, las cuales justificaban los procedimientos que ocurrían durante la integración.

5.1.5. Una generalización más teórica

La importancia de la definición de integral de Riemann, aunque precisa y efectiva en las funciones que bajo tales condiciones podían llamarse integrables, luego de cierto tiempo empezó a ser cuestionada, no porque fuese incorrecta, sino porque era muy limitada respecto al tipo de funciones que ahora los matemáticos deseaban integrar. En esta búsqueda de una integral más general hubo dos corrientes, la primera con vínculos a la Estadística, mientras la segunda relacionada a las Matemáticas, representadas por la integral de **Stieltjes** (1856-1894) y la integral de **Lebesgue** (1875-1941), respectivamente. Aunque fue la generalización de **Lebesgue** de mayor atención para los matemáticos.

Si bien cada una de ellas se desarrolló dado determinado problema, cronológicamente fue primero la integral de Stieltjes, pues sus estudios acerca de las fracciones continuas en la obra **Recherches sur les fractions continues** dieron origen a una nueva formulación de la definición de integral, la cual se ajustó al problema de determinar los momentos de orden k de una distribución de masas.

Ésto, descrito de manera precisa en el capítulo *Remarques sur les fonctions croissantes et les intégrales définies* muestra todo el abordaje teórico, similar a la integral de Riemann, con el estudio de sumas integrales $S(P,f,\alpha)$ asociadas a una partición P, y las funciones f continua y α monótona sobre el intervalo $[a,b]$. Tales sumas fueron descritas por

$$S(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$

Finalmente, entre algunas notas importantes de **Stieltjes**, está la afirmación demostrable del caso particular $\alpha(x) = x$, quedando establecido que la Integral de Stieltjes, llamada también Integral de Riemann-Stieltjes es una generalización de la Integral de Riemann.

5.2. Preliminares sobre Integración

Las siguientes son algunas de las definiciones utilizadas en la construcción de la Integral o en la obtención de resultados de la misma; aunque tales definiciones son de carácter básico, se presentan con la formalidad matemática correspondiente para no recurrir a nociones imprecisas, o resultados intuitivos.

5.2.1. Intervalos y elementos notables

Los intervalos (abiertos, cerrados o semiabiertos) son uno de los objetos principales en la Integración; este interés muchas veces no es respecto al intervalo como tal, sino más bien respecto a ciertos puntos notables. En general, los intervalos son casos especiales de conjuntos numéricos arbitrarios para los cuales se tienen las siguientes definiciones.

Definición 5.2.1.1.
Sea $X \subset \mathbb{R}$. Si $\exists M \in \mathbb{R} : x \leq M$, $\forall x \in X$, entonces, X se llama **acotado superiormente**. Si $\exists m \in \mathbb{R} : m \leq x$, $\forall x \in X$, entonces, X se llama **acotado inferiormente**.

Puesto que X es un conjunto arbitrario, entonces, puede suceder que éste sea acotado inferiormente, como el intervalo semi-abierto $[a, \infty)$; o que sea acotado superiormente, como el intervalo semi-abierto $(-\infty, b]$; o que sea acotado inferiormente y superiormente como el intervalo cerrado $[a, b]$. Esto último sugiere lo siguiente.

Definición 5.2.1.2
Sea $X \subset \mathbb{R}$. Se dice que X es **acotado** si y sólo si X es acotado superiormente e inferiormente.

La existencia de los números m y M permite estudiar la acotación de X; sin embargo, existen *infinidad* de tales números verificando tal definición; de éstos se dice lo que sigue

Definición 5.2.1.3.
Sea $X \subset \mathbb{R}$. Se dice que un número $M \in \mathbb{R}$ es **cota superior** de X si $x \leq M$, $\forall x \in X$. Se dice que un número $m \in \mathbb{R}$ es **cota inferior** de X si $m \leq x$, $\forall x \in X$.

Es inmediato que si X es acotado existen las cotas superiores e inferiores verificando $m \leq x \leq M$, $\forall x \in X$; e igualmente de manera recíproca. Luego, considerando nuevamente que existen *infinidad* de cotas verificando la definición, es más apropiado examinar dos cotas sumamente relevantes.

Definición 5.2.1.4
La menor de todas las cotas superiores M, de $X \subset \mathbb{R}$ se llama **supremo** de X, y se denota por $\sup\{X\}$. La mayor de todas las cotas inferiores m, de $X \subset \mathbb{R}$ se llama **ínfimo** de X, y se denota por $\inf\{X\}$.

Utilizando estas definiciones sobre un conjunto arbitrario X, es inminente establecer la siguiente relación entre $\sup\{X\}$, $\text{ínf}\{X\}$ y cualquier $x \in X$, esto es

$$\text{ínf}\{X\} \leq x \leq \sup\{X\}. \tag{1}$$

Ahora, considerando como caso particular un intervalo cerrado (que son los de principal interés en la integración), resulta ser que estas definiciones de acotación, y por tanto de cotas, así como de ínfimos y supremos, se cumplen completamente. Aún más, este tipo de intervalos traen consigo a discusión nuevas definiciones.

Definición 5.2.1.5.
Sea $[a,b]$ un intervalo finito. Un conjunto de puntos $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ que satisfacen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ se llama **partición** de $[a,b]$. El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es el subintervalo i-ésimo de P. La colección de todas las particiones posibles de $[a,b]$ se designa por $\mathcal{P}[a,b]$.

Considérese ahora la diferencia $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, ésta mide la *longitud* del segmento $[x_{k-1}, x_k]$. Luego, esta diferencia puede tener (o no) la misma *longitud*, pues la elección de los puntos $x_k \in P$ es arbitraria. Esto, dependiendo de qué desee probarse, es utilizado en forma conveniente. Respecto al aspecto conjuntista de las particiones se espera todo un álgebra de operaciones. Ésto, aunque cierto, sólo merece especial atención en lo siguiente

Definición 5.2.1.6.
Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Se dice que P' es refinamiento de P si $P' \supset P$. Dadas $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ se dice que P' es su refinamiento común si $P' = P_1 \cup P_2$.

5.2.2. Funciones

Naturalmente, las funciones se definen a partir de conjuntos importantes, dominio X (en adelante se considera $X = [a,b]$), e imagen Y. Debido a esto, se extienden relativamente fácil los conceptos y definiciones estudiados en la sección anterior; aunque para ello, haciendo diversas consideraciones.

Definición 5.2.2.1.

Sea $f : X \to Y$. Se dice que f, definida sobre X, se llama **acotada superiormente** si $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M$, $\forall f(x) \in Y$. Se dice que f, definida sobre X, se llama **acotada inferiormente** si $\exists m \in \mathbb{R} : m \leq f(x)$, $\forall f(x) \in Y$.

Tal definición, surge de forma análoga que su semejante de la sección **Intervalos y elementos notables**; es más, es una extensión de tal noción. Asimismo, se tiene lo siguiente

Definición 5.2.2.2.

Sea $f : X \to Y$. Se dice que f, definida en X, se llama **acotada** si lo es tanto superiormente como inferiormente. Asimismo, es acotada si y sólo si $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in X$.

Si de acuerdo a esto, la acotación se extiende debido al aspecto conjuntista de las funciones, entonces, las demás definiciones también lo hacen. De acuerdo a esto, sería que cada m y M, verificando la **Definición 5.2.2.1.**, es una cota inferior y superior, respectivamente, de Y. Así, es inmediato hablar de supremos e ínfimos de funciones.

Definición 5.2.2.3.

Sea $f : X \to Y$. La menor de todas las cotas superiores M, de Y, se llama **supremo** de $f(x)$, y se denota por $\sup_X\{f\}$. La mayor de todas las cotas inferiores m, de Y, se llama **ínfimo** de $f(x)$, y se denota por $\inf_X\{f\}$.

Semejante a la expresión (1), está la relación válida $\forall f(x) \in Y$,

$$\inf_X\{f\} \leq f(x) \leq \sup_X\{f\} \tag{2}$$

tal desigualdad proporciona algunos resultados importantes, los cuales se obtienen debido a la estructura de la función f, o de los conjuntos $X' \subset X$ en cuestión de estudio.

Teorema 5.2.2.4.

Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Entonces, sobre X, $f + g$ es acotada, e

$$\inf_X\{f\} + \inf_X\{g\} \leq \inf_X\{f + g\} \tag{3}$$

$$\sup_X\{f + g\} \leq \sup_X\{f\} + \sup_X\{g\} \tag{4}$$

Usualmente las expresiones (3) y (4), se suponen bajo el signo de igualdad (al relacionarlo con su semejante en los conjuntos); sin embargo, la elección de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 1 - x$, sobre $X = [0,1]$ exponen el desacierto respecto a ésto, y reafirman la validez del teorema. Por otra parte, se tiene

Teorema 5.2.2.5.

Sean $f : X \to \mathbb{R}$ una función acotada, y $c \in \mathbb{R}$.

$$\inf_X\{cf\} = c\inf_X\{f\}, \qquad \sup_X\{cf\} = c\sup_X\{f\}, \qquad \text{si } c \geq 0 \tag{5}$$

$$\inf_X\{cf\} = c\sup_X\{f\}, \qquad \sup_X\{cf\} = c\inf_X\{f\}, \qquad \text{si } c < 0 \tag{6}$$

Los teoremas anteriores exponen resultados respecto a la estructura de la función $f(x)$. Por otra parte, al considerar conjuntos $X \subset X$, debe existir una relación entre ínfimos y supremos de X' respecto a los de X, esto se reafirma como sigue

Teorema 5.2.2.6.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función acotada y $X' \subset X$. Entonces, sobre X, es

$$\inf_X\{f\} \leq \inf_{X'}\{f\} \leq \sup_{X'}\{f\} \leq \sup_X\{f\}f \tag{7}$$

Hasta ahora, las definiciones y resultados corresponden a la acotación, una de las propiedades usuales de funciones elementales. Aunque tal propiedad es relevante, a continuación se estudian otras, como la **monotonía** y la **continuidad**, fundamentales para observaciones posteriores.

Definición 5.2.2.7.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$. Si $\forall x, y \in X : x < y$ cumple la desigualdad $f(x) \leq f(y)$, a f se le llama **creciente** sobre X. Si $\forall x, y \in X : x < y$ cumple la desigualdad $f(x) \geq f(y)$, a f se le llama **decreciente** sobre X.

Tal definición permite indicar una relación de orden para los valores $f(x)$. Luego, al estudiar las funciones, se observa que éstas no tienen un comportamiento solo creciente o decreciente, puesto que f puede crecer en ciertos $Z' \subset X$ y decrecer en otros $Z'' \subset X$. Así, en general solo se dice

Definición 5.2.2.8.
Sea $f : X \to \mathbb{R}$. Se dice que f es **monótona** en X, si f es creciente en X, o es decreciente en X.

Por otra parte, presentar una definición de continuidad merece especial atención, pues de ésta se tienen formulaciones equivalentes; sin embargo, entendiendo que este estudio es desde el punto de vista del Análisis, entonces, se expone de la siguiente manera

Definición 5.2.2.9.
Sean $f : X \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$. La función f se llama **continua** en x_0 si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall x \in X$ con $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Considere que la continuidad es una de las propiedades esenciales en el estudio de las funciones, pues intuitivamente supone que pequeñas variaciones en X *producen* pequeñas variaciones en Y. Debido a ésto es que muchos problemas, como el cálculo de áreas y el trazo de tangentes está basado en las aproximaciones que se pueden hacer gracias ello. Asimismo debe ser de gran interés la discontinuidad de una función f en una cantidad finita de puntos, pues esto trae consigo otros nuevos resultados.

5.3. Integral definida

En base a la descripción histórica realizada previamente, se establece que la integral definida es un valor numérico que en sus múltiples interpretaciones representa el área limitada por una región R sobre el plano. Respecto a esto, supóngase entonces, que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada y que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$; luego, el propósito de estas consideraciones es el de intentar aproximar el área de la región R, mostrada en la **Figura 1**, mediante rectángulos utilizando alguna especie de límite. Considere, entonces, lo siguiente.

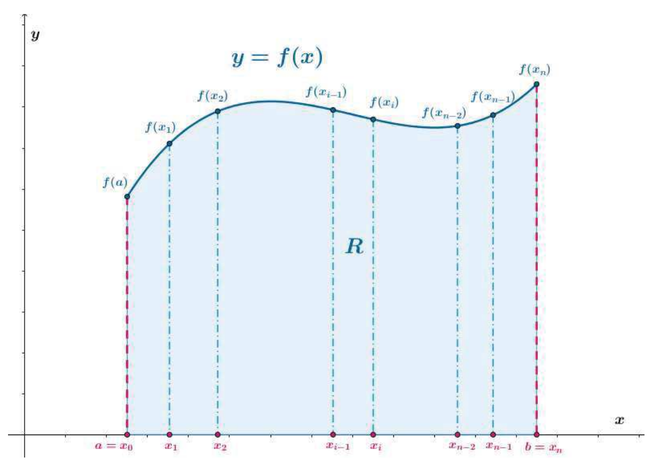

Figura 1: Área bajo $f(x)$

5.3.1. Procedimiento de Darboux

Por la **Definición 5.2.1.5.** una partición de $[a,b]$ permite construir rectángulos R_i de base $[x_{i-1},x_i]$ y altura arbitraria $f(t_i)$ donde $t_i \in [x_{i-1},x_i]$. Por lo cual el área de cada región R_i es $f(t_i)[x_i - x_{i-1}]$; así el área de R es $A(R) = \sum f(t_i)[x_i - x_{i-1}]$, puesto que los rectángulos no se solapan dos a dos. Luego, la elección $f(t_i) = \sup\{f(x)\}$ supone la máxima de las alturas para el rectángulo R_i, y por tanto $f(t_i)[x_i - x_{i-1}]$ es una estimación por exceso de $A(R_i)$; igualmente, la elección $f(t_i) = \text{ínf}\{f(x)\}$ supone la mínima de las alturas para el rectángulo R_i, y por tanto, $f(t_i)[x_i - x_{i-1}]$ es una estimación por defecto de $A(R_i)$. Ante esto

Definición 5.3.1.1. Sumas integrales superior e inferior

Se denominan **Suma integral superior** y **Suma integral inferior**, correspondientes a la partición P, a los números

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \qquad\qquad L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

donde $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$, $m_i = \text{ínf}_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$ y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Intuitivamente, debe ser que la introducción de más puntos en P, provoquen el decrecimiento y crecimiento de las sumas superior e inferior, respectivamente, hasta converger hacia el área buscada. Ya que distintas particiones P determinan diferentes $U(P,f)$ y $L(P,f)$ entonces, debe ser que éstas tengan límites respectivos. Así

Definición 5.3.1.2. Integral superior e inferior

Los números

$$\overline{\int} f\,dx = \text{ínf}\{U(P,f) | P \in \mathcal{P}[a,b]\} \qquad \underline{\int} f\,dx = \sup\{L(P,f,)| P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

donde el ínfimo y supremo se toman respecto a todas las particiones posibles del segmento $[a,b]$, se denominan, respectivamente, integrales de Riemann superior e inferior de la función f en el segmento $[a,b]$.

De acuerdo a ésto, $\overline{\int} f\,dx$ es el área mínima determinada por las alturas máximas M_i, mientras que $\underline{\int} f\,dx$ es el área máxima determinada por las alturas mínimas m_i; por lo cual, con la motivación inicialmente dada, debe ser $\overline{\int} f\,dx = \underline{\int} f\,dx$ para señalar que el área de la región R ha sido determinada. Esto conlleva a la definición de integrabilidad

Definición 5.3.1.3. Integrabilidad según Riemann. Integral de Riemann
Una función f se llama integrable según Riemann en un segmento $[a,b]$, si $\overline{\int} f\,dx = \underline{\int} f\,dx$; dicho valor común de las integrales superior e inferior se denomina Integral de Riemann de la función f en dicho segmento y se designa mediante el símbolo $\int_a^b f(x)dx$.

Dado que el estudio de las funciones es muy basto, y la construcción de las integrales superior e inferior parece muy extenso, entonces, es necesario algún criterio que permita determinar la integrabilidad de alguna f particular sobre cierto $[a,b]$. Por esto,

Teorema 5.3.1.4. Criterio de Integrabilidad
Para que una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sea integrable en el segmento $[a,b]$, es condición necesaria y suficiente que $\forall \epsilon > 0$ exista una partición P de este segmento tal que $0 \leq U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$.

Criterio de Integrabilidad

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists P : 0 \leq U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

La interpretación gráfica de este resultado se encuentra en la **Figura 2**, de la que se deduce, que si la función es integrable, entonces, las áreas $[M_i - m_i]\Delta\alpha_i \to 0$.

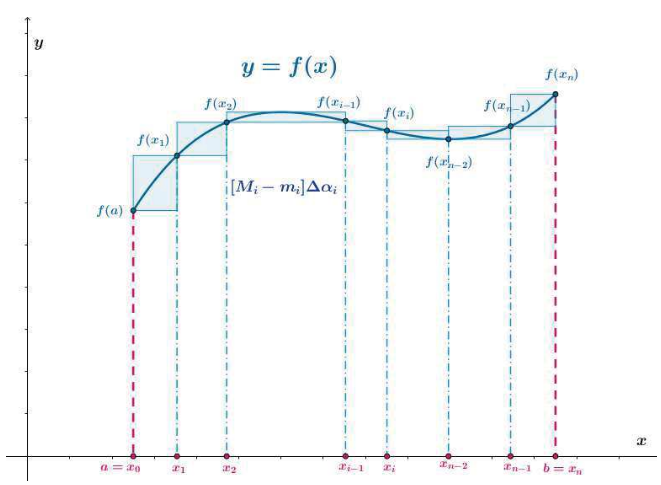

Figura 2: Interpretación de $U(P,f) - L(P,f)$

5.3.2. Límite de sumas integrales

El criterio de integrabilidad resulta poderoso, porque no se deben determinar los valores correspondientes a las integrales superior e inferior. Luego, como se ha presentado ya una definición de integral (formal) parace natural cuestionar una forma de desarrollar tales cálculos de integrales para determinadas funciones f. Así, otra forma de entender la integral es:

Definición 5.3.2.1. Integral de Riemann
Sea P una partición arbitraria del segmento $[a,b]$ y $d(P) = \text{máx}\{\Delta x_i, i = 1,\ldots,n\}$. En cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ elíjase un punto arbitrario t_i y considérese la suma integral

$$S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

Se dice, $\text{lím}_{d(P)\to 0} S(P,f) = I$ si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall P \wedge d(P) < \delta \Rightarrow |S(P,f) - I| < \epsilon$.

Es inmediato cuestionar la equivalencia entre la **Definición 5.3.1.3.** y la **Definición 5.3.2.1.**, puesto que debe asegurarse que las funciones f sean integrables en ambos sentidos, y por tanto no existan contradicciones posteriores en resultados. Por tanto

Teorema 5.3.2.2. Equivalencia entre las definiciones de integral
Si $d(P) \to 0$, $\exists\, \text{lím}\, S(P,f) = I$, entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx = I$. Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$, entonces $\exists\, \text{lím}\, S(P,f) = \int_a^b f(x)dx$.

Ahora que se ha definido formalmente la integral, así como sus interpretaciones geométricas correspondientes, parece que la obtención de resultados y conclusiones depende en gran medida de las propiedades que f posea, y esto es cierto, porque basta con exponer los siguientes teoremas para verificar tal observación

CLASES DE FUNCIONES INTEGRABLES

Teorema 5.3.2.3. Integrabilidad de las funciones continuas
Si $f \in C[a,b]$, entonces, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Teorema 5.3.2.4. Integrabilidad de las funciones monótonas
Si f es monótona en el segmento $[a,b]$, entonces, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

5.3.3. Propiedades de la integral expresadas mediante igualdades

Adicionalmente, desde un punto de vista operacional, la integral debe poseer algunas propiedades heredables de la sumatoria, porque ya se ha notado la interrelación entre ambos objetos, así pues se espera una propiedad de linealidad. En este sentido, las propiedades fácilmente pueden demostrarse a partir de la definición de integral, para la cual se verifica todo lo siguiente

Teorema 5.3.3.1.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$, entonces, $cf \in \mathcal{R}[a,b]$, para $c \in \mathbb{R}$, y se verifica, además,

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Teorema 5.3.3.2.
Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, también, $f \pm g \in \mathcal{R}[a,b]$ y, además,

$$\int_a^b (f \pm g)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Por todo lo propuesto anterioremente, la integral depende claramente de la función f como del intervalo $[a,b]$, es por ello que las propiedades de dicho objeto comprenden se relacionan a ambos elementos. Ante esto, los teoremas anteriores se centran sobre el integrando; luego, los que siguen, lo hacen sobre el intervalo.

Teorema 5.3.3.3.
Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $c \in (a,b)$, entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Teorema 5.3.3.4.
Si las restricciones de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a los segmentos $[a,c]$ y $[c,b]$ son integrables, resulta que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y en este caso se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5.3.4. Fórmulas integrales

Una vez se han considerado las definiciones respectivas así como también se han presentado algunas clases de funciones integrables, y se han expuesto las propiedades de la integral, parece inminente considerar el cálculo de integrales. De los cursos de Cálculo se conocen diversas técnicas que determinan la integral. Ahora, las únicas fórmulas que merecen atención son: *cambio de variable* e *integración por partes*.

Teorema 5.3.4.1. Cambio de variable

Supóngase que se cumplen las condiciones siguientes: $f \in C[a,b]$, el segmento $[a,b]$ es el conjunto de los valores de cierta función $x : t \to g(t), c \leq t \leq d$, derivable con continuidad en (c,d), $g(c) = a$, $g(d) = b$. Entonces se verifica la fórmula del cambio de variable

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)dt$$

Teorema 5.3.4.2. Integración por partes

Si $u, v \in C^1[a,b]$, se tiene

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Todos estos son los conceptos y nociones básicos que rigen la integral definida, conocida también como integral de Riemann. Una comprensión y entendimiento de este objeto resulta básico para integrales más generales, puesto que como se espera, algunas de estas propiedades y resultados deben seguir verificándose, aunque también se esperan nuevas concluciones que permitan destacar la importancia de una generalización de integral.

5.4. Variación Acotada

Según lo anterior, se utiliza la notación dx para referirse a la longitud del i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$; ahora se incorpora la notación $d\alpha(x)$ para referirse al integrador una función α, por el momento arbitraria. Entonces, por lo mencionado anteriormente, ha de esperarse descubrir algunas características de este integrador, para luego, descubrir qué impacto tiene sobre una nueva integral. Desde luego, esto no quedará constatado hasta que ambas partes: variación acotada e integral de Stieltjes se unifiquen, por esto, a continuación se expone todo lo concerniente a la variación acotada.

5.4.1. Variación de α sobre P

Considérese $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función arbitraria, entonces, para ésta se tienen las siguientes definiciones y resultados.

Proposición 5.4.1.1.
Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$, correspondiente a cada partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se define la diferencia $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$.

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Como se ha definido previamente, en el i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se tiene la diferencia $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$. Entonces, si α es una función arbitraria (en el sentido que no es monótona en $[a,b]$), entonces, puede ser $\Delta\alpha_i \leq 0$ o $\Delta\alpha_i \geq 0$. Luego,

Proposición 5.4.1.2. Variación de α sobre P
Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Se denomina **Variación de α sobre P** a la magnitud

$$V(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta\alpha_i|$$

Esta magnitud, depende de las particiones P, por lo cual la introducción de nuevas particiones o refinamientos, determinan otros valores para la variación de α. Así, a cada P le corresponde determinado $V(\alpha, P)$, y es siempre $V(\alpha, P) \geq 0$.

5.4.2. Variación acotada

La magnitud $V(\alpha, P)$ al estar definida por una sumatoria, puede converger o no, ésto usulamente se puede asociar a la elección de P; aunque en realidad ello depende la estructura de la función α, pues ésta es la que define la expresión $\Delta\alpha_i$. Así, en general, se desean estudiar aquellas funciones para las que cualquier P, es $V(\alpha, P)$ siempre una cantidad finita. De ésto trata el concepto de variación acotada.

Definición 5.4.2.1. Función de variación acotada
Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si existe un número positivo M tal que $V(\alpha, P) \leq M$ para todas las particiones $P \in \mathcal{P}[a,b]$, se dice que α es una **Función de variación acotada** en $[a,b]$.

La introducción de esta definición permite conocer qué tipo de funciones α permiten la construcción de la expresión $V(\alpha, P)$ aún cuando se utilizan cualquier tipo de partición P. Ya que, una función puede ser o no de variación acotada, parece complicado determinar inmediatamente una cota M que satisfaga la **Definición 5.4.2.1.**, por lo que es más apropiado obtener resultados que permitan concluir si una función cumple la **Definición 5.4.2.1.** empleando para ello únicamente las propiedades de α. Debido a ésto a continuación se exponen tales resultados.

CLASES DE FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA

Teorema 5.4.2.2.
Si α es monótona en $[a,b]$, se dice que α es de variación acotada en $[a,b]$.

Teorema 5.4.2.3.
Si α es continua en $[a,b]$, y existe α' y es ésta acotada en el interior, $|\alpha'(x)| \leq A$ para todo $x \in (a,b)$, entonces, α es de variación acotada en $[a,b]$.

Teorema 5.4.2.4.
Si α es de variación acotada en $[a,b]$, es decir $V(\alpha, P) \leq M$ para todas las $P \in \mathcal{P}[a,b]$, entonces, α es acotada en $[a,b]$. En realidad, $|\alpha(x)| \leq |\alpha(a)| + M$ si $x \in [a,b]$.

Ahora, como se ha expuesto, uno de los principales problemas de introducir una sumatoria en el cálculo de magnitudes, es el de detemrinar hacia qué valor converge tal suma. En estos casos, el concepto de variación acotada resuelve en gran parte la situación anterior, pues con deducir que α cumple (o no) tal característica, se procede a realizar el cálculo de tal suma.

5.4.3. Variación total

Para un α fija, es cierto que $V(\alpha, P)$ depende de P, por lo que para diversas $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se obtienen diversas $V(\alpha, P)$; así, la mejor estrategia para definir a hacia qué valor convergen todas las $V(\alpha, P)$ es mediante la siguiente definición. Entonces,

Definición 5.4.3.1. Variación total

Sea α de variación acotada en $[a,b]$, y $V(\alpha, P)$ la variación de α sobre P. El número

$$V_\alpha(a,b) = \sup\{V(\alpha, P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$$

se llama la **Variación total** de α en $[a,b]$.

Esta definición es inmediata, porque si se ha establecido que α es de variación acotada, entonces, existe una cota M para cada $V(\alpha, P)$, lo cual garantizaría $0 \leq V_\alpha(a,b) \leq M$. Además, por la inclusión de más puntos en P, se *afecta el creciemiento* de $V(\alpha, P)$, por lo que los refinamientos generan mejores aproximaciones al valor límite, por lo cual de ahí el uso de sup. Por último, una de las propiedades de la variación total de una función es que siempre es $V_{\alpha,}(a,b) \geq 0$, pues cada $V(\alpha, P) \geq 0$.

Como en el caso de las funciones de variación acotada, una de las mejores estrategias para evitar el desarrollo de cálculos es el de determinar resultados a partir de funciones que se conocen son de variación total. Debido a esto se exponen lo siguientes resultados.

Teorema 5.4.3.2.

Supóngase que α y β son dos funciones de variación acotada en $[a,b]$. Entonces, también lo son su suma, diferencia y producto. Asimismo se tiene $V_{\alpha+\beta}(a,b) \leq V_\alpha(a,b) + V_\beta(a,b)$ y $V_{\alpha\beta}(a,b) \leq AV_\alpha(a,b) + BV_\beta(a,b)$ donde $A = \sup\{|\beta(x)| : x \in [a,b]\}$ y $B = \sup\{|\alpha(x)| : x \in [a,b]\}$.

Teorema 5.4.3.3.

Sea α una función de variación acotada en $[a,b]$ y supóngase que está acotada inferiormente por un número positivo, es decir, supóngase que existe un número m tal que $0 < m \leq |\alpha(x)|$ para todo x en $[a,b]$. En tal caso, $\psi = 1/\alpha$ es también de variación acotada en $[a,b]$, y $V_\psi(a,b) \leq V_\alpha(a,b)/m^2$.

Los dos anteriores resultados claramente dependen de la estructura de las funciones α y β en consideración; sin embargo, los intervalos determinan también el comportamiento de la magnitud $V_\psi(a,b)$. Así pues, debe tenerse presente los intervalos, y sobre todo tratar de mostrar como la variación de una función α sobre $[a,b]$ implica también el cumplimiento de esta propiedad para algún $[a,c] \subset [a,b]$.

Teorema 5.4.3.4.
Sea α una función de variación acotada en $[a,b]$, y supóngase que $c \in (a,b)$. Entonces, α es de variación acotada en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y se tiene

$$V_\alpha(a,b) = V_\alpha(a,c) + V_\alpha(c,b)$$

Hasta el momento se han expuesto las propiedades de la funciones de variación acotada, lo cual ha permitido introducir la variación total. Respecto a esta última, se ha visto como esta magnitud, depende de un determinado intervalo; luego esta magnitud es variable si se introduce un parámetro x tal que $a < x \leq b$. Por ello se muestran lo siguiente

Teorema 5.4.3.5.
Sea α de variación acotada en $[a,b]$. Sea V la función definida en $[a,b]$ así: $V(x) = V_\alpha(a,x)$ si $a < x \leq b$, $V(a) = 0$. Entonces, α es de variación acotada en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y se tiene que V y $V - \alpha$ son funciones crecientes en $[a,b]$.

Teorema 5.4.3.6.
Sea α una función definida en $[a,b]$. La condición necesaria y suficiente para que α sea de variación acotada es que α pueda expresarse como la diferencia de dos funciones crecientes.

Con estos teoremas, ahora, es posible examinar algunas funciones α que sean de variación acotada, simplemente con realizar una inspección rápida de las características que posee, asimismo se expone el cálculo de la variación total, y de la función $V(x)$ definida previamente.

Ejemplo 5.4.3.7.
Considere la función $\alpha(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$ para $0 \leq x \leq 3$. ¿Es α una función de varación acotada? Si lo es, calcular $V_\alpha(a,b)$.

SOLUCIÓN

Considere que se cumplen las condiciones del **Teorema 5.4.2.3.** puesto que α es continua en $[a,b]$, y su derivada $\alpha'(x) = 6x^2 - 18x + 12$ es acotada en el interior, pues $|\alpha'(x)| \leq 2$ para todo $x \in (0,3)$, por lo cual α es de variación acotada en $[0,3]$. Respecto a $V_\alpha(0,3)$ considere que ésta se descompone como

$$V_\alpha(0,3) = V_\alpha(0,1) + V_\alpha(1,2) + V_\alpha(2,3) = |\alpha(1) - \alpha(0)| + |\alpha(2) - \alpha(1)| + |\alpha(3) - \alpha(2)| = 11$$

tal descomposición se debe primeramente al **Teorema 5.4.3.4.**, mientras que el cálculo de cada término al **Teorema 5.4.2.2.**

Coloquialmente puede decirse que cada término $|\Delta\alpha_i|$ mide la diferencia entre las alturas ($f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$) de los puntos x_{i-1} y x_1; por lo que, naturalmente, no todas las funciones son de variación acotada, y ésto se debe al comportamiento de α.

Ejemplo 5.4.3.8.

Probar que $\alpha(x)$ no es de variación acotada en $[0,1]$, sabiendo que

$$\alpha(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left[\frac{\pi}{x^2}\right] & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Considérese, primeramente, que para $\alpha(x)$ sucede lo siguiente: $\cos(\pi/x^2) = 1$ si y sólo si $x = 1/\sqrt{2n}$, mientras que $\cos(\pi/x^2) = 0$ si y sólo si $x = 1/\sqrt{2n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$; por lo que, ahora, definiendo $P \in \mathcal{P}[0,1]$ tal que

$$P = \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{1}{\sqrt{2n-1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right\}$$

así, se tiene lo siguiente $\alpha(1/\sqrt{2n}) = 1/2n$, mientras que $\alpha(1/\sqrt{2n-1}) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$; con ello, entonces,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} \leq V(\alpha, P) = |\alpha(x_1) - \alpha(x_0)| + \sum_{i=2}^{n}|\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}$$

pero, si $n \to \infty$, entonces, $\sum 1/i \to \infty$, y por tanto, $V(\alpha, P) \to \infty$, y ello implica que α no es de variación acotada en $[0,1]$.

Ahora que se ha mostrado cómo determinar la variación total de una función α en un intervalo dado, también puede determinarse la función $V(x)$; tal cálculo se presenta a continuación con el siguient ejemplo.

Ejemplo 5.4.3.9.

Determinar la función $V_\alpha(x)$ de cada una de las siguientes funciones:

(A) $\alpha(x) = x^3 - |x|$, para $x \in [-1, 1]$.

(B) $\alpha(x) = \cos x$, para $x \in [0, 2\pi]$

SOLUCIÓN

(A) Considérese lo que sigue

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-1,0) \\ x & \text{si } x \in [0,1] \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(x) = \begin{cases} x^3 + x & \text{si } x \in [-1,0) \\ x^3 - x & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

reexpresando α en esta forma, ahora, se tiene

- α es creciente en $[-1, 0]$, y por tanto $V_\alpha(-1, 0) = 2$,
- α es decreciente en $[0, \sqrt{3}/3]$, y por tanto $V_\alpha(0, \sqrt{3}/3) = 2\sqrt{3}/9$,
- α es creciente en $[\sqrt{3}/3, 1]$, y por tanto $V_\alpha(\sqrt{3}/3, 1) = 2\sqrt{3}/9$,

considerando la variación en cada uno de los subintervalos indicados, entonces, es inmediato definir lo siguiente:

- si $x \in [-1, 0]$, entonces, $V_\alpha(x) = x^3 + x + 2$,
- si $x \in [0, \sqrt{3}/3]$, entonces, $V_\alpha(x) = 2 - x^3 + x$,
- si $x \in [\sqrt{3}/3, 1]$, entonces, $V_\alpha(x) = 2 + 4\sqrt{3}/3 + x^3 - x$.

Por lo tanto, se concluye que

$$V_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) + 2 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 2 - f(x) & \text{si } x \in [0, \sqrt{3}/3] \\ f(x) + 2 + 4\sqrt{3}/9 & \text{si } x \in [\sqrt{3}/3, 1] \end{cases}$$

(B) Considérese lo que sigue

- α es decreciente en $[0, \pi]$, y por tanto $V_\alpha(0, \pi) = 2$,
- α es creciente en $[\pi, 2\pi]$, y por tanto $V_\alpha(\pi, 2\pi) = 2$,

considerando la variación en cada uno de los subintervalos indicados, entonces, es inmediato definir lo siguiente:

• si $x \in [0, \pi]$, entonces, $V_\alpha(x) = 1 - \cos x$,

• si $x \in [\pi, 2\pi]$, entonces, $V_\alpha(x) = 3 + \cos x$.

Por lo tanto, se concluye que

$$V_\alpha(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 3 + \cos x & \text{si } x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

VI. DISEÑO METODOLÓGICO

6.1. Tipo de Estudio

La naturaleza de la investigación es de carácter descriptivo puesto que identifica los elementos que definen la Integral de Riemann-Stieltjes, así como también las características que lo diferencian de otros tópicos a los que está vinculado. Para unificar ambos aspectos, elementos y características, se introducen conocimientos básicos, con los cuales posteriormente se realiza una construcción teórica basada en la generalización de definiciones estudiadas, planteamiento de problemas y condiciones especiales.

6.2. Recolección de la Información

La información fue recolectada en el año 2016. La información se recolectó siguiendo el procedimiento que se describe a continuación:

• se investigaron en fuentes bibliográficas, con ayuda del tutor y asesor metodológico, la profundidad respecto a este tópico,

• se inspeccionaron en las fuentes institucionales y regionales, el abordaje de tal teoría en otras carreras universitarias,

• se exploraron en páginas web y foros, documentos (monografías y artículos), especializados respecto al tema: la integral de Riemann-Stieltjes.

De la información obtenida en libros cabe destacar, que ésta se organiza en dos secciones: la que comprende únicamente el bagaje matemático, y que abarca el área de Análisis, y la que se relaciona a la aplicación de la integral, dirigida sobre el área de Estadística.

6.3. Análisis de la Información

De acuerdo a la información revisada, descrita en secciona anteriores, se procedió a organizar ésta de forma axiomática, es decir, siguiendo una serie de definiciones de las cuales se obtienen los resultados correspondientes. La razón de ello, es la obtención de un orden lógico y demostrativo de las propiedades de la Integral de Riemann-Stieltjes.

Por último considérese que, aunque los textos presentan una organización análoga a este tópico, como se hace en este trabajo investigativo, la diferencia del actual documento radica en una adecuada ubicación de los resultados obtenidos, pues mediante la explicaciones correspondientes o las suposiciones adecuadas se relacionan entre sí las diferentes definiciones, teoremas, colorarios y otras conclusiones.

VII. INTEGRAL DE STIELTJES

La integración tiene *fuertes* vínculos con los procesos de sumatoria, tal como sucede con la definición de integral usualmente conocida. La elección de una definición en términos de sumas numerables, obedece a la naturaleza de los problemas que deseen resolverse, como el ya mencionado sobre el cálculo del área de la región limitada por la función $f(x)$ y el eje X, en el intervalo $[a,b]$, o el cálculo de la longitud de arco de una función $f(x)$ sobre el intervalo $[a,b]$.

Estos problemas, que implican integrales, están basadas en el uso de sumas que se rigen por principios de aproximación numérica. Es decir, se debe dar por establecido, que para estudiar las integrales, como objetos matemáticos, se deben de analizar sumas numerables y cómo el comportamiento de éstas, a partir de las propiedades que tiene f resultan determinantes en la convergencia.

Este breve análisis anterior es muy importante, puesto que para considerar una generalización de integral, primeramente se deben perder todas esas intuiciones geométricas, para luego introducir una definición de integral que se base únicamente en lo descrito: sumas integrales. Ésto debe ser inmediatamente punto de origen en la búsqueda de una integral más general, pues el motivo de la teoría de integración no es *crear* fórmulas o métodos en el cálculo de integrales, pues aunque son relevantes, debe de establecerse como fundamento qué es una integral (al menos en un sentido más general), qué propiedades se obtienen de tal definición y qué resultados son inmediatos. Sólo respondiendo a ésto, tiene sentido hablar de funciones integrables, entre otras cosas.

Puesto que la noción de integral, que se busca ahora, es una generalización de la Integral de Riemann, ha de esperarse que diversas definiciones y resultados sean análogos. Por lo cual, parece inminente considerar que además de una función f y un intervalo $[a,b]$, se deben tener presentes otros elementos como las particiones $P \in \mathcal{P}[a,b]$, así como también las propiedades que poseen los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

La introducción de tales elementos parece cuestionar qué objeto hace de la Integral de Stieltjes una generalización; considérese, entonces, que ni función ni intervalo de integración son los objetos a alterar, pues éstos son los entes principales bajo los cuales sucede la integración. Luego al modificar el integrador dx, por una expresión del tipo $d\alpha(x)$, se tiene que este sutil cambio permite introducir funciones diferentes a las generalmente conocidas, y obtener así, resultados de gran importancia.

Todo esto vuelve a reforzar lo discutido inicialmente: se rompen los esquemas de las nociones geométricas hasta ahora asociadas a las integrales (cálculo de áreas, volúmenes o longitudes de arco, entre otras).

7.1. Definición de Integral

Según lo mencionado anteriormente, para hablar de cálculo de integrales, es necesario primero definir qué es una integral; debido a ésto, en lo siguiente se exponen las definiciones correspondientes a la Integral de Stieltjes. Cabe destacar que la presentación de éstas pretenden aclarar cuál es la definición más completa para esta Integral, pues no tiene sentido hablar únicamente de este objeto bajo condiciones particulares; además, así se permite tener una mejor comprensión de la relación entre tales definiciones, pues al final de cada una de éstas se exponen observaciones puntuales.

7.1.1. Definición por Sumas Integrales

Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y una partición $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}\in\mathcal{P}[a,b]$. Los puntos $x_i\in P$ definen n subintervalos con estructura $[x_{i-1},x_i]\subset[a,b]$. Ahora,

Definición 7.1.1.1. Suma integral

Sea $P\in\mathcal{P}[a,b]$ y $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ un punto arbitrario. Una suma de la forma

$$S(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i$$

se denomina **Suma integral** de f con respecto a α.

Puesto que $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ es arbitrario, entonces, es inmediata la construcción de diversas sumas integrales $S(P, f, \alpha)$; éstas varían mediante la introducción de nuevas particiones Q o los refinamientos respectivos de P; así, las sumas integrales dependen del punto t_i y de la partición P escogida. Tales consideraciones señalan lo siguiente:

Definición 7.1.1.2. Integrabilidad. Integral de Stieltjes
Se dice que f es **integrable-Riemann con respecto a α en** $[a,b]$, y se denota por $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, si existe un número A que goza de la propiedad siguiente: para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P_ϵ de $[a,b]$ tal que para toda partición P más fina que P_ϵ y para todo $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, se tiene $|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$.

El número A es la Integral de Stieltjes de f respecto a α en $[a,b]$. Esta definición anterior supone que mediante la inserción de diferentes particiones, la diferencia entre una suma integral $S(P, f, \alpha)$ y el valor A, se reduce notablemente; de tal manera que, cuando la aproximación es sumamente *buena*, se pueden considerar como una misma cantidad. Por último, la clase que denota todas las funciones integrables en el sentido anterior es $\mathcal{R}(\alpha)$, por lo cual, simbólicamente se escribe la integrabilidad como

Integrabilidad mediantes Sumas integrables

$$f \in \mathcal{R}(\alpha) \text{ si } \exists A \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon \in \mathcal{P}[a,b] : \forall P \supset P_\epsilon \wedge \forall t_i \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow |S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$$

Hasta el momento se ha supuesto que todas estas sumas integrales son finitas, aun cuando se introducen más y más puntos a través de nuevas particiones o refinamientos respectivos. Una prueba de la acotación de cualquier suma $S(P, f, \alpha)$ respecto a cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ viene dada por el uso de ínfimo y supremo de funciones. Considere, entonces, que por la **Definición 5.2.2.3.** se tiene que $\forall t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset [a,b]$ es

$$\inf_{x \in [a,b]} \{f(x)\} \leq f(t_i) \leq \sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$$

así, al introducir el diferencial $\Delta\alpha_i$ y luego el signo de sumatoria (con índice en i), es

$$\inf_{x \in [a,b]} \{f(x)\}[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i \leq \sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\}[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Observación Final 7.1.1.3.

La **Definición 7.1.1.2.** expone únicamente la condición que deben cumplir las sumas integrales $S(P,f,\alpha)$ respecto al valor A, aunque no sugiere cómo escogerlo o determinarlo a partir de éstas. De esta manera, *parece* complicado efectuar cálculos de integrales mediante tal definición.

7.1.2. Definición por Sumas de Darboux

La siguiente construcción de la Integral de Stieltjes está basada en el procedimiento de Darboux, esto nace (en cierta forma) de la acotación anteriormente expuesta de las sumas integrales $S(P,f,\alpha)$, además sugiere una forma más simple de definir la integral, sin considerar tantas de esas sumas, y utilizando únicamente sumas particulares, aunque ahora se introduce la restricción que la función integradora α sea creciente en $[a,b]$. Entonces, sabiendo que f es acotada, por la **Definición 5.2.2.3.** es

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\} \leq f(t_i) \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$$

así, al introducir el diferencial $\Delta\alpha_i$, y luego el signo de sumatorio con índice en i, es

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}\right]\Delta\alpha_i \leq S(P,f,\alpha) \leq \sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}\right]\Delta\alpha_i \tag{8}$$

es decir, estas sumas particulares también acotan cualquier suma integral $S(P,f,\alpha)$, respecto a una partición P cualquiera. Formalmente se tiene

Definición 7.1.2.1. Suma inferior y superior de f respecto a α

Sean $m_i = \text{ínf}\{f(x)\}$ y $M_i = \sup\{f(x)\}$ en $[x_{i-1},x_i]$. Las sumas de la forma

$$L(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\alpha_i \qquad \text{y} \qquad U(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i$$

se denominan respectivamente **Suma inferior** de f con respecto a α, y **Suma superior** de f con respecto a α, en $[a,b]$.

Aunque α sea monótona, se dice que estas sumas son casos particulares de sumas $S(P,f,\alpha)$, porque en cada una se define respectivamente que $f(t_i) = \text{ínf}\{f(x)\}$ para las

$L(P,f,\alpha)$, mientras que $f(t_i) = \sup\{f(x)\}$ para las $U(P,f,\alpha)$. De esta manera, estudiar las sumas superiores e inferiores reduce considerablemente la cantidad de sumas integrales a construir respecto a una sola partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Desde luego, se espera que $L(P,f,\alpha)$ y $U(P,f,\alpha)$, al ser casos particulares, deban cumplir la misma *propiedad de aproximación* al valor integral, mediante la introducción de los refinamientos. Por ello

Teorema 7.1.2.2.

Sea $P' \supset P$, entonces, $L(P,f,\alpha) \leq L(P',f,\alpha)$ y $U(P',f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha)$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ definida por $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$; luego sea $P' \supset P$, entonces existe una colección de puntos $X = \{x'_0, \ldots, x'_n\} \subset P'$ verificando

$$x_0 < x'_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x'_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x'_{n-1} < x_n$$

definiendo subintervalos $[x_{i-1}, x'_{i-1}]$ y $[x'_{i-1}, x_i]$ con respectivos diferenciales $\Delta\alpha'_i = \alpha(x'_{i-1}) - \alpha(x_{i-1})$ y $\Delta\alpha''_i = \alpha(x_i) - \alpha(x'_{i-1})$. Luego, por el **Teorema 5.2.2.6.**

$$m_i \Delta\alpha'_i \leq m'_i \Delta\alpha'_i \qquad\qquad m_i \Delta\alpha''_i \leq m''_i \Delta\alpha''_i$$
$$M'_i \Delta\alpha'_i \leq M_i \Delta\alpha'_i \qquad\qquad M''_i \Delta\alpha''_i \leq M_i \Delta\alpha''_i$$

donde m'_i y M'_i son el ínfimo y supremo de f en $[x_{i-1}, x'_{i-1}]$; mientras que m''_i y M''_i son el ínfimo y supremo de f en $[x'_{i-1}, x_i]$. De tales desigualdades es

$$m_i \Delta\alpha_i \leq m'_i \Delta\alpha'_i + m''_i \Delta\alpha''_i \qquad M'_i \Delta\alpha'_i + M''_i \Delta\alpha''_i \leq M_i \Delta\alpha_i$$

seguidamente, al introducir el signo de sumatorio es

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} \left[m'_i \Delta\alpha'_i + m''_i \Delta\alpha''_i \right] \qquad \sum_{i=1}^{n} \left[M'_i \Delta\alpha'_i + M''_i \Delta\alpha''_i \right] \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i$$

pero ésto supone que $L(P,f,\alpha) \leq L(P',f,\alpha)$ y $U(P',f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha)$, y el teorema queda demostrado.

Ésto muestra que mediante el uso de refinamientos las sumas superiores de P' *mejoran* respecto a las de P, y por tanto, tienen un comportamiento de convergencia al valor A. Sin embargo, cabe destacar que, aunque el principio de las sumas $U(P,f,\alpha)$ y $L(P,f,\alpha)$ es acotar sumas integrales y aproximar el valor integral, no es suficiente razón para afirmar que este principio se cumple para todas las funciones. El siguiente contraejemplo reafirma esta posición.

Contraejemplo 7.1.2.3.

Determinar las sumas inferior y superior de f respecto a una partición $P \in \mathcal{P}[0,1]$ arbitraria, sabiendo que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ se define como $f(x) = 1$ si $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$; y $\alpha(x) = x$.

SOLUCIÓN

Sea $P \in \mathcal{P}[0,1]$ arbitraria, entonces, por la densidad de $\mathbb{R}$ se tiene que en todo $[x_{i-1}, x_i] \subset [0,1]$, $\exists x_i' \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ y $\exists x_i'' \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, así $m_i = 0$ y $M_i = 1$, luego, para las suma superiores e inferiores es $L(P,f,\alpha) = 0$ y $U(P,f,\alpha) = 1$.

Este contraejemplo muestra que siempre pueden construirse las inetegrales superior e inferior, aunque éstas no coincidan. Esto vendría a exigir, que una función integrable cumpla que sus sumas $L(P,f,\alpha)$ y $U(P,f,\alpha)$ tengan un límite en común, pues de lo contrario, se rompería con una de las características de la integral: la unicidad. Entonces, bajo todas estas consideraciones se induce la siguiente definición

Definición 7.1.2.4. Integral superior e inferior

Sean $\mathcal{U} = \{U(P,f,\alpha) | P \in \mathcal{P}[a,b]\}$ y $\mathcal{L} = \{L(P,f,\alpha) | P \in \mathcal{P}[a,b]\}$ se definen

$$\overline{I}(f,\alpha) = \text{ínf}\{\mathcal{U}\} \qquad \underline{I}(f,\alpha) = \sup\{\mathcal{L}\}$$

estas magnitudes se denominan respectivamente **Integral superior** de f respecto a α, e **Integral inferior** de f respecto a α, en $[a,b]$.

Estas integrales superior e inferior son los límites respectivos de los conjuntos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{U}$. Además se tendría que por definición de ínfimo y supremo, se cumple

$$L(P,f,\alpha) \leq \underline{I}(f,\alpha) \qquad \overline{I}(f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha) \tag{9}$$

Ahora, considerando lo descrito en el **Contraejemplo 7.1.2.3.**, ha de esperarse que exista una relación entre las integrales superior e inferior, así como se ha realizado respecto a las sumas superior e inferior, por lo cual, solo puede establecerse lo siguiente

Teorema 7.1.2.5.
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada, y $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ monótona no decreciente, se cumple, entonces, $\underline{I}(f,\alpha)\leq\overline{I}(f,\alpha)$

DEMOSTRACIÓN
Sean $P_i\in\mathcal{P}[a,b]$ una colección de particiones tales que $P_{i+1}\supset P$, en virtud del **Teorema 7.1.2.2.** se tiene que

$$L(P_i,f,\alpha)\leq L(P_{i+1},f,\alpha)\leq U(P_{i+1},f,\alpha)\leq U(P_i,f,\alpha)$$

ahora, fijando P_i se tiene $L(P_i,f,\alpha)\leq U(P,f,\alpha)$, es decir, toda suma superior es mayor o igual que una suma inferior. Así $L(P_i,f,\alpha)\leq\overline{I}(f,\alpha)$, es decir, $\overline{I}(f,\alpha)$ es una cota superior para $L(P_i,f,\alpha)$. Por otra parte, $L(P_i,f,\alpha)\leq\underline{I}(f,\alpha)$, es decir, $\underline{I}(f,\alpha)$ es la mínima cota superior para $L(P_i,f,\alpha)$. De esto se concluye que $\underline{I}(f,\alpha)\leq\overline{I}(f,\alpha)$, y el teorema queda demostrado.

Este teorema, reafirma la idea de que, aunque las sumas superiores e inferiores tengan *límites*, no tienen porqué aproximarse entre sí. Pero, es esta necesidad de que las integrales superior e inferior sean iguales, lo que garantizará la existencia de la integral como valor único. Debido a ésto se introduce lo que sigue

Definición 7.1.2.6. Integral de Stieltjes
Suponga que las integrales superior e inferior son iguales, se define su valor común

$$\underline{I}(f,\alpha)=\int_a^b f\,d\alpha=\overline{I}(f,\alpha)$$

y se llama a ésta la **Integral de Riemann-Stieltjes** de f respecto a α en $[a,b]$.

La integrabilidad de f respecto a α, una función monótona, es completamente diferente a la establecida en la definición que considera sumas integrales arbitrarias; pero cabe destacar, que este condicionamiento de α hace de la funciones integrables, en el sentido de la **Definición 7.2.1.6.**, una clase especial de las funciones integrables en el sentido de la **Definición 7.1.1.2.** Finalmente, la clase que denota todas las funciones integrables en el sentido anterior es $\mathcal{D}(\alpha)$; simbólicamente se escribe la integrabilidad como

Integrablidad mediante integrales superior e inferior

$$f \in \mathcal{D}(\alpha) \Leftrightarrow \underline{I}(f,\alpha) = \overline{I}(f,\alpha)$$

El procedimiento realizado anteriormente en la construcción de la integral, se denomina procedimiento de Darboux, y es una de las tres formas en que se define la integral de Stieltjes. Las definiciones hasta ahora estudiadas no son equivalentes, pues como se ha insistido, la condición de que α sea creciente determinan ciertos resultados, por ejemplo, los **Teorema 7.1.2.2.** y **Teorema 7.1.2.5.** los cuales no necesariamente son ciertos si α no es creciente en $[a,b]$.

Ejemplo 7.1.2.7.

Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Probar que

$$\int_a^b d\alpha = \alpha(b) - \alpha(a)$$

SOLUCIÓN

Considérese que $f(x) = 1$, $\forall x \in [a,b]$. Sea entonces, $P \in \mathcal{P}[a,b]$, para ésta es $M_i = m_i = 1$, $\forall i = 1,\ldots,n$; luego, al construir las sumas superior e inferior es

$$U(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \alpha(b) - \alpha(a) = \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = L(P,f,\alpha)$$

ahora, estas sumas no dependen de la elección de P, pues $\forall P \in \mathcal{P}[a,b]$ siempre se verifica $U(P,f,\alpha) = L(P,f,\alpha) = \alpha(b) - \alpha(a)$. Así es $\overline{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha) = \alpha(b) - \alpha(a)$ y queda demostrado, primeramente, que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$ y que se verifica la igualdad propuesta.

El uso de una definición de integral mediante integrales superior e inferior es muy *poderosa* porque permite estudiar el comportamiento de las sumas superiores e inferiores utilizando únicamente supremos e ínfimos, así como también propiedades de funciones, como lo es la monotonía de α. Estos elementos se deben estudiar a profundidad.

Observación Final 7.1.2.9.

La **Definición 7.1.2.6.** requiere una construcción más detallada; sin embargo, realizar esas observaciones y obtener tales resultados son adecuados, porque suponen una forma más simple de escoger los valores $f(t_i)$ y de *manipular* la función α en el cálculo de integrales.

7.1.3. Discusión final sobre las definiciones de Integral

Según lo mencionado previamente, la **Definición 7.1.1.2.** y **Definición 7.1.2.6.** no son equivalentes, pero ello no quiere decir que no se relacionen entre sí, pues se ha afirmado que $\mathcal{D}(\alpha) \subset \mathcal{R}(\alpha)$. En lo siguiente se exponen definiciones y resultados sobre la integral basados en la **Definición 7.1.2.6.**, el motivo de ello es la simplicidad con que se tratan muchos conceptos y nociones.

> La teoría de la integración de Riemann-Stieltjes será ahora desarrollada para integradores crecientes con monotonía, y veremos más adelante que esto es precisamente tan general como estudiar la teoría para integradores que son de variación acotada. (Apostol, 1960, p.196)

Este breve párrafo no permite deducir el alcance que tiene desarrollar la integral mediante las sumas de Darboux, pero como se expondrá en las siguientes páginas, las suposiciones adecuadas permitirán vincular aún más las clases $\mathcal{R}(\alpha)$ con $\mathcal{D}(\alpha)$.

Por otra parte, este enfoque no se realiza en los textos clásicos (mencionados en la bibliografía), porque siempre se escoge una definición en específico para desarrollar la teoría de integración, pero se considera que una comparación entre ambas definiciones resulta necesaria, pues se obtiene una visión más completa, tanto de los aspectos generales como particulares, que definen la integral de Stieltjes.

7.2. Funciones integrables

La **Definición 7.1.2.6.** permite determinar qué tipo de funciones son o no integrables; sin embargo, realizarlo por tal definición es muy tedioso, porque se debe considerar tanto el integrando, la función f, como el integrador, la función α; debido a ésto parece inmediato obtener resultados más simples que permitan indicar qué funciones son integrables, considerando únicamente el comportamiento y las propiedades de f, o de α, en $[a,b]$.

7.2.1. Criterio de integrabilidad

El principio de aproximación de las sumas $L(P,f,\alpha)$ y $U(P,f,\alpha)$ supone que si éstas tienen un límite común, es decir que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$, entonces, ha de esperarse que la diferencia entre tales sumas se reduzca notablemente, siempre que se introduzcan los refinamientos respectivos. Y de manera recíproca, si la diferencia $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)$ es infinitamente pequeña tanto como se desee, entonces, debe existir la integral. Así

Teorema 7.2.1.1. Criterio de Integrabilidad
Una función $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b,]$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$.

DEMOSTRACIÓN

(A) Supóngase que $\forall \epsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}[a,b] : U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$. Ahora, en virtud de (11) se tienen $L(P,f,\alpha) \leq \underline{I}(f,\alpha)$ y $\overline{I}(f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha)$; de éstas es $\overline{I}(f,\alpha) - \underline{I}(f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$ que supone $\overline{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha)$, lo que por la **Definición 7.1.2.6.** implica que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$.

(B) Supóngase que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$. Dado que $L(P,f,\alpha)$ y $U(P,f,\alpha)$ son aproximaciones a $\overline{I}(f,\alpha)$ e $\underline{I}(f,\alpha)$ respectivamente, debe ser $\underline{I}(f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon/2$, asimismo es $U(P,f,\alpha) - \overline{I}(f,\alpha) < \epsilon/2$; de éstas, es $\overline{I}(f,\alpha) - \underline{I}(f,\alpha) + U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$, pero si $f \in \mathcal{D}(\alpha)$, es $\overline{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha)$, por lo cual es $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$.

Las partes **(A)** y **(B)** hacen que el teorema quede demostrado.

Una de las afirmaciones utilizadas en la demostración del resultado anterior es que $\overline{I}(f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon/2$ y que $U(P,f,\alpha) - \overline{I}(f,\alpha) < \epsilon/2$; esto se debe a que $L(P,f,\alpha)$ y $U(P,f,\alpha)$ son *sumas por defecto* y *sumas por exceso*, respectivamente, de la integral. Por otra parte, se observa que para utilizar este criterio de integrabilidad deben de construirse las sumas superiores e inferiores, y luego estudiar el comportamiento que éstas tienen mediante la introducción de las particiones $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Desde luego, si se cumple este **Teorema 7.2.1.1.** para una determinda P, entonces, se debe cumplir para sus refinamientos P' respectivos, puesto que la diferencia también se reduce notablemente.

Corolario 7.2.1.2.

Si se cumple el **Teorema 7.2.1.1.** para alguna P y algún ϵ, entonces, tal teorema se cumple también (con el mismo ϵ) para cada refinamiento de P.

DEMOSTRACIÓN

Sean $P_i \in \mathcal{P}[a,b]$ una colección de particiones tales que $P_{i+1} \supset P_i \supset P$. En virtud del **Teorema 7.1.2.2.** se tienen las desigualdades $L(P,f,\alpha) \leq L(P_i,f,\alpha)$ y $U(P_i,f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha)$; de las cuales es ahora $U(P_i,f,\alpha) - L(P_i,f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$, ésto supone que $U(P_i,f,\alpha) - L(P_i,f,\alpha) < \epsilon$, y el corolario queda demostrado.

Corolario 7.2.1.3

Si se cumple el **Teorema 7.2.1.1.** para $P = \{x_0, ..., x_n\}$ y si $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ son puntos arbitrarios, entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i < \epsilon$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces, por (2) se cumple $m_i \leq f(s_i) \leq M_i$ y $-M_i \leq -f(t_i) \leq -m_i$; así de éstas es $-[M_i - m_i] \leq f(s_i) - f(t_i) \leq M_i - m_i$, equivalente a $|f(s_i) - f(t_i)| \leq M_i - m_i$, por lo cual, ahora es

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i < \epsilon$$

así la desigualdad propuesta se obtiene, y el corolario queda demostrado.

Corolario 7.2.1.4.

Si $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ y si se cumple el **Corolario 7.2.1.3.**, entonces

$$\left| S(P,f,\alpha) - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \epsilon$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $f \in \mathcal{D}(\alpha)$, entonces, por (2), para $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ se cumple $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$, por lo cual fácilmente se establecen las desigualdades siguientes

$$L(P,f,\alpha) \leq S(P,f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha) \qquad -U(P,f,\alpha) \leq -\int_a^b f\,d\alpha \leq -L(P,f,\alpha)$$

pero éstas implican que

$$-[U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)] \leq S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha \leq [U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)]$$

así $|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha| \leq U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)$; ésto supone, considerando que se cumple el **Teorema 7.2.1.1.** que $|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha| < \epsilon$, y el corolario queda demostrado.

Como se pretendía inicialmente, se ha demostrado mediante el **Corolario 7.2.1.4.**, que la **Definición 7.1.2.6.** conduce también a la exposición de sumas integrales $S(P,f,\alpha)$. Es decir, ambas definiciones se pueden relacionar entre sí, aún con la restricción de que α es creciente. Pareciera, entonces, que la relación entre las definiciones se limita a estas conclusiones; sin embargo, la fortaleza de la definición por sumas de Darboux precisa en que α sea creciente.

7.2.2. Funciones integrables

Los resultados anteriores han permitido determinar importantes relaciones entre sumas integrales arbitrarias y particulares, y la integral; así como también un criterio con el que se pueda señalar qué funciones son o no integrables sin tener que recurrir a la **Definición 7.1.2.6.** Entonces, lo mejor es determinar la integrabilidad de una función f respecto a α, considerando las características que éstas poseen. Los siguientes teoremas explotan estas propiedades, así

CLASES DE FUNCIONES STIELTJES-INTEGRABLES

Teorema 7.2.2.1.

Si f es continua en $[a,b]$, entonces, $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ sobre $[a,b]$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $x_i - x_{i-1} < \delta$. Supóngase además que f es continua en $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in [x_{i-1}, x_i] : |x - t_i| < \delta$ así $|f(x) - f(t_i)| < \epsilon$. Ya que en cada $[x_{i-1}, x_i]$ existen x_m, x_M tales que $f(x_m) = m_i$ y $f(x_M) = M_i$, entonces, debe cumplirse

$$|M_i - f(t_i)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad\qquad |m_i - f(t_i)| < \frac{\epsilon}{2}$$

de estas desigualdades es $M_i - m_i < \epsilon$; de aquí que al introducir el diferencial $\Delta\alpha_i$, y luego el signo de sumatoria sea $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon[\alpha(b) - \alpha(a)]$. Puesto que ϵ es arbitrariamente pequeño, tanto como se desee, debe ser $\epsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] < \sigma$, por lo cual es $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \sigma$, ésto supone por el **Teorema 7.2.1.1.** que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$, y el teorema queda demostrado.

Teorema 7.2.2.2.

Si f es monótona en $[a,b]$ y α es continua en $[a,b]$, entonces, $f \in \mathcal{D}(\alpha)$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que $x_i - x_{i-1} < \delta$. Supóngase que α es continua en $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in [x_{i-1}, x_i] : |x - t_i| < \delta$ entonces, $|\alpha(x) - \alpha(t_i)| < \epsilon$. Puesto que $x_{i-1}, x_i \in [x_{i-1}, x_i]$, debe cumplirse

$$|\alpha(x_{i-1}) - \alpha(t_i)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad\qquad |\alpha(x_i) - \alpha(t_i)| < \frac{\epsilon}{2}$$

así, de estas desigualdades es ahora $\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) < \epsilon$. Luego, como f es monótona creciente, entonces, $m_i = f(x_{i-1})$ y $M_i = f(x_i)$; así, al introducir el signo de sumatorio es $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon[f(b) - f(a)]$. Por el contrario, si f es monótona decreciente, entonces, $m_i = f(x_i)$ y $M_i = f(x_{i-1})$; así al introducir el signo de sumatorio es $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon[f(b) - f(a)]$. Puesto que ϵ es arbitrariamente pequeño, tanto como se desee, es $\epsilon[f(b) - f(a)] < \sigma$ o $\epsilon[f(a) - f(b)] < \sigma$; y es siempre $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \sigma$, ésto supone por el **Teorema 7.2.2.1.** que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$, y el teorema queda demostrado.

La continuidad es, quizás, una de las principales propiedades esperadas en la función f o α. Ésto es natural, pues usualmente las funciones que esperan implicarse en la integración, son funciones elementales, y algunas que otras *funciones extrañas*. Pero la importancia de la continuidad no radica en su presencia en diversas funciones, sino, más bien, en el acondicionamiento de la existencia de integrales de Stieltjes. Por tanto, conocer las propiedades de las funciones implicadas simplifica procesos y conclusiones. Para mostrar la trascendencia de ésto, se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.2.2.3.

Suponga que f es continua en $[a,b]$, $a<c<b$, $\alpha(x)=0$ si $x\in[a,c)$ y $\alpha(x)=1$ si $x\in[c,b]$. Probar que

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(c)$$

SOLUCIÓN

Por el **Teorema 7.2.2.1.**, como f es continua, entonces, $f\in\mathcal{D}(\alpha)$. Sea ahora $P\in\mathcal{P}[a,b]$, para ésta considérese el comportamiento de α en diferentes subintervalos $[x_{i-1},x_i]\subset[a,b]$; por lo cual si $x_{i-1},x_i\in[a,c)$ se tiene $\Delta\alpha_i=0$; si $x_{i-1},x_i\in[c,b]$ se tiene $\Delta\alpha_i=0$; pero, si $x_{i-1}\in[a,c)$ y $x_i\in[c,b]$, es decir, si $c\in[x_{i-1},x_i]$, entonces, $\Delta\alpha_i=1$. Luego

$$U(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\alpha_i=M_i$$

posteriormente, la introducción de los refinamientos respectivos de P, implican que para $x_i-x_{i-1}<\delta$ es $M_i-f(c)<\epsilon$, por la continuidad de f, por lo cual $\overline{I}(f,\alpha)=f(c)$.

De acuerdo a este **Ejemplo 7.2.2.3.** la definición de α permite analizar la variación de $\Delta\alpha_i$ en diferentes subintervalos; mientras la característica de f, en este caso la continuidad, permite determinar la variación de las sumas superiores $U(P,f,\alpha)$ respecto a P. Por lo cual, una de las suposiciones inmediatas respecto a las funciones f y α, es la reciprocidad entre las propiedades de tales funciones, por lo cual ha de esperarse que si f es monótona y α continua, entonces, debe ser $f\in\mathcal{D}(\alpha)$, de ahí el origen del **Teorema 7.2.2.2.**

Por lo visto, los resultados se basan en propiedades ya conocidas de las funciones: monotonía y continuidad. Ambas propiedades resultan importantes para las funciones conocidas (algebraicas, trigonométricas, etc.), pero su impacto radica en su aplicación a funciones poco empleadas, como la expuesta en el **Ejemplo 7.2.2.3.** Por ello la búsqueda de condiciones que permitan la existencia de la integral de Stieltjes no solo radica en el estudio de la función f sino también de α. El siguiente es otro ejemplo que refleja el alcance de este tipo de integración

Ejemplo 7.2.2.4.

Suponga que α es creciente en $[a,b]$, $a \leq c \leq b$, α es continua en c, $f(c) = 1$, y $f(x) = 0$ para $x \neq c$. Probar que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$, y que $\int_a^b f\,d\alpha = 0$

SOLUCIÓN

Puesto que α es continua, entonces, sea $\Delta\alpha_i = [\alpha(b) - \alpha(a)]/n$. Seguidamente considere el comportamiento de f en diferentes subintervalos $[x_{i-1}, x_i] \subset [a,b]$; así si $c \notin [x_{i-1}, x_i]$ se tiene $m_i = M_i = 0$; pero si, $c \in [x_{i-1}, x_i]$ entonces, $m_i = 0$ y $M_i = 1$. Luego, se tiene,

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) = U(P,f,\alpha) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}$$

esto indica que $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$ cuando $n \to \infty$, y esto, por el **Teorema 7.2.2.1.** implica que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$. La expresióna anterior también implica que cuando $n \to \infty$ es $U(P,f,\alpha) \to 0$, esto prueba que $\overline{I}(f,\alpha) = 0$.

Se insiste, la propiedades hasta ahora implicadas son algunas de las más usuales, pero tales características no permiten analizar más detalladamente el impacto que puedan tener otro tipo de funciones como las discontinuas. Ahora, la discontinuidad supone un problema, porque causan comportamientos anormales en las sumas integrales, tal como se analizó en el **Contraejemplo 7.1.2.3.**

Teorema 7.2.2.5.

Supóngase que f es acotada sobre $[a,b]$, tiene solo un número finito de puntos de discontinuidad sobre $[a,b]$, y α es continua en cada punto para el cual f es discontinua. Entonces, $f \in \mathcal{D}(\alpha)$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$, supóngase que $x'_j \in (x_{j-1}, x_j)$ es punto de dsicontinuidad de f. Ahora considérese que

(A) Como $x'_j \notin [x_{i-1}, x_i]$, entonces, por la continuidad de f, $\forall t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ se tiene que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in [x_{i-1}, x_i] : |x - t_i| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t_i)| < \epsilon/2$, por lo cual $|M_i - f(t_i)| < \epsilon 2$ y $|m_i - f(t_i)| < \epsilon/2$ implicarían que $M_i - m_i < \epsilon$. De aquí que $[M_i - m_i]\Delta\alpha_i < \epsilon\Delta\alpha_i$;

(B) Como $x'_j \in [x_{j-1}, x_j]$, por la continuidad de α en x'_j se tiene que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in [x_{j-1}, x_j] : |x - x'_j| < \delta \Rightarrow |\alpha(x) - \alpha(x'_j)| < \epsilon/2$, por lo cual $|\alpha(x_j) - \alpha(x'_j)| < \epsilon/2$ y $|\alpha(x_{j-1}) - \alpha(x'_j)|\epsilon/2$ implicarían que $\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1}) < \epsilon$. Puesto que f es acotada sobre $[a,b]$, entonces, también lo es en $[x_{j-1}, x_j]$ así $M_i - m_i \leq M_i + m_i \leq 2M$. De aquí que $[M_i - m_i]\Delta\alpha_i < 2M\epsilon$.

Finalmente, en virtud de **(A)** y **(B)**, se tiene $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < [\alpha(b) - \alpha(a)]\epsilon + 2M\epsilon$. Puesto que ϵ es arbitrariamente pequeño, tanto como se desee, debe de ser $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \sigma$, esto supone por el **Teorema 7.2.1.1.** que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$, y el teorema queda demostrado.

Con lo anterior se quiere decir, que si se desea considerar la discontinuidad de una función f, o inclusive de α, debe ser en número finito de puntos. Así, este **Teorema 7.2.2.5** muestra cómo la discontinuidad no supone un problema, sino más bien una *evolución* de la integral. Esto resulta ser adecuado para problemas que deben considerar tanto magnitudes continuas como discretas, por lo que una inclusión de más resultados que estén vinculados a este aspecto es necesario, aún más cuando es poco usual emplear funciones que posean tal característica. Más adelante se profundizará este aspecto.

7.3. Propiedades de la integral de Stieltjes

Es sumamente necesario determinar las propiedades operacionales que posee la integral respecto a las funciones, por lo cual es inmediato cuestionar: *¿la suma de dos funciones integrables es también integrable?* Además, *¿se pueden esperar nuevas propiedades sobre esta generalización de integral?* ahora que, además del integrando f y el intervalo $[a,b]$, se debe considerar el integrador α. Los siguientes resultados son las respuestas a tales preguntas.

7.3.1. Propiedades respecto al integrando

Considere el integrando f; entonces, como se indicó previamente, se desean extender las propiedades de integración usuales a esta nueva definición de integral, por lo cual sean f y g funciones integrables respecto a α en $[a,b]$; para éstas se tiene que

Teorema 7.3.1.1.
Si $f,g \in \mathcal{D}(\alpha)$ entonces, $f+g \in \mathcal{D}(\alpha)$, y se verifica

$$\int_a^b [f+g]d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$$

DEMOSTRACIÓN

Dado que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$, entonces, por el **Teorema 7.2.1.1.** $\forall \epsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}[a,b]$: $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon/2$; igualmente, dado que $g \in \mathcal{D}(\alpha)$, entonces, por el **Teorema 7.2.1.1.** $\forall \epsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}[a,b]$: $U(P,g,\alpha) - L(P,g,\alpha) < \epsilon/2$. De tales desigualdades se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} \left[M_i' + M_i''\right]\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \left[m_i' + m_i''\right]\Delta\alpha_i < \epsilon$$

donde m_i', M_i' son el ínfimo y supremo de f en $[x_{i-1}, x_i]$; y m_i'', M_i'' son el ínfimo y supremo de g en $[x_{i-1}, x_i]$. Luego considerando que m_i, M_i son el ínfimo y supremo de $f+g$, entonces, por el **Teorema 5.2.2.4.** se tiene se tienen las desigualdades $m_i' + m_i'' \leq m_i$ y $M_i \leq M_i' + M_i''$, por lo cual

$$U(P,f+g,\alpha) - L(P,f+g,\alpha) \leq \sum_{i=1}^{n} \left[M_i' + M_i''\right]\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \left[m_i' + m_i''\right]\Delta\alpha_i < \epsilon$$

así, es $U(P,f+g,\alpha) - L(P,f+g,\alpha) < \epsilon$; esto supone por el **Teorema 7.2.1.1.** que $f+g \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$. Respecto a la igualdad propuesta, por el **Corolario 7.2.1.4.** se tiene que para f y g, respectivamente se cumple

$$\left|S(P,f,\alpha)-\int_a^b f\,d\alpha\right|<\frac{\epsilon}{2} \qquad \left|S(P,g,\alpha)-\int_a^b g\,d\alpha\right|<\frac{\epsilon}{2}$$

de estas desigualdades es, entonces, $|S(P,f+g,\alpha)-\int_a^b f d\alpha-\int_a^b g d\alpha]|<\epsilon$; pero como $f+g\in\mathcal{D}(\alpha)$ es, por el **Corolario 7.2.1.4.**, también

$$\left|S(P,f+g,\alpha)-\int_a^b [f+g]d\alpha\right|<\epsilon$$

puesto que $S(P,f+g,\alpha)\to\int_a^b[f+g]d\alpha$, y a la vez $S(P,f+g,\alpha)\to\int_a^b f d\alpha+\int_a^b g d\alpha$, entonces, se concluye que se verifica la igualdad, y el teorema queda demostrado.

Teorema 7.3.1.2.

Si $f\in\mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$, entonces, $cf\in\mathcal{D}(\alpha)$, $\forall c\in\mathbb{R}$, y se verifica

$$\int_a^b [cf]d\alpha=c\int_a^b f\,d\alpha$$

DEMOSTRACIÓN

Dado que $f\in\mathcal{D}(\alpha)$, entonces, por el **Teorema 7.2.1.1.** $\forall\epsilon>0.\exists P\in\mathcal{P}[a,b]:$ $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\epsilon$. Luego, considerando que m_i y M_i son el ínfimo y supremo de cf en $[x_{i-1},x_i]$, mientras que m_i' y M_i'' son el ínfimo y supremo de f en $[x_{i-1},x_i]$, así se verifica que:

(A) si $c\geq 0$, entonces, por (5) se tiene

$$U(P,cf,\alpha)-L(P,cf,\alpha)=c[U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)]<c\epsilon$$

puesto que ϵ es arbitrariamente pequeño, tanto como se desee, entonces, $U(P,cf,\alpha)-L(P,cf,\alpha)<\delta$, así, por el **Teorema 7.2.1.1.** es $cf\in\mathcal{D}(\alpha)$;

(B) si $c<0$, entonces, por (5) se tiene

$$U(P,cf,\alpha)-L(P,cf,\alpha)=|c|[U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)]<|c|\epsilon$$

puesto que ϵ es arbitrariamente pequeño, tanto como se desee, entonces, $U(P,cf,\alpha)-L(P,cf,\alpha)<\delta$, así por el **Teorema 7.2.1.1.** es $cf\in\mathcal{D}(\alpha)$.

Las partes **(A)** y **(B)** muestra que $\forall c \in \mathbb{R}$ es $cf \in \mathcal{D}(\alpha)$. Respecto a la igualdad propuesta, por el **Corolario 7.2.1.4.** se tiene para f que

$$\left|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \epsilon \Rightarrow \left|S(P,cf,\alpha) - c\int_a^b f\,d\alpha\right| < |c|\epsilon$$

pero, para cf también se cumple

$$\left|S(P,cf,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \epsilon$$

tales desigualdades suponen que $S(P,cf,\alpha) \to c\int_a^b f\,d\alpha$, y a la vez, que $S(P,cf,\alpha) \to \int_a^b cf\,d\alpha$, entonces, se concluye que $\int_a^b cf\,d\alpha = c\int_a^b f\,d\alpha$, y el teorema queda demostrado.

Estas propiedades simplifican el cálculo de integrales puesto que, por ejemplo, permite la descomposición de la integral de una suma de funciones en una suma de integrales, cuestión que resulta fácil de emplear, como se conoce en la integración usual. Esto sólo viene a reafirmar la extensión de propiedades conocidas a esta nueva forma de integración. Basado en esto, también se esperaba el **Teorema 7.3.1.2.**

7.3.2. Propiedades respecto al Intervalo

El integrando determina un papel importante respecto a la extensión de propiedades ya conocidas; sin embargo, no sólo este objeto compone esta nueva definición de integral, por lo cual debe ser inminente considerar si la integrabilidad de f respecto a α en $[a,b]$ se hereda a $[a',b'] \subset [a,b]$. Debido a esto, se dice que

Teorema 7.3.2.1.
Si $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$ y $a < c < b$, entonces, $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,c]$ así como también en $[c,b]$, y se verifica que

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha$$

DEMOSTRACIÓN

Dado que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$, entonces, por el **Teorema 7.2.1.1.** $\forall \epsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}[a,b]$: $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$. Ahora, sea, $P = \{x_0, \ldots, x_j = c, \ldots, x_n\}$, entonces, para $P' = \{x_0, \ldots, x_j\}$ es $P' \in \mathcal{P}[a,c]$; mientras que para $P'' = \{x_j, \ldots, x_n\}$ es $P'' \in \mathcal{P}[c,b]$. Así se tiene una descomposición de $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)$ en la forma

$$\sum_{i=1}^{j}[M_i - m_i]\Delta\alpha_i + \sum_{i=j+1}^{n}[M_i - m_i]\Delta\alpha_i$$

es decir, $\forall \epsilon > 0$, $\exists P' \in \mathcal{P}[a,b] : U(P',f,\alpha) - L(P',f,\alpha) < \epsilon$, así por el **Teorema 7.2.1.1.** es $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,c]$; igualmente $\forall \epsilon > 0$, $\exists P'' \in \mathcal{P}[a,b] : U(P'',f,\alpha) - L(P'',f,\alpha) < \epsilon$, así por el **Teorema 7.2.2.1.** es $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[c,b]$. Respecto a la igualdad propuesta, por el **Corolario 7.2.1.3.** se tiene para f en $[a,b]$, y en $[c,b]$, respectivamente

$$\left|S(P',f,\alpha) - \int_a^c f\,d\alpha\right| < \epsilon \qquad \text{y} \qquad \left|S(P'',f,\alpha) - \int_c^b f\,d\alpha\right| < \epsilon$$

de estas desigualdades es, entonces, $\left|S(P,f,\alpha) - \left[\int_c^b f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha\right]\right| < 2\epsilon$; pero para f en $[a,b]$ también se cumple

$$\left|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \epsilon$$

esto supone que $S(P,f,\alpha) \to \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha$, entonces, se concluye que $\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha$, y el teorema queda demostrado.

7.3.3. Propiedades respecto al Integrador

Por último, no por ello menos importante, deben considerarse las propiedades respecto al integrador. Ahora, habría que razonar sobre qué tipo de propiedades pueden esperarse; considere, entonces, que también es inmediato cuestionar, análogo a la parte inicial de esta sección: *¿una función que a la vez es integrable respecto a funciones α y β, lo es también respecto a la suma de éstas?* Para responder a ello se presenta el siguiente resultado

Teorema 7.3.3.1.

Si $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$ y $f \in \mathcal{D}(\beta)$ en $[a,b]$, entonces, $f \in \mathcal{D}(\alpha+\beta)$, y se verifica

$$\int_a^b f\,d\alpha[\alpha+\beta] = \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b f\,d\beta$$

DEMOSTRACIÓN

Dado que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$, entonces, por el **Teorema 7.2.1.1.** $\forall\epsilon > 0$, $\exists P\mathcal{P}[a,b]$: $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon/2$; igualmente, dado que $f \in \mathcal{D}(\beta)$, entonces, por el **Teorema 7.2.1.1.** $\forall\epsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}[a,b] : U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon/2$. Así

$$U(P,f,\alpha) + U(P,f,\beta) - L(P,f,\alpha) - L(P,f,\beta) = U(P,f,\psi) - L(P,f,\psi) < \epsilon$$

donde $\psi = \alpha+\beta$, es decir $U(P,f,\psi) - L(P,f,\psi) < \epsilon$; esto supone por el **Teorema 7.2.1.1.** que $f \in \mathcal{D}(\alpha+\beta)$ en $[a,b]$. Respecto a tal igualdad propuesta, por el **Corolario 7.2.1.3.** se tiene que para $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ y $f \in \mathcal{D}(\beta)$, respectivamente

$$\left|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \left|S(P,f,\beta) - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

de estas desigualdades es, entonces, $\left|S(P,f,\alpha+\beta) - \left[\int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b f\,d\beta\right]\right| < \epsilon$ pero, para $f \in \mathcal{D}(\alpha+\beta)$ también se cumple

$$\left|S(P,f,\alpha+\beta) - \int_a^b f\,d[\alpha+\beta]\right| < \epsilon$$

puesto que $S(P,f,\alpha+\beta) \to \int_a^b f\,d[\alpha+\beta]$, y a la vez, $S(P,f,\alpha+\beta) \to \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b f\,d\beta$, entonces, se concluye que $\int_a^b f\,d[\alpha+\beta] = \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b f\,d\beta$, y el teorema queda demostrado.

Teorema 7.3.3.2.

Si $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ y $c > 0$, entonces, $f \in \mathcal{D}(c\alpha)$, y se verifica

$$\int_a^b f[c\alpha] = c\int_a^b f\,d\alpha$$

DEMOSTRACIÓN

Dado que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$, entonces, por el **Teorema 7.2.1.1.** es $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$. Luego, al construir las sumas superior e inferior correspondientes a f respecto a $c\alpha$ se tiene

$$U(P,f,c\alpha) - L(P,f,c\alpha) = c[U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)] < c\epsilon$$

puesto que ϵ es arbitrariamente pequeño, tanto como se desee, entonces, $U(P,f,c\alpha)-L(P,f,c\alpha) < \sigma$, así por el **Teorema 7.2.1.1.** es $f \in \mathcal{D}(c\alpha)$. Respecto a la igualdad propuesta, por el **Corolario 7.2.1.3.** se tiene que para $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ se cumple

$$\left|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \epsilon \Rightarrow \left|S(P,f,c\alpha) - c\int_a^b f\,d\alpha\right| c\epsilon$$

pero para $f \in \mathcal{D}(c\alpha)$ también se cumple

$$\left|S(P,f,c\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \epsilon$$

puesto que $S(P,f,c\alpha) \to c\int_a^b f\,d\alpha$, y a la vez, $S(P,f,c\alpha) \to \int_a^b f\,d[c\alpha]$, entonces, se concluye que $\int_a^b f\,d[c\alpha] = c\int_a^b f\,d\alpha$, y el teorema queda demostrado.

Estas propiedades no son más que una extensión de la propiedades ya conocidas de la integral definida, por esto es que en cierto modo, se preveía la obtención de cada una de éstas. Luego, las nuevas propiedades obtenidos para el integrando son una extensión adicional, debido al concepto de integral de Stieltjes, que como se ha indicado, considera integrando, integrador e intervalo de integración.

7.4. Fórmulas integrales

Luego de haber definido lo que és una integral de Stieltjes y los tipos de funciones que son integrables en este sentido, parece sencillo determinar integrales de Stieltjes. Para realizar esto, se deben de presentar algunos otros resultados importantes (también tomados de la integral definida, y ahora generalizados) que guíen el camino a seguir en el cálculo de tales valores numéricos. Para ello considérese, entonces, que se retomarán todos las observaciones anteriores, las cuales permitirán un entendimiento completo de la integral de Stieltjes.

7.4.1. Fórmulas integrales generalizadas

En la subsección 5.3.4. se estudiaron dos fórmulas que permiten el cálculo de integrales definidas, considerando para ello algunas condiciones sobre la función f. En la integral de Stieltjes, la obtención de estos resultados es análoga, aunque claramente deben existir nuevas condiciones sobre integrando e integrador. Adicionalmente, aquí se presenta un resultado adicional: la reducción de una integral de Stieltjes a una integral de Riemann.

Teorema 7.4.1.1. Reducción a una integral de Riemann

Considérese $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$, y supóngase que α tenga derivada α' continua en $[a,b]$. En tal caso la integral de Riemann $\int_a^b f(x)d\alpha'(x)dx$ existe e

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$$

DEMOSTRACIÓN

Supóngase que α tiene derivada α' continua en $[a,b]$, esto supone que en todo punto de $[a,b]$, α es derivable, y por tanto α necesariamente es continua. Entonces, al ser α continua en (a,b) y derivable en (a,b), esto implicaría, según el Teorema del Valor Medio, que existe $t_i \in (x_{i-1},x_i)$ tal que $\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1}) = \alpha'(t_i)[x_{i-1},x_i]$, o lo que es lo mismo $\Delta\alpha_i = \alpha'(t_i)\Delta x_i$, así

$$f(t_i)\Delta\alpha_i = f(t_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}[f\alpha'](t_i)\Delta x_i$$
$$S(P,f,\alpha) = S(P,f\alpha')$$

ahora, como $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$, entonces, por el **Corolario 7.2.1.3.** se tiene

$$\left|S(P,f,\alpha)-\int_a^b f\,d\alpha\right|<\epsilon \quad \Rightarrow \quad \left|S(P,f\alpha')-\int_a^b f\,d\alpha\right|<\epsilon$$

esto supone, que $f\alpha'$ es integrable en el sentido de Riemann, que la igualdad se verifica y que el teorema queda demostrado.

Teorema 7.4.1.2. Cambio de variable

Sea $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$ y sea g una función continua y estrictamente monótona definida en un intervalo $S=[c,d]$. Supóngase además que $a=g(c)$ y $b=g(d)$. Sean h y β las funciones compuestas, definidas como sigue $h(x)=f[g(x)]$ y $\beta(x)=\alpha[g(x)]$ si $x \in S$; entonces, $h \in \mathcal{D}(\beta)$ en S y se verifica

$$\int_a^b f\,d\alpha=\int_c^d h\,d\beta$$

DEMOSTRACIÓN

Considérese $S=[c,d]$, y sea $P'=\{x_0,\ldots,x_n\}$ una partición de $[c,d]$; supóngase además que $\alpha:[c,d]\to[a,b]$ es una función estrictamente creciente, esto supone que para $x'<x''\in[c,d]$ es $g(x')<g(x'')$, es decir, g es inyectiva, y por tanto $P''=\{y_0,\ldots,y_n\}$ es una partición de $[a,b]$, para la cual $g(x_i)=y_i$, donde, además, para $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ es $p_i=g(t_i)$. Luego, como $P''\in\mathcal{P}[a,b]$ entonces,

$$S(P',h,\beta)=\sum_{i=1}^n f[g(t_i)][\alpha[g(x_i)]-\alpha[g(y_{i-1})]]=\sum_{i=1}^n f(p_i)[\alpha(y_i)-\alpha(y_{i-1})]=S(P'',f,\alpha)$$

ahora, como $f\in\mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$, entonces, por el **Corolario 7.2.1.3.** se tiene

$$\left|S(P'',f,\alpha)-\int_a^b f\,d\alpha\right|<\epsilon \quad \Rightarrow \quad \left|S(P',h,\beta)-\int_a^b f\,d\alpha\right|<\epsilon$$

esto supone que $h\in\mathcal{D}(\beta)$, que la igualdad se verifica, y el teorema queda demostrado.

Teorema 7.4.1.3. Integración por partes

Si $f\in\mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$, entonces, $\alpha\in\mathcal{D}(f)$ en $[a,b]$ y se tiene

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)+\int_a^b \alpha(x)df(x)=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)$$

DEMOSTRACIÓN

Dado que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$, entonces, por el **Teorema 7.2.1.1.** $\forall \epsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}[a,b]$: $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \epsilon$. Ahora, para tal diferencia es

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} [M_i - m_i]\Delta\alpha_i$$

como α es creciente, entonces, $M_i' = \alpha(x_i)$ y $m_i' = \alpha(x_{i-1})$, adicionalmente se tiene $f(x_i) - f(x_{i-1}) \leq M_i - m_i$; bajo estas consideraciones es

$$\sum_{i=1}^{n} [M_i' - m_i'][f(x_i) - f(x_{i-1})] \leq \sum_{i=1}^{n} [M_i' - m_i'][M_i - m_{i-1}] < \epsilon$$

es decir, $U(P,\alpha,f) - L(P,\alpha,f) < \epsilon$; esto supone por el **Teorema 7.2.1.1.**, que $\alpha \in \mathcal{R}(f)$ en $[a,b]$. Respecto a la igualdad propuesta considére primeramente que para $S(P,f,\alpha)$, con $t_i = x_{i-1}$, es

$$S(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \{\Delta[f\alpha]_i - \alpha(x_i)\Delta f_i\} = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - S(P,\alpha,f),$$

luego, por el **Corolario 7.2.1.3.** se tiene que para $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ es

$$\left| S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha \right| < \epsilon \Rightarrow \left| S(P,\alpha,f) - [f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b f\,d\alpha] \right|$$

pero, para $\alpha \in \mathcal{D}(f)$ también se cumple

$$\left| S(P,\alpha,f) - \int_a^b \alpha\,df \right| < \epsilon$$

puesto que $S(P,\alpha,f) \to f(b)\alpha(b) - \alpha(a)f(a) - \int_a^b f\,d\alpha$, y a la vez, $S(P,\alpha,f) \to \int_a^b \alpha\,df$, entonces, se concluye que $f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b \alpha\,df$, o que, $\int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b \alpha\,df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$, y el teorema queda demostrado.

Las características principales, que distinguen a éstas fórmulas integrales generalizadas de las descritas en la integral definida, es que las condiciones son en cierta forma más estrictas; por ejemplo, en la reducción de una integral de Stieltjes a una integral de Riemann se exige prácticamente que $\Delta\alpha_i$ puede reescribirse en términos de Δx_i. Asimismo sucede en el cambio de variable, donde se requiere de g creciente para que sigan cumpliéndose las condiciones que determinan la integrabilidad.

7.4.2. Fórmulas para integradores discontinuos

Por otra parte, analizar el trasfondo de la fórmula de integración por partes, es punto de partido para nuevos resultados. Esto se debe a que, por lo demostrado, $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ implica que $\alpha \in \mathcal{D}(f)$, pero, considerando que si α es continua en cada punto para el cual f es discontinua (**Teorema 7.2.2.5.**), entonces, ahora se tendrían integradores discontinuos, para los cual no se han encontrado resultados sobre ellos. Debido a lo anterior, los siguientes teoremas exponen el camino a seguir en el cálculo de integrales con integradores discontinuos. Para ello, inicialmente se considera el tipo de integrador más simple.

Teorema 7.4.2.1.

Sean $a < c < b$. Defínase α como sigue: los valores $\alpha(a), \alpha(c), \alpha(b)$ son arbitrarios; $\alpha(x) = \alpha(a)$ si $a \leq x < c$, y $\alpha(x) = \alpha(b)$ si $c < x \leq b$. Sea f una función definida en $[a,b]$ de manera que por lo menos una de las funciones f o α sea continua a la izquierda de c y una por lo menos sea continua a la derecha de c. Entonces $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ y se tiene

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(c)[\alpha(c^+) - \alpha(c^-)]$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ definida como $P = \{x_0, ..., x_{j-1}, x_j = c, x_{j+1}, ..., x_n\}$. Considérese, entonces, que $\forall x_i < c$ es $\alpha(x_i) = \alpha(a)$, y esto supone que $\Delta\alpha_i = 0$; igualmente, $\forall x_i > c$ es $\alpha(x - i) = \alpha(b)$, y esto supone que $\Delta\alpha_i = 0$; sin embargo debe considerarse, que $\Delta\alpha_i \neq 0$ en $[x_{j-1}, x_j]$ y $[x_j, x_{j+1}]$, así se tiene

$$U(P,f,\alpha) = M_j[\alpha(c) - \alpha(x_{j-1})] + M_{j+1}[\alpha(x_{j+1}) - \alpha(c)]$$
$$L(P,f,\alpha) = m_j[\alpha(c) - \alpha(x_{j-1})] + m_{j+1}[\alpha(x_{j+1}) - \alpha(c)]$$

por lo cual, se tiene ahora

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=[M_j-m_j][\alpha(c)-\alpha(x_{j-1})]+[M_{j+1}-m_{j+1}][\alpha(x_{j+1})-\alpha(c)]$$

luego, para esta expresión se tienen las siguientes consideraciones

• si f es continua en c, esto es si $\forall x \in [a,b] : |x-c| < \delta$ es $|f(x)-f(c)| < \epsilon$, entonces, debe ser $M_j - m_j < \epsilon$ y $M_{j+1}-m_{j+1} < \epsilon$, por lo cual, $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha) < \epsilon[\alpha(x_{j+1}) - \alpha(x_{j-1})]$, puesto que ϵ es arbitrariamente pequeño, entonces, $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha) < \sigma$, y esto supone por el **Teorema 7.2.1.1.**, que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$. Luego, respecto a la igualdad propuesta, se tiene entonces, que por la continuadad de f en c es $M_j \approx f(c)$ y $M_{j+1} \approx f(c)$ siempre que $x_{j+1}-x_j < \epsilon$, por lo cual, $\overline{I}(f,\alpha) = f(c)[\alpha(x^+) - \alpha(x^-)]$.

• si f es continua en c por la derecha y α es continua por la izquierda, entonces, debe ser $M_{j+1}-m_{j+1} < \epsilon$ y $\alpha(c)-\alpha(x_{j-1}) < \sigma$, por lo cual, $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha) < \sigma[M_j-m_j]+\epsilon[\alpha(x_{j+1})-\alpha(c)]$, puesto que ϵ y σ son arbitrariamente pequeños, entonces, $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha) < \kappa$; y esto supone por el **Teorema 7.2.1.1.** que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$. Luego, respecto a la igualdad propuesta, como f es continua por la derecha y α es continua por la izquierda, en c, entonces, es $M_{j+1} \approx f(c)$ y $\alpha(x_{j-1}) \approx \alpha(c)$, por lo cual $\overline{I}(f,\alpha) = f(c)[\alpha(x^+) - \alpha(x^-)]$.

• si f es continua en c por la izquierda y α es continua por la derecha, entonces debe ser $M_j-m_j < \epsilon$ y $\alpha(x_{j+1})-\alpha(c) < \sigma$, por lo cual $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha) < \sigma[M_{j+1} - m_{j+1}] + \epsilon[\alpha(c) - \alpha(x_{j-1})]$, puesto que ϵ y σ son arbitrariamente pequeños, entonces $U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \kappa$; y esto supone por el **Teorema 7.2.1.1.** que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$. Luego, respecto a la igualdad propuesta, como f es continua por la izquierda y α es continua por la derecha, en c, entonces, es $M_j \approx f(c)$ y $\alpha(x_{j+1}) \approx \alpha(c)$, por lo cual $\overline{I}(f,\alpha) = f(c)[\alpha(x^+) - \alpha(x^-)]$.

Cada uno de los puntos anteriores muestra la validez de teorema, y por tanto queda demostrado.

El teorema anterior claramente introduce integradores α, discontinuos y escalonados. La siguiente definición permite establecer qué tipos de integradores α son considerados para la simplificación de una integral Stieltjes a una expresión de la forma $f(c)[\alpha(c_+) - \alpha(c_-)]$; ahora, téngase presente que en estos casos aun se tiene la restricción de que α sea creciente en $[a,b]$. Ante esto

Definición 7.4.2.2. Salto de α

Sea α una función definida en $[a,b]$ de tal manera que sea discontinua en un número finito de puntos c_k, siendo $a \leq c_1 < c_2 < ... < c_{n-1} < c_n \leq b$; si α es constante en cada intervalo abierto (c_{k-1}, c_k), se dice que α es una función escalonada y el número $\alpha(c_i^+) - \alpha(c_i^-)$ se llama el salto en c_i. Si $c_1 = a$, el **salto de** α en c_1 es $\alpha(c_1^+) - \alpha(c_1)$, y si $c_n = b$, el salto en c_n es $\alpha(c_n) - \alpha(c_n^-)$.

Una de las preguntas inmediatas del **Teorema 7.4.2.1.** y de la **Definición 7.4.2.2.** es qué sucede si α tiene más de un punto de discontinuidad. La intuición matemática hace suponer, que se tendrían más de una expresión del tipo $\alpha(c_n) - \alpha(c_n^-)$, uno por cada punto de discontinuidad, porque de acuerdo a las propiedades de integral, ésta se puede descomponer como una suma de integrales . Así

Teorema 7.4.2.3.

Sea α una función escalonada definida en $[a,b]$ con salto α_i en x_i, siendo $a \leq x_1 < ... < x_n \leq b$. Considérese f definida en $[a,b]$, de tal manera, que f y α no sean ambas discontinuas a la derecha o a la izquierda de cada x_i. En estas condiciones la integral de f respecto a α en $[a,b]$ existe y se verifica

$$\int_a^b f\,d\alpha = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\alpha_i$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ el conjunto de saltos de α en $[a,b]$. Ahora, sean $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ el conjunto de puntos en $[a,b]$ verificando $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < ... < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$; entonces, por el **Teorema 7.3.2.1.** puede escribirse

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^{y_1} f\,d\alpha + \int_{y_1}^{y_2} f\,d\alpha + ... + \int_{y_{n-2}}^{y_{n-1}} f\,d\alpha + \int_{y_{n-1}}^{b} f\,d\alpha$$

pero como $[a, y_1], ..., [y_i, y_{i+1}], ...[y_{n-1}, b]$ contiene un salto, esto es una discontinuidad, entonces, por el **Teorema 7.4.2.1.** ahora se tiene

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(x_1)\alpha_1 + ... + f(x_n)\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\alpha_i$$

esta igualdad culmina lo propuesto, y el teorema queda demostrado.

Ahora, según se ha probado, una integral se puede tranformar en una serie, cuando se emplean integradores discontinuos; inversamente, se espera que una serie pueda reescribirse mediante una integral. Esto es cierto, y también implicaría el uso de un α discontinuo, la pregunta es ¿cuál α? Considere, entonces, que esto se logra con la inserción de la función $\alpha(x) = [x]$, denominada función mayor entero.

Teorema 7.4.2.4.

Toda suma finita puede escribirse como una integral de Riemann-Stieltjes. En realidad, dada una suma $\sum a_i$ se define f en $[0, n]$ como sigue: $f(x_i) = a_i$ si $i - 1 < x \leq i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, y $f(0) = 0$, entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \int_0^n f(x) d[x]$$

deonde $[x]$ es la función mayor entero.

DEMOSTRACIÓN

Considérese que f es continua por la izquierda en $i = \overline{1, n}$, mientras $\alpha(x) = [x]$ es continua por la derecha en $i = \overline{1, n}$, además que posee salto $\alpha_i = 1$, $\forall i = \overline{1, n}$, es decir, se cumplen las condiciones del **Teorema 7.4.2.3.**, por lo cual se escribe

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\alpha_i = \int_a^b f(x) d[x]$$

esta igualdad culmina lo propuesto, y el teorema queda desmostrado.

7.4.3. Fórmula integral para integradores continuos y diferenciables a trozos en un intervalo abierto

Los integradores α estudiados previamente son funciones escalonadas, las cuales muestran como la integrabilidad puede extenderse a funciones con discontinuidades. Semejante a esta problemática ahora se introducen integradores con la siguiente característica: α es una función a trozos en $[a, b]$, con saltos.

Teorema 7.4.3.1.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable en (a,b), con derivada α' continua en (a,b). Entonces,

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx + f(a)[\alpha(a^+) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(b^-)]$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\kappa > 0$ arbitrario, para éste se tiene que $[a+\kappa, b-\kappa] \subset (a,b)$; luego como f es continua, $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ según el **Teorema 7.2.2.1.** Puesto que f y α' son continuas en $[a+\kappa, b-\kappa]$, entonces, por el **Teorema 7.4.1.1.** es

$$\int_{a+\kappa}^{b-\kappa} f d\alpha = \int_{a+\kappa}^{b-\kappa} f(x)\alpha'(x)dx$$

luego, por el **Teorema 7.3.2.1.** se tiene que, por lo anterior, es

$$\begin{aligned} \int_a^b f d\alpha &= \int_a^{a+\kappa} f d\alpha + \int_{a+\kappa}^{b-\kappa} f d\alpha + \int_{b-\kappa}^b f d\alpha \\ &= \int_a^{a+\kappa} f d\alpha + \int_{a+\kappa}^{b-\kappa} f(x)\alpha'(x)dx + \int_{b-\kappa}^b f d\alpha \end{aligned}$$

Por otra parte, como f es continua, entonces, $\exists v_\kappa, u_\kappa \in [a, a+\kappa]$ y $w_\kappa, z_\kappa \in [b-\kappa, b]$ tales que $f(u_\kappa) \leq f(x) \leq f(v_\kappa)$, $\forall x \in [a, a+\kappa]$ y $f(w_\kappa) \leq f(x) \leq f(z_\kappa)$, $\forall x \in [b-\kappa, b]$, para éstas expresiones se tiene, entonces,

$$f(u_\kappa)[\alpha(a+\kappa) - \alpha(a)] \leq \int_a^{a+\kappa} f d\alpha \leq f(v_\kappa)[\alpha(a+\kappa) - \alpha(a)]$$
$$f(w_\kappa)[\alpha(b) - \alpha(b-\kappa)] \leq \int_{b-\kappa}^b f d\alpha \leq f(z_\kappa)[\alpha(b) - \alpha(b-\kappa)]$$

luego, como $a \leq u_\kappa \leq a+\kappa$ y $a \leq v_\kappa \leq a+\kappa$, entonces,

$$\lim_{\kappa\to 0} u_\kappa = \lim_{\kappa\to 0} v_\kappa = a \qquad \text{y} \qquad \lim_{\kappa\to 0} w_\kappa = \lim_{\kappa\to 0} z_\kappa = b$$

adicionalmente, por la continuidad de f es

$$\lim_{\kappa\to 0} f(u_\kappa) = \lim_{\kappa\to 0} f(v_\kappa) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{\kappa\to 0} f(w_\kappa) = \lim_{\kappa\to 0} f(z_\kappa) = f(b)$$

Entonces, considerando todas estas expresiones se tiene que

$$\lim_{\kappa\to 0} f(u_\kappa)[\alpha(a+\kappa)-\alpha(a)] = f(a)[\alpha(a^+)-\alpha(a)] = \lim_{\kappa\to 0} f(v_\kappa)[\alpha(a+\kappa)-\alpha(a)]$$

$$\lim_{\kappa\to 0} f(w_\kappa)[\alpha(b)-\alpha(b-\kappa)] = f(b)[\alpha(b)-\alpha(b^-)] = \lim_{\kappa\to 0} f(z_\kappa)[\alpha(b)-\alpha(b-\kappa)]$$

y, por tanto, se tendría que, por el Teorema de Compresión, es

$$\lim_{\kappa\to 0}\int_a^{a+\kappa} f\,d\alpha = f(a)[\alpha(a^+)-\alpha(a)] \qquad \text{y} \qquad \lim_{\kappa\to 0}\int_{b-\kappa}^{b} f\,d\alpha = f(b)[\alpha(b)-\alpha(b^-)]$$

$$\lim_{\kappa\to 0}\int_{a+\kappa}^{b-\kappa} f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha$$

por esto es que finalmente, con el paso al límite, se obtiene que

$$\begin{aligned}\int_a^b f\,d\alpha &= \lim_{\kappa\to 0}\left[\int_a^{a+\kappa} f\,d\alpha + \int_{a+\kappa}^{b-\kappa} f(x)\alpha'(x)dx + \int_{b-\kappa}^{b} f\,d\alpha\right]\\ &= f(a)[\alpha(a^+)-\alpha(a)] + \int_{a+\kappa}^{b-\kappa} f(x)\alpha'(x)dx + f(b)[\alpha(b)-\alpha(b^-)]\end{aligned}$$

esta igualdad culmina lo propuesto, y el teorema queda demostrado.

Esta fórmula, es en sí una culminación de la integral de Stiteltjes, pues a partir de muchos resultados previamente demostrados, se ha logrado construir una forma de calcular integrales; más aún, el logro es mayor porque se han considerado integradores poco usuales, funciones escalonadas y funciones continuas y diferenciables en un intervalo abierto. Adicionalmente, este resultado es importante porque se logra tratar la discontinuidad del integrador α como una característica más, y no como una problemática.

Teorema 7.4.3.2.
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua a trozos con derivada α' integrable sobre $[a,b]$ y definida en cada punto donde f es continua. Sean $a=c_0<c_1<...<c_n=b$ los puntos de discontinuidad de α y α'. Entonces,

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx + f(a)[\alpha(a^+)-\alpha(a)] + f(b)[\alpha(b)-\alpha(b^-)] + \sum_{k=1}^{n-1} f(c_k)\alpha_k$$

DEMOSTRACIÓN

Puesto que f y α' son continuas excepto en cada c_i, entonces, $f\alpha'$ es continua excepto en cada c_i, y se garantiza que $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ y $f\alpha' \in \mathcal{R}[a,b]$. Luego se tiene, empleando el **Teorema 7.3.2.1.**

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^{c_1} f\,d\alpha + \int_{c_1}^{c_2} f\,d\alpha + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{b} f\,d\alpha = \sum_{k=1}^{n} \int_{c_{j-i}}^{c_j} f\,d\alpha$$

puesto que, f es continua en $[c_{k-1}, c_k]$ y α' es continua en (c_{k-1}, c_k), por el **Teorema 7.4.3.1.**, se tiene ahora

$$\int_{c_{k-1}}^{c_k} f\,d\alpha = \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\alpha'(x)dx + f(c_{k-1})\alpha_{k-1} + f(c_k)[\alpha(c_k) - \alpha(c_k^-)]$$

por lo cual, es inmediato que

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx + f(a)[\alpha_a^+ - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(b^-)] + \sum_{k=1}^{n-1} f(c_k)\alpha_k$$

esta igualdad culmina lo propuesto, y el teorema queda demostrado.

Para mostrar el alcance de esta fórmula en el cálculo de integrales de Stieltjes, se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.4.3.3.

Calcular $\int_{-2}^{2} x\,d\alpha(x)$, sabiendo que

$$\alpha(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \in [-2,-1] \\ 2 & \text{si } x \in (-1,0) \\ x^2+3 & \text{si } x \in [0,2] \end{cases}$$

Considere que $f(x) = x$ es continua en $[-2,2]$, y que $\alpha(x)$ es continua a trozos en $[-2,2]$, además que su derivada α' es integrable sobre $[-2,2]$, y definida en cada punto donde f es continua, es decir, se cumplen las condiciones del **Teorema 7.4.3.2.**. Entonces, ahora, si

$$\alpha(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \in [-2,-1] \\ 2 & \text{si } x \in (-1,0) \\ x^2+3 & \text{si } x \in [0,2] \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-2,-1] \\ 0 & \text{si } x \in (-1,0) \\ 2x & \text{si } x \in [0,2] \end{cases}$$

es inmediato re-expresar

$$\int_{-2}^{2} x d\alpha(x) = \int_{-2}^{-1} x dx + (-1)[\alpha(-1^+) - \alpha(-1^-)] + 2\int_{0}^{2} x^2 dx = \frac{17}{6}$$

Ejemplo 7.4.3.4.

Calcular $\int_{-1}^{3} x d\alpha(x)$, sabiendo que

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1 \\ 1 & \text{si } x \in (-1,2) \\ -1 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Considere que se cumplen las condiciones del **Teorema 7.4.3.2.**. Entonces, ahora $\alpha'(x) = 0$, para $x \in [-1,3]$, por lo cual, es inmediato re-expresar

$$\int_{-1}^{3} x d\alpha(x) = (-1)[\alpha(-1^+) - \alpha(-1^-)] + (2)[\alpha(2) - \alpha(2^-)] = -5$$

7.5. Integrabilidad y funciones de variación acotada

Previamente, se comentó sobre la relación entre las clases $\mathcal{D}(\alpha)$ y $\mathcal{R}(\alpha)$, para las cuales se tiene $\mathcal{D}(\alpha) \subset \mathcal{R}(\alpha)$ debido a la restricción de que α es creciente sobre $[a,b]$. Ahora, resulta ser que tal condición parece limitar los tipos de funciones que son integrables en uno y otro sentido, sin embargo, esta aparente limitante se reduce con la introducción de integradores de variación acotada.

7.5.1. Integradores de variación acotada

Así, por el **Teorema 5.4.3.6.**, el uso de integradores de variación acotada permite superar el obstáculo que suponen los integradores no monótonos, ya que una descomposición de éstos α en términos de integradores monótonos implica que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. De hecho, el **Teorema 5.4.3.6.** indica que tal descomposición es posible, por lo que lo único que queda por mostrar es que $f \in \mathcal{R}(V)$ y $f \in \mathcal{R}(V-\alpha)$. De esto trata esta última sección; para ello, considérese la siguiente definición

Definición 7.5.1.1.

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\alpha:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Si existen funciones no decrecientes ψ y ϕ tales que $\alpha = \psi - \phi$, $f \in \mathcal{D}(\psi)$ y $f \in \mathcal{D}(\phi)$, entonces, se dice: f es integrable respecto de α en $[a,b]$, y se tiene

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\psi - \int_a^b f\,d\phi$$

Esta definición, aunque simple tiene un alcance profundo, pues no se exige la condición de que α sea monótona para que ésta sea integrable en el sentido de la **Definición 7.1.2.6.** Así pues, la integrabilidad basada en tal definición puede extenderse para funciones arbitrarias, únicamente exigiendo que α sea de variación acotada. Esto queda finalmente demostrado a continuación

Teorema 7.5.1.2.

Suponga que $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada y $\alpha:[a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada. Entonces las proposiciones siguientes son equivalentes

- $f \in \mathcal{D}(\alpha)$ en $[a,b]$;
- $f \in \mathcal{D}(V)$ y $f \in \mathcal{D}(V-\alpha)$ en $[a,b]$;

donde $V(x) = V_\alpha(a,x)$ si $a < x \le b$, $V(a) = 0$.

7.6. Aplicación de la Integral de Stieltjes

En la naturaleza existen fenómenos, cuyos comportamientos son aleatorios, o lo que coloquialmente se denomina *fenómenos al azar*, y para ello también se pretenden construir modelos matemáticos; sin embargo, para éstos se deben de emplear otro tipo de razonamientos a los usualmente dados en problemas físicos, por lo que son necesarios algunos nuevos conceptos y definiciones; por esto considérese la siguiente problemática: *para un* *experimento aleatorio, ¿cuál es su valor esperado en la ejecución del mismo?* o dicho en forma más simple: *¿qué cantidad ganaré o perderé, después de jugar repetidamente cierto juego?*

7.6.1. Variables aleatorias

Téngase presente, que como los sucesos son aleatorios, entonces las variables en discusión también deben ser aleatorias; pero los experimentos están basados en sucesos, y no en magnitudes, por lo que es inmediato asociar a cada suceso un valor o un intervalo de valores reales, para que el problema sea más sencillo de manejar, así

Definición 7.6.1.1. Variable aleatoria
Sea S un espacio muestral sobre el que se encuentra definida una función de probabilidad. Sea X una función de valor real definida sobre S, de manera que transforme los resultados de S en puntos sobre la recta de los reales. Se dice, entonces, que X es una **variable aleatoria**.

Ahora bien, dependiendo del tipo de fenómeno que se esté estudiando, sucede que las variables se pueden clasificar como variables aleatorias discretas o variables aleatorias continuas. Por ello, para distinguir propiamente las características de cada variable se dice

Definición 7.6.1.2.
Una variable aleatoria X es discreta si el número de valores que puede tomar es contable (ya sea finito o infinito), y si éstos pueden arreglarse en una secuencia que corresponde con los enteros positivos.

Definición 7.6.1.3.
Una variablea aleatoria X es continua, si sus valores consisten en uno o más intervalos de la recta de los reales.

7.6.2. Distribución de Probabilidad

Entonces, una variable aleatoria no hace más que simplificar el estudio de los sucesos, traduciéndolos al lenguaje matemático. Es inmediato, que en el estudio de un experimento aleatorio el objetivo principal sea obtener la probabilidad de cada uno de los posibles sucesos, así es natural desear una función que permita tal cálculo. Pero, para ello deben tenerse en cuenta el tipo de variables descritas anteriormente, por ejemplo, en el caso discreto la expresión $P(X = x)$, se entiende como la probabilidad de que X tome el valor x; en el caso continuo, esto no es posible ya que es más adecuado estudiar la probabilidad de que X esté contenido en determinado intervalo, en vez de algún punto en particular.

Definición 7.6.2.1. Función de Probabilidad
Sea X una variable aleatoria discreta. Se llamará a $p(x) = P(X = x)$ **Función de Probabilidad** de X, si cumple las siguientes propiedades:

$$p(x) \geq 0, \forall x \in X \qquad \text{y} \qquad \sum_{X} p(x) = 1$$

Definición 7.6.2.2. Función de Densidad
Si existe una función $f(x)$ tal que

$$f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

para cualesquiera a y b, entonces, $f(x)$ es la **Función de Densidad** de probabilidad de la variable aleatoria continua X.

Las definiciones anteriores resultan ser análogas, ya que ambas funciones pretenden medir la propabilidad de un suceso, dependiendo de las características del experimento, esto es, si utiliza variables discretas o continuas. Ahora bien, sucede entonces, que ambas definiciones conducen a la *función de distribución acumulativa*. Considerando esto, se presenta lo que sigue

Definición 7.6.2.3. Función de Distribución Acumulativa
La **Función de Distribución Acumulativa** de la variable X es la probabilidad de que X sea menor o igual a un valor específico x; está dada por

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \qquad \text{y} \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

respectivamente para el caso discreto y continuo, donde $p(x)$ es la función de probabilidad y $f(t)$, la función de densidad.

Así, pues dependiendo del tipo de variable empleada, resulta ser que la función de distribución acumulativa (FDA) se rige por las expresiones anteriormente descritas. Una observación final, de la estructura para la FDA en el caso continuo, es que

$$P(X = x) = \int_x^x f(t)dt = 0$$

lo cual implicaría argumentar que la probabilidad de que X tome algún valor específico x es 0, y esto tiene sentido, ya que se ha indicado que: *es más adecuado estudiar la probabilidad de que X esté contenido en determinado intervalo, en vez de algún punto en particular*.

7.6.3. Valor esperado de una variable aleatoria

Se introdujo la problemática sobre el valor esperado, y su breve interpretación en los juegos de azar. Tal concepto no es más que el valor promedio de una variable aleatoria después de un número grande de ejecución del experimento. De esto se tiene:

> Supóngase que se tiene una moneda no cargada y el jugador tiene tres oportunidades para que al lanzarla aparezca una *cara*. El juego termina en el momento en el que cae una *cara* o despúes de tres intentos, lo que suceda primero. Si en el primero, segundo o tercer lanzamiento aparece *cara* el jugador recibe \$2, \$4 y \$8 respectivamente. Si no cae cara en ninguno de los tres lanzamientos, piere \$20. El valor esperado, o la cantidad promedio que se ganaría en cada juego después de un número muy grande de éstos, se determina multiplicando cada cantidad que se gana o se pierde por su respectiva probabilidad y sumandos los resultados. De acuerdo con lo anterior, la esperanza de ganar es: $(2)(1/2)+(4)(1/4)+(8)(1/8)+(-20)(1/2) = 0{,}5$ por juego. (Canavos, 1988, p.63)

Definición 7.6.3.1. Valor Esperado

El **Valor Esperado** de una variable aleatoria X es el promedio de X, es

$$E(X) = \sum_X xp(x) \qquad E(x) = \int_{-\infty}^{x} xf(x)dx$$

para variables discretas o continuas, respectivamente, en donde $p(x)$ es la función de probabilidad y $f(x)$ la función de densidad de probabilidad.

7.6.4. Valor esperado e Integral de Stieltjes

Según los tipos de experimentos, y sucesos dados en los mismos, existen variables aleatorias que son una mezcla de variables discretas y continuas, para las cuales la función de distribución será una combinación de los dos tipos; de tal manera que $F(x)$ sería continua en todas partes, excepto en los puntos en los que tiene saltos de discontinuidad. Bajo estas consideraciones, la introducción de la integral de Stieltjes tiene sentido, ya que como se ha indicado ésta puede expresarse según el **Teorema 7.4.3.2.**, en términos de integrales y sumatorias. De hecho, las fórmulas correspondientes al valor esperado tienen una estructura semejante a una integral de Stieltjes, esto, en la forma

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

los argumentos para la elección de este tipo de integral se basa en que: si F es continua a trozos, entonces el cálculo de $E(x)$ se reduce a una integral de Riemann, como la expresada en la **Definición 7.6.3.1.** Así mismo, si F tiene puntos de discontinuidad, entonces, la integral de Stieltjes, por el mismo **Teorema 7.6.3.1.**, se reduce a una sumatoria. Una prueba de ello es presentada por Leffler (2014). Finalmente, tal situación queda evidenciada con el siguiente ejemplo

Ejemplo 7.6.4.1.

Determínese el Valor esperado de la variable aleatoria X, considerando la Función de Distribución descrita a continuación

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2/4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1/4 + x/4 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Considere que $f(x) = x$ es continua y $\alpha(x) = F(x)$ cumple las condiciones del **Teorema 7.4.3.1.** Así pues, tal integral se reduce a la estructura establecida por tal teorema, del que debe determinarse $\alpha'(x) = F'(x)$, expresada por

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1/4 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

entonces, para tal función se tiene que el valor esperado es

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{0} x dF(x) + \int_{0}^{1} x dF(x) + \int_{1}^{2} x dF(x) + \int_{2}^{3} x dF(x) + \int_{3}^{\infty} x dF(x) \\ &= \int_{0}^{1} xF'(x)dx + 1[F(1) - F(1^{-})] + \int_{2}^{3} xF'(x)dx + 2[F(2) - F(2^{-})] \\ &= \frac{1}{4}\int_{0}^{1} x dx + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\int_{2}^{3} x dx + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

tales cálculos indican que el valor esperado para la variable aleatoria X con función de distribución $F(x)$, es $E(X) = 3/2$.

VIII. CONCLUSIONES

Inicialmente se comentaron algunas cuestiones importantes sobre la integral de Stieltjes; como la necesidad primordial de una definición de integral, y de algunos resultados que describan bajo qué condiciones o restricciones una función f es integrable respecto a α, en este sentido; y así una vez logrado esto, poder introducir fórmulas que permitan el cálculo de tales objetos. Desde luego, una exposición de ello conllevó a un análisis inmediato de ciertos resultados esperados, mientras que otros requirieron de un análisis más detenido; por ello, con todo esto, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

1. La integral de Stieltjes culmina con tres resultados importantes: **Teorema 7.4.3.2.**, éste expone una fórmula con la cual se simplifica el cálculo de una integral de Stieltjes, y en especial, por los integradores con discontinuidad; el **Teorema 7.5.1.2.**, extiende la noción de integrabilidad a integradores α no necesariamente monótonos, y por tanto relaciona las clases $\mathcal{D}(\alpha)$ y $\mathcal{R}(\alpha)$; y, **Definición 7.6.1.3.** que vincula el problema del cálculo del valor esperado de una variable aleatoria X mediante el uso de integrales de Stieltjes.

2. Diversos resultados concernientes a la Integral Stieltjes, como sus propiedades y la clasificación de funciones que son integrables, son una generalización de lo descrito en **Integral definida**, ya que la analogía entre ambas se debe a la elección de una definición basada en sumas integrales. Aún más, tal generalización queda en evidencia al considerar funciones integradoras (objeto no implicado en la integral usual), las cuales determinan resultados propios de esta nueva integral: **Teorema 7.4.2.1.**, **Teorema 7.4.2.3.** y **Teorema 7.4.3.2.**

3. La exposición de la Integral de Stieltjes y el uso de integradores α discontinuos, permite dar un nuevo enfoque a la discontinuidad, ya que tal característica (vista como un obstáculo) ahora permite obtener resultados notables, propios solo de este tipo de integral, y cuya aplicación queda en evidencia cuando se hacen las proposiciones y observaciones adecuadas.

4. La introducción de la integral de Stieltjes, pero sobre todo de las características que la definen la hacen esencial en el desarrollo de otros conceptos y nociones importantes en otros estudios (Estadística), tal como se mostró en el caso del cálculo del valor esperado $E(X)$ de variables aleatorias X, lo cual se debió a la inserción de una relación de variables aleatorias discretas y continuas.

5. Este documento referente a la Integral de Stieltjes, clasificación de funciones integrables y fórmula generalizada cuando la función integradora presenta discontinuidad en un intervalo, significa también, una base para la comprensión de este objeto y de sus aspectos principales, ya que la estructura que presente se ajusta a un estudio comprensible sobre las implicaciones de las definiciones y teoremas, lo que la hace ideal como material de estudio para la investigación de otros contenidos basados en la Integral de Stieltjes.

IX. RECOMENDACIONES

El desarrollo referente al contenido investigado, y definido como La Integral de Stieltjes, clasificación de funciones integrables y fórmula generalizada cuando la función integradora presenta una cantidad finita de puntos de discontinuidad, permite sugerir las siguientes recomendaciones para futuras investigaciones:

1. Investigar algunas otras implicaciones de la integral de Stieltjes, como la concerniente a integrales dependientes de un parámetro, con estructura como la siguiente

$$F(x) = \int_a^x f(t)d\alpha(t)$$

2. Indagar en la búsqueda de ejemplos y contraejemplos que muestren el alcance teórico de la integral de Stieltjes, puesto que solamente de esta manera se valorarán las implicaciones que tiene la presentación y demostración de los teoremas mostrados previamente.

3. Investigar algunos otros alcances de la integral de Stieltjes, como el desarrollo de integrales que dependen de un parámetro, o la extensión correspondiente a integración en el plano complejo e integración de funciones vectoriales.

X. BIBLIOGRAFÍA

- Abbot, S. (2000). *Understanding Analysis*. New York: Springer.
- Apostol, T. (1960). *Análisis Matemático*. Barcelona: Editorial Reverté.
- Bartle, R. (2000). *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Bartle, R. (1967). *The Elements of Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Canavos, G. (1988). *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y métodos*. Mexico: McGraw-Hill.
- Gaughan, E. (1972). *Introducción al Análisis*. Madrid: Editorial Alhambra, S.A.
- Hewitt. E. y Stromberg, K. (1965). *Real and Abstract Analysis*. New York: Springer.
- Kaczor, W. y Nowak, M. (2003). *Problems in Mathematical Analysis III. Integration*. American Mathematical Society.
- Leffler, K. (2014). *The Riemann-Stieltjes integral and some applications in complez analysis and probability theory*. Institutionen for matematik och matematisk statistik.
- Liaskó, I., Boiarchuk, A., Gai, Iá. y Golovach, G. (1997). *Matemática superior. Problemas resueltos. Tomo 2. Análisis Matemático: cálculo integral para funciones de una variable*. Moscú: Editorial URSS.
- Lang, S. (1993). *Real and Functional Analysis*. New York: Springer.
- Rudin, W. (1980). *Principios de Análisis Matemático*. México: McGraw-Hill.
- Stroock, D. (2011). *Essentials of Integration Theory for Analysis*. New York: Springer.

XI. ANEXOS

Lo siguiente, es un conjunto de demostraciones que justifican y validan cada uno de los resultados presentados previamente. La comprensión de tales demostraciones no consta únicamente en su lectura, sino más bien, consiste en tomar lápiz y papel y realizar las operaciones, transformaciones y cálculos indicados.

11.1. Demostraciones relativas a Supremo e ínfimo

Los teoremas correspondientes a ínfimos y supremos de funciones fueron expuestos sin demostración; desde luego, esto merece especial atención para conocer un poco más el uso de estos dos nuevos objetos.

Teorema 5.2.2.4. (DEMOSTRACIÓN)

Si f es acotada sobre X, entonces, $\exists M' > 0 : |f(x)| \leq M'$, $\forall x \in X$; e igualmente, si g es acotada sobre X, entonces, $\exists M'' > 0 : |g(x)| \leq M''$, $\forall x \in X$. Luego, en virtud de la desigualdad triangular es $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq M'+M''$, es decir, $|f(x)+g(x)| \leq M'+M''$, esto implica que $f+g$ es acotada sobre X. Ahora, se tiene

$$\inf_X\{f\} \leq f(x) \leq \sup_X\{f\} \qquad \inf_X\{g\} \leq g(x) \leq \sup_X\{g\}$$

así, de estas desigualdades es ahora

$$\inf_X\{f\} + \inf_X\{g\} \leq f(x)+g(x) \leq \sup_X\{f\} + \sup_X\{g\}$$

de aquí, son $\text{ínf}\{f\} + \text{ínf}\{g\}$, y $\sup\{f\} + \sup\{g\}$, cotas inferiores, y superiores de $f+g$; finalmente, respecto a $\text{ínf}\{f+g\}$ y $\sup\{f+g\}$, por lo cual es

$$\inf_X\{f\} + \inf_X\{g\} \leq \inf_X\{f+g\} \qquad \sup_X\{f+g\} \leq \sup_X\{f\} + \sup_X\{g\}$$

esta desigualdad culmina lo propuesto, y el teorema queda demostrado.

Teorema 5.2.2.5. (DEMOSTRACIÓN)

Sean $Y = \{f(x) : x \in X\}$ y $Y' = \{cf(x) : x \in X\}$, dado que Y es acotado, entonces, Y' es acotado pues, $\forall f(x) : x \in X$, y $c\,\text{ínf}_X\{f\} \leq cf(x) \leq c\sup_X\{f\}$. Ahora,

(A) sea $c = 0$. Es inmediato que se cumpla

$$\underset{X}{\text{ínf}}\{cf\} = c\,\underset{X}{\text{ínf}}\{f\} \qquad \sup_X\{cf\} = c\sup_X\{f\}$$

(B) Sea $c > 0$. Dado $M \in \mathbb{R}$, se tiene $cf(x) \leq M \Leftrightarrow f(x) \leq M/c$; lo cual muestra que M es cota superior de cf si y sólo si M/c es cota superior de f. Igualmente dado $m \in \mathbb{R}$, se tiene $m \leq cf(x) \Leftrightarrow m/c \leq f(x)$; lo cual muestra que m es cota inferior de cf si y sólo si m/c es cota inferior de f. Así se tiene

$$\underset{X}{\text{ínf}}\{cf\} = c\,\underset{X}{\text{ínf}}\{f\} \qquad \sup_X\{cf\} = c\sup_X\{f\}$$

(C) Sea $c < 0$. Dado $M \in \mathbb{R}$, se tiene $cf(x) \leq M \Leftrightarrow M/c \leq f(x)$; lo cual muestra que M es cota superior de cf si y sólo si M/c es cota inferior de f. Igualmente, dado $m \in \mathbb{R}$, se tiene $m \leq cf(x) \Leftrightarrow f(x) \leq m/c$; lo cual muestra que m es cota inferior de cf si y sólo si m/c es cota superior de f. Así se tiene

$$\underset{X}{\text{ínf}}\{cf\} = c\sup_X\{f\} \qquad \sup_X\{cf\} = c\,\underset{X}{\text{ínf}}\{f\}$$

Teorema 5.2.2.6. (DEMOSTRACIÓN)

Sean $Y = \{f(x) : x \in X\}$ e $Y' = \{f(x) : x \in X'\}$. Si f es acotada, entonces, f es acotada inferior y superiormente, así $\forall f(x) \in Y$ es

$$\underset{X}{\text{ínf}}\{f\} \leq f(x) \leq \sup_X\{f\}, \tag{10}$$

puesto que $Y' \subseteq Y$, entonces, también se cumple (10) $\forall f(x) \in Y'$, y f es acotada en X'. Además, son $\text{ínf}_X\{f\}$ e $\sup_X\{f\}$ cotas inferior y superior de Y; finalmente, respecto a $\text{ínf}_{X'}\{f\}$ y $\sup_{X'}\{f\}$, es $\text{ínf}_X\{f\} \leq \text{ínf}_{X'}\{f\}$ y $\sup_{X'}\{f\} \leq \text{ínf}_X\{f\}$

11.2. Demostraciones relativos a Variación acotada

Respecto a la sección **Variación acotada** también se demuestran a continuación, cada uno de los resultados correspondientes, considerando para ello las definiciones previamente dadas. Esta sección, al considerar algunos resultados vinculados a supremo, también merece un análisis puntual sobre lo propuesto, y las condiciones dadas.

Teorema 5.4.2.2. (DEMOSTRACIÓN)

Sea α creciente en $[a,b]$, y sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$; entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta\alpha_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = \alpha(b) - \alpha(a)$$

por lo que haciendo $M = \alpha(b) - \alpha(a)$ se cumple que $V(\alpha, P) \leq M$, así, en virtud de la **Definición 5.4.2.1.**, es α de variación acotada en $[a,b]$. Sea α decreciente en $[a,b]$, y sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$; entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta\alpha_i| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} [\alpha(x_{i-1}) - \alpha(x_i)] = \alpha(a) - \alpha(b)$$

por lo que haciendo $M = \alpha(a) - \alpha(b)$ se cumple que $V(\alpha, P) \leq M$, así en virtud de la **Definición 5.4.2.1.** Entonces, si α es monótona, es α de variación acotada en $[a,b]$, y el teorema queda demostrado.

Teorema 5.4.2.3. (DEMOSTRACIÓN)

Sea α continua en $[a,b]$ con derivada α' acotada en (a,b), y sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$; entonces, por el Teorema del Valor Medio se tiene que $\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \alpha'(t_i)[x_i - x_{i-1}]$ donde $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, por lo que ahora

$$V(f,P) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha'(t_i)[x_i - x_{i-1}]| \leq \sum_{i=1}^{n} A[x_i - x_{i-1}] = A[b-a]$$

por lo cual, haciendo $M = [b-a]$, se tiene el cumplimiento de $V(\alpha, P) \leq M$; así en virtud de la **Definición 5.4.2.1.** es α de variación acotada en $[a,b]$, y el teorema queda demostrado.

Teorema 5.4.2.4. (DEMOSTRACIÓN)

Sea α de variación acotada en $[a,b]$, entonces, se cumple $V(\alpha,P) \leq M$ para cualquier $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Luego, al escoger $P = \{a,x,b\}$, donde $x \in [a,b]$, se tiene

$$V(\alpha,P) = |\alpha(a) - \alpha(x)| + |\alpha(b) - \alpha(x)| \leq M$$

de aquí que sea $|\alpha(a) - \alpha(x)| \leq M$; luego, en virtud de las propiedades del valor absoluto es $|\alpha(x)| - |\alpha(a)| \leq M$, esto último implica que $|\alpha(x)| = |\alpha(a)| + M$ para $x \in [a,b]$, y el teorema queda demostrado.

Teorema 5.4.3.2. (DEMOSTRACIÓN)

Sea $\psi = \alpha \pm \beta$, entonces, para ésta, la construcción de $V(\psi,P)$ permite señalar

$$V(\psi,P) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta\alpha_i \pm \Delta\beta_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |\Delta\alpha_i| + \sum_{i=1}^{n} |\Delta\beta_i| = V(\alpha,P) + V(\beta,P)$$

seguidamente, considérese que $V(\psi,P) \leq V_\alpha(a,b) + V_\beta(a,b)$, es decir, $V_\alpha(a,b) + V_\beta(a,b)$ es cota superior para $V(\psi,P)$; por otra parte, es $V(\psi,P) \leq V_\psi(a,b)$, pero, por definición es $V_\psi(a,b)$, la mínima cota superior de $V(\psi,P)$, así

$$V_\psi(a,b) \leq V_\alpha(a,b) + V_\beta(a,b)$$

Sea $\psi = \alpha.\beta$, entonces, para ésta, la construcción de $V(\psi,P)$ permite señalar

$$V(\psi,P) = \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha(x_i)\Delta\beta_i + \beta(x_{i-1})\Delta\alpha_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha(x_i)\Delta\beta_i\right| + \sum_{i=1}^{n} \left|\beta(x_{i-1})\Delta\alpha_i\right|$$

puesto que α y β son de variación acotada, entonces, por el **Teorema 5.4.2.4.**, α es acotada en $[a,b]$, por lo cual es inmediato establecer $|\alpha(x)| \leq \sup\{\alpha(x)\}$ y $|\beta(x)| \leq \sup\{\alpha(x)\}$ para todo $x \in [a,b]$. Debido a esto se tiene, entonces,

$$V(\psi,P) \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha(x_i)\Delta\beta_i\right| + \sum_{i=1}^{n} \left|\beta(x_{i-1})\Delta\alpha_i\right| \leq A\sum_{i=1}^{n} |\Delta\alpha_i| + B\sum_{i=1}^{n} \left|\Delta\beta_i\right| = AV(\alpha,P) + BV(\beta,P)$$

seguidamente, considérese que $V(\psi,P) \leq AV_\alpha(a,b) + BV_\beta(a,b)$, es decir, $AV_\alpha(a,b) + BV_\beta(a,b)$ es una cota superior para $V(\psi,P)$; por otra parte es $V(\psi,P) \leq V_\psi(a,b)$, pero, por definición es $V_\psi(a,b)$ la mínima cota superior de $V(\psi,P)$, así

$$V_\psi(a,b) \leq AV_\alpha(a,b) + BV_\beta(a,b)$$

donde es $A = \sup\{|\beta(x)| : x \in [a,b]\}$ mientras $B = \sup\{|\alpha(x)| : x \in [a,b]\}$; y el teorema queda demostrado.

Teorema 5.4.3.3. (DEMOSTRACIÓN)

Sea $\psi = 1/\alpha$, luego, si $m \leq |\alpha(x)|$, entonces es $|\psi(x)| \leq 1/m$; luego considérese $P \in \mathcal{P}[a,b]$ arbitraria; ante esto

$$V(\psi,P) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\Delta\alpha_i}{\alpha(x_{i-1})\alpha(x_i)} \right| \leq \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{n} |\Delta\alpha_i| = \frac{1}{m^2} V(\alpha,P)$$

ahora, como α es de variación acotada en $[a,b]$ existe M, tal que $V(\alpha,P) \leq M$, para toda $P \in \mathcal{P}[a,b]$, de hecho, escogiendo $M = V_\alpha(a,b)/m^2$ es

$$V(\psi,P) \leq \frac{1}{m^2} V(\alpha,P) \leq \frac{1}{m^2} V_\alpha(a,b)$$

y esto es suficiente para demostrar que ψ es de variación acotada en $[a,b]$. Adicionalmente es $V_\alpha(a,b)/m^2$ cota superior de $V(\psi,P)$. Por otra parte es $V_\psi(a,b)$ la mínima cota superior de $V(\beta,P)$. De estas conclusiones sólo se concluye que $V_\beta(a,b) \leq V_\alpha(a,b)/m^2$, y el teorema queda demostrado.

Teorema 5.4.3.4. (DEMOSTRACIÓN)

Considérese que α es de variación acotada en $[a,b]$ esto implica que existe $M \in \mathbb{R}$, tal que$V(\alpha,P) \leq M$ para toda $P \in \mathcal{P}[a,b]$, por lo cual, sea $P = \{x_0,\ldots,x_j = c,\ldots,x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$, entonces, $P' = P \cap [a,c]$ es tal que, $P' \in \mathcal{P}[a,c]$, igualmente $P'' = P \cap [c,b]$ es tal que, $P'' \in \mathcal{P}[c,b]$. De aquí que sea

$$V(\alpha,P') + V(\alpha,P'') = \sum_{i=1}^{j} |\Delta\alpha_i| + \sum_{i=j+1}^{n} |\Delta\alpha_i| = \sum_{i=1}^{n} |\Delta\alpha_i| = V(\alpha,P) \leq V_\alpha(a,b)$$

por lo cual, es ahora $V(\alpha,P') \leq V_\alpha(a,b)$ y $V(\alpha,P'') \leq V_\alpha(a,b)$ para toda $P' \in \mathcal{P}[a,c]$ y toda $P \in \mathcal{P}[c,b]$, es decir, α es de variación acotada en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Respecto a la igualdad propuesta considérense $\chi_1 = \{V(\alpha,P') : P' \in \mathcal{P}[a,c]\}$ y $\chi_2 = \{V(\alpha,P'') : P'' \in \mathcal{P}[c,b]\}$. Estos conjuntos reúnen las variaciones de α respecto a P' y P'', en $[a,c]$ y $[c,b]$; con tales conjuntos se define ahora $\chi_1 + \chi_2 = \{V(\alpha,P') + V(\alpha,P'') : P' \in \mathcal{P}[a,c], P'' \in \mathcal{P}[c,b]\}$ que no es más que el conjunto que reúne las variaciones de α respecto a P, en $[a,b]$. Luego, en virtud de las propiedades del supremo sobre éstos conjuntos es

$$\sup\{\chi_1 + \chi_2\} = \sup\{\chi_1\} + \sup\{\chi_2\}$$

puesto que $\sup\{\chi_1 + \chi_2\} = V_\alpha(a,b)$, así mismo $\sup\{\chi_1\} = V_\alpha(a,c)$ y $\sup\{\chi_2\} = V_\alpha(c,b)$, entonces la igualdad determinada es $V_\alpha(a,b) = V_\alpha(a,c) + V_\alpha(c,b)$, y el teorema queda demostrado.

Teorema 5.4.3.5. (DEMOSTRACIÓN)

Considérese que α es de variación acotada en $[a,b]$, entonces por el **Teorema 5.4.3.4.** para $x,y \in (a,b)$ existen $V_\alpha(a,x)$ y $V_\alpha(a,y)$, respectivamente; luego, si $x < y$ el mismo teorema garantiza la validez de $V_\alpha(a,y) = V_\alpha(a,x) + V_\alpha(x,y)$, así $V_\alpha(x,y) = V_\alpha(y) - V_\alpha(x)$. Puesto que por definición es $V_\alpha(x,y) \geq 0$, entonces $0 \leq V(y) - V(x)$, o lo mismo $V(x) \leq V(y)$, y V es creciente en $[a,b]$.

Por la variación acotada de α en $[a,b]$, para $x,y \in (a,b)$ es $|\alpha(y) - \alpha(x)| \leq V(\alpha,P) \leq V_\alpha(x,y)$, implica $\alpha(y) - \alpha(x) \leq V_\alpha(x,y)$, así

$$\begin{gathered}
-V_\alpha(x,y) \leq -[\alpha(y) - \alpha(x)] \\
V_\alpha(y) - V_\alpha(x) - \alpha(y) + \alpha(x) \leq V_\alpha(y) - V_\alpha(x) - V_\alpha(x,y) \\
V(x) - \alpha(x) \leq V(y) - \alpha(y)
\end{gathered}$$

esto supone que $V - \alpha$ es creciente en $[a,b]$, y el teorema queda demostrado.

Teorema 5.4.3.6. (DEMOSTRACIÓN)

Considérense las funciones V y $D = V - \alpha$. Puesto que α es de variacón acotada en $[a,b]$, entonces por el **Teorema** se tiene que $\alpha = V - D$, es decir α puede expresarse como la diferencia de dos funciones crecientes.

Por otra parte, sean α_1 y α_2 dos funciones crecientes tales que $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. La monotonía de tales funciones asegura por el **Teorema 2.1.2.3** que son de variación acotada en $[a,b]$; luego, por el **Teorema 2.1.3.3.** se tiene $V_{\alpha_1-\alpha_2}(a,b) \leq V_{\alpha_1}(a,b) + V_{\alpha_2}(a,b)$; por tanto, α es de variación acotada en $[a,b]$, y el teorema queda demostrado.

SIMBOLOGÍA

Simbología proposicional y de predicados

Símbolo	**Nombre**	**Se lee como**
$:=$	Definición	*Se define como*
$\Rightarrow$	Implicación	*Entonces*
$\Leftrightarrow$	Doble implicación	*Si y sólo si*
$\wedge$	Conjunción	*Y*
$\vee$	Disyunción	*O*
$\neg$	Negación	*No*
$\forall$	Cuantificador universal	*Para todo*
$\exists$	Cuantificador existencial	*Existe*
$:$	Reluz	*Tal que*

Simbología de Conjuntos

Símbolo	**Nombre**	**Se lee como**
$\in$	Pertenencia	*Pertenece a*
$\subset$	Subconjunto	*Es subconjunto de*
$\supset$	Superconjunto	*Es superconjunto de*
$\cup$	Unión	*Unión*
$\cap$	Intersección	*Intersección*
$\setminus$	Diferencia	*Diferencia*

Alfabeto Griego

Símbolo	**Se lee como**	**Símbolo**	**Se lee como**
α	*alfa*	μ	*mu*
β	*beta*	ξ	*xi*
γ	*gamma*	π	*pi*
δ	*delta*	ρ	*rho*
ϵ	*epsilon*	σ	*sigma*
ζ	*zeta*	τ	*tau*
η	*eta*	ϕ	*phi*
θ	*theta*	φ	*varphi*
ι	*iota*	χ	*chi*
κ	*kappa*	ψ	*psi*
λ	*lambda*	ω	*omega*