UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA

UNAN - MANAGUA

Recinto universitario Rubén Darío

Facultad de Ciencias e Ingenierías

Departamento de Matemática y Estadística

Tesis monográfica para optar al título de Licenciado en Matemática

Análisis de las Propiedades y condiciones de la integral de Riemann, Riemann-Stieltjes y Lebesgue.

Autor

Br. Hoztynng Francisco Huete Molina

Tutor

Dr. Pilar Angelina Marín Ruiz

Enero, 2020.

Dedicatoria

A mi madre, mis hermanos y mis amigos, esto es por ustedes.

Agradecimientos

Mi total agradecimiento a quienes me han acompañado, durante estos años de formación y aprendizaje, tanto académico como personal, en especial a:

- Dios, primeramente, por inspirarme, y darme la oportunidad de contribuir en el desarrollo de un futuro mejor.
- A mi madre, quien ha confiado ciegamente en mi deseo de superación, mis hermanos, quienes me han brindado su apoyo cuando lo necesitaba, mis amigos quienes han colaborado en mi desarrollo profesional.
- A mi tutora Docente Dr. Pilar Angelina Marín Ruiz, como excelentísima docente de matemáticas me ha inspirado a seguir adelante.
- Y a todos los docentes del departamento de Matemáticas y Estadística.

A todos Gracias.

Resumen

En el siguiente trabajo monográfico se expone los aspectos básicos sobre cada una de las integrales abordadas, la integral de Riemann, Riemann-Stieltjes y Lebesgue. Tratando de mostrar la sencillez del asunto sin olvidar lo complejo del análisis, desde luego para ello es necesario brindar una serie de definiciones básicas, teoremas, lemas y corolarios para la fácil comprensión y el debido orden del estudio, esto con el fin de justificar la secuencias de conclusiones a las que se llegan.

Es necesario que la lectura de tal documento sea lenta y gradual, puesto que la precipitada lectura solo confundirá al lector.

En la sección de **antecedentes** se expone la transformación que ha tenido la integral desde su origen pasando por las etapas claves, el método exhaustivo, la integral de Newton-Leibniz y la formulación básica de la integral según Riemann. Se plantea la manera en que la noción de integral se va estudiando como objeto matemático propiamente dicho. Mostrando que si bien ese desarrollo parece seguir un comportamiento lineal que inicia en la antigüedad griega y culmina en el siglo XIX, con la definición de la integral de Riemann.

Esta se hace a través de objetos de estudios muy puntuales, intervalos. Para ello se desarrolla la sección **preliminares de la integración** donde se definen las principales definiciones necesarias para el desarrollo de la integración de Riemann, entre ellas, los intervalos, supremo, ínfimo y variación.

En la siguiente sección se muestra la construcción de la integral como tal, y como fue ideada por Riemann a través de funciones a pasos, hasta el punto de llegar a las sumas de Darboux como proceso de sumas para aproximar la integral de Riemann. En la sección de análisis de la integral se muestran las implicaciones y criterios bajo los cuales existe esta, se trata de mostrar una serie de ejemplos básicos y comprensibles y al finalizar se introduce comentarios críticos bajos los cuales la integral de Riemann no tiene uso, por tal motivo se procede con los siguientes.

Entonces se introduce de forma más abierta la integral de Riemann-Stieltjes, sus condiciones y propiedades, además muchas características respecto a las cuales Riemann fallo de Gran medida, ya que esta no solo se centra en la variación respecto al intervalo, sino bajo una nueva estructura de variación, una función. Luego de su construcción se plantean una serie de ejemplos sencillos y prácticos de integración bajo los cuales se intenta hacer ver la utilidad de esta integral como proceso matemático y además como proceso creativo de varios temas importantes de la estadística.

Posteriormente se define según Lebesgue, la medida de un conjunto por sus propiedades esenciales. Después se precisa de manera rápida lo enunciado por Borel a través de los conjuntos de Borel, e implicaciones aquellas relaciones que hay entre la medida definida de Borel y la de Lebesgue como la completacion de la medida de Borel. La definición que se adopta se aplica a espacios de varias dimensiones, sin embargo los de interés son los elementos como conjuntos de un plano, y luego como tal de un área.

A partir de la teoría de la medida de magnitudes, Lebesgue constituye una teoría abstracta de la medida que permite una definición de integral que va delineando una nueva noción con sus problemas particulares. Se reconoce a la medida de Lebesgue como una generalización de la medida de los objetos geométricos.

Finalmente se plantean algunos ejemplos sencillos con el fin de mostrar el uso de la integral de Lebesgue, y sus propiedades y condiciones, además de ello de la aplicación sobre la estadística que también ha tenido. Introduciendo brevemente un pequeño tipo de procedimientos para calcular otro tipo de integrales también, llamado la integral de Lebesgue-Stieltjes.

Índice

Capítulo I

1.1. Introducción

La teoría de la integración tiene sus raíces antiguas y honorables en el "método exhaustivo" que fue inventado por Eudoxo y desarrollado en gran medida por Arquímedes con el propósito de calcular las áreas y volúmenes de figuras geométricas.

El trabajo posterior de Newton y Leibniz permitió que este método se convirtiera en una herramienta sistemática para tales cálculos. A medida que se desarrolló esta teoría, se ha vuelto menos indispensable por las aplicaciones a la geometría y la mecánica elemental, para lo cual es completamente adecuada, y más preocupado por cuestiones puramente analíticas, para las cuales la teoría clásica de la integración no siempre es suficiente.

Por lo tanto, un matemático actual puede estar interesado en la convergencia de sucesiones de funciones, funciones de densidad para la probabilidad. Para él, la teoría clásica de la integración que culminó en la integral de Riemann ha sido reemplazada en gran medida primeramente por el trabajo de Thomas Joannes Sieltjes quien impulso una generalización de la integral de Riemann llamada la integral de Riemann-Stieltjes la cual a diferencia de la anterior que dependía de una sola función llamada integradora, esta depende de dos funciones, una llamada integrando y otra llamada integrador.

La integral de Riemann-Stieltjes sirvió de precursor instructivo y útil de la teoría que surgió del trabajo pionero de Henri Lebesgue a principios de este siglo. La razón de esto fue muy simple: los teoremas de convergencia asociados con la teoría de integración de Lebesgue conducen a resultados más generales, más completos y más elegantes de lo que admite la integral de Riemann. La definición de Lebesgue de la integral amplía la colección de funciones para las cuales se define la integral. Aunque esta ampliación es útil en sí misma, su principal virtud es que los teoremas relacionados con el intercambio del límite y la integral son válidos en condiciones menos estrictas supuestos que se requieren para la integral de

Riemann. Dado que uno de los Elementos de integración con frecuencia necesita realizar tales intercambios, la integral de Lebesgue es más conveniente de tratar que la integral de Riemann.

1.2. Planteamiento del problema

Muchas investigaciones han sido desarrolladas en base a las técnicas de integración, pero comúnmente los estudios se centran sobre funciones continuas en un intervalo $I = [a,b]$, a partir de las comunes técnicas de integración que se estudian en los cursos de cálculo. Sin embargo, se dejan muy por fuera otro tipo de funciones que no cumplen estos requerimientos.

El estudio de integrales de funciones continuas sobre un intervalo *I*, es un poco limitado, ya que no se presentan gran variedad de funciones que pueden tener discontinuidad en cualquier punto o que su interpretación geométrica es una función a pasos que no puede ser integrada bajo los criterios de Riemann.

En la teoria de las aproximaciones de las funciones discontinuas en un punto a través de otra función, que fue un trabajo realizado por Thomas Joannes Stieltjes, que fue una generalización de la integral de Riemann, cubrió gran parte de las dudas en la teoría de integración de funciones que no cumplían los criterios de integrabilidad de Riemann, sin embargo, aun esta gran generalización fue carente de la capacidad de integrar sobre otros espacios distintos que la línea recta y en R^2, por lo que es necesario desarrollar una mayor generalización de la integración en espacios un tanto distintos a los anteriores, estos pueden ser conjuntos de Cantor, sucesiones de funciones entre otras a las que Stieltjes no les planteo métodos de solución.

Es muy complejo encontrar la aplicación de estas integrales, en ejemplos sencillos y prácticos para estudiantes de cursos de análisis, para los que solamente comprenden esto de forma teórica, cuando su aplicación es vista en muchos campos importantes de las ciencias. Además es complejo mostrar cómo cada concepto de una integral más generalizada está relacionado con conceptos que ya están en el repertorio de los estudiantes, al definir la integral de Lebesgue en términos precisamente análogos a la definición de sumas de Riemann de la integral de Riemann.

Mostrar la principal diferencia según el enfoque de Lebesgue, ya que la suma de Lebesgue se forma en relación con una partición arbitraria de un intervalo que contiene el rango de una función acotada, en contraste con la división del dominio por Riemann. Pasando estrictamente por la definición de la medida de un conjunto arbitrario. Lo que finalmente nos conlleva a la restricción de la atención a conjuntos medibles y, por lo tanto, a funciones medibles. La teoría se persigue a través de los resultados de convergencia usuales, que superan algunas de las deficiencias de la teoría de Riemann.

1.3. Justificación

El constante avance de la teoria matemática en la ciencia y las problemáticas actuales del ser humano, ha exigido la expansión del conocimiento en muchas áreas. La matemática como pilar de todas las ramas de las ciencias está en constante crecimiento, y no sin razón, se desarrolla para tratar de abarcar más la explicación modelada de la naturaleza de los problemas. Y es así como los nuevos problemas y retos que surgen en la actualidad, problemas que no pueden ser solucionados como se hacía hace varios siglos, sino que ha sido necesario avanzar en un proceso generalizador e inductivo para desarrollar herramientas de estudio y desarrollo para los actuales y futuros problemas que tenga que enfrentar el ser humano.

Entre los muchos campos de estudio y aplicación matemática se encuentran la integral, que hace más de tres siglos no existía como forma de solución de una enorme cantidad de problemas que habían surgido para la época y que los conocimientos de la matemática exhaustiva no podían solucionar. Así fue como comenzaron a surgir los avances en los métodos de cálculo y la obtención de diversas aplicaciones de la actualidad que anteriormente eran inimaginables.

De tal forma que la integral de Riemann es de gran importancia estudiarla, desde sus conceptos teóricos, esencia y limitantes, así como el por qué puede ser relevada por métodos más generalizados de integrales (Riemann-Stieltjes, Lebesgue), cuando el problema no cumple con los requisitos que una vez planteo Riemann y que describen un fenómeno de gran importancia. Es así donde entra la diferencia entre el conocimiento de la integración simple y académica y las no académicas, aquellas que expresan un problema real ya sea de naturaleza matemática o distinto, los cuales requieren una mayor teoria y análisis, utilizando sus verdaderas definiciones, principios, e ideas y ajustar estas a través de técnicas adecuadas para el desarrollo del cálculo.

La integral de Riemann ha servido mucho como área de estudio de funciones que cumplen con criterios bien planteados y explicados, y que ha servido desde su inicio como parte de los estudios iniciales de científicos e investigadores. Esta está muy enlazada con diversas áreas de las ciencias, sin embargo, la teoria de integración de Riemann-Stieltjes y Lebesgue ha permitido de gran manera la ampliación de grandes áreas, además ha servido como pilar del desarrollo de diversos campos nuevos de estudios Fisicomatemáticos y estadísticos.

Es por ello que el desarrollo de este tópico, es de gran motivación y beneficio para estudiantes e investigadores de la matemática ya que no solo tiene un enfoque teórico, sino que se trata de mostrar también, su aplicación justificada y demostrada a través de los principios que la comprenden y es una demostración de la grandeza de la teoria generalizada a través de Riemann, Riemann-Stieltjes y Lebesgue.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

1. Analizar las propiedades y condiciones de la integral de Riemann, Riemann-Stieltjes y Lebesgue.

1.4.2. Objetivos Específicos:

1. Exponer las principales definiciones y propiedades de la integral de Riemann, Riemann-Stieltjes y Lebesgue.
2. Realizar un análisis comparativo de la integral de Riemann, Riemann-Stieljes y Lebesgue.
3. Resolver algunos problemas en el plano a través de la integral de Riemann, Riemann-Stieljes y Lebesgue.

Capítulo II

2.1. Marco Referencial

2.1.1. Antecedentes

El estudio de las integrales abordadas (Riemann, Riemann-Stieltjes, Lebesgue) es parte de las líneas de investigación consideradas por el departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua UNAN-Managua. Esto como parte del desarrollo riguroso de la teoría pura y propia en el análisis. Para ello se considera el estudio previo de documentos publicados, análisis desarrollado de la manera más simple y completa posible para lograr un contenido que tenga base razonable y no ambigua para el lector, lo anterior es razón para la revisión detallada de documentos y libros de contenido teórico más apto y ordenado como referencias confiables y revisadas.

La anterior revisión de contenido apto y apropiado para el lector es necesario, ya que la teoría estudiada aborda una gran e importante área de la matemática, como lo es la integración de Riemann además de sus consecuencias como lo fueron el desarrollo de la integral de Riemann-Stieltjes y Lebesgue como la ampliación de la Teoría de Riemann.

Las integrales estudiadas son abordadas en los cursos de Análisis Matemático de La Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua UNAN-Managua, sin embargo, las fuentes propias de esta institución académica se ven muy limitadas, encontrando únicamente un trabajo monográfico llamado La integral de Stieltjes, clasificación de funciones integrables y formula generalizada cuando una función integradora presenta discontinuidad en un intervalo desarrollado en su momento por los estudiantes Br. Isel del Carmen Aguilar Sierra y Br. Brandon Eli Calero Guevara.

Dado que la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, al ser la única universidad del país que ofrece la carrera de Licenciatura en Matemática, es comprensible que encontrar apoyo bibliográfico regional por parte de otras instituciones académicas de igual nivel, es muy poco probable aparte de las monografías ya mencionadas.

Para realizar el presente trabajo, se realizó una revisión a través de internet de documentos publicados y revisados sobre la teoría de integración abordada, encontrando por separado las teorías, o de forma más relacionada el estudio de extensiones de la integral de Riemann como lo es La integral de Riemann-Stieljes, así mismo como el estudio de la integral de Lebesgue-Stieljes.

Basado en los fundamentos obtenidos de los cursos de análisis en los que se estudia la integral de Riemann además de la utilización de Recursos bibliográficos: como lo es Desarrollo de Teoremas para la Integral de Riemann, Riemann-Stieltjes y Lebesgue donde se expone el desarrollo detallado de los principales teoremas relacionados con la Integral de Riemann, y las pautas que muestran los caminos necesarios para realizar las demostraciones expuestas.

El estudio de esta integral, Thomson en su obra Theory of Integral, introduce primeramente la teoría de la integral de Riemann, para luego extenderla a la integral de Riemann-Stieltjes y luego trabajar sobre la integral de Lebesgue de forma independiente pasando obviamente sobre el estudio de otras integrales desarrolladas bajo el estudio de grandes matemáticos, de la época. Sin embargo, este libro trata muy de forma independiente estas teorías y no muestra la relación o mejor dicho la comparación de lo que implica cada una bajo los mismos principios que se desarrollado al comenzar con el estudio de La integral de Riemann, considerando como punto de partida la construcción de tal integral, para luego presentar diversas propiedades y resultados teóricamente relevantes que resuelven una gran variedad de problemas.

En el libro de Essentials of Integration Theory for Analysis de Stroock se introduce de forma rápida la teoria de integración de Riemann, de forma muy limitada la teoria de Stieljes, pero si se extiende de gran manera en la teoría de integración de Lebesgue, lo que implica y su gran uso en espacios más complejos de integración. Luego se exponen los principales teoremas relacionados con la integral de Lebesgue, con el objetivo de realizar una comparación entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue.

El cálculo ", escribió **John von Neumann** (1903-1957)," Lo que es, el primer logro de las matemáticas modernas, y es difícil sobreestimar su importancia".

Hoy, más de tres siglos después de su aparición, el cálculo continúa justificando tal elogio. Es el puente que lleva a los estudiantes desde los conceptos básicos de las matemáticas elementales a los desafíos de las matemáticas superiores y, como búsqueda, proporciona una transición de lo finito a lo infinito, de lo discreto a lo continuo, de lo superficial a lo profundo.

El cálculo es tan apreciado que su nombre suele ir precedido por "el", como en la observación anterior de **von Neumann**. Esto le da a "el cálculo" un estado similar a "la ley", es decir, un tema vasto, autónomo e impresionante.

Como cualquier gran búsqueda intelectual, el cálculo tiene una rica historia y una prehistoria.

Así como toda gran solución se origina en un gran problema. En el siglo V a.c se originó una crisis en el mundo matemático, a diferencia de lo que se había supuesto, no todos los números eran conmensurables, había magnitudes que no eran calculables como la razón entre dos números enteros, la diagonal de un cuadrado de lado con medida de una unidad. (Dunham, 2005)

Se sabe, por referencias de otros autores, que fue uno de los discípulos de **Platón**, **Eudoxo de Cnido** (de 390 a.C. a 337 a.c), el que propuso la base del método de exhausción, o método por agotamiento, el cual consistía en llenar una figura no regular a la que se le estaba buscando el área, con figuras regulares muy pequeñas y así aproximar su área.

En su libro sobre la esfera y el cilindro, **Arquímedes de Siracusa** (de 287 a.c a 212 a.c), basándose en descubrimientos de **Euclides** y **Aristeo**, y utilizando el método de exhausción pudo demostrar teoremas sobre áreas y volúmenes. **Arquímedes** encontró las anteriores con una técnica ahora reconocida como protointegración mucho más tarde, **Pierre**

de Fermat (1601-1665). De una manera notablemente moderna. Estos y muchos otros ilustres predecesores llevaron el cálculo al umbral de la existencia. (Dunham, 2005)

En el siglo XVII, **Isaac Newton** (1642-1727) y **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716), quienes dieron luz al cálculo. La palabra latina cálculos (un sistema de cálculo) se adjuntaría a esta nueva rama de las matemáticas. El primer libro de texto apareció una docena de años más tarde, y el cálculo llegó para quedarse. (Dunham, 2005)

A medida que pasaban las décadas, otros tomaron el reto. Entre estos pioneros se destacaron los hermanos **Bernoulli**, **Jakob** (1654-1705) y **Johann** (1667-1748), y el incomparable **Leonhard Euler** (1707-1783), cuya investigación llenó muchos miles de páginas con matemáticas de la más alta calidad. Los temas en consideración incluyen límites, derivadas, series infinitas y más. (Dunham, 2005)

Este extenso cuerpo de material se conoce en la rúbrica general de "análisis".

Con una mayor sofisticación, inquietantes preguntas sobre la lógica utilizando de forma rigurosa el modelo de geometría de Euclides. **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857), **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866), **Joseph Liouville** (1809-1882) y **Karl Weierstrass** (1815-1897).

Pero, como sucede a menudo en la ciencia, la resolución del problema de uno abrió la puerta a los demás. Durante la última mitad del siglo XIX, los matemáticos emplearon estas herramientas lógicamente rigurosas para inventar una gran cantidad de contraejemplos extraños, cuya comprensión se extendió a la generalidad y la abstracción. Esta tendencia fue evidente en la teoría de conjuntos de **George Cantor** (1845-1918) y en los logros posteriores de eruditos como **Vito Volterra** (1860-1940), **Rene Baire** (1874-1932) y **Henri Lebesgue** (1875-1941). A principios del siglo XX, el análisis se había convertido en una enorme colección de ideas, definiciones, teoremas y ejemplos, y había desarrollado una forma de pensar característica, que lo establecía como una empresa matemática del más alto rango. (Dunham, 2005)

Es así que se pueden mostrar los principales temas e ideas que ilustran el desarrollo del cálculo a lo largo de sus años formativos y el genio de sus practicantes más ilustres.

El cálculo puede ser único en tener como fundadores dos individuos mejor conocidos por otras cosas. En la opinión pública, **Isaac Newton** tiende a ser considerado como un físico, y su cocreador, **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716), es probable que sea considerado como un filósofo. Esto es molesto y halagador, halagador en su desprecio por sus contribuciones matemáticas, y halagador en su reconocimiento de que tomó más que un simple genio ordinario para lanzar el cálculo.

Leibniz, con sus intereses desaparecidos y sus contribuciones de largo alcance, tenía un intelecto de amplitud fenomenal. Además de filosofía y matemáticas, sobresalió en historia, jurisprudencia, Idiomas, teología, lógica y diplomacia. (Dunham, 2005)

Al igual que **Newton**, **Leibniz** tuvo una intensa actividad matemática, aunque el suyo llegó más tarde que el de **Newton** y en un país diferente. Mientras que **Newton** desarrolló sus ideas en Cambridge a mediados de la década de 1660, **Leibniz** hizo su trabajo innovador mientras estaba en una misión diplomática en París una década más tarde. Esto le dio a **Newton** una prioridad temporal, que él y sus compatriotas afirmarían más tarde que era el único tipo que importaba, pero fue **Leibniz** quien publicó su cálculo en un momento en **De analysi** y otros tratados newtonianos estaban acumulando polvo en forma de manuscrito. Mucho se ha escrito sobre la quien fue el verdadero creador del cálculo, sin embargo, muchos reconocen que los descubrimientos de **Newton y Leibniz** se hicieron de forma independiente.

Sin embargo, a diferencia de Newton, Leibniz estuvo más dispuesto a publicar. La primera versión del cálculo fue publicada en el documento **Leibnizs** (1684) con el título largo, "**Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nee fraetas, nee irrationales quantitates moratur; et singulare pro illis calculi genus**". Esto se traduce en" Un nuevo método para máximos y mínimos, y también tangentes, que no está impedido ni por cantidades fraccionarias ni por cantidades irracionales, y un tipo notable de cálculo para esto". (Dunham, 2005)

Con referencias a máximos, mínimos y tangentes, no debería sorprendernos que el artículo fuera la introducción de **Leibniz** al cálculo diferencial. Lo siguió dos años después con un artículo sobre cálculo integral.

Si **Newton y Leibniz** fueron los arquitectos del cálculo, fueron los hermanos **Bernoulli, Jakob** (1654-1705) y **Johann** (1667-1748), quienes hicieron mucho para incorporarlo al tema que conocemos hoy. Los hermanos leyeron los documentos originales de **Leibniz** de 1684 y 1686 y los encontraron tan estimulantes como desafiantes. Se enfrentaron con la densa exposición, desarrollaron sus detalles y luego, en correspondencia con **Leibniz** y entre sí, proporcionaron coherencia, estructura y terminología. Fue **Jakob**, por ejemplo, quien nos dio la palabra "integral". En sus manos, el cálculo asumió una forma fácilmente reconocible para un estudiante de hoy, con sus básicas reglas de derivadas, integración y soluciones de ecuaciones diferenciales. (Dunham, 2005)

Leonhard Euler (1707-1783) se destaca con intereses amplios, y fue así como desarrollo el cálculo de variaciones y la teoría de particiones. Entre los escritos de **Euler** se pueden mencionar libros de texto sobre funciones (1748), cálculo diferencial (1755) y cálculo integral (1768), así como docenas de documentos sobre temas que van desde ecuaciones diferenciales hasta series infinitas e integrales elípticas. (Dunham, 2005)

Cauchy dio el ejemplo del área de un círculo como el límite de las áreas de polígonos regulares inscritos a medida que aumenta el número de lados sin límite. Un lector moderno puede sorprenderse por la palabrería de su definición, sus imágenes dinámicas y la ausencia de ε y δ. Hoy en día no hablamos de una "sucesión" de números que "se acerque" a algo, y tendemos a preferir la eficiencia simbólica de " $\varepsilon > 0$ "a la frase" tan pequeño como se desee”.

Por el contrario, la definición de "evitación de límites" de **Cauchy** no mencionó lo que sea alcanzar el límite, solo acercarse y mantenerse cerca de él. Escribió que "cuando los valores numéricos sucesivos de una variable disminuyan indefinidamente (para llegar a ser menor que cualquier número dado), esta variable se llamará una cantidad infinitamente pequeña". Su uso de "infinitamente pequeño" nos parece desafortunado, pero podemos considerar esta definición como simplemente explicar lo que se entiende por convergencia a cero.

Llegando a la era de Riemann, en este punto de nuestra historia, la “función” había asumido una importancia central en el análisis. Al principio puede haber parecido una noción simple, incluso inofensiva, pero a medida que la recolección de funciones se hizo cada vez más sofisticada y cada vez más extraña, los matemáticos se dieron cuenta de que tenían una gran área de estudio por delante.

La generalidad en el corazón del análisis moderno, una tendencia ya evidente en los teoremas del límite de **Cauchy** o las integrales de **Riemann**. Más que sus predecesores, estos matemáticos se definen fundadores. Fue un desarrollo muy significativo el de **Joseph Liouville** (1809-1882) quien fue muy famoso luego en sus ecuaciones diferenciales, pero lo que lo incluye en sus aportes a la teoría de integración es que dentro del análisis real, **Liouville** es recordado por unos grandes descubrimientos significativos. Primero fue su prueba de que ciertas funciones elementales no pueden tener antiderivadas elementales. (Dunham, 2005)

Ahora si se recuerda **Cauchy** construyó su cálculo sobre límites, que definió en estas palabras: Cuando los valores se atribuyen sucesivamente a un enfoque variable de un valor fijo, de una manera tal que termine por diferir de él.

Sin embargo fue hasta que **Karl Weierstrass** (1815-1897) contrasta las palabras de **Cauchy** con la definición pulida sobre límites:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para cada $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta$

entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Cuando el siglo XIX se convirtió en el XX, los matemáticos tenían motivos para felicitarse. El cálculo había estado alrededor por más de dos siglos, sus fundamentos ya no se sospechaban y muchas de sus preguntas abiertas habían sido resueltas. El análisis había recorrido un largo camino desde los primeros días de **Newton** y **Leibniz**.

Entonces **Henri Lebesgue** (1875-1941) entró en escena, en 1902, revolucionó la teoría de la integración y, por extensión, el análisis real en sí mismo. Para tener una idea de su logro, realizamos una revisión rápida de la integral de **Riemann** antes de examinar la ingeniosa alternativa de **Lebesgue**. (Dunham, 2005)

En una monografía de 1904, **Lecons sur l'integration** (Lecciones de integración), que surgió de su disertación, **Lebesgue** describió su objetivo inicial: "Primero deseo unir números a los de los análogos de sus longitudes", demostrando que la longitud de la suma de pares de intervalos abiertos era igual a la suma de la longitud de la suma de pares de intervalos cerrados.

Ahora se muestra la idea de la integral de Riemann, lo que significaba cuando fue desarrollada y la ingeniosa idea que representaba en esa actualidad.

2.1.2. La primera aparición de la integral de Riemann.

En su **Habilitationsschrift**[1] de 1854, una disertación de alto nivel requerida para profesores de universidades alemanas, **Riemann** declaró el tema simplemente: "¿Qué se puede entender por $\int f(x)dx$?". Suponiendo que f delimitara $[a,\ b]$, procedió con su respuesta; primero el planteo que se toma una secuencia de valores $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ en el intervalo y sean divisiones a las cuales les llamo particiones.

En primer instancia denoto las longitudes de los intervalos resultantes de la desigualdad por $\delta_1 = x_1 - a\,, \delta_2 = x_2 - x_1$ sucesivamente hasta $\delta_n = b - x_{n-1}$. Luego definió valores como valores de una sucesión entre 0 y 1, de tal forma que $x_{k-1} + \varepsilon_k\delta_k$ se encuentra entre $x_{k-1} + 0\delta_k = x_{k-1}$ y $x_{k-1} + 1\delta_k = x_{k-1} + (x_{k-1}, x_k) = x_k$.. En otras palabras, $x_{k-1} + \varepsilon_k\delta_k$ se encuentra siempre en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Por lo que consecuentemente se introdujo que:

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

El lector puede reconocer esto como lo que ahora (apropiadamente) llamamos una suma de **Riemann**. Como se ilustra en la siguiente (**figura 1)** donde el rectángulo tiene base δ_k y altura $f(x_{k-1} + \varepsilon_k\delta_k)$.

[1] Habilitationsschrift es la más alta calificación académica que una persona puede alcanzar en ciertos países de Europa y Asia. Obtenida después de un doctorado, la habilitación requiere que el candidato escriba una segunda disertación, revisada y defendida ante un comité académico en un proceso similar a la disertación doctoral de Francia.

Esta es la primera aparición de la integral de Riemann, ahora destacada en cualquier curso de cálculo y, muy probablemente, en cualquier introducción al análisis real. El cual muestra la idea intuitiva que dio lugar sobre los avances de Newton y Leibniz en la construcción de una curva con rectángulos que trataran de aproximar el área de la gráfica.

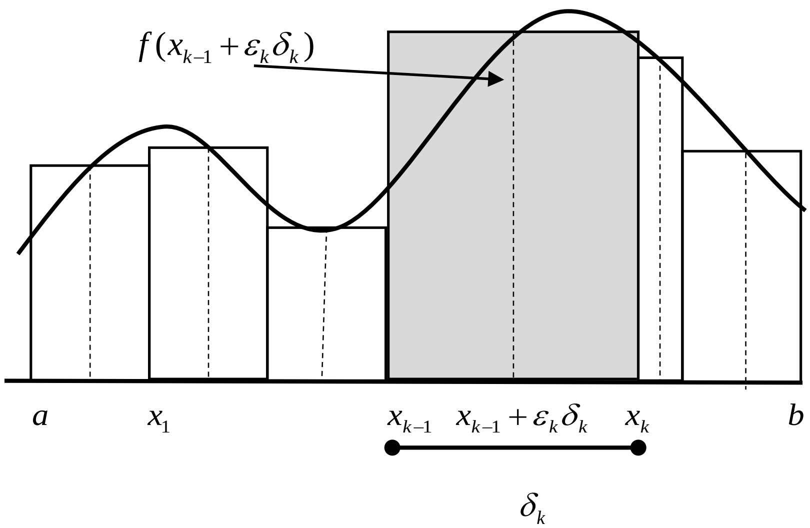


Figura 1. Primera Aparición de la integral de Riemann.

Así $x_{k-1}+\varepsilon_k\delta_k$ es como, la interpretación de la integración tuvo lugar de forma analítica, primeramente, por los estudios de **Cauchy**, sobre funciones, y de los cuales había generado una especie de línea la cual **Riemann** siguió, además de la introducción de mejoramiento de la técnica planteada por **Newton** y **Leibniz**.

Así pues apareció la primera formulación de lo que sería el área bajo la curva a través de Sumas planteada por Cauchy de forma formal, pero que solamente tomaba en consideración funciones continuas en un intervalo $I=[a,b]$, esta área estaba representada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k$$

La que luego fue reemplazada por su sucesor en esta materia, Riemann quien años después empleara una modificación de esta sumatoria, suponiendo lo anteriormente planteado donde se explica que por lo que la que el área bajo la curva quedo calculada por la formula.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k$$

La diferencia entre ambas es que, Cauchy tomo solo el valor inicial del intervalo para ser evaluado, sin embargo Riemann pensó más en una función a trozos de longitud muy pequeñas en ordenadas $[x_{k-1}, x_k]$, tal que el error entre la función real f y la buscada fuese menor que ε.

2.1.3. Definiciones Preliminares de La Integración

Las siguientes son algunas de las definiciones primordiales para la construcción de la integral o la obtención de los resultados de la misma, todas estas son de carácter básico, sin embargo, se presentan con el objetivo que el lector tenga a su disposición todos los conceptos necesarios para su completa comprensión.

2.1.3.1. Intervalos y elementos notables

Los intervalos, (Abiertos, semi abiertos y cerrados), han sido de gran estudio desde hace varios siglos, y es que son uno de los objetos principales en el estudio de la integración, no como un intervalo como tal y su implicación como un conjunto de números ordenados numéricamente, sino más bien como como conjuntos numéricos cualquieras que tienen ciertos puntos notables sobre los cuales inicialmente se sentaron las bases de tal integración. Tales conceptos son:

Definición 2.1.3.1.1.

Sea $X \subset R$, si $\exists M \in R : x \leq M, \ \forall x \in X$, entonces, *X* se llama acotado superiormente. Si $\exists m \in R : m \leq x, \ \forall x \in X$, entonces, *X* se llama acotado inferiormente.

Puesto que *X* es un conjunto arbitrario, puede suceder que este acotado inferiormente, como el intervalo semi-abierto $[a,\infty)$, superiormente como el intervalo $(\infty, a]$, o como el intervalo $[a,b]$ que está acotado por ambos lados.

Evidentemente *M* es un límite superior y que *m* es un límite inferior para cualquier subconjunto no vacío de ***R*** en general, gran cantidad de subconjuntos deberán tener un límite inferior y un superior.

Definición 2.1.3.1.2.

Sea $X \subset R$. Se dice que *X* es acotado si y solo si es acotado superiormente e inferiormente.

La existencia de los números *m* y *M* permite estudiar la acotación de *X*, sin embargo, existe infinidad de números que pueden ser llamado de esta forma, por lo cual es necesario definir que:

Definición 2.1.3.1.3.

Sea $X \subset R$. Se dice que $M \in R$ es la cota superior de *X* si $x \leq M, \ \forall x \in X$, además de que $m \in R$ es la cota inferior de *X* sí $m \leq x, \ \forall x \in X$.

De forma análoga, se supone que si *X* es acotado, tiene cota inferior y superior verificando que $m \leq x \leq M, \ \forall x \in X$, e igualmente de manera recíproca. Luego, considerando nuevamente que existe infinidad de cotas verificando la definición, es apropiado definir las cotas más relevantes:

Definición 2.1.3.1.4.

La menor de las cotas *M*, de *X* se llama **supremo de *X***, y se denota por $\sup\{X\}$. Así mismo la menor de las cotas *m*, de *X* se llama **ínfimo de *X***, y se denota por $\inf\{X\}$.

Estableciendo estas definiciones sobre un conjunto arbitrario *X*, es inminente establecer la siguiente relación entre el supremo, $\sup\{X\}$ y el ínfimo, $\inf\{X\}$ y cualquier $\forall x \in X$. Es decir que:

$$\inf\{X\} \leq x \leq \sup\{X\}$$

Teorema 2.1.3.1.1.

Sea $P \subseteq R$ un conjunto no vacío.

(i) Si $M \subseteq R$ es finito, entonces $M = \sup\{P\}$, si y solo si *M* es el límite más alto de *P* y para cada $\varepsilon > 0$ (muy pequeño), existe un número $\delta \in P$ dependiendo de δ tal qué $M - \varepsilon < \delta \leq M$.

(ii) Si *m* es finita, entonces $m = \inf(P)$ sí y solo si *m* es el límite mínimo de *P* y para cada $\varepsilon > 0$ (muy pequeño) existe un número $\delta \in P$ tal que $m < \delta \leq M + \varepsilon$.

<u>Demostración</u>:

Se puede probar la parte (i) del teorema, con lo que la parte (ii) seguiría con la misma técnica de demostración. Para esto se supone $M = \sup\{P\}$, donde *M* es finito. Entonces *M*, sigue siendo el mínimo límite superior de *P*. Por tanto *M* es el límite superior de *P*, además sea $\varepsilon > 0$ un número real, entonces para $M - \varepsilon < M$, significa que $M - \varepsilon$ no puede ser un límite superior ya que no es mayor que *M* ya que este es el mínimo límite superior. Además existe un numero $\delta \in P$ tal que este es mayor que $M - \varepsilon$, pero no es mayor que *M*.

Otra manera de ver la demostración es que, si se supone que *M* es finito, y es el límite superior de *P*, para cualquier número real $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta \in P$ tal que $M - \varepsilon < \delta \leq M$. Sea *K* un elemento finito de *R* de tal forma que $K < M$ lo que implica que

$M - K > 0$, y tomando que $\varepsilon = M - K$ tenemos que existe un $\delta \in P$ tal que $M - (M - K) < \delta \leq M \Rightarrow K < \delta \leq M$, entonces K no puede ser el límite superior de P.

Ahora, considerando como caso particular un intervalo cerrado (que son los de interés en la integración de "**Riemann**"), resulta ser que estas definiciones anteriormente descritas, se cumplen completamente, aún más, los intervalos estudiados por Riemann traen consigo las siguientes definiciones:

Definición 2.1.3.1.5.

Sea $I = [a,b]$, un intervalo finito, y sea el conjunto de puntos $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ que cumplen la desigualdad $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, es llamada partición de $I = [a,b]$. Denotamos $[x_{k-1}, x_k]$, como el intervalo k-esimo de P además denotamos todas las posibles particiones sobre $I = [a,b]$ cómo $Q(a,b) \Rightarrow P \in Q[a,b]$.

Ahora considerando la diferencia $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, esta mide la longitud del segmento $[x_{k-1}, x_k]$ de lo cual $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$.

La diferencia que puede tener la misma longitud o diferente, teniendo en cuenta que el conjunto de puntos sobre el intervalo $I = [a,b]$ es arbitrario. Además que la suma de todas estas posibles particiones debe dar como tal intervalo $I = [a,b]$, es necesario que P sea parte de la unión de los k-esimos intervalos. Por tal, es necesario definir ahora que:

Definición 2.1.3.1.6.

Sea $P \in Q[a,b]$, se dice que P' es un refinamiento de P, sí $P' \supset P$. Dada $P_1, P_2 \in Q[a,b]$ se dice que P' es un refinamiento común sí. Además que $P_1 \cup P_2 = P'$

2.1.3.2. Funciones

Naturalmente, las funciones se definen a partir de conjuntos importantes, dominio (considerando ahora como $X = [a,b] = I$), e imagen Y. debido a esto se extienden todas las definiciones consideradas anteriormente, solo que se hacen diversas consideraciones. Para comenzar es necesario definir el concepto más básico bajo el cual se desarrollaran gran cantidad de propiedades, además como base de estudio como tal:

Definición 2.1.3.2.1.

Una aplicación de un conjunto $X \subset R$ en R, es decir una correspondencia que a todo número real $x \in X$ asocia otro número real $y \subset Y$, constituye una función real definida en un conjunto X y que toma sus valores sobre Y. De tal forma que

$$f : X \to Y$$

Llamada función que va del conjunto X a Y.

Dado que estos conceptos son pertenecientes a los estudios anticipados de las matemáticas básicas, es fácil reconocer que el conjunto X es llamado conjunto independiente que para la conveniencia de este estudio cumple con las **definiciones 2.1.3.1.2**, **definición 2.1.3.1.4** de manera puntual, así mismo para el conjunto Y, llamado conjunto dependiente.

Definición 2.1.3.2.2.

Sea $f : X \to Y$, se dice que f, definida sobre $I = [a,b]$ se llama acotada superiormente sí $\exists M \in R : f(x) \leq M, \forall f(x) \in Y$. Si $\exists m \in R : m \leq f(x), \forall f(x) \in Y$, se llama acotada inferiormente.

Dado que las funciones también forman partes de conjuntos, y sabiendo que la función f tiene un **ínfimo** y un **supremo** en un intervalo X inmediatamente podemos hablar del ínfimo y supremo de una función:

Definición 2.1.3.2.3.

Sea $f : X \rightarrow Y$. La menor de todas las cotas *M*, de *Y*, se llama **supremos de *f* (*x*)** y se denota por $\sup_X \{f\}$. Así mismo la menor cota *m*, de *Y* se llama **ínfimo de *f* (*x*)** y se denota por $\inf_X \{f\}$

De tal manera que también es preciso plantear que:

$$\inf_X \{f\} \leq f(x) \leq \sup_X \{f\}$$

Tal desigualdad nos permite definir algunas propiedades importantes las cuales se obtienen debido a la estructura de la función *f*, estas son:

Definición 2.1.3.2.4.

Sea $f, g : X \rightarrow Y$, funciones acotadas. Entonces sobre un intervalo $I = [a, b]$, $f + g$ es acotada y:

$$\inf_X \{f\} + \inf_X \{g\} \leq \inf_X \{f + g\}$$

$$\sup_X \{f\} + \sup_X \{g\} \leq \sup_X \{f + g\}$$

Hasta ahora, todas las definiciones planteadas corresponden a la acotación de intervalos y funciones. Sin embargo, aunque lo anterior es de extrema relevancia es necesario otros conceptos como lo son la monotonía de una función, continuidad entre otras, por tal cosa, ahora se define:

Definición 2.1.3.2.5.

Sea una función $f : X \rightarrow Y$, decimos que *f* es monótona creciente si $f(x_1) \leq f(x_2)$ cuando $x_1 \leq x_2$. La función se llama monótona decreciente cuando $f(x_1) \geq f(x_2)$ si $x_1 \leq x_2$, si la función es monótona creciente o decreciente solamente se le puede llamar monótona.

Particularidades:

i. La función $|x|$ no es monótona creciente ni monótona decreciente

ii. La función constate es a su vez monótona creciente y monótona decreciente.

Hablando de la particularidad (i), se puede expresar que hay funciones que pueden definirse como monótona creciente o decreciente en un determinado intervalo, que conviene más que en toda la recta real, así la función $|x|$ es monótona decreciente en el intervalo $(-\infty,0]$ y monótona creciente en el intervalo $[0,+\infty)$.

Teorema 2.1.3.2.1.

Sea $f : X \to Y$ una función monótona, entonces para toda $t \in R$, $f(t^-) \wedge f(t^+)$, existe y es finita, además $f(\infty^-) \wedge f(\infty^+)$ existen pero no son necesariamente finitos. Para esto se prueba que para toda $t \in R$:

(i) Si *f* es monótona creciente entonces $f(t^-) \leq f(t) \leq f(t^+)$

(ii) Si *f* es monótona decreciente entonces $f(t^-) \geq f(t) \geq f(t^+)$

<u>Demostración</u>:

Supongamos que *f* es monótona decreciente, y sea un *t* un número real entonces como se había planteado $m = \inf\{f(x) : t < x\}$ y $M = \sup\{f(x) : x < t\}$. Ahora *f* es finita, y desde que *f* es monótona creciente, es la cota inferior de $f(x) : t < x$, y una cota superior de $f(x) : x < t$, lo que implica que *m, M* son finitas y:

$$M \leq f(t) \leq m$$

Ahora si se toma un x_1, x_2 con $t < x_1 \wedge x_2 > t$ tal que $m \leq f(x_1) < m + \varepsilon$ $\wedge M - \varepsilon < f(x_2) \leq M$ Como *f* es monótona creciente y *m* es la cota inferior de $f(x) : x < t$ se sigue que:

$$t < x < x_1 \Rightarrow m \leq f(x) \leq f(x_1) < m + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - m| < \varepsilon$$

Similarmente

$$x_2 < x < t <\Rightarrow M - \varepsilon < f(x_2) \leq f(x) < M \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$$

Corolario 2.1.3.2.1

Si *f* es monótona creciente y *a, b* son elementos de *R* con $a < b$ entonces $f(a^+) \leq f(b^-)$

Si *f* es monótona decreciente y *a, b* son elementos de *R* con $a < b$ entonces $f(a^+) \geq f(b^-)$

Demostración:

Demostrando la primera parte del corolario, sea *f* una función creciente se ha demostrado anteriormente con el **teorema 2.1.3.2.1.** Qué $f(a^+) = \inf\{ f(x) : a < x\}$ y $f(b^-) = \sup\{ f(x) : x < b\}$, ahora dado que $a < b$, existe un ***y*** que pertenece a los números reales tal que $a < y < b$ lo que implica $f(a^+) \leq f(y) \leq f(b^-)$ por tanto $f(a^+) \leq f(b^-)$.

Ahora bien, es necesario hablar sobre la constancia de los valores de *Y* en la función y de su existencia en el intervalo [*a*, *b*], ya que si la función es monótona, entonces los números reales $f(t^-)$, $f(t)$, $f(t^+)$ existen, de esta manera se deduce que las únicas continuidades que puede tener una función son los saltos.

Esta última deducción nos lleva a que:

Teorema 2.1.3.2.2.

Si $f : X \rightarrow Y$ es una función monótona, entonces el conjunto de puntos en el cual *f* es discontinua, es no vacío, finito o contable infinito

Demostración:

Si *f* es monótona decreciente, entonces –*f* es monótona creciente y tiene los mismos puntos de discontinuidad de *f*.

Sea *W* el conjunto de puntos en el cual *f* es discontinua, y supongamos que *W* es un conjunto no vacío, entonces para cada *x* que pertenece a *W* tenemos que por el **teorema 2.1.3.2.1.** $f(a^-) < f(b^+)$ Además existe un racional r_x tal que $f(a^-) < r < f(b^+)$. Además si tenemos que $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1{}^+) < f(x_2{}^-)$ por lo que sí $x_1, x_2 \in W$, tenemos los números $r_{x1} < r_{x2}$ que son asociados con cada x de W de distinto números racionales.

Desde que el conjunto de todos los racionales pueden ser enlistados como una sucesión de números y con el conjunto de $\{r_x : x \in W\}$ pueden ser enlistados como una sucesión (finita o infinita), podemos enlistar los numero de W en el mismo orden que los números racionales por lo que se concluye que W es no vacío, finito o infinito contable.

Ahora, presentar la definición de continuidad merece mucha atención, pues de esta se tienen formulaciones equivalentes utilizados en los cursos de cálculo, sin embargo teniendo en cuenta que este estudio parte del punto de vista del análisis, entonces se expone de la siguiente manera:

Definición 2.1.3.2.6.

Si $f : X \to Y$ y $x_0 \in X$. La función se llama continua en x_0 si para cada $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Considerando a la continuidad como una de las propiedades esenciales en el estudio de las funciones, pues la definición nos refiere que pequeñas variaciones en x no generaran más que pequeñas variaciones en Y. debido a esto es que muchos problemas, como el cálculo de área y el trazo de tangentes está basado en aproximaciones que se pueden hacer gracias a ello.

Ejemplo 1:

La función $f(x) = (x^2 - 5)/(x - 4)$ es continua en $x = 5$ desde que el limite cuando x tiene a 5 existe. Por el contrario la función f no es continua en $x = 4$ porque el limite no tiene valor.

Prueba:

En este caso $a = 5$, entonces en $f(x) = (x^2 - 5)/(x - 4)$, si se escoge cualquier $\varepsilon > 0$ y se prueba que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ entonces:

$$= \left| \frac{x^2-5}{x-4} - 20 \right| < \varepsilon, o \quad \left| \frac{x^2-5-20x+80}{x-4} \right| < \varepsilon$$

$$= \quad \left| \frac{x^2-20x+75}{x-4} \right| < \varepsilon = \quad \left| \frac{(x-5)(x-15)}{x-4} \right| < \varepsilon$$

$$= | x-5 | \left| \frac{x-15}{x-4} \right| < \varepsilon$$

$$= | x-5 | < \varepsilon \left| \frac{x-4}{x-15} \right| \rightarrow \frac{1}{10} \text{ Para acercar el valor de } x \text{ a } 5$$

Por tanto:

$$| x-5 | < \frac{\varepsilon}{10} = \delta \text{ Para cada } \delta > 0 \text{ y } | x-5 | < \delta$$

Aparte de necesitar una función continua en un x_0, también es necesario saber que la función tiende o no a un valor que pueda ser determinado en este punto.

Por tanto ahora se necesita definir que la variación de la función sea acotada y que no trascienda el límite de lo calculable, si es que hablamos de área bajo la curva, por tanto:

Definición 2.1.3.2.7.

Sea *f* una función sobre $I = [a,b]$ con $\Delta f(x_k) = f(x_k) - f(x_{k-1})$ donde existe un numero M tal que $M > 0$ de tal forma que $\sum | f(x_k) - f(x_{k-1}) | \leq M, \forall P \in Q[a,b]$.

Entonces se puede decir que *f* es de variación acotada y la denotamos con $f \in VA[a,b]$.

Teorema 2.1.3.2.3.

Si *f* es monótona sobre $I = [a,b]$, que no trasciende el límite de lo incalculable, entonces $f \in VA[a,b]$.

Demostración:

Sea f una función monótona y creciente o decreciente en $I=[a,b]$.

Si f es creciente en $I=[a,b]$ entonces para cada partición en este intervalo se tiene por la **definición 2.1.3.2.7**. Que:

$$\Delta f(x_k)=f(x_k)-f(x_{k-1})\geq 0$$

Por tanto

$$\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k)-f(x_{k-1})\right]=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)-\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})$$

$$=f(b)-f(a)$$

Donde se plantea que $f(b)-f(a)=M$, para todas las posibles particiones, además $f\in VA[a,b]$ se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta f(x_k)\right|\leq M$$

Para cualquier intervalo I sea una colección P de sub intervalos de I de tal forma que $P=\{I_1,\, I_2,\, ...,I_n\}$ de intervalos tal que:

(i) $P=\{I_1\cup I_2\cup ...\cup I_n\}\subseteq I$

(ii) Para cualquier $j,k=1,\, 2,\, ...\, ,\, n/\; j\neq k$ para lo cual $I_j\cap I_k$ es vacía o consiste en un único punto de intersección, que es el punto final de I_j y el inicial I_k .

Definición 2.1.3.2.8.

Sea f la función y sea $P=\{I_1, I_2, ..., I_n\}$ una subdivisión parcial del intervalo *I*, para cada $j=1, 2, ... , n$ y sea que tiene puntos finales a_j, b_j entonces podemos asociar la función *f*, *I*, el conjunto *P* con la expresión definida por:

$$VA(f,I)=\sum_{j=1}^{n}\left| f(b_j)-f(a_j)\right|$$

Se considera ahora el conjunto $VT(f,I)=VA(f,I)$ donde habrá P como divisiones parciales del intervalo *I* obviamente *VT* no puede ser negativa, y su cota inferior es el valor cero. La cota superior de este conjunto es llamada ***Variación Total*** de *f* sobre *I*, y la denotaremos como $V(f,I)$, además que este valor se encuentra $0\le V(f,I)<\infty$.

Si $VT(f,I)$ es finita para una función en particular, se dice que esta función es de variación acotada sobre *I*. Hay una conexión importante entre las funciones de variación acotada y las funciones monótonas, como se había demostrado a través de la **definición 2.1.3.2.5**. Y el **teorema 2.1.3.2.1** una función *f* es monótona creciente sobre *I* si $f(x_1)\le f(x_2)$ cuando $x_1\le x_2$ y monótona decreciente cuando $f(x_1)\le f(x_2)$ si $x_1\le x_2$, en estos caso se había recomendado solo hablar de que la función es monótona sobre *I*. Además si *f* es monótona sobre *I* donde *I* es un intervalo con puntos extremos *a*, *b* entonces $f(t^-)\wedge f(t^+)$ existe para toda *t* tal que $a\le t\le b$ y los valores de $f(a^+)\wedge f(b^-)$ existen aunque no son necesariamente finitos, pero son finitos si y solo si $\sup\{f(x):x\in I\}$ y $\inf\{f(x):x\in I\}$ son finitos.

Lema 2.1.3.2.1.

Sea *I* un intervalo y *f* una función definida en *I* de variación acotada sobre *I*. Para cualquier $x \in I$ denotado por I_x en el intervalo $\{T : T \in I,\ t \in T,\ t \leq x\}$, se tiene:

(i) $0 \leq V(f, I_T) \leq V(f, I)$ para toda $x \in I$.

(ii) Sea g una función definida como $g(x) = V(f, I_T) / \forall x \in I$, esta es monótona creciente sobre *I*.

Demostración:

La parte (i) es clara de comprender cuando *f* es monótona, la variación en un pequeño sub intervalo siempre será menor que la variación en todo el intervalo completo.

Para probar la parte (ii) sea de tal forma que I_{T1}, I_{T2} . Entonces $I_{T1} \subseteq I_{T2}$, ahora para cualquier división parcial de I_{T1} y de I_{T2}, por lo tanto $V(f, I_{T1}) \leq V(f, I_{T2})$ con lo que se prueba que es monótona creciente.

Luego que se han introducido los conceptos básicos bajo los cuales se trabajara en la integral, ahora se puede introducir como tal la integral de Riemann.

2.1.4. La integral de Riemann

El desarrollo de la rigurosa teoría de la integral definida en el siglo XIX está asociado particularmente con el trabajo de Augustin-Luis Cauchy (1789-1857) en Francia, y Bernhard Riemann (1826-1866) en Alemania.

Particularmente Riemann tuvo una idea muy intuitiva para tratar de aproximar el área de una curva a través de una especie de rectángulos, muy ligados a funciones separadas en pequeñas particiones de longitud en *x* que tendían a cero.

Para ello, será necesario definir un conjunto de funciones especiales y de gran importancia porque técnicamente son la base bajo las cual se centras las sumas integrales, además del pilar de la probabilidad, y finalmente serán utilizadas más generalmente en el planteamiento de las funciones simples.

2.1.4.1. Funciones a paso

Definición 2.1.4.1.1.

Sea $I=[a,b]$, una función *f* es llamada una **función a paso** si existe una colección finita $\{I_1, I_2, ..., I_n\}$ de subintervalos disjuntos tal que $I=\{I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n\}$ y un conjunto $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$ finito y de no nulos números reales tales que

$$f(x)=\begin{cases} c_j, & si\ x \in I_j,\ j=1, 2, 3, ... \\ 0, & si\ x \notin I \end{cases}$$

En otras palabras *f* es una función constante no cero sobre cada intervalo I_j, y cero en cualquier otro lugar distinto del intervalo *I*, el conjunto *S* de todos los c_j es llamado el soporte de *f*. Es claro que el conjunto *S* es no vacío ya que no posee funciones ceros, además es una función en los que sus valores son constantes.

Definición 2.1.4.1.2.

Sea $I=[a,b]$ un intervalo cerrado de números reales. Una función *f* se define como Riemann Integrable sobre $I=[a,b]$ si y solo si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe una función que denotaremos $g^{\varepsilon}, G^{\varepsilon} : I \to R$ tal que:

$$g^{\varepsilon} \leq f(x) \leq G^{\varepsilon}$$

Y el área $A[f(x)]$ se puede representar mediante:

$$A[g^{\varepsilon}] \leq A[f(x)] \leq A[G^{\varepsilon}]$$

Una función $f: I \to R$ para el cual el conjunto $\{f(x): x \in I\}$ tiene una cota superior y una cota inferior a lo que se llamara acotamiento de *f*.

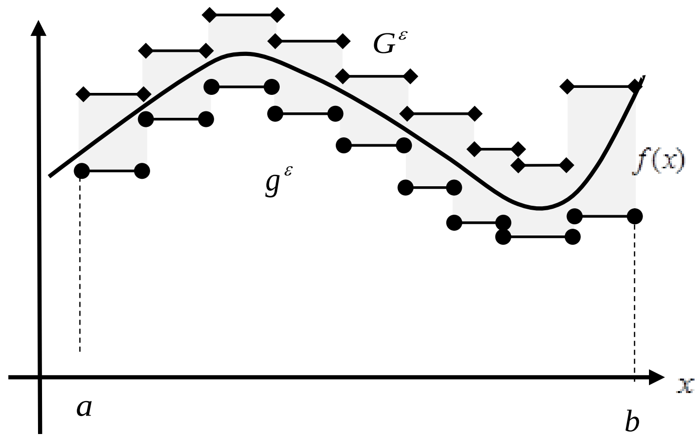


Figura 2. La definición de la función a pasos ideada por Riemann.

Es claro que para que la función sea integrable debe estar acotada en un intervalo *I*, y que:

$$A(f) = \sup\{A(g): g:[a,b] \to R,\ \text{Es una función a pasos, } g \le f \text{ sobre } [a, b].$$

$$A(f) = \inf\{A(G): G:[a,b] \to R,\ \text{Es una función a pasos, } G \ge f \text{ sobre } [a, b].$$

La definición de Riemann extiende el concepto del área bajo la curva de f a una amplia clase de funciones a pasos usando las anteriores para aproximar a *f*. La anterior es esencialmente la definición de la integral que se utiliza en el cálculo elemental.

Dada una función acotada $f: I \to R$ **donde el conjunto *X* corresponde al intervalo $\boldsymbol{I = [a, b]}$ y el conjunto *Y* corresponde al conjunto de números reales $\boldsymbol{f(x_0)}$ con $\boldsymbol{x_0 \in I}$**, utilizando esta notación para esta integral de aca en adelante, la función $f: I \to R$ es definible por funciones a pasos de la **definición 2.1.4.1.2.** Basado en los máximos y mínimos valores de funciones desarrolladas en sub intervalos para la partición P del intervalo $I = [a,b]$ que se planteó anteriormente en la **definición 2.1.3.1.5**. Con un conjunto finito de números $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ donde:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Definición 2.1.4.1.3.

Sea $I_1 = [x_0, x_1]$, $I_2 = (x_1, x_2], \ldots, I_n = (x_{n-1}, x_n]$, para $1 < k \leq n$, tenemos sub intervalos de *I* asociados a cada partición *P*. Sea $\Delta_k = \left| x_k - x_{k-1} \right|$ definida como la longitud de los sub intervalos. Si $f : I \to R$ está acotada sobre *I*, entonces dada la partición *P* de *I*, las funciones a paso $g^{\varepsilon}, G^{\varepsilon} : I \to R$ tales que $g_P < f(x) < G_P$ sobre *I* pueden ser construidas, entonces:

$$M[f; I] = \inf_{x \in I_k} \{ f(x) : x \in I \}$$

$$m[f; I] = \sup_{x \in I_k} \{ f(x) : x \in I \}$$

La anterior definición permite conocer cuál es el límite de altura que puede tomar la función, superior e inferiormente. En cada uno de los intervalos se tendrá una longitud $\Delta_k = \left| x_k - x_{k-1} \right|$ en la cual se comportara cada uno de los límites anteriormente expresado, entonces

Definición 2.1.4.1.4.

Sea $g^{\varepsilon}, G^{\varepsilon} : I \to R$, en la que se puede asignar una función a pasos en cada sub intervalo I_k, entonces:

$$g_P(x) = \begin{cases} m_1, & si \ x \in I_1 \\ m_2, & si \ x \in I_2 \\ \vdots & \vdots \\ m_n, & si \ x \in I_k \end{cases} \qquad G_P(x) = \begin{cases} M_1, & si \ x \in I_1 \\ M_2, & si \ x \in I_2 \\ \vdots & \vdots \\ M_n, & si \ x \in I_k \end{cases}$$

Sea $U(f; I) = A(G^{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k$ y $L(f; I) = A(g^{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k$

La anterior definición sirve como base para la construcción de rectángulos dentro de la gráfica que aproximan el área.

2.1.4.2. Sumas de Darboux

Dado que el intervalo $I=[a,b]$ puede tener una subdivisión, siendo este subconjunto finito de $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$, tal que $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ explicado en la **definición 2.1.3.1.5.**

Entonces los intervalos cerrados $[x_{k-1},x_k]$, llamados intervalos componentes de P, se tiene que estos son las bases de los rectángulos de una función f de altura $f(t_k)$ donde $x_k\in[x_{k-1},x_k]$ entonces el área bajo la curva estaría dada por $\sum f(x_k)\left|x_k-x_{k-1}\right|$ puesto que los rectángulos no se inscriben uno encima de otro. Luego al igual como se planteó en la **definición 2.1.4.1.3**. Podemos utilizar $\sup\{f(x)\}$ para encontrar las máximas alturas y $\inf\{f(x)\}$ para obtener las mínimas alturas. Ante esto podemos definir:

Definición 2.1.4.1.5.

Sea f definida y acotada en $I=[a,b]$, para una división arbitraria $I_k=[x_{k-1},x_k]$, se introducen las notaciones $m_k=\inf_{[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\}$, $M_k=\sup_{[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\}$.

$$U(P,f)=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+...+M_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k$$

$$L(P,f)=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+...+m_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k$$

$U(P,f),L(P,f)$ Son llamadas sumas superiores e inferiores respectivamente. En la que su representación actual se muestra como $\inf\{U(P,f)\}=\overline{\int} f(x)dx=\overline{I}=\sup\{U(P,f)\}$

$=\underline{\int} f(x)dx=\underline{I}$, a lo anterior se le llama integrales superiores e inferiores de Darboux.

2.1.4.2.1. Propiedades de las sumas de Darboux.

Se enuncian las propiedades básicas que cumplen las sumas generadas por los rectángulos por debajo y por encima de la función $f(x)$:

1. Sea el intervalo $I = [a,b]$, además sean los sub intervalos I_1, I_2, si la división de I_2 se ha obtenido de la división de I_1, agregando nuevos puntos en el intervalo (Es decir se han obtenido mediante la subdivisión de I_1), entonces la suma inferior s_2 de I_2 no es menor que la suma inferior s_1 de I_1. De igual forma pasa con las sumas superiores. Es decir $s_1 \leq s_2$, $S_1 \leq S_2$.
2. La suma inferior de una división arbitraria no supera la suma superior de la división arbitraria.
3. Sean s y S el conjunto de sumas inferiores y superiores de todo género posible para las divisiones cualesquiera de $I = [a,b]$.

Los números:

$$\bar{I} = \inf\{U(P, f)\}, \ \underline{I} = \sup\{L(P, f)\}$$

Para todas las divisiones las llamaremos integrales inferiores y superiores de Darboux. Respectivamente la integral inferior de Darboux no puede exceder a la superior, es decir $\underline{I} \leq \bar{I}$.

Lema 2.1.4.2.1. (Lema de Darboux)

Sean s y S las sumas inferiores y superiores sobre un intervalo $I = [a,b]$, donde la variación respecto a I tiende a cero, entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} S = \bar{I}, \ \lim_{\Delta x \to 0} s = \underline{I}$$

Una función Riemann integrable sobre un intervalo $I=[a,b]$ es denotada como $\int_a^b f(x)dx$ tiene las características:

(i) Sí $\overline{I}=\inf\{U(P,f)\}\neq \underline{I}=\sup\{L(P,f)\}$, f no es integrable sobre $I=[a,b]$.

(ii) $\int_a^b f(x)dx$ es llamada la integral de Riemann.

Capitulo III

3.1. Diseño Metodológico

3.1.1. Tipo de estudio

La naturaleza de la investigación es de carácter descriptivo ya que se plantean los conceptos básicos que están involucrados en la construcción de la integral de Riemann, Riemann-Stieljes y Lebesgue. Además de las características que los diferencian de los demás tópicos, para ello se introducen los conceptos básicos con los que se hace la construcción teórica de las integrales hasta llegar a su análisis de propiedades y condiciones.

3.1.2. Recolección de Datos

La información fue recolectada durante el transcurso del año 2019. Esta se recolecto siguiendo el proceso explicado a continuación:

1. Se investigaron fuentes bibliográficas, con ayuda del tutor.
2. Se inspeccionaron fuentes institucionales y regionales, además del abordaje de la teoria en otras carreras universitarias.
3. Se hizo una exploración en sitios web y foros, documentos (libros digitales y monografías) especializados en los temas de estudio.

Estos documentos encontrados se podrían dividir en tres secciones, la primera en el área del cálculo como materia, la segunda en el área del análisis real, y la tercera desde el área de las estadísticas.

3.1.3. Análisis de la información

Teniendo la información revisada, se procedió a organizar esta de manera axiomática, siguiendo una serie de definiciones para obtener los resultados correspondientes, para ello debió seguirse un orden lógico y demostrativo de los conceptos básicos y las propiedades a utilizar.

Se trata de ubicar los resultados obtenidos de manera ordenada con sus explicaciones correspondientes que relacionen entre si las definiciones, teoremas, lemas y corolarios correspondientes.

Capítulo IV

4.1. Análisis y discusión de resultados

El problema de encontrar el área de un plano delimitado por líneas verticales $x = a$ y $x = b$, la línea horizontal $y = 0$ y la gráfica de la función no negativa $y = f(x)$ es muy antigua (aunque, por supuesto, no se ha establecido en esta terminología). Los griegos tenían un método que se había aplicado con éxito a casos como $f(x) = x^2$. Se sabe que este "método de exhaustivo o de agotamiento" ya se conoce como rectángulos y triángulos. Luego se tomó un límite apropiado para obtener el resultado.

En el siglo XVII, Newton y Leibnitz encontraron independientemente una manera fácil de resolver el problema. El área está dada por $F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada de f. Esta es la teoría fundamental del cálculo; reduce el problema de encontrar áreas a encontrar antiderivadas. Sin embargo ¿Qué es exactamente el área, de todos modos? Pero, en términos más generales, ¿cómo se puede definir $\int f(x)dx$ rigurosamente para una amplia gama de funciones como sea posible?

Si regresamos al capítulo II, en la sección donde se expone la primer idea de la integral realizada por Riemann, exactamente en la **figura 1**, se puede observar que la integral de Riemann $R(f, P)$ no está determinada completamente por la elección de f y P, sino que también lo hace de la elección del valor $\bar{x}_k$, ya que de este valor dependerá la altura del rectángulo que se obtiene en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Necesariamente para que la integral sea calculable, sabiendo que R es el valor del área bajo la curva, entonces podemos realizar la siguiente definición

Definición 3.2.1.

La función *f* es Riemann integrable sobre el intervalo $I = [a,b]$ si existe un número real R tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, talque sobre una partición P de $I = [a,b]$ donde $\|P\| < \delta$, y para la suma de la integral de Riemann de *f* relativa a $I = [a,b]$ se tiene que $|R(f,P) - R| < \varepsilon$.

La anterior definición nos lleva a conclusión que $\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P) = \int_a^b f(x)dx$

La definición de la integral de Riemann dada anteriormente tiene un inconveniente que comparte con todas las definiciones de límite: para demostrar que una función particular es integrable, primero se debe conocer el valor de $R(f,P) = \int_a^b f(x)dx$. La definición en sí misma no proporciona medios directos para encontrar *R* (*f*, *P*). Si nos restringimos por el momento a funciones no negativas, se puede obtener más información sobre el área *R* (*f*, *P*) considerando los rectángulos que se encuentran completamente debajo de la gráfica de *f* y los rectángulos cuyas partes superiores se encuentran arriba la gráfica de *f*. Entonces parecería razonable que el área *R* (*f*, *P*) se encuentre entre el área de los rectángulos interiores y el área de los rectángulos exteriores. De hecho, resulta que *f* es integrable si y solo si se pueden encontrar rectángulos internos y externos cuyas áreas totales sean arbitrariamente cercanas entre sí (como se planteaba anteriormente en las sumas de Darboux).

Es por ello que se necesitó la definición los conceptos generales de Δx_k que representan la base de los rectángulos, así mismo la altura de los rectángulos exteriores que define una función, a excepción de cierta ambigüedad en los límites compartidos entre dos rectángulos (y de manera similar para los rectángulos internos). Además, dicha función tiene una forma particularmente agradable. Por lo cual se hace la siguiente definición

Definición 3.2.2.

Una función a pasos g sobre el intervalo $I=[a,b]$ es Riemann integrable. Si $g(x)$ tiene la forma $g(x)=c_k$ para $x\in(x_{k-1},x_k)$ donde $(a=x_0,x_,..,x_n=b)$ es una partición de $I=[a,b]$, entonces

$$\int_a^b g(x)dx=\sum_{k=1}^{n} c_k\,(x_k-x_{k-1})$$

Debido a que se tiene dos tipos de funciones a pasos, una que está por encima de la función f y otra por debajo, se comprende que ambas áreas deben de tener distinta medida, sin embargo fue Darboux quien desarrollo la teoria sobre estas sumas utilizando el ínfimo y supremo de las sumas y llegando a la conclusión que ambas sumas debían de ser iguales para que la función fuese Riemann integrable.

Finalmente se puede plantear que estas sumas recibieron el nombre de las sumas inferiores y superiores de Darboux, y ambas convergían a

$$s\to \underline{I},\quad S\to \overline{I}$$

Y como se describió anteriormente con la **definición 2.1.4.1.5.** Y el **lema 2.1.4.2.1.**

$$s=L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$$

$$S=U(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})$$

La suma inferior $L(f,P)$ y la superior $U(f,P)$ son redes con particiones ordenadas en intervalos. Si f es la función en cuestión y $m\le f(x)\le M$, donde la suma inferior y superior son acotadas. Y estas convergen una a la otra, nos lleva a la integrabilidad de la función a través de sumas de Darboux y por tanto de Riemann. Es decir

$$\lim_{P\to 0} L(f,P)=\lim_{P\to 0} U(f,P)$$

4.1.1. La Integral de Riemann.

4.1.1.1. Condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad de Riemann.

Se considera primero el concepto de integral en sentido estricto, es decir, suponemos que las sumas convergen a la misma medida cuando Δx_k se hacen infinitamente pequeños. Se designa de esta forma la oscilación máxima de la función entre a y x_1, esto es, la diferencia entre su mayor y su menor valor en este intervalo, así sucesivamente, de tal forma que entre más pequeña sea Δx_k la diferencia disminuye siempre y cuando Δx_k sea infinitamente pequeña con esa magnitud.

Por tanto dado que Δx_k puede ser tan pequeña como se desee, es notable que cuando esta tiende a cero, la función a pasos anteriormente definida se ajusta más a la gráfica de *f*, por tanto las sumas $L(f,P)$, $U(f,P)$ generadas por las sumas inferiores y superiores se ajustan más a la función deseada.

Teorema 3.2.1.1.1.

Para que una función *f* acotada en un segmento $I=[a,b]$ sea integrable en este segmento, es necesario y suficiente, que $L(f,P)\leq U(f,P)$.

<u>Demostración:</u>

Sean $P_k \in I$ una colección de particiones tales que $P_{k+1} \in I$, entonces se tiene que

$$L(P_k, f) \leq L(P_{k+1}, f) \leq U(P_{k+1}, f) \leq U(P_k, f)$$

Ahora fijando P_k se tiene que $U(P_k, f) \leq U(P, f)$, es decir que toda suma superior es mayor o igual que cualquier suma inferior. Así $U(P_k, f) \leq \bar{I}(P, f)$, es decir que $\bar{I}(P, f)$ es una cota superior para $L(P,f)$. Por otro lado también se tiene que $L(P_k,f) \leq \underline{I}(P,f)$, es decir que $\underline{I}(P,f)$ es la mínima cota superior para $L(P_k,f)$, de esto se concluye que $L(f,P) \leq U(f,P)$.

Esto hace referencia que aunque las sumas inferiores y superiores tengan límites, estas no tienen que aproximarse entre sí, esto desde el punto de vista numérico, sin embargo, en el caso de la integración, se necesita que ambas sumas sean iguales para la existencia de la integral, con el fin de que cumpla la unicidad.

Teorema 3.2.1.1.2.

Para que una función acotada en un segmento $[a,b]$ sea integrable en este segmento, es necesario y suficiente que $\forall \varepsilon > 0$ se halle una división en (aunque sea solo una), para la cual:

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

Demostración:

Se había planteado una función $w[f;I] = M[f;I] - m[f;I]$, la cual llamaremos oscilación de la función en el segmento $[x_{k-1}, x_k]$. La condición anterior puede escribirse de la siguiente forma:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} w_k \Delta x_k < \varepsilon$$

La anterior demostración plantea que la aproximación entre las sumas superiores e inferiores debe de ser tan buena tal que la resta entre ambas nos genere un valor numérico tan pequeño que sea despreciable. Otra forma de entender ello, a través de forma numérica, es que el error de cálculo entre las sumas es muy pequeño que es técnicamente despreciable, sin embargo dado que ambas sumas tienden al mismo valor numérico, este número ε tiende a cero.

4.1.1.2. Propiedades de la integral de Riemann

Ahora se plantean las principales propiedades que cumple la integral de Riemann como tal, propiedades utilizadas de forma regular en cursos de cálculos y análisis. Solo que esta vez expresados formalmente.

Definición 3.2.1.2.1.

Sea f la función definida y continua en el intervalo $I=[a,b]$ entonces el valor la integral

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Esta corresponde al área de una línea que no corresponde geométrica con el concepto de rectángulo, por tanto es innecesaria una demostración, más que la noción de la geometría.

Definición 3.2.1.2.2.

Sea f la función definida y continua en el intervalo $I=[a,b]$ entonces el valor la integral

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Teorema 3.2.1.2.1. (Linealidad de la integral)

Sean f y g funciones definidas y continuas integrables en $I=[a,b]$. Entonces se entiende por linealidad de la integral como:

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1\int_a^b f(x)dx + c_2\int_a^b g(x)dx$$

Demostración:

Sea F y G las primitivas de f y g sobre $I=[a,b]$, entonces $H = c_1F + c_2G$ es la primitiva de $H = c_1 f + c_2 g$ entonces:

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = [c_1 F(x) + c_2 G(x)]\Big|_a^b$$

$$= c_1 \left[F(x)\right]_a^b + c_2 \left[G(x)\right]_a^b$$

$$= c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$$

Definición 3.2.1.2.3.

Si las funciones f y g son integrables en el intervalo $I = [a,b]$, resulta que la función $f(x)g(x)$, también es integrable en $I = [a,b]$.

Esto debido a que si la función f y g son continuas en el intervalo $I = [a,b]$ implica que el producto de las funciones también continua en ese intervalo, y por tanto también es integrable. Más adelante se mostrara detalladamente que el producto de dos funciones continuas como tal también es continuo.

Definición 3.2.1.2.4.

Sea la función $f(x) = c$, donde c es una constante en el intervalo $I = [a,b]$, entonces

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

Esta definición anterior es más fácil de comprender cuando observamos una función constante que puede ser representada por la única función a pasos c.

Definición 3.2.1.2.5.

Sea la función f continua en $I = [a,b]$ entonces $\int_a^b \{f(x) + c\}dx = \int_a^b f(x)dx + c(b-a)$, donde c es una constante.

Teorema 3.2.1.2.2.

Sea la función f continua e integrable en $I=[a,b]$, tendremos que la función $|f(x)|$ integrable en $I=[a,b]$ entonces

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx,\ a<b$$

Demostración:

Sean $f^+(x)$ y $f^-(x)$ definidas inicialmente como las partes negativas y positivas de una función. Además de ello estas funciones están definidas en el intervalo $I=[a,b]$ entonces se tiene que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx\right|$$

$$\leq \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

Este teorema se tratara de la misma forma en las demás integrales estudiadas.

Teorema 3.2.1.2.3.

Sea la función f continua e integrable en $I=[a,b]$, además sea c dentro de $I=[a,b]$ tal que $a<c<b$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Demostración:

Sea P_1, P_2 particiones que representan a $[a,c], [c,b]$ respectivamente, además $P=P_1\cup P_2$. Es decir que P consiste en la unión de los subconjuntos P_1, P_2 de manera que

$U(f,P)=U(f,P_1)+U(f,P_2)$, además que $U(f,P)\leq\int_a^b f(x)dx$, y dado que $P_1\in[a,b]$ y $P_2\in[a,b]$ se obtiene que:

$$U(f,P_1)+U(f,P_2)\leq\int_a^b f(x)dx\Rightarrow U(f,P_1)\leq\int_a^b f(x)dx-U(f,P_2)\ \textbf{(i)}$$

Además el sub intervalo $P_1\in[a,b]$ de la parte derecha de **(i)** forma un límite superior de $M(P_1)$ entonces:

$$\Rightarrow\inf\{U(f,P_1)\}\leq\int_a^b f(x)dx-U(f,P_2)$$

$$\Rightarrow\inf\{U(f,P_1)\}\leq\int_a^c f(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx-U(f,P_2)$$

$$\Rightarrow U(f,P_2)\leq\int_a^b f(x)dx-\int_a^c f(x)dx\ \textbf{(ii)}$$

Para toda partición $P_2\in[a,b]$ en la parte derecha de **(ii)** forman un límite superior de $M(P_2)$

$$\Rightarrow\inf\{U(f,P_2)\}\leq\int_a^b f(x)dx-\int_a^c f(x)dx$$

$$\Rightarrow\inf\{U(f,P_2)\}\leq\int_c^b f(x)dx\leq\int_a^b f(x)dx-\int_a^c f(x)dx$$

De lo cual:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

Para probar la desigualdad contraria:

Sea P una partición sobre el intervalo $I=[a,b]$, y sea Q la partición obtenida al agregar el punto c en $I=[a,b]$.

Sea P_1 parte de $I=[a,b]$ consistiendo todos los puntos de Q que están sobre $[a,c]$ y P_2 consiste en los puntos de Q que están sobre $[c,b]$, entonces:

$$\Rightarrow s(P) \leq s(Q) = s(P_1) + s(P_2) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow L(f,P) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ Para todas las particiones sobre } I=[a,b]$$

$$\Rightarrow \sup\{L(f,P)\} \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow \sup\{L(f,P)\} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Por tanto podemos concluir que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Definición 3.2.1.2.6.

Si f es integrable en el intervalo $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Definición 3.2.1.2.7.

Si f y g son integrables en el intervalo $[a,b]$ y $f(x) \geq g(x), \ \forall x \in [a,b]$ se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Teorema 3.2.1.2.4.

Sea la función f continua e integrable en $I=[a,b]$, si m y M son respectivamente los valores mínimos absoluto y máximo absoluto de la función en $I=[a,b]$ de tal forma que $m \le f(x) \le M$, para $a \le x \le b$, entonces

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Demostración:

Como f es continua en $I=[a,b]$, entonces se tiene que:

$\int_a^b mdx = m(b-a)$, si m es un mínimo absoluto de la función.

$\int_a^b Mdx = M(b-a)$, si M es un máximo absoluto de la función.

Como f es continua en $I=[a,b]$ se deduce que es integrable en $I=[a,b]$, además como $f(x) \ge m$, se tiene que $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b mdx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge m(b-a)$, de igual forma como $f(x) \le M$ se tiene que $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, combinando estas desigualdades se obtiene que

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Otra forma de demostración puede plantearse como:

Aplicando la **definición 2.1.4.1.5.** Y el **lema 2.1.4.2.1. (Lema de Darboux)**, Sea $S(P)=\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, $s(P)=\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$, además $m \le m_k \le M_k \le M$ se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n} m\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k$$

Para todas las posibles particiones P sobre $[a,b]$ se tiene que:

$$m\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \leq m(P) \leq M(P) \leq M\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k$$

$$m(b-a) \leq \sup[m(P)] \leq \inf[M(P)] \leq M(b-a)$$

Pero

$$\sup[m(P)] \leq \int_a^b f(x)dx \leq \inf[M(P)]$$

Por tanto

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Es muy claro que dado que f es acotada, además que existen los números m, M tal que $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a,b]$ por lo anterior que dado que $L(P,f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(P,f)$ según el **teorema 3.2.1.1.1.,** se tiene que

$$m(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq M(b-a)$$

Para todas las particiones P de $[a, b]$.

4.1.1.3. Algunos ejemplos de funciones Riemann integrables.

Ejemplo 2:

Para encontrar la integral de $\int_2^4 (x+1)$ se debe decidir en cuantas particiones se deber dividir el intervalo$[2,4]$, pero suponiendo que se habla de sumas superiores e inferiores, se necesita una cantidad de n segmentos iguales.

Por lo que se plantea $P_n : x_k = 2 + \frac{k}{n}(4-2) = 2 + \frac{2k}{n}, k = 0,1,2...n$

Se determina el supremo e ínfimo para las sumas.

La suma superior se puede plantear como:

$$U(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{2+2k}{n}\right)+1\right]\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}1+\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{6}{n}(n)+\frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$=6+\frac{2n+1}{n}$$

La suma inferior se puede plantear como:

$$L(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(2+\frac{2(k-1)}{n}\right)+1\right]\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}1-\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}1+\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{6}{n}(n)-\frac{4}{n^2}(n)+\frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$=6-\frac{4}{n}+2\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Cuando el valor de *n* tiende al infinito se obtiene la aproximación del área por:

$$\inf\{U(f,P)\}\leq\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n]=\lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{2n+1}{n}\right)=8$$

$$\sup\{L(f,P)\}\geq\lim_{n\to\infty}[L(f,P_n]=\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{4}{n}+2\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)=8$$

Por lo tanto

$$8\leq\sup\{L(f,P\}=\inf\{U(f,P)\}\leq 8$$

$$\sup\{L(f,P\}=\inf\{U(f,P)\}=8$$

Por lo tanto la función es Riemann integrable y $\int_2^4 (x+1)dx = 8$

Ejemplo 3:

Se muestra que la función constante c es integrable y que $\int_a^b c dx = c(b-a)$

Para cualquier partición sobre el intervalo $[a,b]$ tenemos que

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{N} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = c\Delta x_1 + c\Delta x_2 + ... + c\Delta x_n$$

$$= c(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n)$$

$$= c(b-a)$$

$$\underline{\int_a^b} c dx = \inf\left[U(f,P)\right] = c(b-a)$$

$$\overline{\int_a^b} c dx = \sup\left[L(f,P)\right] = c(b-a)$$

Por tanto

$$\underline{\int_a^b} c dx = \overline{\int_a^b} c dx = c(b-a).$$

Ejemplo 4:

Aproximar el área de la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo $1 \le x \le 3$ a través de las sumas de Riemann empleando las particiones dadas Δx_k y los valores de $\bar{x}_k$. (Ver grafica en **anexo 1**).

$x_0 = 1,\ x_1 = 5/3,\ x_2 = 9/4,\ x_3 = 8/3,\ x_4 = 3$

$\bar{x}_1 = 5/4,\ \bar{x}_2 = 2,\ \bar{x}_3 = 5/2,\ \bar{x}_4 = 11/4$

En este caso se tiene que $\int_1^3 f(x)dx = \sum_{k=1}^{4} f(\bar{x}_k)\Delta x_k$

$$= f(\bar{x}_1)\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\Delta x_2 + f(\bar{x}_3)\Delta x_3 + f(\bar{x}_4)\Delta x_4$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{12}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{12}\right) + \left(\frac{4}{11}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{15} + \frac{7}{24} + \frac{1}{6} + \frac{4}{33} = \frac{1469}{1320}$$

El valor real de la integral es de 1.0986 y el valor encontrado por las sumas de Riemann es aproximadamente 1.1128 por lo que si se toma en cuenta la **definición 3.2.1**. Se tiene que

$\left| R(f,P) - R \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| 1.1128 - 1.0986 \right| < \varepsilon \Rightarrow 0.0142 < \varepsilon$, Que de alguna manera no es tan mala aproximación si se quiere.

Ejemplo 5:

Aproximar el área de la función $f(x) = sen(x),\ 0 \le x \le \pi$ a través de las sumas de Riemann empleando las particiones dadas Δx_k y los valores de $\bar{x}_k$.

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4}\pi,\ x_2 = \frac{1}{2}\pi,\ x_3 = \frac{2}{3}\pi,\ x_4 = \frac{3}{4}\pi,\ x_5 = \pi$$
$$\bar{x}_1 = \frac{1}{6}\pi,\ \bar{x}_2 = \frac{1}{3}\pi,\ \bar{x}_3 = \frac{1}{2}\pi,\ \bar{x}_4 = \frac{3}{4}\pi,\ \bar{x}_5 = \frac{5}{6}\pi$$

En este caso se tiene que $\int_0^{\pi} f(x)dx = \sum_{k=1}^{5} f(\bar{x}_k)\Delta x_k$

$$= f(\bar{x}_1)\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\Delta x_2 + f(\bar{x}_3)\Delta x_3 + f(\bar{x}_4)\Delta x_4 + f(\bar{x}_5)\Delta x_5$$

$$= sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right) + sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + 1\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{(10 + 3\sqrt{3} + \sqrt{2})}{24}\pi$$

4.1.1.4. Algunos teoremas relacionados con la integral de Riemann.

Ahora se muestran algunos teoremas que se derivan de la integración de Riemann y que fueron estudiados además por Newton y Leibniz.

Teorema 3.2.1.4.1.

Sea F la antiderivada de f y sea G definida sobre $[a,b]$, entonces G es una primitiva de f sobre $[a,b]$ si y solo si para algunas constantes c, $G(x) = F(x) + c$.

<u>Demostración:</u>

$F(x) + c$ Es una primitiva de f sobre $[a,b]$, supongamos que G es otra primitiva de f sobre $[a,b]$, entonces $F - G$ es continua y diferenciable sobre $[a,b]$.

$$\Rightarrow D\left[F(x) - G(x)\right] = F'(x) - G'(x)$$

$$= f'(x) - g'(x)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = c$$

$$\Rightarrow G(x) = F(x) + c$$

Teorema 3.2.1.4.2. (Teorema Fundamental del cálculo, Formula de Newton-Leibniz)

Toda función f que es continua sobre $[a,b]$, tiene una primitiva sobre $[a,b]$.

Si F es una primitiva de f entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$

Demostración:

Sea F definida en $[a,b]$ por $F(x) = \int_a^b f(x)dx, \ \forall x \in [a,b]$

Entonces

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx, = F(b) - F(a)$$

Utilizando el **teorema 3.2.1.3.1.** Se tiene

$$= \{(F(b)+c) - (F(a)+c)\}$$

$$= F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

En la sección anterior se plantea el uso de la integral de Riemann, a través de las sumas de Darboux para el caso de integrales definidas en un intervalo cerrado, sin embargo, esto no es del todo exigido, es decir la función no necesariamente debe tener límites de integración definidos, estos pueden ser infinitos, o pueden ser funciones que poseen una determinada discontinuidad en un punto, por lo que se trabajan de tal forma que puedan reducirse a una función Riemann integrable, cumpliendo con sus criterios.

4.1.1.5. Integrales Impropias

Supongamos que *f* es una función continua en el intervalo $(a,b]$. Bajo la definición la función *f* es integrable en el intervalo de la forma $[c,b]$, donde $a < c < b$. Analizando la existencia de $\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)$, si el límite es finito, entonces decimos que la integral está definida de *a* a *b*. La anterior es denotada de la misma forma que la integral de Riemann, pero solo existe si la integral converge a un número real. De la misma forma también hay integrales definidas sobre otros intervalos conocidos tales como $[a,b)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$.

Teorema 3.2.1.5.1.

Sea *f* acotada en el intervalo $[a,b]$, si para $\forall \varepsilon > 0$ existe un numero finito de intervalos que cubre todos los puntos de discontinuidad de *f* y tienen la suma de longitudes menor que ε, entonces *f* es integrable en el segmento.

Si se cumplen las condiciones del anterior teorema resulta que el valor de la integral no depende de los valores *f* en los puntos de discontinuidad. Por eso con frecuencia se plantea solucionar el problema para calcular la integral de Riemann de una función que no está definida ya sea en un número finito de puntos del segmento $[a,b]$, o bien en un conjunto de puntos, el cual puede cubrirse con un número finito de intervalos de longitud tan pequeña como se quiera. En este caso se considera que la función *f* está definida en estos puntos de manera arbitraria, pero sigue permaneciendo, por supuesto, acotada en el segmento $[a,b]$, y por consiguiente es integrable.

Ejemplo 6:

Por ejemplo hablando estrictamente la integral $\int_0^1 \frac{senx}{x}dx$ no existe puesto que en el punto $x=0$ la función $\frac{senx}{x}$ no está definida, sin embargo, la integral $\int_0^1 f(x)dx$, donde

$$f(x)=\begin{cases} \frac{senx}{x}, & x\neq 0 \\ C, & x=0 \end{cases}$$

Y el valor de *C* es un numero arbitrario existe y no depende de la elección de *C*. por eso se considera que la integral existe.

Ejemplo 7:

Sea $f:[1,+\infty)\rightarrow R$ definida por $f(x)=1/x$ para cualquier intervalo cerrado $[1,c], c>1$ tenemos que:

$$\int_1^c \frac{1}{x}dx=\left[\log x\right]_1^c=\log(c)$$

Además como $\log(c)\rightarrow\infty$ y $c\rightarrow\infty$, la integral impropia $\int_1^c \frac{1}{x}dx$ no existe.

Respecto al avance de la investigación, se mostrara como es que finalmente se deduce la manera de resolver integrales impropias, utilizando los avances de la integración de

Lebesgue y la utilidad de ello para brindar una importante herramienta que cubre la deficiencia del proceso de integración de Riemann.

4.1.1.6. Inconvenientes de la integral de Riemann

En la sección anterior, hemos indicado que cualquier función monótona en ciertas partes o monótona acotada es Riemann integrable. Se presenta ahora dos ejemplos importantes de funciones que están acotadas pero no son continuas por partes ni monótonas por partes.

Definición 3.2.1.6.1.

Con cualquier conjunto de números reales *A*, asociamos una función χ_A llamada **función característica de *A***, definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in A \\ 0, & si \quad x \notin A \end{cases}$$

Ejemplo 8:

Sea *Q* el conjunto de los números racionales, entonces χ_Q es acotado, pero no es continuo en ninguna parte continua, ni tampoco es monótona, además de ello no es Riemann integrable sobre [*0,1*]. Ya que se f_1, f_2 son las funciones a pasos tal que $f_1 \leq \chi_Q \leq f_2$, entonces existe irracionales en cada intervalo en el que f_1 es constante, de tal forma que $f_1 \leq \chi_Q = 0$, por lo que $\int_0^1 f_1(x)dx = 0$. Por otro lado, existen números racionales en cada intervalo donde f_2 es constante, de tal forma que $f_2 \geq \chi_Q = 1$, de tal forma $\int_0^1 f_2(x)dx = 1$, finalmente siguiendo el **teorema 3.2.1.1.2.** Se tiene

$$\int_0^1 f_2(x)dx - \int_0^1 f_1(x)dx = 1 - 0 = 1$$

Este resultado debería ser arbitrariamente muy pequeño, como lo que requiere la integrabilidad, lo que no se cumple para este caso.

La integral de Riemann es adecuada para la mayoría de las aplicaciones prácticas. Las funciones que usualmente encontramos son continuas por partes y muy a menudo tienen buenas antiderivadas también. Sin embargo, en investigaciones teóricas avanzadas de funciones de una variable real, nos gustaría tener una integral con ciertas propiedades de las que carece la integral de Riemann.

En primer lugar, hay ciertas funciones fáciles de describir, como χ_Q que no tienen integral de Riemann en absoluto. Se ampliara enormemente el rango de funciones integrables cuando definamos la integral de Riemann-Stieltjes y Lebesgue.

Además, la integral de Riemann carece de ciertas propiedades límites deseables. En particular, la clase de funciones integrables de Riemann no está cerrada bajo límites puntuales, incluso para secuencias monótonas limitadas.

Y dado que no se puede ampliar de forma atropellada directamente con la mayor de las generalizaciones, es necesario tapar ciertos agujeros, ciertas limitantes de esta integral, como lo hizo Thomas Joannes **Stieltjes,** estudiando de forma más general las funciones a pasos, las discontinuidades contables y la variación respecto al conjunto de una forma más general, por tanto los siguientes resultados se deben de gran manera a los arduos estudios de **Stieltjes** por generalizar y abarcar la integral.

4.1.2. La Integral de Riemann-Stieltjes

En primera instancia, a través de los cursos de análisis o cálculo, y como se hizo en la sección anterior, la integral está relacionada a estar compuesta por un conjunto de sumas numerables así mismo como se ha ejemplificado anteriormente con la integral de Riemann, partes que unidas generan el todo integrado. Esto está basado en la definición original como tal, sin embargo como se había estudiado, aparte de sumatorias una integral, nos permite entre muchas cosas, soluciones de áreas bajo la curva en un intervalo cerrado de una función *f*, además de longitud de arcos de funciones, entre otros problemas físicos.

Todos los problemas anteriormente mencionados, usan una definición basada internamente en sumas numéricas. Es decir, que cuando hablamos de una integral como tal, hablamos de una suma numerable, no importando el fenómeno que tratemos.

Ahora dado que se trató la integración mediante su determinado procedimiento muy enfocado a los criterios de Riemann, para generalizar esta teoria, se necesita que se cumplan todas las condiciones básicas, así mismo sus propiedades para que sea análoga a la que conocemos pero con mayor alcance ya que no se verá limitada por los criterios de Riemann. Entonces no será necesario construir una teoria más compleja, que nos lleve a las consecuencias mismas, para las cuales realizar simples cambios en la funciones resulta más factible, pero que siempre conserven la idea integradora de Riemann.

Ahora, como se había expuesto, dado que la integral de Riemann posee sus propiedades, la generalización de la integral tendrá que tener sus propiedades más generales, ya que no se hablara exactamente de conjuntos tan puntuales como lo que conocemos, sino de conjuntos más generales, por lo que las propiedades de las particiones y los subconjuntos podrán variar pero siempre buscando la aproximación del mejor resultado.

Para tales casos, trataremos que la función integrada aproximada se hará a través de su dx, es decir, no hablaremos de su variación en su intervalo, sino respecto a otra función. $d\alpha(x)$ Será la variación respecto a otra función que llamada integradora, la que nos permite introducir la siguiente definición.

Definición 3.2.2.1.

Sea $f: I \to R / I = [a,b]$ y una partición $P = \{x_0, x_1 ... x_n\} \in I$, los puntos $x_i \in P$ definen n sub intervalos consecutivos $[x_{i-1}, x_i] \in [a,b]$ entonces:

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta\alpha_i$$

Se llama suma integral de f respecto a α. Puesto que $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \in [a,b]$ es arbitrario, es claro que podemos encontrar diversas integrales que varían por sus respectivas particiones. Por lo que cada integral variara respecto al sub intervalo tomado.

Definición 3.2.2.2.

Se dice que *f* es integrable respecto a α en [*a*, *b*] y se denota por $f \in R(\alpha)$ si existe un número *A* tal que:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; p_\varepsilon \in [a,b]$$

Tal que para toda *P* más fina de P_ε y para toda $t_i \in [x_{i-1}, x_i] \in [a,b]$ se tiene que

$$\left| S(P, f, \alpha) - A \right| < \varepsilon$$

El numero A se llama integral de Riemann-Stieltjes de f respecto a α en [a, b].

Ahora análogamente, dado que la integral de Riemann se construyó anteriormente a través de sumas de Darboux como en la **definición 2.1.4.1.5.** Y **definición 2.1.4.2.1**. Es comprensible que así mismo se pueda sumar todas las integrales de *f* respecto a α en [*a*, *b*] para generar una sola integral. Lo que nos genera la siguiente definición:

Definición 3.2.2.3. (Integrabilidad de funciones por Stieltjes con sumas de Darboux

Sean

$$M[f;I] = \sup\{f(x) : x \in I\}$$

$$m[f;I] = \inf\{f(x) : x \in I\}$$

$$w[f;I] = M[f;I] - m[f;I]$$

Entonces:

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta\alpha_k$$

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta\alpha_k$$

La definición anterior nos muestra que se pueden construir sumas inferiores y superiores, pero no nos garantiza que estas tengan el mismo valor. Por lo que es necesario exigir que ambas sumatorias tengan convergencia a un único valor, ya que por lo contrario obviamente divergiera de un valor, y no existiría tal integral. Por tanto es necesario plantear además que:

Definición 3.2.2.4. (Integral inferior y superior)

Sean $\Psi = \{U(P, f, \alpha)\} / P \in I$ y $\Omega = \{L(P, f, \alpha)\} / P \in I$ se definen:

$$\bar{I}(f, \alpha) = \inf(\Psi) \quad \underline{I}(f, \alpha) = \sup(\Omega)$$

A estas magnitudes se les llama integral superior e inferior de *f* respecto a α en [*a, b*].

La anterior definición determina que para que se encuentre una integración exacta, estos valores deben de ser iguales, por tanto para simbolizar esta integral lo hacemos con la definición siguiente:

Definición 3.2.2.5.

Suponiendo que la integral inferior y superior de una función *f* respecto a α son iguales, entonces:

$$\overline{I}(f,\alpha)=\int_a^b fd\alpha=\underline{I}(f,\alpha)$$

La anterior construcción de la integral, es el llamado procedimiento de Darboux.

Ejemplo 9:

Sea $\alpha:[a,b]\to R$ monótona y creciente. Se prueba que

$$\int_a^b d\alpha=\alpha(a)-\alpha(b)$$

<u>Solución</u>:

Dado que en este caso $f=1,\ \forall x\in[a,b]$, entonces utilizando la **definición 3.2.2.3**. El valor de $M_k,\ m_k=1,\ \forall k=1,2,\ldots,n$, por lo que al construir las sumas superiores e inferiores se tiene que:

$$U(P,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k=\alpha(a)-\alpha(b)=\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta\alpha_k=L(P,f,\alpha)$$

Estas sumas no dependen de la partición, puesto que $f=1,\ \forall x\in[a,b]$, por tanto queda demostrado.

Ahora se muestran los criterios y condiciones de integrabilidad de Stieltjes, estos nos permitirán conocer las condiciones bajo las cuales determinamos si las funciones existen o no, con el fin de reconocer al igual de la integral de Riemann, si las funciones tienen resultados que invaliden la integrabilidad de la función.

4.1.2.1. Funciones Stieltjes integrables

La **definición 3.2.2.5.** Nos permite conocer si una función es integrable o no, y como ya se había expuesto anteriormente la idea es que las sumas inferiores y superiores tengan el mismo valor. Por tanto ahora podemos introducir el criterio bajo el cual es integrable una función:

Teorema 3.2.2.1.1. (Criterio de Integrabilidad de Stieltjes)

Suponiendo que la integral inferior y superior de f en $I=[a,b]$ son iguales, entonces una función es Stieltjes integrable si para cada $\varepsilon>0$ en el intervalo $[a, b]$ tal que:

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$$

Demostración:

Supóngase que para cada $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in I : U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$. Entonces

$$\underline{I}(P, f, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \text{ Y } \bar{I}(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$$

Por tanto

$$\bar{I}(P, f, \alpha) - \underline{I}(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$$

Que supone que $\bar{I}(P, f, \alpha) = \underline{I}(P, f, \alpha)$ lo que implica por la **definición 3.2.2.5.** Que f es integrable.

Otra forma de demostración seria, que si suponemos que f es integrable en el intervalo $I=[a,b]$ respecto a α. Dado que $L(P, f, \alpha)$ y $U(P, f, \alpha)$ son aproximaciones de $\bar{I}(P, f, \alpha)$, y $\underline{I}(P, f, \alpha)$ respectivamente, entonces:

$$\bar{I}(P, f, \alpha) - U(P, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underline{I}(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$$

De esto:

$$\overline{I}(P,f,\alpha)-\underline{I}(P,f,\alpha)+U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon$$

Y dado que $\overline{I}(P,f,\alpha)=\underline{I}(P,f,\alpha)$ por la **definición 3.2.2.5.** Entonces

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon$$

Los resultados planteados anteriormente nos han permitido diferenciar las relaciones entre los valores de las sumas inferiores y superiores aun cuando se aproxima la integral a través de una función integradora. Además al igual que Riemann se expuso los criterios bajos los cuales la integral de Riemann-Stieltjes existe y cuando no. Por tanto de forma generar caemos a los mismos resultados que se han trabajado exponiendo los siguientes teoremas:

Teorema 3.2.2.1.2. (Funciones Stieltjes Integrables)

Si *f* es continua en $I=[a,b]$, entonces, *f* es Stieltjes-integrable en el intervalo $I=[a,b]$.

<u>Demostración;</u>

Sea P de $I=[a,b]$ tal que $|x_k-x_{k-1}|<\delta$, además supóngase que f es continúa en $t_k\in[x_k-x_{k-1}]$, entonces, $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ tal que:

$$\forall x\in[x_k-x_{k-1}]:|x-t_i|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(t_i)<\varepsilon|$$

Y ya que en $[x_k-x_{k-1}]$ existen números $x_m/f(x_m)=m_k$ y $x_M/f(x_M)=M_k$ entonces, deber cumplirse que:

$$|M_k-f(t_k)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad |m_k-f(t_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

De estas desigualdades y dado que $M_k-m_k<\varepsilon$, de acá ala introducir el diferencial $\Delta\alpha_k$, y luego en el signo de sumatorias por el **teorema 3.2.2.1.1.** Se tiene que $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)]$. Puesto que ε es extremadamente pequeño, tanto como se desee, entonces $\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)]<\sigma$, por lo cual también $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\sigma$, por tanto *f* es integrable en el intervalo $I=[a,b]$ y el **Teorema 3.2.2.1.2.** Queda demostrado.

Teorema 3.2.2.1.3.

Si *f* es monótona y continúa en $I=[a,b]$, entonces, *f* es Stieltjes-integrable en el intervalo $I=[a,b]$.

<u>Demostración:</u>

Sea P de $I=[a,b]$ tal que $\left| x_k - x_{k-1} \right| < \delta$, además supóngase que α es continúa en $t_k \in [x_k - x_{k-1}]$, entonces, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que:

$$\forall x \in [x_k - x_{k-1}] : \left| x - t_i \right| < \delta \Rightarrow \left| \alpha(x) - \alpha(t_i) < \varepsilon \right|$$

Y dado que $x_k, x_{k-1} \in [x_k - x_{k-1}]$ debe cumplirse que:

$$\left| \alpha(x_{k-1}) - \alpha(t_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left| \alpha(x_k) - \alpha(t_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De estas desigualdades $\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})<\varepsilon$. Entonces en primera instancia si *f* es monótona creciente entonces por la **definición 3.2.2.3.** Se tiene que $m_k = f(x_{k-1})$ y $M_k = f(x_k)$, por tanto en la suma $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon[f(b)-f(a)]$. Por el contrario si *f* es monótona decreciente se tiene que $m_k = f(x_k)$ y $M_k = f(x_{k-1})$, por tanto $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon[f(a)-f(b)]$ Puesto que ε es extremadamente pequeño, tanto como se desee, entonces $\varepsilon[f(b)-f(a)]<\sigma$ o $\varepsilon[f(a)-f(b)]<\sigma$, por lo cual también $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\sigma$, por tanto *f* es integrable en el intervalo $I=[a,b]$ y el **Teorema 53.2.2.1.3.** Queda demostrado.

Teorema 5.7.1.4

Supóngase que f es acotada sobre $I=[a,b]$, tiene un numero finito de puntos de discontinuidad sobre $I=[a,b]$, y α es continua para cada punto para el que f es discontinua. Entonces f es integrable en $I=[a,b]$.

Demostración:

Sea $P \in I=[a,b]$, supóngase que $x_j \in (x_{j-1}, x_j)$ es un punto de discontinuidad de *f*. ahora considérese que:

Como $x_j \notin [x_{k-1}, x_k]$, entonces por la continuidad de *f*, $\forall t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ se tiene que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in [x_{k-1}, x_k]$ entonces por su continuidad tenemos que $|x - t_k| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t_k)| < \varepsilon/2$ por lo cual tenemos utilizando los máximos y ínfimos de f $|M_k - f(t_k)| < \varepsilon/2$ e $|m_k - f(t_k)| < \varepsilon/2$ implicaría a través de la definición 3.2.2.3. Que $|M_k - m_k| < \varepsilon$, de cada $|M_k - m_k| \Delta\alpha_k < \varepsilon \Delta\alpha_k$.

Con lo anterior se trata de explicar, que se desea considerar la continuidad de una función f o inclusive de α debe de ser en un número finito de puntos. Es decir que la discontinuidad no supone un problema, sino una muestra de cómo se puede adaptar la integral para su evolución. Esto de mucha necesidad en problemas de variables continuas o discretas.

4.1.2.2. Propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes

Ahora es necesario mostrar las propiedades que debe cumplir la integral de Riemann-Stieltjes, para comprender su área abarcada, como puede ser utilizada y cuando.

Para ello consideremos el integrando f y g, y estas sean funciones integrables respecto a α en $I=[a,b]$, entonces:

Teorema 3.2.2.2.1.

Si f y g son funciones integrables respecto a α en el intervalo $I=[a,b]$, entonces se tiene que:

$$\int_a^b [f+g]d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$$

Demostración:

Dado que f es integrable, y por el **teorema 3.2.2.1.1**. Dado que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ entonces $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon/2$ igualmente por el **teorema 3.2.2.1.1** dado que g también es integrable entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ para lo cual $U(P,g,\alpha)-L(P,g,\alpha)<\varepsilon/2$. De tales desigualdades se puede obtener que:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[M_k^{'}+M_k^{''}\right]\Delta\alpha_k - \sum_{k=1}^{n}\left[m_k^{'}+m_k^{''}\right]\Delta\alpha_k < \varepsilon$$

Donde $M_k^{'}$, $m_k^{'}$ son el supremo e ínfimo de f al igual que el $M_k^{''}$, $m_k^{''}$ son el supremo e ínfimo de g en el intervalo $[x_{k-1},x_k]$. Luego considerando que M_k, m_k son el supremo e ínfimo de $f+g$, utilizando la **definición 3.2.2.3**. Entonces se tienen las desigualdades

$$m_k^{'}+m_k^{''} \le m_k \text{ Y } M_k^{'}+M_k^{''} \le M_k$$

Por lo cual

$$U(P,f+g,\alpha)-L(P,f+g,\alpha) \le \sum_{k=1}^{n}\left[M_k^{'}+M_k^{''}\right]\Delta\alpha_k - \sum_{k=1}^{n}\left[m_k^{'}+m_k^{''}\right]\Delta\alpha_k < \varepsilon$$

Así pues $U(P,f+g,\alpha)-L(P,f+g,\alpha)<\varepsilon$ así por tanto por el **teorema 3.2.2.2.1**. $f+g$ Es integrable en $I=[a,b]$. Finalmente se tiene que para f y g se cumple que:

$$\left|S(P,f,\alpha)-\int_a^b f d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left|S(P,g,\alpha)-\int_a^b g d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De estas desigualdades $\left| S(P, f+g,\alpha) - \int_a^b f d\alpha - \int_a^b g d\alpha \right| < \varepsilon$ pero como *f* y *g* son integrables entonces

$$\left| S(P, f+g,\alpha) - \int_a^b [f+g] d\alpha \right| < \varepsilon$$

Finalmente puesto que $S(P, f+g,\alpha) \to \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$ y a su vez tenemos también que $S(P, f+g,\alpha) \to \int_a^b [f+g] d\alpha$ el teorema queda demostrado.

Teorema 3.2.2.2.2.

Si f es una función integrable respecto a α en el intervalo $I = [a,b]$, entonces se tiene que:

$$\int_a^b [cf] d\alpha = c\int_a^b f d\alpha$$

Demostración:

Dado que *f* es integrable, y por el **teorema 3.2.2.1.1.** Dado que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ entonces $U(P, f,\alpha) - L(P, f,\alpha) < \varepsilon$. Luego considerando por la **definición 3.2.2.3.** Que M_k, m_k son el supremo e ínfimo de c*f.* en $[x_{k-1}, x_k]$ y $M_k^{''}$, $m_k^{''}$ son el ínfimo y supremo de *f* en $[x_{k-1}, x_k]$ se verifica que:

(i) si $c \geq 0$ entonces

$$U(P, cf,\alpha) - L(P, cf,\alpha) = c[U(P, f,\alpha) - L(P, f,\alpha)] < c\varepsilon$$

Y puesto que ε es arbitrariamente pequeño, tanto como se quiera entonces $U(P, cf,\alpha) - L(P, cf,\alpha) < \delta$, por tanto *cf.* es integrable en $I = [a,b]$

(ii) si $c \leq 0$ entonces

$$U(P, cf,\alpha) - L(P, cf,\alpha) = |c| [U(P, f,\alpha) - L(P, f,\alpha)] < |c| \varepsilon$$

Y puesto que ε es arbitrariamente pequeño, tanto como se quiera entonces $U(P,cf,\alpha)-L(P,cf,\alpha)<\delta$, por tanto *cf* es integrable en $I=[a,b]$

Las partes (i) y (ii) muestran que $\forall c\in R$ cf es integrable en $I=[a,b]$ lo que nos permite determinar que:

$$\left| S(P,f,\alpha)-\int_a^b fd\alpha \right| <\varepsilon \Rightarrow \left| S(P,cf,\alpha)-c\int_a^b fd\alpha \right| < c\varepsilon$$

Finalmente también se cumple que:

$$\left| S(P,cf,\alpha)-c\int_a^b fd\alpha \right| <\varepsilon$$

Ahora es gran importancia incorporar el siguiente teorema, el cual explica la posibilidad de no solo integrar en un intervalo completo como tal, sino que también se puede particional este de tal manera, que no afecte el valor de la integral final.

Teorema 3.2.2.2.3.

Si f es una función integrable respecto a α en el intervalo $I=[a,b]$ y existe un c tal que $a<c<b$ entonces se tiene que:

$$\int_a^b fd\alpha=\int_a^c fd\alpha+\int_c^b fd\alpha$$

Demostración:

Dado que f es integrable en $I=[a,b]$, entonces por el **teorema 3.2.2.1.1.** $\forall\varepsilon>0,\ \exists P\in I=[a,b]$ Tal que $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon$. Ahora sea $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ entonces para un $P_1=\{x_0,x_1,...,x_j\}$ tal que $P_1\in P$ en $[a,c]$ y un $P_2=\{x_{j+1},x_{j+2},...,x_n\}$ tal que $P_2\in P$ en $[c,b]$ entonces tendremos que:

$$\sum_{k=1}^{j}[M_k - m_k]\Delta\alpha_k + \sum_{k=j+1}^{n}[M_k - m_k]\Delta\alpha_k$$

Entonces $\forall\varepsilon > 0$, $\exists P_1 \in I = [a,b]$ se tiene que $U(P_1, f, \alpha) - L(P_1, f, \alpha) < \varepsilon$ de forma que *f* es integrable. Además de ello $\forall\varepsilon > 0$, $\exists P_{21} \in I = [a,b]$ tal que $U(P_2, f, \alpha) - L(P_2, f, \alpha) < \varepsilon$ y de igual forma *f* es integrable. Por tanto se tiene que para *f* en $I = [a,b]$:

$$\left| S(P_1, f, \alpha) - \int_a^c f d\alpha \right| < \varepsilon \qquad \left| S(P_2, f, \alpha) - \int_c^b f d\alpha \right| < \varepsilon$$

De estas desigualdades se tiene que

$$\left| S(P, f, \alpha) - \left[\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha \right] \right| < 2\varepsilon$$

Por lo que finalmente se tiene que:

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon$$

Esto supone que $\int_a^b f d\alpha \to \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$ por tanto se concluye que $\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$ y queda demostrado el teorema.

Teorema 3.2.2.2.4.

Si f es una función integrable en $I = [a,b]$ respecto a α además también es integrable en $I = [a,b]$ respecto a β, entonces *f* es integrable respecto a $\alpha + \beta$, y se verifica que

$$\int_a^b f d\alpha[\alpha + \beta] = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b f d\beta$$

Demostración:

Dado que f es integrable respecto a α, entonces por el **teorema 3.2.2.1.1.** $\forall\varepsilon > 0,\ \exists P \in I = [a,b]: U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon/2$, Igualmente dado que f es integrable respecto a β por el teorema $\forall\varepsilon > 0,\ \exists P \in I = [a,b]: U(P, f, \beta) - L(P, f, \beta) < \varepsilon/2$. Así:

$$U(P, f, \alpha) + U(P, f, \beta) - L(P, f, \alpha) - L(P, f, \beta) < \varepsilon$$

Donde $\psi = \alpha + \beta$, es decir que $U(P, f, \psi) - L(P, f, \psi) < \varepsilon$, esto supone por el teorema que f es integrable respecto a $\alpha + \beta$ en $I = [a,b]$. Finalmente tenemos que:

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^c f d\alpha \right| < \varepsilon \qquad \left| S(P, f, \beta) - \int_c^b f d\beta \right| < \varepsilon$$

De estas desigualdades entonces $\left| S(P, f, \alpha + \beta) - \int_a^b f d[\alpha + \beta] \right| < \varepsilon$

Puesto que $S(P, f, \alpha + \beta) \to \int_a^b f d[\alpha + \beta]$ que a su vez tiende a $\int_a^b f d\alpha + \int_a^b f d\beta$ el teorema queda demostrado.

Teorema 3.2.2.2.5.

Si f es una función integrable en $I = [a,b]$ respecto a α y existe un $c > 0$, entonces f es integrable respecto a $c\alpha$ y se verifica que:

$$\int_a^b f\,[c\alpha] = c\int_a^b f d\alpha$$

Demostración:

Dado que f es integrable respecto a α en el intervalo $I = [a,b]$, por el **teorema 3.2.2.1.1.** $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$. Luego al construir las sumas superiores e inferiores por la **definición 3.2.2.3.** De f respecto a α se tiene que:

$$U(P, f, c\alpha) - L(P, f, c\alpha) = c[U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)] < c\varepsilon$$

Dado que ε es tan pequeño como se desea entonces $U(P, f, c\alpha) - L(P, f, c\alpha) < \sigma$ entonces *f* es integrable respecto a $c\alpha$. Y se cumple que:

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| S(P, f, c\alpha) - c\int_a^b f d\alpha \right| < c\varepsilon$$

Puesto que $S(P, f, c\alpha) \to c\int_a^b f d\alpha$ entonces se concluye que $\int_a^b f\, [c\alpha] = c\int_a^b f d\alpha$ y el teorema queda demostrado.

Teorema 3.2.2.2.6.

Supongamos que α es creciente en $I = [a, b]$ entonces:

(i) Si P' es más fina que P, tendremos que $U(P', f, \alpha) \geq U(P, f, \alpha)$ y $L(P', f, \alpha) \geq U(P, f, \alpha)$

<u>**Demostración:**</u>

Supongamos que *P'* posee solo un punto más que *P*, tomemos *c*, si *c* está en el *k-esimo* subintervalo de *P* podemos escribir por la **definición 3.2.2.3**.:

$$U(P', f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta\alpha_k + M'[\alpha(c) - \alpha(x_{k-1})] + M''[\alpha(x_k) - \alpha(c)]$$

Donde *M', M''* designan el supremo de *f* en $[x_{k-1}, c]$, $[c, x_k]$ respectivamente dado que

$$\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta\alpha_k + M'[\alpha(c) - \alpha(x_{k-1})] + M''[\alpha(x_k) - \alpha(c)] \geq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta\alpha_k + M'[\alpha(c) - \alpha(x_{k-1})]$$

Se tiene que $U(P', f, \alpha) \geq U(P, f, \alpha)$, de la misma manera se demuestra para lo que $L(P', f, \alpha) \geq U(P, f, \alpha)$.

4.1.2.3. Fórmulas de integración generalizadas

Anteriormente se han planteado de manera sencilla los procesos bajo los cuales se pueden encontrar integrales de Riemann-Stieltjes, y lo que implica, para ello ahora se introducen, para una comprensión más sencilla y fluida el procedimiento para el tratamiento de las funciones Stieltjes integrables, y para ello es de vital importancia mostrar como una función Stieltjes Integrable puede ser reducida a una función Riemann integrable.

Teorema 3.2.2.3.1.

Considérese a f integrable respecto a α en el intervalo $I=[a,b]$, y supóngase que α tiene la derivada α' continua en el intervalo $I=[a,b]$. En tal caso la integral de Riemann existe y se denota por:

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\int_a^b f(x)d\alpha'(x)$$

<u>Demostración:</u>

Supóngase que α tiene la derivada α' continua en el intervalo $I=[a,b]$, esto supone que todo punto de $I=[a,b]$ es derivable y por tanto α es necesariamente continua en $I=[a,b]$. Por tanto al ser continua y derivable tenemos que existe $t_i\in(x_{k-1},x_k)$ tal que $\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})=\alpha'(x)[x_{k-1},x_k]$ lo que se entiende como $\Delta\alpha(x_k)=\alpha'(t_i)\Delta x_k$, así:

$$f(t_k)\Delta\alpha_k = f(t_k)\alpha'(t_k)\Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k = \sum_{k=1}^{n}\left[f\alpha\right](t_k)\Delta x_k$$

$$S(P,f,\alpha)=S(P,f\alpha')$$

Ahora como f es integrables respecto a α en el intervalo $I=[a,b]$ por el **teorema 3.2.2.1.1.** Se tiene que:

$$\left|S(P, f,\alpha)-\int_a^b fd\,\alpha\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|S(P, f\alpha')-\int_a^b fd\,\alpha\right|<\varepsilon$$

Esto supone que $f\alpha'$ es integrable bajo Riemann, que la igualdad se cumple y el teorema queda demostrado.

Teorema 3.2.2.3.2.

Si *f* es integrable respecto a α en el intervalo $I=[a,b]$, entonces α es integrable respecto a *f* en $I=[a,b]$ y se tiene:

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)+\int_a^b \alpha(x)\,df(x)= f(b)\alpha(b)- f(a)\alpha(a)$$

Demostración:

Dado que *f* es integrable respecto a α en el intervalo $I=[a,b]$, por el **teorema 3.2.2.1.1.** $U(P, f,\alpha)-L(P, f,\alpha)<\varepsilon$. Ahora, para tal diferencia es

$$U(P, f,\alpha)-L(P, f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n}[M_k-m_k]\Delta\alpha_k$$

Como α es creciente, usando la **definición 3.2.2.3.** Entonces denotamos $M_k'=\alpha(x_k)\wedge m_k'=\alpha(x_{k-1})$, adicionalmente se tiene que $f(x_k)-f(x_{k-1})\leq M_k-m_k$ por tanto bajo esto tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n}[M_k'-m_k'][f(x_k)-f(x_{k-1})]\leq\sum_{k=1}^{n}[M_k'-m_k'][M_k-m_{k-1}]<\varepsilon$$

Es decir que $U(P,\alpha, f)-L(P,\alpha, f)<\varepsilon$, por el **teorema 3.2.2.1.1.** Entonces α es integrable respecto a *f* en $I=[a,b]$. Ahora consideramos el valor de $S(P, f,\alpha)$ con $t_k=x_{k-1}$ es

$$S(P, f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\{\Delta[f\alpha]_k-\alpha(x_k)\Delta f_k\}= f(b)\alpha(b)- f(a)\alpha(a)-S(P, f,\alpha)$$

Luego se tiene que *f* es integrable respecto a α entonces

$$\left| S(P,f,\alpha)-\int_a^b f\,d\alpha \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| S(P,f,\alpha)-\left[f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\int_a^b f\,d\alpha \right] \right|$$

Además para una α integrable respecto a *f* también se cumple que

$$\left| S(P,\alpha,f)-\int_a^b \alpha\,df \right| < \varepsilon$$

Puesto que $S(P,f,\alpha)\to f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\int_a^b fd\alpha$ y a la vez $S(P,f,\alpha)\to\int_a^b \alpha df$ entonces se concluye que $f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-\int_a^b fd\alpha=\int_a^b \alpha df$ lo que claramente implica que $f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)=\int_a^b fd\alpha+\int_a^b \alpha df$, y el teorema queda demostrado.

Y como se había planteado anteriormente en el **teorema 3.2.1.2.4.** Para el caso de la integral de Riemann, teniendo en cuenta dado que *f* es acotada, teniendo valores de *m*, *M* de tal forma que $m\le f(x)\le M,\ \forall x\in[a,b]$ entonces:

$$m\left[\alpha(a)-\alpha(b)\right]\le L(P,f,\alpha)\le U(P,f,\alpha)\le M\left[\alpha(a)-\alpha(b)\right]$$

Para todas las particiones *P* de [*a*, *b*].

4.1.2.4. Funciones a pasos para la integral de Riemann-Stieljes.

Se definió en la integral de Riemann la función a pasos mediante la cual se aproximaba el área de la función *f* . De la misma manera podemos definir una función a pasos para la integral de Riemann-Stieljes, que al parecer es la misma, sin embargo si se ubica bien, la utilización de la función a pasos se mostraría distinta respecto a la anterior ya que en la integral de Riemann, esta se utilizaba para aproximar *f*, y acá se utiliza para aproximar la función $\alpha(x)$, la cual es la función integradora.

En la siguiente figura 3 se trata de mostrar como tiene la representación las funciones a paso. Que se exhibe de la misma forma como una función *f* cualquiera.

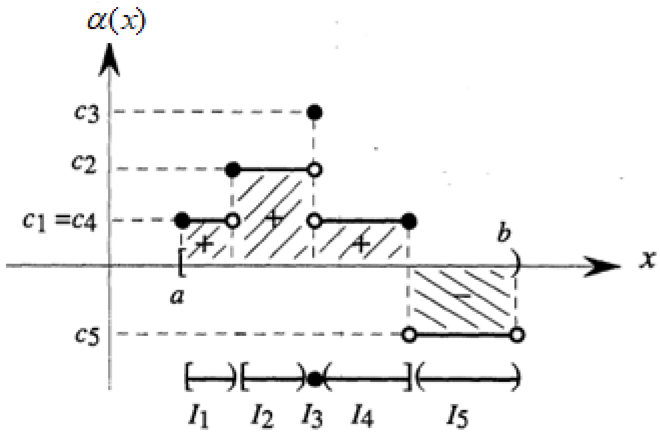


Figura 3. Función a pasos de la función integradora $\alpha(x)$.

Como se observa en la figura los valores de c_j son los valores constantes de *f* para su correspondiente I_j, y de forma sombreada el área que representa cada uno de los c_j sobre el eje *x*. La razón de la cual la función no cero es porque no representaría ningún área por ser cero.

Si el dominio de la función a paso *f* tiene una longitud total medible, entonces podemos asociar a cada parte de *f* con una determinada área $A\lfloor f(I_j)\rfloor$ entre la gráfica de *f* y el eje *x*, en la que esta área siempre debe ser positiva (usualmente nos referimos a $A\lfloor f(I_j)\rfloor$ como el área bajo la curva).

Ejemplo 10:

Sea *f* la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}0, & si\ \ x\leq 0\\ \dfrac{1}{n+1}, & si\ \ x\leq \dfrac{1}{n},\ n=1,\ 2,\ 3,...\\ 1, & si\ \ x>1\end{cases}$$

La siguiente imagen ilustra la función, claramente se muestra que la *f* es monótona creciente, y que *f* tiene saltos de discontinuidad en el conjunto contable de puntos $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ y es continua en los demás puntos. Como se observa en la ilustración es posible construir una función monótona creciente que es discontinua en cada número racional.

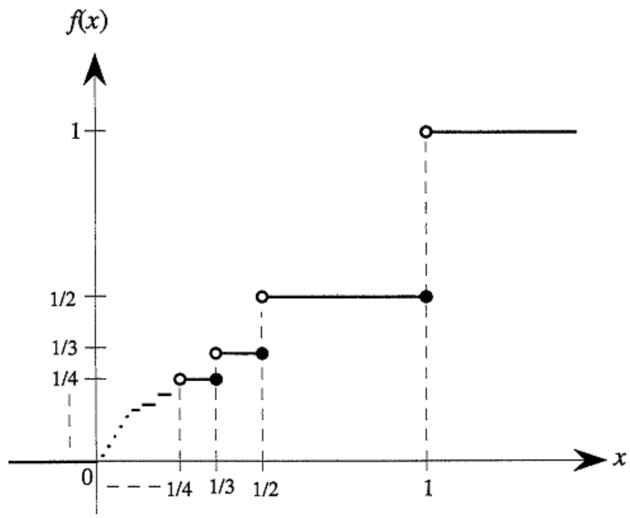


Figura 4. Representación de la función definida en el ejemplo 10.

Esta anterior familia de funciones nos permitirá considerar la integración de la misma en un intervalo finito, sin embargo hay que tener la consideración que cada extremo anterior en la recta *x* de los subconjuntos esta representados de forma abierta, por lo que integrar esta función aun no es posible por la carencia de soporte teórico que nos permita determinar el proceso integrador en este caso.

Definición 3.2.2.4.1.

Sea α una función definida en el intervalo $I=[a,b]$ de tal manera que sea discontinua en un conjunto de puntos c_k, siendo $a \leq c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_{n-1} \leq c_n \leq b$ si α es constante en cada intervalo abierto (c_{k-1}, c_k), se dice que α es una función escalonada y el número $\alpha(c_i^+)-\alpha(c_i^-)$ se llama salto de c_i. Si $c_1 = a$ el salto de α en c_1 es $\alpha(c_1^+)-\alpha(c_1)$, y si $c_n = b$ el salto de α en salto en c_n es $\alpha(c_1)-\alpha(c_1^-)$.

Esta definición es muy útil, ya que nos permite definir la integral de la función *f* a través de una función $\alpha(x)$ que es escalonada o a pasos, y que contiene una determinada cantidad de saltos en un determinado intervalo.

Teorema 3.2.2.4.1.

Sea α una función escalonada (a pasos) definida en $I=[a,b]$ con salto α_k en x_k, siendo $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n \leq b$ considérese *f* definida en $I=[a,b]$, de tal manera, que *f* y α no sean ambas discontinuas a la derecha o a la izquierda de cada x_k. En estas condiciones la integral de *f* respecto a α en $I=[a,b]$, existe y se verifica que:

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha_k$$

Demostración:

Sea un $\psi=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ el conjunto de saltos de α en $I=[a,b]$. Ahora sean $\varphi=\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ el conjunto de puntos en $I=[a,b]$ verificando que $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < ..., y_{k-1} < x_n\}$, entonces por el **teorema 3.2.2.2.3.** Puede desarrollarse:

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^{y_1} f d\alpha + \int_{y_1}^{y_2} f d\alpha + \ldots + \int_{y_{n-1}}^{b} f d\alpha$$

Pero dado que en los intervalos $[a, y_1], \ldots, [y_k, y_{k+1}], ..., [y_{k-1}, y_k]$, contiene un salto de discontinuidad, entonces, se tiene

$$\int_a^b f d\alpha = f(x_1)\alpha_1 + f(x_2)\alpha_2 + \ldots + f(x_n)\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha_k$$

Dado que se presenta la igualdad, el teorema queda demostrado.

4.1.2.5. Integrabilidad de funciones de Variación acotada

Muy particularmente si se ha puesto atención a la extensión de la integral sobre el plano, podremos fácilmente diferenciar como Stieltjes en su desarrollo permitió dejar de preocuparse por la limitante de la continuidad de una función, además de ello, el transformar una función de Stieltjes a Riemann integrable, lo que es de muy gran avance en la teoria integradora. Aun así, para que esta gran herramienta sea del todo útil, es necesario que como muchas teorías cumpla ciertos criterios, en este caso la variación acotada.

En esta sección, se formaliza el teorema de existencia básica de la integral de Riemann-Stieltjes. Este teorema establece que si *f* es una función continua y es una función de variación acotada en un intervalo cerrado de línea real, *f* es Stieltjes integrable con respecto a α .

Por el teorema siguiente, la variación acotada permite la descomposición de una función que sea no monótona en un par o más de funciones con el fin del desarrollo de su integral, esto con la búsqueda de que el valor encontrado de la integral sea calculable, así mismo como la descomposición de las nuevas funciones.

Definición 3.2.2.5.1.

Sea $f:[a,b]\to R$ acotada, además $\alpha:[a,b]\to R$ también de variación acotada. Si existes dos funciones no decrecientes h_1, h_2 tales que $\alpha = h_1 - h_2$ y *f* es integrable respecto a h_1 además *f* también es integrable respecto a h_2, entonces se dice que *f* es integrable respecto a α en $I=[a,b]$ y se tiene que

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f dh_1 - \int_a^b f dh_2$$

Finalmente se puede observar a través del siguiente teorema que una condición para la integrabilidad de Stieljes es que la variación de la función integradora $\alpha(x)$, de igual forma contenga sumas inferiores y superiores convergentes.

Teorema 3.2.2.5.1.

Si $\alpha(x)$ tiene una variación acotada y $f(x)$ está acotada en el intervalo $a < x < b$, entonces una condición necesaria y suficiente para la existencia de la integral de Stieltjes

$$\int_a^b f\alpha(x)$$

Es que la variación total de $\alpha(x)$ en el conjunto D de discontinuidades de $f(x)$ sea cero. Si $U(x)$ es la variación total de $\alpha(x)$ en el eje del intervalo, y un intervalo con puntos finales x_1, x_2, entonces, por definición:

$$U(\alpha) = U(x_1) - U(x_2)$$

Y la variación total de $\alpha(x)$ en D se define como el límite inferior mayor de las sumas

$$\sum_{k=1}^{\infty} U(I_k)$$

Para secuencias numerables de intervalos I_k que contienen los puntos de D como puntos interiores del conjunto que definen los intervalos.

Demostración:

Sea el intervalo I subdividido por los puntos x_k, $k = 0, 1, 2, ..., n$ con $x_0 = a$, $x_n = b$, $0 < x_k - x_{k-1} < \delta$, $k = 0, 1, 2, ..., n$ y utilizando la **definición 3.2.2.3.** Sea S que denote la suma

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k \alpha$$

Donde los valores de x son tomados arbitrariamente del intervalo $[x_k, x_{k-1}]$. Entonces una condición necesaria para que la suma S tal que δ sea cero es que

$$\lim_{\delta = 0} \sum_{k=1}^{n} O_k \left| \Delta_k \alpha \right| = 0$$

Donde O_k es la oscilación de $f(x)$ en el intervalo $[x_k, x_{k-1}]'$. Pero es claro que los valores de x son seleccionados para dos sumas, la mayor y la menor sobre la misma partición con una diferencia $S - S'$ que esta tan cerca de cómo se desea en la sumatoria anterior. Por tanto si para cada norma δ se puede encontrar una partición

$$\sum_{k=1}^{n} O_k \left| \Delta_k \alpha \right| > \eta > 0$$

Entonces para cada δ, podemos aproximar a través de las sumas $S - S' > \eta$, lo que contradice la existe del límite. Por tanto se demuestra el teorema. (Bliss, 1917)

Finalmente se muestran de forma un tanto superficial la aplicación la integral de Riemann-Stieltjes en el plano, estas aplicaciones sobrepasan el uso común de la integración de Riemann para la cual esta no tiene cabida, es decir, muchas de las aplicaciones a continuación son generadas a través únicamente de la integral de esta sección, y no pudo ser desarrollada por Riemann.

4.1.2.6. Aplicación de la integral de Riemann-Stieltjes

Dado al común comportamiento de muchos fenómenos de la naturaleza actualmente, obviando un sin número de numerables problemas a utilizar con integración y dejando de un lado también los que se desarrollan a través de la integración básica de Riemann, podemos centrarnos en los matemáticos aplicados más comunes y conocidos, cuyo comportamiento es aleatorio y que fueron desarrolladas a través de la integral de Riemann-Stieltjes.

Todos estos problemas que pueden solucionarse bajo la integración de Stieltjes tienen su determinada y compleja construcción y comprensión, pero no imposible. Para tales casos, hablamos de un área muy importante de la matemática y de vital utilidad en la actualidad, tratamos de la Estadística y sus múltiples aplicaciones integradoras.

4.1.2.6.1. Variables Aleatorias.

Dado que los procesos aleatorios están basados en términos de experimentación aleatorias es conveniente asignar a cada elemento de un intervalo de prueba una posibilidad eventual. Para ello es necesario definir el espacio en el que se recorre el valor de la variable, en este caso un espacio muestral:

Definición 3.2.2.6.1.1.

Sea un espacio S en el que se encuentra definida una función de probabilidad. Sea X una función de valor real definida sobre S, de manera que transforme los resultados de S en puntos sobre la recta de los reales. Se dice entonces que X es una variable aleatoria.

Esta definición anterior desde el punto de vista teórico es aún muy incomprensible si no se estudia con detenimiento la definición del espacio de probabilidad, por lo que en el transcurso de la investigación se vera de forma más detallada las decisiones de estos espacios para su más hábil comprensión.

Regresando a la definición como tal, estas variables pueden tener distinto comportamiento, ya que se pueden situar de forma puntal sobre le plano, o como una función continúa, por tanto es necesario definir que

Para el caso que tratemos de una variable aleatoria discreta tenemos que:

Definición 3.2.2.6.1.2.

Una variable aleatoria X es discreta si el número de valores que puede tomar es contable (ya sea finito o infinito), y si estos pueden ordenarse en una secuencia que corresponde con los números enteros.

Para el caso que contemos con una variable aleatoria continua:

Definición 3.2.2.6.1.3.

Una variable aleatoria X es continua, si sus valores consisten en uno o más intervalos de la recta real.

4.1.2.6.2. Distribución de probabilidad.

Dado que las variables aleatorias lo que hacen es situar los sucesos posibles de un experimento en una recta, una distribución de probabilidad será la encargada de calcular la probabilidad de ocurrir cada uno de los posibles sucesos anteriormente planteados, para ello las probabilidades poseen sus propias funciones que pueden ser continuas o discretas tal sea el caso, por tanto es necesario definir:

Definición 3.2.2.6.2.1.

Sea X una variable aleatoria discreta. Se llama a $p(x) = P(X = x)$, **función de probabilidad de** X, si cumple con las siguientes propiedades:

$$p(x) \geq 0,\ \forall x \in X \ \text{ Y } \sum_{X} p(x) = 1$$

Esta es al final una integral que su área máxima será el valor de 1, cuando los experimentos sobre ella sean infinitos.

Definición 3.2.2.6.2.2.

Si existe una función $f(x)$ tal que

$$f(x) \geq 0,\ -\infty < x < \infty \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Para cualesquiera a y b, entonces, $f(x)$ es la **función de Densidad** de probabilidad de la variable aleatoria continua X.

Dado que las anteriores definiciones calculan las probabilidades de ocurrencia de un hecho, podemos llegar a la siguiente definición:

Definición 3.2.2.6.2.3.

La **función de distribución acumulativa** de la variable *X* es la probabilidad de que *X* sea menor o igual a un valor específico *x*; está dada por:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p(x_k) \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Respectivamente para el caso discreto y continuo, donde $p(x)$ es la función de probabilidad y $f(t)$, la función de densidad.

Esta última es muy utilizada y es de alguna manera de las más reconocidas por su común uso en la estadística, de ella se conocen las distribuciones de probabilidad que se estudian en la estadística y la matemática.

4.1.2.6.3. Valor esperado de una variable aleatoria.

Definición 3.2.2.6.3.1.

El **Valor esperado** de una variable aleatoria *X* es el promedio de *X*, es

$$E(x) = \sum_{x_k < x} xp(x) \qquad E(x) = \int_{-\infty}^{x} xf(x)dx$$

Para variables discretas o continuas, respectivamente, en donde $p(x)$ es la función de probabilidad y $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad.

4.1.2.6.4. Algunos ejemplos de Funciones Riemann-Stieltjes Integrables.

Ejemplo 11:

Calcular $\int_0^1 x^2 e^x dx$ (Ver grafica en **anexo 2**)

Siguiendo $\int_a^b f(x)d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x)df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$, tenemos:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = (1^2)(e^1) - (0^2)(e^0) - \int_0^1 e^x d(x^2) = e - 2\int_0^1 xe^x dx$$

$$= e - 2\left[\int_0^1 xd(e^x)\right] = e - 2\left[(1)(e^1) - (0)(e^0) - \int_0^1 e^x dx\right]$$

$$= e - 2\left[e - (e^x)\Big|_0^1\right] = e - 2\left[e - e + e^0\right]$$

$$= e - 2$$

Ejemplo 12:

Calcular $\int_1^e x^2 \ln(x)dx$ (ver grafica en **anexo 3**)

Solución:

$$\int_1^e x^2 \ln(x)dx = \frac{1}{3}\int_1^e \ln(x)d(x^3) = \frac{1}{3}\left[(\ln(e))(e^3) - (\ln(1))(1^3) - \int_1^e x^3 d(\ln(x))\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^3 - \int_1^e x^2 dx\right] = \frac{1}{3}\left[e^3 - \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^e\right] = \frac{1}{3}\left[e^3 - \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^3 - \frac{e^3}{3} + \frac{1}{3}\right] = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{9}(2e^3 + 1)$$

Ejemplo 13:

Calcular $\int_0^{\pi/4} e^{-x}\cos(2x)dx$

Solución:

$$\int_0^{\pi/4} e^{-x}\cos(2x)dx = I$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} e^{-x} d\left(sen(2x)\right)$$

$$I = \frac{1}{2}\left\{\left[\left(e^{-\frac{\pi}{4}}\right)\left(sen\left(2\frac{\pi}{4}\right)\right)-0\right]-\int_0^{\pi/4} sen(2x)d\left(e^{-x}\right)\right\}$$

$$I = \frac{1}{2}e^{\frac{-\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} sen(2x)e^{-x}dx$$

$$I = \frac{1}{2}e^{\frac{-\pi}{4}}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} e^{-x}d(\cos(2x))$$

$$I = \frac{1}{2}e^{\frac{-\pi}{4}}-\frac{1}{4}\left\{\left[\left(e^{\frac{-\pi}{4}}\right)(0)-1\right]-\int_0^{\pi/4}\cos(2x)d\left(e^{-x}\right)\right\}$$

$$I = \frac{1}{2}e^{\frac{-\pi}{4}}-\frac{1}{4}\left[(-1)+\int_0^{\pi/4}\cos(2x)e^{-x}dx\right]$$

$$I = \frac{1}{2}e^{\frac{-\pi}{4}}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\cos(2x)e^{-x}dx$$

$$\frac{5}{4}I = \frac{2e^{\frac{-\pi}{4}}+1}{4}$$

$$I = \frac{2e^{\frac{-\pi}{4}}+1}{5}$$

Ejemplo 14:

Calcular $\int_0^{10} xd\left(x+[x]\right)$

Solución:

$$\int_0^{10} xd\left(x+[x]\right) = 10[10+[10]] - 0 - \int_0^{10}[x+[x]]dx$$

$$= 200 - \int_0^{10} xdx - \int_0^{10}[x]dx$$

$$= 200 - \frac{10^2}{2} - \sum_{k=1}^{10} k$$

$$= 200 - 50 - [1+2+3+4+5+6+7+8+9+10] = 200 - 50 - 55$$

$$= 95$$

Ejemplo 15:

Calcular $\int_0^3 f(x)d\left(\alpha(x)\right)$ donde

$$f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \le x \le 1 \\ 2x^3, 1 < x \le 3/2 \\ e^x, 3/2 < x \le 3 \end{cases} \text{ Y } \alpha(x) = \begin{cases} 0, 0 \le x < 1 \\ 1, 1 \le x \le 2 \\ 3, 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\int_0^3 fd\alpha = \int_0^1 fd\alpha + f(1)\left[\alpha(1^+) - \alpha(1^-)\right] + \int_1^2 fd\alpha + \ldots + f(2)\left[\alpha(2^+) - \alpha(2^-)\right] + \int_2^3 fd\alpha$$

$$\int_0^3 fd\alpha = \int_0^1 2xd(0) + 2(1)[1-0] + \int_1^2 e^x d(1) + e^2[3-1] + \int_2^3 e^x d(3)$$

$$= 0 + 2[1-0] + 0 + e^2[3-1] + 0$$

$$= 2 + 2e^2$$

Ahora se regresa al comienzo para generalizar, para la introducción de una nueva teoria, teniendo en cuenta el estudio de la integral de Riemann y lo que conlleva, así mismo con la integral de Riemann-Stieljes y las condiciones y propiedades de ambas como tal. Pero si se ha puesto atención, estos valores a encontrar son medidas de áreas, que para calcularse se necesitan medidas de bases de rectángulos y así mismo las medidas de las alturas.

La dependencia entre la integrabilidad en el sentido de Riemann y la continuidad de las funciones a integrar y de igual forma en la integral de Riemann-Stieltjes trae como consecuencia la necesidad de medir conjuntos arbitrarios de puntos de la recta (como bases de rectángulos). Se sabía que una función era integrable si sus puntos de discontinuidad podían ser "ignorados" de alguna manera. Esto condujo a buscar la definición de una medida para el conjunto de puntos de discontinuidad de una función, de manera que la condición de integrabilidad pudiera expresarse en términos de tal medida.

Los problemas del análisis pueden ser tratados con más comodidad al relacionarlos con los objetos geométricos (a como se ha venido haciendo a través de rectángulos). En el desarrollo de su teoría se evidencia que el recuperar las raíces geométricas se convierte en requisito indispensable para, a través de la teoría de la medida, resolver el problema de la integración para una colección más general de funciones. Lebesgue ve en el concepto de medida como generalización de los conceptos geométricos de longitud, área y volumen la clave para resolver el problema de la integración. Al inicio de su teoría de la medida, Lebesgue se plantea **El problema de la medida**, el cual consiste en definir una función que le asigne a cada conjunto acotado un número real no negativo, denominado medida, y que cumpla ciertas propiedades.

4.1.3. Teoria de la Medida

El concepto de una medida de un conjunto es una generalización de varios conceptos distintos, entre ellos pueden referirse a la longitud de un segmento, área de un plano, el volumen de una figura en el espacio, el incremento de una función real no decreciente sobre un intervalo, la integral de una función no negativa sobre un plano o región del espacio. Este concepto de medida, fue originado en la teoria de funciones de variable real, y actualmente tiene diversas aplicaciones en la teoria de la probabilidad, teoria de sistemas dinámicos, análisis funcional y otros campos de las matemáticas.

Para el desarrollo de la integral de Lebesgue es necesaria el estudio de cierto tipo de funciones de valores reales definidas en un conjunto X. Algunos de estas aplicaciones podrían ser el conjunto unitario de $I = [0,1]$, que consiste en todos los números reales que satisfacen $0 \leq x \leq 1$, de forma más general el conjunto de los números naturales $N = \{1, 2, 3, ...\}$, y de forma aún más general hasta la línea recta, desde que el carácter de una función no depende de la naturaleza del conjunto donde se define, no se asume su naturaleza como tal.

Dado el conjunto *X*, se destaca una familia *X* de subconjuntos de *X* que se comportan como se desea en cierto sentido técnico (Para lo que es de interés en este informe). Para ser precisos, se supone que esta familia contiene el conjunto vacío ϕ y todo el conjunto *X*, y *X* es cerrado bajo complementos y uniones contables.

Definición 3.2.3.1.

Una familia σ de subconjuntos de un conjunto *X* se le llama σ ***-Algebra*** (σ -Campo) en caso de que:

(i) $\phi, \sigma \in X$

(ii) Si A pertenece a σ, entonces el complemento $\sigma^c = \sigma \setminus A$ también pertenece a σ.

(iii) Si A_n es una sucesión de conjuntos en σ, entonces la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertenece a σ.

Un par ordenado (X, σ) consiste en un conjunto *X* y una σ *-Algebra* de subconjuntos de *X* es llamado espacio medible. Cualquier conjunto σ es llamado un σ -conjunto medible, pero dado que la σ *-Algebra* cumple con las propiedades anteriormente planteadas solo se le llama medible.

Se muestran algunos ejemplos de σ -*Algebras*:

Ejemplo 16:

(i) Sea X el conjunto ***R*** de números reales. La ***Borel Algebra*** es la σ -*Algebra* ***B*** generada por los intervalos abiertos de tipo (a,b) en ***R***. Además la ***Borel Algebra B*** es la σ -*Algebra* generada por los intervalos cerrados de la forma $[a,b]$ en ***R***. Cualquier subconjunto de ***B*** es llamado ***Conjunto de Borel***.

Ejemplo 17:

(ii) Sea X el conjunto $\boldsymbol{R^c}$ de números reales extendido. Si E es un sub conjunto de Borel sobre ***R***, sea

$$E_1 = E \cup \{-\infty\}\,,\ E_2 = E \cup \{+\infty\}\,,\ E_3 = E \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Y sea $\boldsymbol{B^c}$ la colección de todos los conjuntos $E, E_1, E_2, \ldots,$ como variedades de E sobre ***B***. Fácilmente se observa que el conjunto $\boldsymbol{B^c}$ es una σ -*Algebra* a la que se le llamada la ***Borel Algebra Extendida.***

Una importante característica bajo la cual se estudian estos espacios es ahora introducida para complementar el espacio medible y ubicar una propiedad a la que llamaremos medida, ya que la σ -*Algebra* a la que se está estudiando deberá cumplir algunas propiedades que son de vital importancias para el fin de este informe.

4.1.3.1. Medidas

Análogamente por intuición se tiene la idea como tal de medidas, y es que ello es de común uso en la ciencia como tal, sin embargo, ¿que implica esto con la naturaleza matemática teórica? ¿Y cuál es su relación con la **definición 3.2.3.1**? Para responder a esto se define a continuación los resultados necesarios para entender la medida, lo que implicada y las propiedades que toda medida cumple.

Definición 3.2.3.1.1.

Una medida es una función extendida de valor real μ definida sobre una $\sigma-$algebra de subconjuntos de *X* tal que:

(i) $\mu(\phi)=0$

(ii) $\mu(X)\geq 0$ para cada *X* que pertenece a $\sigma-$algebra

(iii) μ es contable aditiva en la esencia de que si X_k es una sucesión disjunta de conjuntos de la $\sigma-$algebra, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(X_k)$$

La anterior definición permite que se tome el valor de $+\infty$, lo que implicaría que $\mu(X)=+\infty$, y dado que la serie es no negativa se entiende que se trata de que esta última diverge. Lo que significa que si la medida no toma el valor de $+\infty$ entonces se trata de que es finita. Más generalmente, si existe una X_n de conjuntos de $\sigma-$algebra tal que $\sigma=\bigcup X_n$ y teniendo que $\mu(X)<+\infty$ para cada *n*, entonces decimos que μ es $\sigma-$ finita.

Ahora si el conjunto *X* pertenece a una unión contable de subconjuntos, es decir $X=\bigcup_{k=1}^{n} X_k$ entonces tenemos que la medida de *X*, de define

Definición 3.2.3.1.2.

Si el conjunto *X* pertenece a una unión contable de subconjuntos, donde $X=\bigcup_{k=1}^{n} X_k$, entonces

$$\mu(X)\leq\sum_{k=1}^{n}\mu(X_k)$$

Si *X* es un conjunto abierto o cerrado, esta definición que sugiere ser una propiedad, nos define que el conjunto medible pertenece a la suma de subconjuntos constituyentes medibles, asumiendo que esta es convergente (Lo es si *X* está contenida en un conjunto finito).

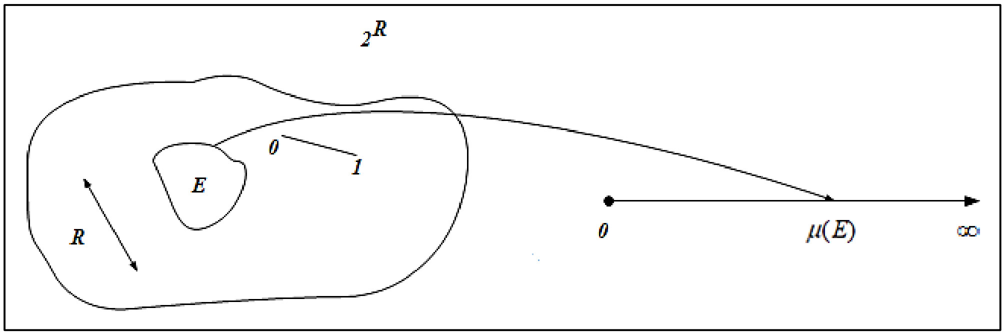


Figura 5. Conjunto aleatorio *E* que tiene medida finita.

Se muestran ahora un conjunto de ejemplos de conjuntos medibles:

Ejemplo 18:

Sea $X = N = \{1, 2, 3,...\}$ y sea $\sigma -$algebra de todos los subconjuntos de *N*. Si $E \in X$ se define $\mu(E)$ igual al número de elementos de *E* si *E* es un conjunto finito e igual a $+\infty$ si *E* es un conjunto infinito. Entonces μ es una medida y es llamada **La medida de conteo sobre *N*.**

Ejemplo 19:

Si $X = R$ y la $\sigma -$algebra es $\sigma = B$, la algebra de ***Borel,*** más adelante se expondrá que existe una única medida μ definida sobre *B* la cual coincide con la longitud de intervalos abiertos $E = (a,b)$ de tal forma que $\mu(E) = b - a$. Esta única, medida es llamada usualmente **Medida de Lebesgue** o **Medida de Borel.**

Ejemplo 20:

Si $X = R$ y la $\sigma -$algebra es $\sigma = B$, y f es una función continua creciente monótona, como anteriormente se había planteado, entonces de igual forma existe una λ_f definida sobre *B* tal que si $E = (a,b)$ entonces $\lambda_f(E) = f(b) - f(a)$. Esta medida λ_f es llamada **La medida generada de Borel-Stieltjes**.

Ejemplo 21:

Defínase para cualquier sub intervalo de $[0,1]$ como $\mu(S)=\begin{cases}1, & si\ 1/2\in S\\ 0, & si\ 1/2\notin S\end{cases}$

Se observa claramente que para el caso de $\mu\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]=1,\ \mu\left[0,\frac{1}{3}\right]=0$

Ejemplo 22:

Se define a $\mu(X)=0$, como la medida trivial, y esta puede o no ser consistente con medida de intervalos, dependiendo con la elección de los puntos.

Lema 3.2.3.1.1.

Sea μ una medida definida en una $\sigma-$Algebra. Si E y F pertenece a la $\sigma-$Algebra y $E\subseteq F$, entonces $\mu(E)\le\mu(F)$. Si $\mu(E)<+\infty$, entonces $\mu(F\setminus E)=\mu(F)-\mu(E)$.

<u>Demostración:</u>

Desde que $F=E\cup(F\setminus E)$ y $E\cap(F\setminus E)=\phi$, se tiene que $\mu(F)=\mu(E)+\mu(F\setminus E)$.

Además desde que $\mu(F\setminus E)\ge 0$, es claro que $\mu(E)\le\mu(F)$.

Ahora se procede a decir el espacio de medida bajo el cual se desarrollan las operaciones de interés en el informe, es decir las áreas de funciones como tal.

Definición 3.2.3.1.3.

Un espacio de medida es una tripla (X,σ,μ), que consiste en un conjunto *X*, una $\sigma-$algebra de subconjuntos sobre *X*, y una medida μ definida sobre la $\sigma-$algebra.

Si se recuerda que en las secciones anteriores se tenían muchas de las definiciones plantadas a través del ínfimo y supremo de los conjuntos como tal, así que un intervalo tenía su ínfimo y supremo, como lo tenía una función continua y monótona sobre un conjunto, así mismo para la construcción de las sumas de Darboux en la integral de Riemann y Riemann-Stieltjes fue de gran utilidad.

Ahora en esta instancia también es posible introducir este concepto en lo que es de interés en esta sección, es decir si se tiene una medida de un conjunto *X*, este conjunto tiene una medida superior e inferior y ambas deben de ser las mismas. Sin embargo sus nombres en este caso variaran, debido a quien pudo demostrar como tal su existencia, esto se le debe a Constatin Caratheodory(1873-1950) quien desarrollo múltiples investigaciones en la teoria de las funciones de variable real y medida.

La siguiente sección pertenece al estudio la medida correspondiente al introducir el supremo de un conjunto, es decir buscaremos la mayor medida de un conjunto como tal, esperando que esta converja, y así mismo se definirá la medida exterior que será la introducción del ínfimo de la medida del conjunto como tal.

4.1.3.1.1. Medida Interior de un conjunto.

En esta sección definiremos una función $\mu_* = \mu(E) \rightarrow [0, +\infty)$, que llamaremos medida interior.

Definición 3.2.3.1.1.1.

Si *E* es un subconjunto de *X* en un espacio de medida (X, σ, μ), no vacío y acotado, se define la longitud o medida de *E* como

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Donde $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, es la única descomposición de *E* como unión de una colección a lo sumo numerable y disjunta de intervalos cerrados.

Donde la medida interior se define básicamente como la mayor cota de medida de los intervalos cerrados conteniendo a *E*.

Definición 3.2.3.1.1.2.

Si E es un intervalo I finito, de extremos a, b de forma $a \leq b$, la longitud de I se define por:

$$\mu(I) = b - a$$

Observaciones:

1. La longitud del conjunto vacío es 0. (ya que $a \in R, \phi = (a,a)$).
2. La longitud de un conjunto abierto acotado está bien definida.
3. Si E es un conjunto abierto acotado, resulta que $\mu(E) < \infty$.
4. Si $E_1 \wedge E_2$ son dos conjuntos abiertos acotados, y $E_1 \subseteq E_2$ se tiene que $\mu(E_1) \subseteq \mu(E_2)$.
5. Si E es un conjunto abierto acotado y $x_0 \in R$, se sigue que $E + x_0$ es un conjunto abierto acotado, y $\mu(E + x_0) = \mu(E)$.

La observación (5) es llamada la traslación del conjunto E a punto x_0.

Lema 3.2.3.1.1.1.

Si $E \subseteq R$ es un conjunto abierto e I un intervalo abierto acotado que pertenece a (X, σ, μ) resulta que: $\mu(E + G) = \mu(E) + \mu(G)$

Demostración:

Supóngase primero que E es un conjunto abierto acotado y escríbase $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, $I = (a,b)$.

Sí $E \cap I = \phi$, entonces $E \cup I = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\right] \cup I$, que es una unión disjunta, a lo sumo numerable, de intervalos abiertos y es acotada; luego por la definición:

$$\mu(E \cup I) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n, b_n) + (a,b)\right] = \mu(G) + \mu(I)$$

Por lo que el teorema queda demostrado.

Definición 3.2.3.1.1.3.

Sea E un subconjunto de (X, σ, μ) se define la medida interior de E a través de

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(E) : E \subseteq (X, \sigma, \mu), E \text{ cerrado}\}$$

La función $m_* : \mu(E) \to [0, +\infty)$ así obtenida recibe el nombre de medida interior del conjunto E en R.

Es claro de esta definición que:

i. $E \subseteq (X, \sigma, \mu), E$ acotado $\Rightarrow \mu_*(E) < \infty$

ii. $E_1, E_2 \in (X, \sigma, \mu), E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \mu_*(E_1) \leq \mu_*(E_2)$

iii. $E \in (X, \sigma, \mu), P\, cerrado \Rightarrow \mu_*(E) = \mu(E)$

iv. $E \in (X, \sigma, \mu) \wedge x_0 \in R \Rightarrow \mu_*(E + x_0) = \mu_*(E)$

Corolario 3.2.3.1.1.1.

Sean $E_1, E_2, ..., E_n \in (X, \sigma, \mu) \setminus E_1 \cap E_2 = \phi,\ i \neq j$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_*(E_i) \leq \mu_*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$$

Lo que nos genera

Teorema 3.2.3.1.1.1.

Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión disjunta de subconjuntos de (X,σ,μ). Entonces:

$$\sum_{i=1}^{z}\mu_*(E_i)\leq\mu_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)$$

<u>Demostración:</u>

Sea un $z\in N$, de acuerdo con el **corolario 3.2.3.1.1.1.** Anterior,

$$\sum_{i=1}^{z}\mu_*(E_i)\leq\mu_*\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)$$

Pero $\bigcup_{i=1}^{z}E_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$, $\forall z\in N$, se sigue que

$$\mu_*\left(\bigcup_{i=1}^{z}E_i\right)\leq\mu_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)$$

Por tanto

$$\sum_{i=1}^{z}\mu_*(E_i)\leq\mu_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)$$

Por lo que queda demostrado el teorema.

Ahora se presenta la aplicación del ínfimo en la medida de un conjunto, esto también fue desarrollado por Caratheodory.

4.1.3.1.2. Medida Exterior de un conjunto.

Definición 3.2.3.1.2.1.

Sea *E* un subconjunto de *R* se define la medida exterior de *E* a través de

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(E) : E \subseteq (X,\sigma,\mu), E\,\text{abierto}\}$$

La función $m^* : \mu(E) \to [0,+\infty)$ así obtenida recibe el nombre de medida exterior en *R*.

Y dado que $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, donde *E* es un subconjunto arbitrario de *X*, entonces tenemos que

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)$$

Donde básicamente se define la medida externa como la menor de las medidas de los conjuntos abiertos que contienen al conjunto *E*.

$\mu(E)$ Es claro que por la medida interior de un conjunto, también se cumple que

i. $E \subseteq (X,\sigma,\mu), E$ acotado $\Rightarrow \mu^*(E) < \infty$

ii. $E_1, E_2 \in (X,\sigma,\mu), E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$

iii. $E \in (X,\sigma,\mu), E\,\text{cerrado} \Rightarrow \mu^*(E) = \mu(E)$

iv. $E \in (X,\sigma,\mu) \wedge x_0 \in R, \Rightarrow \mu^*(E + x_0) = \mu(E)$

Entre otras conclusiones a lo que nos lleva esta medida tenemos que, $\mu^*(\phi) = 0$ la cual no es difícil de comprender.

Además tenemos que $\mu^*(E) = \mu(E)$, desde que se tiene $\{E, \phi, \phi, ..., \}$ como una sucesión de subconjuntos los cuales contienen a *E* en la unión y que cumple que:

$$\mu^*(E) = \mu(E) + 0 + 0 + ... + 0 = \mu(B)$$

4.1.3.1.3. Conjuntos medibles

El siguiente teorema permite reconocer si un conjunto es medible o no. Utilizando la misma analogía de la aplicación del ínfimo y supremo de conjuntos, si el supremo de la medida de un conjunto es igual al ínfimo de la medida de un conjunto se entiende al conjunto como medible.

Teorema 3.2.3.1.3.1.

Sea $E \in (X, \sigma, \mu)$. Se dice que E es medible Lebesgue (o simplemente medible) si:

$$\mu_*(E) = \mu^*(E)$$

Demostración:

Denotaremos por M el conjunto de todos los $E \in (X, \sigma, \mu)$ que son medibles. Sí $E \in M$, define la medida de E, como $\mu(E) = \mu_*(E) = \mu^*(E)$. La función $\mu : M \to [0, \infty)$ recibe el nombre de medida de Lebesgue en *R*.

Es claro que $\phi, R \in M$, $\mu(\phi) = 0$, $\mu(R) = \infty$. Además es evidente que si $E \in (X, \sigma, \mu)$ de forma que $\mu_*(E) = \infty$ implica que $\mu(E) = \infty$, además si $\mu^*(E) = 0$ entonces E es medible de medida cero, y todos los subconjuntos de E son medibles y tienen medida cero.

Ejemplo 23:

Cualquier conjunto E con medida interior o exterior de forma independiente tal que $\mu^*(E) = 0$, $\mu_*(E) = 0$, es medible y su medida es cero.

Y esto es debido a que

$$0 = \mu^*(E) \geq \mu_*(E) = 0 \Rightarrow \mu^*(E) = \mu_*(E) = 0$$

Una propiedad muy importante a tener en cuenta sobre la medida de un conjunto se muestra a continuación:

Teorema 3.2.3.1.3.2.

Si $\{E_n\}$ es una sucesión de pares de conjuntos medibles que no se intersectan, y $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{E_n\}$, entonces

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

Demostración:

Por la Definición 5.8.2.1 (iii) tenemos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N}E_n\right)=\sum_{n=1}^{N}\mu(E_n)\le\mu(E)$$

Tomando cuando $N\to\infty$ tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\le\mu(E)$$

Además por la **Teorema 3.2.3.1.1.1.** Se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\ge\mu(E)$$

Los anteriores planteamientos nos conllevan a que $\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$, con lo que se demuestra el teorema.

4.1.3.1.4. Conjuntos de Borel y de Cantor

Definición 3.2.3.1.4.1.

Se considera a la $\sigma-Algebra$ contable aditiva ***B*** la cual contiene a todos intervalos abiertos de *E*. Esta $\sigma-Algebra$ se llama conjuntos de Borel.

Está claro que ***B*** contiene una gran cantidad de conjuntos (todos conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, intervalos, uniones contables e intersecciones de estos, y muchos más). Dado que $\sigma-$*Algebra* es una clase contable-aditiva que contiene los intervalos abiertos, sabemos que $B \in \sigma$. Ahora como ya se había mencionado anteriormente se tienen la menor de las $\sigma-$ *Algebra* que contiene a los intervalos de *R*.

La $\sigma-$*Algebra* de **Borel** de subconjuntos de *R*, puede ser descrita por la $\sigma-$*Algebra* generada por las familias de subconjuntos de *R*:

a) Intervalos Abiertos.
b) Conjuntos Abiertos.
c) Intervalos cerrados.
d) Conjuntos cerrados.
e) Conjuntos compactos.
f) Intervalos semiabiertos.

El siguiente teorema es una de las herramientas más importantes para definir la medida como tal en conjuntos abiertos y cerrados y es la justificación misma de poder utilizar la integral de Riemann y Riemann-Stieltjes como tal cuando se presenta discontinuidad numerable en un intervalo.

Teorema 3.2.3.1.4.1.

Cada medida de Lebesgue de un conjunto de números reales es la unión de un conjunto de Borel y un conjunto de Lebesgue de medida cero. (La medida de Lebesgue es la completacion de la medida de Borel)

<u>Demostración</u>

Sea *E* un conjunto de números reales Lebesgue medible. En el que se tiene un conjunto de Borel de tal forma que $B \subset E$ y $\mu(E-B)=0$. Pero como $E = B \cup (E-B)$, donde *B* es el conjunto de Borel deseado y $E-B$ es Lebesgue medible con medida cero.

Se muestra uno de los más famosos ejemplos del análisis, el **conjunto de Cantor.**

Ejemplo 24: (El conjunto de Cantor)

Sea
$$C_1 = E \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$C_1 = C_1 \setminus \left[\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right]$$

$$C_n = C_{n-1} \setminus \left[\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3^n}\right) \cup \ldots \cup \left(\frac{3^n - 2}{3^n}, \frac{3^n - 1}{3^n}\right)\right]$$

Por tanto, C_n es el resultado de quitar los tercios medios abiertos de cada intervalo en C_{n-1}.

El ejemplo anterior nos hace llegar a la conclusión que:

Teorema 3.2.3.1.4.2.

El conjunto de Cantor es un conjunto medible incontable con medida cero.

Demostración:

Claramente C es cerrado desde que su complemento es abierto. Por tanto C es medible, ahora

$$\mu(C_n) = \frac{2}{3}\mu(C_{n-1}) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\mu(C_{n-2})\right) = \ldots = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu(E)$$

Como C es la intersección de una anidada sucesión de sub conjuntos C_n que son medibles, entonces se tiene que

$$\mu(C) = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Se ha hablado de medidas, conjuntos medibles e incluso conjuntos de medida cero hasta ahora, sin embargo muchas de estas medidas tiene una forma especial. Es por ello que ahora se muestra como la medida sobre una recta real R se construye. En particular es necesario mostrar cómo construir la medida de Lebesgue sobre la línea real $\boldsymbol{R}$ como la longitud de un intervalo de forma más general.

4.1.3.1.5. Generación de Medida

En estas instancias es normal definir la longitud de un intervalo semi abierto $(a,b]$ como el número real $b-a$, y la longitud de los conjuntos $(-\infty,b]=\{x\in R: x\leq b\}$ y $(a,+\infty)=\{x\in R: a<x\}$, y $(-\infty,+\infty)$ como la recta real. Definimos la longitud de la unión de un número finito de conjuntos disjuntos como la suma de sus respectivas longitudes. Esto es:

$$\bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j]\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)$$

Donde los intervalos no se intersectan. Dado que E tiene la anterior representación de sub intervalos no intersectados, esta representación no es ambigua ya que la sumatoria de los sub intervalos existe desde que esta es positiva y está acotada, finalmente el orden de los términos parece ser poco importante ya que converge absolutamente a E.

En este momento es fácil comprender la medida de un intervalo, por ejemplo $[0,1]$, pero si hablamos de $(0,1]$, $(0,1)$, supone que estas medidas no deben exceder a la medida de $[0,1]$ por monoticidad, o en el caso del intervalo $[-1/2,1/2]$ el cual es $[0,1]$ trasladado 1/2 unidad hacia la izquierda, en los que ambos tienen la misma medida dado la invariaza de la traslación de la medida, esto según se planteó en la **definición 3.2.3.1.1.2**. Y la **definición 3.2.3.1.1.3**. Dado que $(0,2]=(0,1]\cup(1,2]$, se toma en cuenta que por ejemplo

$$(0,1]=(0,1)\cup\{1\}$$

Y dado que un punto como tal no tiene medida se tiene que $(0,1]=(0,1)$

Ejemplo 25:

Sea S el conjunto que consiste en los intervalos $(1/2,1]$, $(1/3,1/2]$, $(1/4,1/3],\ldots$, ninguno de los intervalos se traslapa y S tiende al intervalo $(0,1]$. La medida de S la cual es uno (1), es representada por:

$$(1-1/2)+(1/2-1/3)+(1/3-1/4)+\ldots,$$

La que simplemente corresponde a la siguiente representación

$$S=\left[\bigcup_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right)\right]\cup\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$$

Y dado que el conjunto de puntos $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$ tiene medida cero se cumple que

$$S=(0,1]=(0,1)$$

Este conjunto anteriormente mencionado, de medida cero nos sugiere que conjuntos contables podrían tener medida cero, así la medida del conjunto de todos los números racionales, denso de R, tendría medida cero. Finalmente es fácil ver que el conjunto de cantor es un ejemplo de conjunto incontable de medida cero como se demostró en el **teorema 3.2.3.1.4.2.**

Y ya que se conoce bien como encontrar ahora la medida de muchos conjuntos, incluyendo los de intervalos que son de vital importancia para este informe, ahora es necesario moverse de cierta forma al plano, y encontrando subconjuntos del plano que tengan medidas, estos pueden ser rectángulos.

4.1.3.1.6. Medida del plano

Consideremos un sistema de conjunto Boreliano ***B*** en el plano (x, y), cada uno de que viene dada por una de las desigualdades de la forma

$$a \leq x \leq b\,,\ a < x \leq b\,,\ a \leq x < b\,,\ \ a < x < b$$

Junto con una de las desigualdades

$$c \leq x \leq d\ ,\ \ c < x \leq d\ ,\ \ c \leq x < d\ ,\ \ c < x < d$$

Donde *a*, *b*, *c*, *d*¸ son números arbitrarios per pertenecen al conjunto X de (X, σ, μ) del plano. Los conjuntos pertenecientes a este sistema lo llamaremos "rectángulos". El rectángulo cerrado, dado por las desigualdades

Es, dependiendo de las relaciones entre *a*, *b*, *c* y *d*, respectivamente, un rectángulo sin límites, o el conjunto vacío. Cada uno de los rectángulos de los otros tipos (se llama a estos medio abiertos) es un rectángulo real sin uno, dos o tres lados, o un intervalo, o medio intervalo, o, finalmente, un conjunto vacío.

Definición 3.2.3.1.6.1.

Para cada uno de los rectángulos una medida correspondiente al concepto de área, bien conocido por la geometría elemental, de la siguiente manera:

(i) La medida de un conjunto vacío es igual a cero.
(ii) La medida de un rectángulo no vacío (cerrado, abierto o medio abierto) dado por los números *a*, *b*, *c* y *d* es igual a

$$\mu(A) = (b - a)\ (d - c)$$

De esta manera, a cada rectángulo A hay un número $\mu(A)$ correspondiente a la medida de este rectángulo; además, se cumplen obviamente las siguientes condiciones:

(i) La medida $\mu(A)$ toma valores reales no negativos

(ii) La medida es aditiva, es decir si $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k : P_i \cap P_k = \phi$ para $i \neq k$, entonces la medida de P

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k)$$

Esto como ya se había expuesto en el **teorema 3.2.3.1.3.2.,** para la medida de un conjunto X arbitrario.

Por lo tanto, se ha generalizado el concepto de una medida de conjuntos elementales a una clase más amplia de conjuntos, llamados conjuntos medibles, que están cerrados con respecto a las operaciones de uniones e intersecciones contables. La medida construida es $\mu-$aditiva en esta clase de conjuntos.

Los teoremas que se han derivado permiten obtener una idea del conjunto de todos los conjuntos medibles de Lebesgue, además dado que cada conjunto abierto que pertenece al plano representarse como una unión de un número finito o contable de rectángulos abiertos, es decir, conjuntos medibles.

Los conjuntos cerrados son complementos de conjuntos abiertos y, en consecuencia, también son medibles. Lo que nos lleva a plantear que todos esos conjuntos deben ser medibles, lo que se puede obtener de conjuntos abiertos o cerrados mediante un número finito o contable de operaciones de uniones e intersecciones contables. Sin embargo, se puede demostrar que estos conjuntos no agotan el conjunto de todos los conjuntos medibles de Lebesgue.

En esta sección se ha dado la construcción de medidas de Lebesgue, para un conjunto y finalmente para el conjunto del plano. Análogamente, las medidas de Lebesgue pueden construirse en una línea, en un espacio de tres dimensiones o, en general, en un espacio de n dimensiones. En cada uno de estos casos, la medida se construye por el mismo método: a partir de una medida definida anteriormente para algunos sistema de conjuntos simples (rectángulos en el caso de un plano, intervalos (a, b), segmentos $[a, b]$ y medias líneas $(a, b]$ y $[a, b)$ en el caso de una línea, etc.)

Primero se define una medida para uniones finitas de tales conjuntos, y luego se generaliza a una clase mucho más amplia de conjuntos a conjuntos que son medibles por Lebesgue. La definición de mensurabilidad en sí misma se puede trasladar de palabra por palabra a conjuntos en espacios de cualquier dimensión.

Al presentar el concepto de la medida de Lebesgue, partimos de la definición habitual de longitud. La construcción análoga para una dimensión se basa en el concepto de longitud de un intervalo (segmento, media línea). Sin embargo, se puede introducir la medida por un método diferente y más general, y ahora toca conocer las funciones medibles como tal conjunto de funciones que se les puede determinar acotación.

4.1.3.2. Funciones medibles

Dado que el estudio está realizado sobre un espacio de medible (X,σ) consistiendo en el conjunto *X* y una $\sigma -$algebra de subconjuntos de *X*. Ahora se considera ciertas funciones para las cuales están definidas sobre σ y se obtienen valores reales definidos. Estas funciones a las cuales llamaremos **medibles** las cuales responden a nuestra idea de longitud, área, masa entre otras. Entonces ya más puntualmente se puede considerar el valor de cero como él ϕ y este puede ser aditivo incluso sobre conjuntos disjuntos de σ. De hecho se plantearan los conjuntos como aditivos para la esencia que se expone a continuación.

Acá, requeriremos la noción de mensurabilidad solo para funciones reales evaluadas. Exactamente se requiere definir la mensurabilidad de una función *f* desde un espacio medible (***X***, σ) a otro espacio (***Y***, σ ’).

Se plantea primeramente que *X* e *Y* son dos conjuntos arbitrarios, y que se han seleccionado dos sistemas de subconjuntos ***B*** y ***B***', respectivamente ambos Boreliano. La función abstracta $y = f(x)$, con el dominio de definición *X*, que toma valores de *Y*, se llama (***B***, ***B***')-medible si de un conjunto $A \in B'$, se tiene que $f^{-1}(A) \in B$**.**

Por ejemplo, si se toma como *X* e *Y* el eje real *R* (es decir, consideramos las funciones reales de una variable real), y como ***B*** y ***B***' tomamos el sistema de todos los subconjuntos abiertos (o todos cerrados) de *R*, entonces la definición de mensurabilidad se reduce análogamente a la definición de continuidad en un espacio topológico. Tomando para ***B*** y ***B***' el sistema de todos los conjuntos Borel, llegamos a las llamadas funciones ***B***-mensurables (o Borel medibles).

En lo que sigue, es de interés el concepto de mensurabilidad principalmente desde el punto de vista de la teoría de la integración. Debido a esto, es de importancia fundamental el concepto de $\mu-$mensurabilidad de funciones reales, definido en algún conjunto *X*, donde uno toma para ***B*** el sistema de todos los subconjuntos $\mu-$medibles del conjunto *X* y para ***B***' el conjunto de conjuntos ***B*** en línea recta. Para simplificar, se supone que ***X*** es la unidad del dominio para la medida μ. Dado que, de acuerdo con los resultados, cada medida de aditivo μ puede continuarse hasta cierto nivel de álgebra de Borel, es natural suponer desde el principio que *X* es un álgebra de ***B***. Por lo tanto, se formula una definición de mensurabilidad para funciones reales de la siguiente manera:

Definición 3.2.3.2.1.

Una función real $f(x)$, definida sobre un conjunto *X*, se llama μ-medible si para cualquier conjunto ***A*** de Borel sobre la línea recta se tiene:

$$f^{-1}(A) \in \boldsymbol{B}$$

Una definición que puede ser alternativa pero que implica que los valores del conjunto ***B’*** sean reales, es

Definición 3.2.3.2.2.

Una función *f* sobre $X \to R$ se llamada μ medible (o simplemente medible) si para cada número real α, el conjunto:

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

Debido que hay infinitos conjuntos que cumplen la anterior definición, para cada número real α es necesario plantear las clases de funciones medibles que cumplen con la anterior definición.

Una función f sobre $X \to R$ que es μ medible, contiene las condiciones que son equivalentes a la anterior definición

(i) $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$, *f* es medible para todo α.

(ii) $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$, f es medible para todo α.

(iii) $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$, f es medible para todo α.

(iv) $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$, f es medible para todo α.

(v) $\{x \in X : \beta < f(x) < \alpha\}$, f es medible para todo $\beta < \alpha$.

(vi) $\{x \in X : \beta \leq f(x) < \alpha\}$, f es medible para todo $\beta < \alpha$.

(vii) $\{x \in X : \beta < f(x) \leq \alpha\}$, f es medible para todo $\beta < \alpha$.

(viii) $\{x \in X : \beta \leq f(x) \leq \alpha\}$, f es medible para todo $\beta < \alpha$.

Ejemplo 26:

Sí $E \in X$, entonces la función característica χ_E, definida por

$$\begin{aligned} \chi_E(x) &= 1, \;\; x \in E \\ &= 0, \;\; x \notin E \end{aligned}$$

Es medible es medible, donde $\{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\}$, es cualquiera X, E o ϕ.

Ahora, es muy importante comprender que una función como tal es solo parte del análisis inicial, ya que ciertamente las combinaciones algebraicas de funciones medibles son medibles como se presenta a continuación:

Lema 3.2.3.2.1.

Sea f y g funciones medibles de valor real y sea c un número real. Entonces las funciones:

$$cf,\; f^2,\; f+g,\; |f|$$

Son medibles.

<u>Demostración:</u>

(i) Si $c = 0$, la afirmación es trivial.

En el caso de que $c > 0$ entonces $\{x \in I : cf(x) > \alpha\} \Rightarrow \{x \in I : f(x) > \alpha/c\}$.

En el caso que $c < 0$ entonces $\{x \in I : cf(x) < \alpha\} \Rightarrow \{x \in I : f(x) < \alpha/c\}$

(ii) Sí $\alpha < 0$, entonces $x \in I : [\, f(x)\,]^2 > \alpha$

Sí $\alpha \geq 0$, está más que claro que $x \in I : [\, f(x)\,]^2 > \alpha$

(iii) Por hipótesis si tenemos un numero r racional, entonces $\{x \in I : cf(x) > r\} \cup \{x \in I : g(x) > \alpha - r\}$ pertenece a σ, por tanto se comprende que $\{x \in I : (f+g)(x) > r\}$.

(iv) Sí $\alpha < 0$, entonces $\{x \in I : |\, f(x)\,| > \alpha\}$ y en el caso que $\alpha \geq 0$ se tiene que $\{x \in I : |\, f(x)\,| > \alpha\} \Rightarrow \{x \in I : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in I : f(x) < -\alpha\}$

Definición 3.2.3.2.3.

Una función de valor real sobre X es μ-medible en el caso que $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ pertenezca a σ para cada número real α. La colección de todas las funciones de valor real μ-medibles sobre *X*, es denotada por $M(X, \sigma)$

Ahora a diferencia de la teoria de integración de Riemann y Riemann-Stieltjes, se hace estudio también de una familia de funciones especiales, estas no habían aparecido durante los estudios de las anteriores integrales, pero ahora son de gran importancia en el análisis de funciones.

Corolario 3.2.3.2.1.

Sea (f_n) una sucesión sobre $M(X, \sigma)$ se definen las funciones

$$f(x) = \inf[\, f(x)],\ \ F(x) = \sup[\, f(x)]$$

$$f^*(x) = \liminf[\, f(x)],\ \ F^*(x) = \limsup[\, f(x)]$$

Entonces, las funciones $f(x) = \inf[\, f(x)],\ F(x) = \sup[\, f(x)]$ al igual que las funciones $f^*(x) = \liminf[\, f(x)],\ F^*(x) = \limsup[\, f(x)]$ pertenecen a $M(X, \sigma)$.

El **Lema 3.2.3.2.1.** Muestra que las operaciones aritméticas en funciones medibles nuevamente conducen a funciones medibles. Según el **Corolario 3.2.3.2.1.**, la clase de funciones medibles, en contraste con el conjunto de funciones continuas, también está cerrada con respecto a la operación de ir al límite. Para las funciones medibles es conveniente introducir, además de la convergencia habitual en cada punto, varias otras definiciones de convergencia. Estas definiciones de convergencia, sus propiedades básicas y las conexiones se muestran a continuación.

Definición 3.2.3.2.4.

Sea la sucesión de funciones $f_n(x)$ definido sobre el espacio de medida (X,σ,μ), se dice que converge casi en todas partes a la función $f(x)$, si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Para todos los $x \in X$ tales que generan un conjunto de puntos para lo cual no se cumple la anterior definición se dice que tiene medida cero.

Ejemplo 27:

La sucesión de funciones $f_n(x) = (-x)^n$, definida en el segmento $[0,1)$ converge cuando $n \to \infty$ n a la función $f(x) = 0$, casi en todos los puntos con excepción cuando se acerca de gran manera al valor $x = 1$. Esta afirmación es posible comprenderla a través de la **figura 6**.

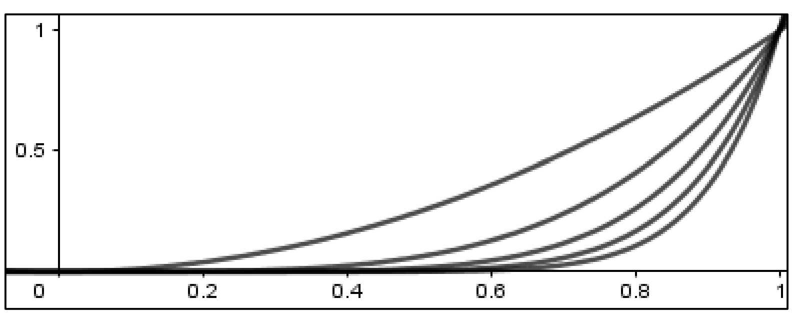


Figura 6. Convergencia de la sucesión de funciones $f_n(x) = (-x)^n$ a la función $f(x) = 0$ en el ejemplo 27. (Creación Propia a través del software Geogebra).

Por tanto ahora podemos hacer la generalización.

Teorema 3.2.3.2.1.

Si la sucesión de funciones $\mu-$medibles $f_n(x)$ converge a la función $f(x)$ casi en todos los puntos, entonces $f(x)$ es medible.

Demostración:

Se supone que una función *f* sobre el conjunto *X*, es el límite casi en todos lados de la sucesión de funciones $f_n(x)$. Sea el conjunto $A = \{x \in X \setminus \lim f_n(x) \text{no esta definido} \lim f_n(x) \neq f(x)\}$, entonces el conjunto A tiene medida cero. Se define una nueva sucesión de funciones $g_n(x)$ sobre *X* tal que

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \notin A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

Y sea *g* definida como

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

Como cada función $g_n(x)$ es una función medible para cada *n*, entonces $f_n(x)$ también es medible casi en todos los puntos de *X*. si $x \in A$, $\lim g_n(x) = 0 = g(x)$ si $x \notin A$, se tiene que $\lim g_n(x) = \lim f_n(x) = f(x) = g(x)$. por tanto el límite de $g_n(x) = g(x)$ y como $f(x) = g(x)$ entonces $f(x)$ es medible.

Corolario 3.2.3.2.2.

Sea (f_n) una sucesión sobre $M(X,\sigma)$ que converge a *f* sobre $[a,b]$, entonces *f* está en $M(X,\sigma)$

Para lo anterior, si *n* pertenece a los naturales, y sea (f_n) una truncacion de *f* definida por:

$$f_n(x) = f(x), \quad si \ |f(x)| \leq n$$

$$f_n(x) = n, \quad si \ f(x) > n$$

$$f_n(x) = -n, \quad si \ f(x) < n$$

Se ha visto que el límite de una sucesión de funciones en $M(X,\sigma)$ pertenecer a $M(X,\sigma)$. Ahora se demuestra que una función no negativa *f* en $M(X,\sigma)$ es el límite de una secuencia monótona creciente φ_k en $M(X,\sigma)$ además, cada φ_k puede elegirse para que no sea negativa y para asumir solo un número finito de valores reales.

Lema 3.2.3.2.2.

Si *f* es una función no negativa en $M(X,\sigma)$, entonces existe a sucesión φ_k en $M(X,\sigma)$ tal que

(i) $0 \leq \varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x), \ \forall x \in X, \ k \in N$.

(ii) $f(x) = \lim \varphi_k, \ \forall x \in X$.

(iii) Cada φ_k tiene un numero finito de valores reales.

Demostración:

Sea *k* un número real natural, si $n = 1, 2, ..., n2^n - 1$ y sea E_{kn} el conjunto

$$E_{kn} = \{x \in X : n2^{-k} \leq f(x) < (n+1)2^{-k}\}$$

Y si $n = k2^k$ sea E_{kn} el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq k\}$. se observa que el conjunto $\{E_{kn} : n = 1, 2, ..., k2^k\}$ son disjuntos, pertenecen a *X*, y tiene una unión igual a σ. Si definimos φ_k para que sea igual a $k2^{-k}$ sobre E_{kn} entonces φ_k pertenece a $M(X,\sigma)$.

Hay una cuestión terminológica que debe mencionarse y que se empleará a continuación, diremos que cierta proposición tiene μ-casi en todas partes si existe un subconjunto ***N*** de **X** con μ (*N*) = 0 tal preposición se mantiene en el complemento de *N*. por lo tanto, decimos que dos funciones *f*, *g* son iguales a μ -casi en todas partes dado que son iguales para μ , casi todos *x* en el caso $f(x) = g(x)$ cuando *x* no está en *N*, para algunos *N* en *X* con μ (*N*) = 0 en este caso a menudo escribiremos

$$f(x) = g(x)$$

De la misma manera, decimos que una sucesión (f_n) de funciones sobre *X* converge μ -casi en todas partes (o converge para μ -en toda *x*) si existe un conjunto *N* de *X* tal que μ (*N*) = 0 tal que $f(x) = \lim f_n(x)$ para los *x* que no pertenecen a *N*. en este caso podemos escribir que

$$f = \lim f_n$$

Ahora, dado que ya se han definido las herramientas necesarias, para generalizar funciones y medidas, es conveniente introducir la mayor de las generalizaciones de la integral en la actualidad, esta abarca las integrales anteriormente estudiadas, con el fin de expresar que las anteriores son conjuntos de funciones Riemann integrables y conjuntos de funciones Stieltjes integrables.

4.1.4. La integral de Lebesgue

En la sección anterior se investigó las propiedades básicas de las funciones medibles, que son una generalización bastante amplia de las funciones continuas. Para funciones medibles, la definición clásica de una integral conocida a partir del análisis y generalmente llamada **integral de Riemann** generalmente no es aplicable en todos los casos. Por ejemplo, la conocida función de Dirichlet que es igual a cero en puntos irracionales es obviamente medible, pero no es integrable en el sentido de Riemann. Por lo tanto, este concepto de integral de Riemann resulta ser de poca utilidad con respecto a las funciones medibles de igual forma no es analizable mediante la integral de Riemann-Stieltjes debido a la infinitud de puntos de discontinuidad que posee.

La razón para esto es clara. Se supone, por simplicidad, que se está considerando las funciones en un segmento. Al presentar el concepto de la integral de Riemann, dividimos el segmento en el que se da la función *f* (*x*) en pequeños segmentos, y tomando en cada una de estas partes un punto arbitrario $\bar{x}_k$, formamos la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\bar{x}_k\right)\Delta x_k$$

Esencialmente, reemplazamos aquí el valor de la función *f* (*x*) en cada punto del segmento $\Delta x_k = [x_{k-1}, x_k]$ por su valor en algún punto arbitrariamente seleccionado $\bar{x}_k$ de este intervalo. Sin embargo, es natural hacer esto si los valores de la función *f* (*x*) en los puntos vecinos están cerca uno del otro, es decir, si *f* (*x*) es continuo o si el conjunto de sus puntos de discontinuidad "no es demasiado grande".

En sus publicaciones que comenzaron en 1,902, Henri Lebesgue presentó una de las nuevas ideas más emocionantes en la historia del análisis. Algunas de sus ideas habían sido anticipadas por Borel y Cantor, pero fue Lebesgue quien desarrolló completamente la teoría ahora conocida como medida e integración de Lebesgue. Básicamente, su idea era eliminar las deficiencias de la integral de Riemann comenzando con una partición del rango de *f* en lugar de una partición del dominio como en la integral de Riemann.

Ahora dado que se trabaja en el plano con la medida de Lebesgue, se centra en los conjuntos que son necesarios estudiar, estos conjuntos serán intervalos del plano, tanto del conjunto Boreliano *X*, y del conjunto Boreliano *Y*, sin embargo para no caer en confusión se plantea ahora que las medidas bajo las cuales se trabaja el siguiente desarrollo estarán centrados sobre conjuntos *E* del plano.

Por ejemplo, si *f* es una función no negativa limitada definida en [*a*, *b*], y si *M* es un límite superior estricto de los valores de *f* (*x*), para $x \in E = [a,b]$ entonces el área bajo la gráfica de *f* podría aproximarse tomando en cuenta que.

Sea $(y_0, y_1, ..., y_n)$ una partición del intervalo $[0, M]$ a lo largo del eje *y*, y tomándose un $\bar{y} \in [y_{k-1}, y_k]$, $\forall k = 1, 2, ..., n.$ y siendo $\mu(E_k)$ la longitud del intervalo E_k, una aproximación del área bajo la gráfica de *f* está dada por la suma de Lebesgue:

$$A(f)=\bar{y}_1\mu(E_1)+\bar{y}_2\mu(E_2)+...+\bar{y}_n\mu(E_n)$$

La anterior suma se puede observar en la **figura 7**.

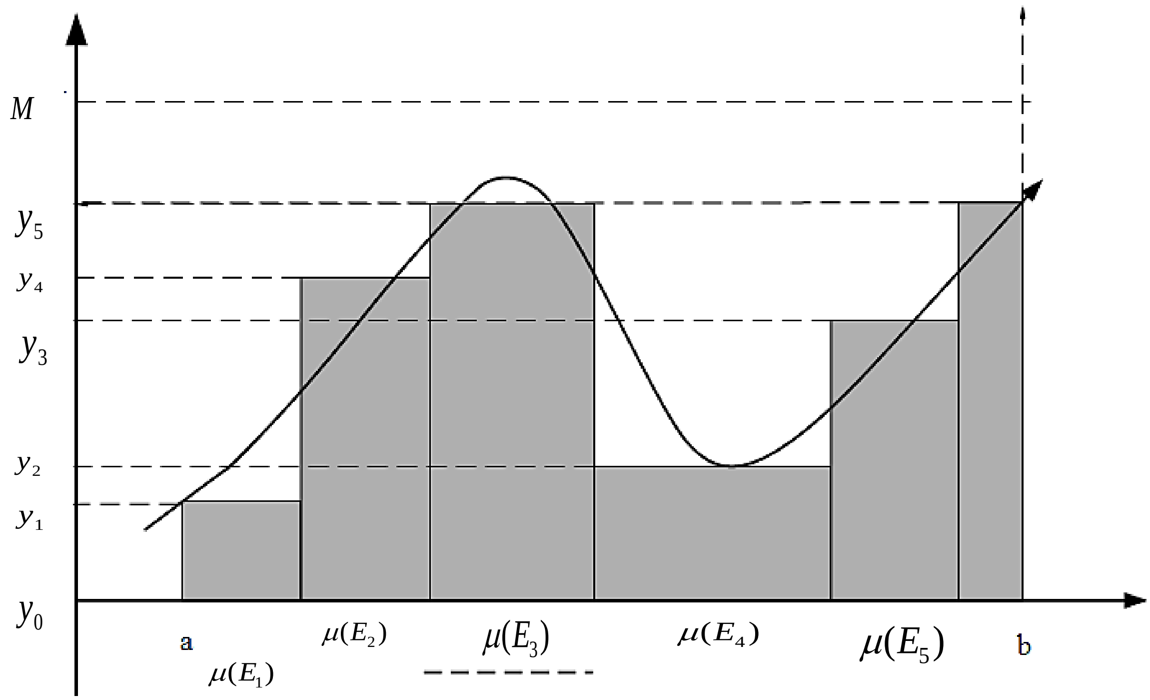


Figura 7. Aproximación del área de la función por sumas de Lebesgue con medidas de conjuntos. (Creación Propia).

La idea básica de la integral de Lebesgue consiste en el hecho de que, a diferencia de la integral de Riemann, los puntos *x* se agrupan no por su cercanía en el eje *x*, sino por la cercanía de los valores de las funciones en estos puntos. Esto inmediatamente da lugar a la posibilidad de generalizar el concepto de integral a una clase bastante amplia de funciones.

Además, la integral de Lebesgue se define exactamente de la misma manera para las funciones que se definen en cualquier espacio con medidas, mientras que la integral de Riemann se introduce primero para funciones de una variable, y solo entonces podría transferir las posibilidades para otras variables.

De manera apresura si no se tuviese que desarrollar las propiedades y condiciones que tiene consigo la integral, podría determinarse directamente que la integral de Lebesgue, *L(f,E)*, puede definirse como

$$LE(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x})\mu[x_{k-1},x_k]$$

En todas partes, donde no se establece lo contrario, consideraremos alguna medida $\mu-$aditiva sobre la $\sigma-Algebra$ que se define en un álgebra de conjuntos de Borel con una unidad *X*. Todos los conjuntos $A\subseteq X$ se considerarán que son $\sigma-$medibles y las funciones *f* (*x*) se definirán para $x\in X$ y serán $\mu-$medibles.

Ahora se introduce la integral primero para funciones de medida simples no negativas y luego para funciones medibles de valor real no negativas y arbitrarias.

Se considera un espacio de medida fijo. Es necesario denotar la colección de todas las funciones medibles por σ en *X* por $M=M(X,\sigma)$ y la colección de todas las funciones no negativas medibles por σ en *X* a *R'* por $M^{+}=M(X,\sigma)$. Se define la integral de cualquier función en M^{+} con respecto a la medida μ. Para hacerlo, se considera conveniente introducir la noción de una función simple. Es conveniente exigir que las funciones simples tengan valores en *R*.

Como se ha indicado en la **figura 7**, *L* (*f*, *E*) es una aproximación del área bajo la gráfica de *f*, (donde *f* es no negativa). Generalizadamente las bases de estos rectángulos no son necesariamente intervalos, sin embargo para el caso del plano, deberán serlo necesariamente. Por tanto ahora, al igual que en el caso de la integral de Riemann y Riemann-Stieltjes, se debe definir:

Definición 3.2.4.1.

Una función medible y acotada $f:E\rightarrow R$ es Lebesgue integrable sobre *E*, si existe un número real *L* tal que para todo $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$, donde *L* (*f*, *E*) es relativa a la *P*, entonces $\left|L(f,E)-L\right|<\varepsilon$.

Desde que la definición anterior no da la el método para encontrar *L* (*f*, *E*), desde que la integral de Riemann y Riemann-Stieltjes envuelve la aproximación de *f* a través de funciones a pasos. Y como el significado de funciones a pasos en la integral de Riemann es la misma para las sumas de Riemann, en este caso se compara ala integral de Lebesgue como una suma de áreas, alas que llamaremos sumas de Lebesgue. Por supuesto si las funciones son acotadas y medibles serán Lebesgue integrables.

Definición 3.2.4.2.

Si f es acotada sobre un conjunto E medible y $E_k \in E$ son sub particiones de E, se definen las sumas inferiores y superiores de Lebesgue como

$$m_k : \inf\{f(x) : x \in E_k\}$$

$$M_k : \sup\{f(x) : x \in E_k\}$$

$$L(f,E) = \sum_{k=1}^{n} m_k \mu(E_k)$$

$$U(f,E) = \sum_{k=1}^{n} M_k \mu(E_k)$$

Claramente al igual con la integral de Riemann sí $E_k \in E$, entonces $L(f,E) = U(f,E)$.

Ahora, se deben hacer consideraciones importantes cuando se quiere construir la integral como tal, de la misma manera que la integral de Riemann y Riemann-Stieljes, y es que para las anteriores se definiría un concepto muy importante, que permita aproximar la función a través de funciones a pasos, acá se retoma este concepto pero de una manera más general, es decir la siguiente definición engloba a las funciones como tal, pero se expresa de una forma más completa y práctica.

Definición 3.2.4.3.

Una función de valores reales es simple si y solo si tiene un numero finito de valores. Esta función puede ser representada como:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi E_k$$

Acá, el valor de $a_k \in R$ y χE_k es la función característica de la **definición 3.2.1.6.1.** Solo que en este caso para un conjunto E_k en σ. Entre estas representaciones para φ hay una representación estándar única caracterizada por el hecho de que a_k son distintos y los E_k son subconjuntos disjuntos no vacíos de *X* y son tales que

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

(Por supuesto, si no requerimos que a_k sea distinto, o que se E_k sea disjunto, entonces una función simple tiene muchas representaciones como una combinación lineal de funciones características).

Ejemplos de funciones simples son las funciones constantes planteadas en la **definición 2.1.4.1.1.** Y las funciones escalonadas de la **definición 3.2.2.4.1.** (Combinaciones lineales de funciones indicadoras de celdas). Recordamos que las funciones escalonadas se usan en los cursos de cálculo para definir la integral de Riemann de una función. Las funciones simples tomaran el papel de las funciones escalonadas en la definicion de la integral de Lebesgue.

Definición 3.2.4.4.

Si φ es una función simple en $M^{+} = M(X,\sigma)$ con una representación estándar como:

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

Entonces definimos la integral de φ con respecto a μ para ser un número real de tal forma:

$$L(f,E) = \int \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$$

Se emplea la convención $0(+\infty) = 0$ por lo que, entonces la integral de la función idénticamente 0 es igual a 0 si el espacio tiene una medida finita o infinita. Cabe señalar que el valor de la integral de una función simple en $M^{+}=M(X,\sigma)$ está bien definido (aunque puede ser $+\infty$) ya que todos los a_k no son negativos, por lo que no encontramos expresiones sin sentido como $(+\infty)-(+\infty)$.

Esta integral de Lebesgue definida anteriormente concuerda con la integral de Riemann, para lo que luego se hará una demostración más detallada.

Ejemplo 28:

Podemos calcular la integral de Lebesgue de la función simple

$$\phi(x)=\begin{cases}-1, & 0<x\le 1\\ 2, & 1<x\le 2\\ 0, & 2<x\le 3\end{cases}$$

Con lo que se puede generar la representación de $\phi=-1\chi_{(0,1]}+2\chi_{(1,2]}$

Finalmente se calcula la integral a través de

$$\int_E \phi=-1\cdot 1+2\cdot 1=1=\int_0^3 \phi(x)dx$$

Dado que las funciones simples podrían por su comportamiento ser un tanto distintas a la función deseada ahora se define que se pueden establecer todas funciones simples, una por encima y otra por debajo tal que tiendan a la función deseada.

Definición 3.2.4.5.

Supongamos que *f* es una función acotada y medible sobre un conjunto *E* con medida finita, de tal forma que $\alpha \leq f \leq \beta$ sobre *E*, y $\mu(E) < \infty$. Sean ϕ, φ funciones simples tales que $\phi \leq f \leq \varphi$ sobre *E*. Entonces

La integral por sumas inferiores de Lebesgue de *f* sobre *E*, está dada por

$$\int_{-E} f = \sup\left[\int_E \phi \setminus \phi \leq f, \phi \text{ es una funcion simple}\right]$$

La integral por sumas Superiores de Lebesgue de *f* sobre *E*, está dada por

$$\int_E^{-} f = \inf\left[\int_E \varphi \setminus \varphi \leq f, \varphi \text{ es una funcion simple}\right]$$

Si $\phi \leq f \leq \varphi$ donde ϕ, φ son funciones simple, por monoticidad

$$\int_E \phi \leq \int_E \varphi$$

Dado que φ es arbitraria, se puede interpretar en la anterior desigualdad como que $\int_E \phi$ es la suma inferior para el conjunto de $\{\int_E \phi \setminus f \leq \varphi, \varphi \text{ es una funcion simple}\}$. Y dado que $\int_E^{-} f$ es la mayor de las sumas inferior, entonces $\int_E \phi \leq \int_E^{-} f$. Similarmente $\int_E \phi \leq \int_E^{-} f$ para $\phi \leq f$, donde $\int_E^{-} f$ es la menor de las sumas superiores, se puede concluir que $\int_{-E} f \leq \int_E^{-} f$. Finalmente se puede establecer que con una función acotada *f* sobre un conjunto *E* de medida finita tiene sumas superiores e inferiores, que satisfacen:

$$\int_E \phi \leq \int_{-E} f \leq \int_E^{-} f \leq \int_E \varphi$$

Para cualquier función simple $\phi \leq f \leq \varphi$ sobre *E*.

Definición 3.2.4.6.

Una función acotada *f*, definida en un conjunto *E* con medida finita, es Lebesgue Medible sobre *E* si las sumas inferiores y superiores son las mismas y ambas tienden al mismo valor denotado como $\int_E f$:

$$\int_{-E} f \leq \int_E f \leq \int_E^{-} f$$

Hasta acá se puede entender fácilmente que la integral de Riemann de una función a pasos concuerda con la integral de Lebesgue de una función simple, y que cada función a pasos definida para la integral de Riemann corresponde a ser una función simple incluso para la integral de Riemann-Stieltjes.

Ahora dado que la integrabilidad de Riemann significa Integrabilidad de Lebesgue, ya que Lebesgue generaliza de mejor manera la integral, es importante conocer ahora como se generaliza los tipos de funciones acotadas que son Riemann integrables.

Lema 3.2.4.1.

Una función acotada *f*, definida sobre un conjunto *E* con medida finita, es Lebesgue integrable si para cualquier $\varepsilon > 0$ se tienen funciones simples ϕ, φ tal que $\phi \leq f \leq \varphi$ sobre *E*, tal que:

$$0 \leq \int_E \phi \leq \int_E \varphi = \int_E (\varphi - \phi) < \varepsilon$$

Demostración:

Se asume que la función *f* es acotada y Lebesgue integrable sobre el conjunto medible *E*, tal que $\mu(E) < \infty$, y sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de sumas inferiores y superiores en la

definición 3.2.4.2. Tenemos que las funciones simples ϕ, φ, tal que $\phi \leq f \leq \varphi$, sobre *E*, tal que

$$\int_E f - \frac{\varepsilon}{2} = \int_{-E} f - \frac{\varepsilon}{2} < \int_E \phi \leq \int_{-E} f \leq \int_E^{-} f \leq \int_E \varphi < \int_E^{-} f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_E f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces $0 \leq \int_E \varphi - \int_E \phi = \int_E (\varphi - \phi) < \varepsilon$

Ahora se muestran las propiedades de la integral de Lebesgue, donde se observa que estas corresponden a las mismas de la integral de Riemann y Riemann-Stieljes pero de forma más general y útil.

4.1.4.1. Propiedades Elementales

Dado que se conoce la representación de la integral y como está encuentra el valor buscado, se pueden plantar las propiedades elementales de esta.

Teorema 3.2.4.1.1.

Si φ es una función simple en $M^+ = M(X, \sigma)$, sea *c* un valor real tal que $c \geq 0$, se cumple que:

$$\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu$$

Demostración:

Si *c* es 0, se entiende que $c\varphi = 0$, ahora bien se $c > 0$, entonces $c\varphi$ se encuentra en M^+ con una representación estándar

$$c\varphi = \sum_{k=1}^{n} ca_k \chi\left(E_k\right)$$

Por lo que

$$\int c\varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} ca_k \mu\left(E_k\right) = c\sum_{k=1}^{n} a_k \mu\left(E_k\right) = c\int \varphi \, d\mu$$

Por lo que queda demostrado el teorema. Este concuerda con las mismas propiedades de la integral de Riemann y Riemann-Stieltjes, solo que se muestra que el valor c puede introducirse como una constante dentro de la combinación lineal de funciones simples que tiene la función integrable.

Teorema 3.2.4.1.2.

Si φ y ψ son funciones simples en $M^+ = M(X,\sigma)$, entonces se cumple que:

$$\int(\varphi+\psi)d\mu = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu$$

Demostración:

Sean φ y ψ con sus representaciones estándares

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi(E_k) \qquad \psi = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi(F_j)$$

Entonces φ + ψ tiene la representación

$$\varphi+\psi = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_k + b_j)\chi(E_k \cap F_j)$$

Sin embargo, esta representación de φ + ψ como una combinación lineal de funciones características de la **definición 3.2.1.6.1**. De conjuntos disjuntos $E_k \cap F_j$ no es necesariamente una representación estándar de φ + ψ, desde que los valores $a_k + b_j$ podrían ser no distintos. Para ello sea $c_h : h = 1, 2, 3,..., p$ los distintos números en el conjunto $\{a_k + b_j : k = 1, 2,..., n; j = 1, 2,..., m\}$ y sea G_h la unión de todos los conjuntos $E_k \cap F_j \neq \phi$ tales que $a_k + b_j = c_h$. Entonces:

$$\mu(G_n) = \sum_{h} \mu(E_k \cap F_j)$$

Donde la notación designa la suma sobre todos los *k*, *j* tal que $a_k + b_j = c_h$. Y como ahora la representación estándar de φ + ψ está dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{p} c_h \chi G_h$$

Entonces

$$\int (\varphi + \psi)\, s] d\mu = \sum_{h=1}^{p} c_h \mu(G_h) = \sum_{h=1}^{p} \sum_{(h)} c_h \mu(E_k \cap F_j)$$

$$= \sum_{h=1}^{p} \sum_{(h)} \left(a_k + b_j\right) \mu(E_k \cap F_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(a_k + b_j\right) \mu(E_k \cap F_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_k \mu(E_k \cap F_j) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(E_k \cap F_j)$$

Desde que *X* es la unión de ambas familias de conjuntos disjuntos $\{E_k\}$ y $\{F_j\}$ entonces

$$\mu(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \cap F_j), \qquad \mu(F_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_k \cap F_j)$$

Finalmente tenemos que

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k) + \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(F_{jk})$$

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu$$

Ahora, se está preparado para introducir la integral de una función arbitraria en $M^+ = M(X, \sigma)$, donde esta no necesariamente debe ser finita.

Teorema 3.2.4.1.3.

Si A y B son un par de conjuntos disjuntos y medibles, y $f: A \cup B \rightarrow R$ es acotada y medible, entonces:

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

Demostración:

Dado que f es acotada y medible sobre el intervalo A y B y se cumple con el **Lema 3.2.3.1.1.1**., por tanto sus integrables existen. Ahora sea g_1 una función simple sobre A para toda $x \in A$ tal que $g_1(x) \leq f(x)$ y sea h_1 una función simple sobre B tal que $h_1(x) \leq f(x)$ para toda $x \in B$, entonces una función f_1 definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} g_1(x), & si\ x \in A \\ h_1(x), & si\ x \in B \end{cases}$$

Es simple sobre $A \cup B$, y $f_1(x) \leq f(x)$ sobre $A \cup B$, entonces por aditividad de funciones simples

$$\int_A g_1 d\mu + \int_B h_1 d\mu = \int_A f_1 d\mu + \int_B f_1 d\mu$$

$$= \int_{A\cup B} f_1 d\mu \leq \int_{A\cup B} f d\mu$$

Utilizando el supremo de la función tenemos que

$$\int_A f d\mu + \int_B f d\mu \leq \int_{A\cup B} f d\mu$$

Por otro lado, f_1 es simple y $f_1(x) \leq f(x)$ sobre $A \cup B$, entonces $f_1(x) \leq f(x)$ sobre A y sobre de forma separada en B. Por tanto

$$\int_{A\cup B} f_1 d\mu = \int_A f_1 d\mu + \int_B f_1 d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

Y el teorema queda demostrado.

Teorema 3.2.4.1.4. (Aditividad Contable de la integral)

Sea E un conjunto acotado medible, si $f : E \to R$ es acotada y medible, y $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, donde E_k son conjuntos disjuntos, entonces

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{Ek} f d\mu$$

Demostración:

Sea

$$D = \{x : x \in E, f(x) = y_k\}$$

$$D_k = \{x : x \in E_k, f(x) = y_k\}$$

Entonces se tiene que

$$\int_E f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(D_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k \sum_{k=1}^{n} \mu(D_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(D_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{Ek} f d\mu$$

Entonces, bajo la asunción de integrabilidad de f sobre E, la serie $\sum_{k=1}^{n} y_k \mu(D_k)$ converge absolutamente, y la medida es no negativa.

En el caso de una función arbitraria f, la integrabilidad sobre el conjunto E implica que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función simple $g(x)$ que es integrable sobre el conjunto E y que satisface la condición:

$$| f(x) - g(x) | < \varepsilon$$

Y dado para $g(x)$

$$\int_E g d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{Ek} g d\mu$$

Además como g es integrable en E, la serie converge absolutamente. Entonces se puede estimar que

$$\left| \int_E f(x) d\mu - \int_E g(x) d\mu \right| < \varepsilon\mu(E)$$

Por tanto

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{Ek} f(x) d\mu - \int_E f(x) d\mu \right| < 2\varepsilon$$

Y como $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente tan pequeño como se desee, se concluye que

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{Ek} f(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu$$

Definición 3.2.4.1.1.

Si *f* pertenece a $M^+ = M(X,\sigma)$, definimos la integral de f respecto a μ cómo un número real

$$\int f d\mu = \sup \int \varphi \, d\mu$$

Donde el supremo es extendido sobre todas las funciones simples φ en M^+ que satisfacen que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todas las $x \in E$, si f pertenece a $M^+ = M(X,\sigma)$ y E pertenece a σ entonces $f\chi_E \in M^+(X,\sigma)$ y se define la integral de *f* respecto a μ para ser el número.

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

Ahora se muestra que la integral es monótona tanto con respecto al integrando como al conjunto sobre el cual se extiende la integral.

Lema 3.2.4.1.1.

Si f y g pertenecen a $M^{+} = M(X,\sigma)$ y $f \leq g$, entonces

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

Demostración:

Dado que φ es una función simple en M^{+} tal que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ entonces $0 \leq \varphi(x) \leq g(x)$, por tanto se cumple que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

Lema 3.2.4.1.2.

$$\int_E 1 \cdot d\mu = \mu(E)$$

Demostración

Fácilmente se entiende el resultado por la definición de la integral

Corolario 3.2.4.1.1.

Si se tiene que sobre el conjunto E, la afirmación que $m \leq f(x) \leq M$, entonces

$$m\mu(E) \leq \int_E f(x)\, d\mu \leq M\mu(E)$$

Ahora se presentan importantes resultados debido a **B. Levi**. La siguiente sección proporciona la clave de las propiedades fundamentales de convergencia de la integral de Lebesgue.

4.1.4.1.1. Teoremas de Convergencia

Hay dos teoremas de convergencia principales que involucran la integral de Lebesgue. Son el **Teorema de la convergencia monótona** y el **Teorema de la convergencia dominada por Lebesgue**, y ninguno es utilizable si restringimos nuestra atención a las funciones integrables de Riemann o Riemann-Stieltjes. Por lo tanto, observaremos que la nueva teoría de Lebesgue en realidad ofrece una mejora sobre la teoría de Riemann y Stieltjes con respecto a las propiedades de convergencia. Es esta mejora la que hace que la teoría de Lebesgue sea valiosa en muchas aplicaciones teóricas.

Se espera que las propiedades de convergencia para las integrales de Lebesgue sean mejores. Sin embargo, esto no está claro de inmediato. Las funciones pueden ser integrables Lebesgue (sumables) y convergen (puntualmente) a una función integrable Lebesgue *f*, sin embargo estas funciones pueden o no converger en todas partes.

Teorema 3.2.4.1.1.1. (Teorema de Convergencia Monótona)

Si (f_n) es una sucesión de funciones monótonas crecientes en M^+ que converge a *f*, entonces

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

<u>Demostración:</u>

Si la función *f* es medible, y desde que $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ por el **Lema 3.2.4.1.1.** Entonces

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$$

Para toda $n \in N$ se tiene que

$$\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

Este teorema es verdadero bajo el concepto de función que posee infinitos valores. Es decir que cada sucesión de funciones creciente convergerá a alguna función.

Ejemplo 29:

Sea

$$f_n(x)=\begin{cases}0,\ \text{en}\ (1/n,1]\\ \dfrac{1}{x},\ \text{en}\ (0,1/n]\\ 0,\ \text{en}\ x=0\end{cases}$$

Cada f_n es integrable con integral tendiendo a cero. Además de ello $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$, por tanto se concluye que tiene integral cero. La representación gráfica de la sucesión de funciones puede ser analizada en el **anexo 4.**

Ejemplo 30:

Es fácil ver que la expresión

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx \,\text{tiende a} \int_0^\infty e^{-x}dx$$

Esto se puede reconocer en la **figura 8**.

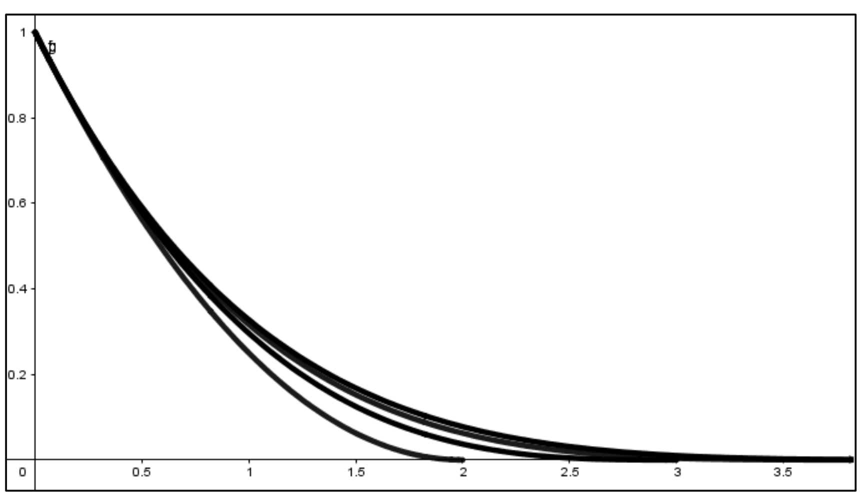


Figura 8. Grafica de la sucesión de funciones $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ en el ejemplo 30. (Creación Propia a través del software Geogebra)

Corolario 3.2.4.1.1.1.

Si *f* pertenece a M^+ y existe un $c \geq 0$, entonces cf pertenece a M^+ y se cumple que

$$\int cfd\mu = c\int fd\mu$$

De esto se puede referir que si *c=0,* el resultado es inmediato. Pero si $c > 0$ y sea φ_n una sucesión de funciones monótonas creciente en M^+ que convergen a *f*. Entonces $c\varphi_n$ es una sucesión de funciones monótonas creciente en M^+ que convergen a *cf*. Aplicando el **Teorema 3.2.4.1.1.1. (Teorema de Convergencia Monótona)** obtenemos:

$$\int cfd\mu = \lim \int cfd\mu$$

$$= c\lim \int \varphi_n d\mu = c\int fd\mu$$

Corolario 3.2.4.1.1.2.

Si *f* y *g* pertenecen a M^+, entonces $f+g$ pertenece a M^+, y se tiene que

$$\int (\varphi + \psi)d\mu = \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu$$

Para ello sean φ_n y ψ_n sucesiones de funciones monótonas crecientes de funciones simples que cubren a *f* y *g*, respectivamente, entonces $\varphi_n + \psi_n$ es una sucesión de funciones monótonas crecientes que cubre a $f+g$. Aplicando el **Teorema 3.2.4.1.1.1. (Teorema de Convergencia Monótona)** obtenemos

$$\int (\varphi + \psi)d\mu = \lim \int (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu$$

$$= \lim \int \varphi_n \, d\mu + \lim \int \psi_n d\mu$$

$$= \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$$

El siguiente resultado es una consecuencia del teorema de convergencia monótona, el cual es de vital importancia porque permite tratar sucesiones de funciones que no son monótonas.

Lema 3.2.4.1.1.1. (Lema de Fatou)

Si (f_n) pertenece a M^+, entonces

$$\int (\liminf \; f_n) \, d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Demostración:

Sea $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, ...,\}$ tal que $g_m \leq f_n$, donde $m \leq n$ entonces

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu, \qquad m \leq n$$

Por tanto

$$\int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Desde que la sucesión g_m es creciente y converge a $\liminf f_n$ el **teorema 3.2.4.1.1.1.** De convergencia monótona implica que:

$$\int (\liminf \; f_n) \, d\mu = \lim \int g_m d\mu$$

$$= \liminf \int g_m d\mu$$

Corolario 3.2.4.1.1.3.

Suponiendo que *f* pertenece a M^+. Entonces *f* (*x*) = 0 casi en todo lados de *X*. Si y solo si

$$\int f d\mu = 0$$

Acá claramente para probar lo anterior hay que tener en cuenta dos posibilidades, la primera de ellas es que $\mu(E) = 0$. Y la segunda suponiendo que $\mu(E) \neq 0$ y aplicando el **Lema 3.2.4.1.1.1. (Lema de Fatou),** se tiene que

$$0 \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu = 0$$

Corolario 3.2.4.1.1.4.

Si f_n es una sucesión de funciones monótonas crecientes en M^+ que convergen casi en todos los puntos sobre *X* a una función *f* en M^+, entonces

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Dado que se ha mostrados las herramientas de integración para sucesiones de funciones indefinida, es ahora donde se plantean estas herramientas de forma definidas sobre funciones en un conjunto *E*.

Teorema 3.2.4.1.1.2. (Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue)

Sea (f_n) una sucesión de funciones integrables que convergen casi en cualquier parte en una función de valores reales *f* medible. Si existe una función integrable *g* tal que $f_n \leq g$ para todos los *n*, entonces *f* es integrable y

$$\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu$$

Demostración:

Redefiniendo f_n, f en un conjunto medible, en la que se asume que hay convergencia en todos los valores de *X*. Entonces $f_n \leq g$. Desde que $f_n + g \geq 0$, podemos utilizar el lema de Fatou **Lema 3.2.4.1.1.1.** Y el **Teorema 3.2.4.1.2.** Para obtener que

$$\int f d\mu + \int g d\mu = \int (f + g) d\mu$$

$$\leq \lim\inf \int (g + f_n) d\mu$$

$$= \lim\inf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu \right)$$

$$= \int g d\mu + \lim\inf \int f_n d\mu$$

Por tanto se tiene que

$$\int f d\mu \leq \lim\inf \int f_n d\mu$$

Así mismo para cuando $g - f_n \geq 0$, obtenemos que

$$\int g d\mu - \int f d\mu = \int (g - f) d\mu$$

$$\leq \lim\inf \int (g - f_n) d\mu$$

$$= \lim\inf \left(\int g d\mu - \int f_n d\mu \right)$$

$$= \int g d\mu - \lim\sup \int f_n d\mu$$

De lo que se concluye que

$$\lim\sup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

Combinando los resultados se tiene que

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Esta condición es correcta si se satisfacen las condiciones:

(i) El límite para cualquier sucesión de funciones uniformemente convergente sobre la cual es integrable en E existe.

(ii) El límite para la función dada $f(x)$ no depende de la elección de la sucesión $\{f_n(x)\}$.

Este teorema dice en esencia que la convergencia de una sucesión de funciones f_n implica convergencia en la integral siempre que las gráficas de f se encuentren en un área finita fija. Si $\{f_n(x)\}$ es positivo y su gráfica no está en un área finita, entonces la integral puede ser demasiado grande, pero siempre son al menos tan grandes como f en el límite. Lo que fue planteado a través del Lema de Fatou.

Ahora se muestran algunos criterios actuales de integración, de se toman en cuenta como anteriormente se había planteado las partes positivas y negativas de una función.

4.1.4.2. Funciones integrables

Se definió la integral de cada función f en M^+ con respecto a una medida μ e inicialmente se permitió que esta fuese $+\infty$. Sin embargo es más conveniente definir los valores de funciones integrables como números reales.

4.1.4.2.1. Partes positivas y negativas de una función.

Definición 3.2.4.2.1.1.

Sea I cualquier intervalo, para una función f definimos a $f^+ : I \to R$ y $f^- : I \to R$ como la parte positiva y a parte negativa de una función respectivamente, tal que cumplen:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \ \forall x \in I$$
$$f^-(x) = \min\{f(x), 0\}, \ \forall x \in I$$

Además, definimos la función:

$$|f|(x) = |f(x)|$$

Para todos los $x \in I$. Estas definiciones son representadas en la siguiente ilustración que muestra cada una de las partes de las funciones.

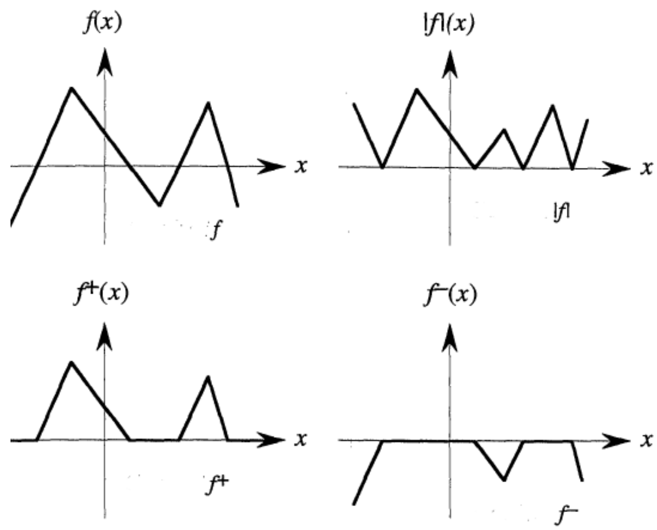


Figura 9. Partes negativas y positivas de una función.

Claramente se muestra que $f = f^{+} + f^{-}$, y $|f| = f^{+} - f^{-}$, además $0 \leq f^{+} \leq |f|$ y $-|f| \leq f^{-} \leq 0$ sobre *I*.

En un principio se definición la necesidad de que la función no fuese negativa sin embargo esto no está restringido ya que se puede expresar la función *f* a través de una diferencia de dos funciones positivas.

Definición 3.2.4.2.1.2.

La colección $L(X,\sigma,\mu)$ de **funciones integrables (sumables)** consiste en todas las funciones de valores reales $\sigma -$medibles definidas sobre *X*, tales que las partes positivas y negativas (f^+, f^-)tengan integrales finitas respecto a la medida μ. En este caso se define la integral de *f* respecto a μ cómo:

$$\int fd\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

Si el conjunto *E* pertenece a *X*, entonces

$$\int_E fd\mu = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu$$

Esta anterior definición permite plantear que la función valor absoluto se puede representar como la suma de dos funciones si esta contiene partes positivas y negativas en su dominio *E.* Ahora se puede situar el siguiente teorema.

Teorema 3.2.4.2.1.1.

Una función medible *f* pertenece a $L(X,\sigma,\mu)$ si y solo si $|\,f\,|$ pertenece a $L(X,\sigma,\mu)$. En este caso

$$\left|\int fd\mu\right| \le \int |\,f\,| d\mu$$

<u>Demostración:</u>

Por definición f pertenece a L sí y solo si (f^+, f^-)pertenecen a M^+ y tienen integrales finitas. Ahora dado que $|\,f\,|^+ = |\,f\,| = f^+ + f^-$ y además $|\,f\,|^- = 0$ y siguiendo el **Lema 3.2.4.1.1.**

$$\left|\int fd\mu\right| \le \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right|$$

$$\le \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$$

$$= \int | f | d\mu$$

Por lo que se comprueba el teorema.

Teorema 3.2.4.2.1.2.

Sea $\alpha f, \ f+g$ funciones en el conjunto $L(X, \sigma, \mu)$, entonces estas pertenecen a $L(X, \sigma, \mu)$.

$$\int \alpha \ f d\mu = \alpha \int f d\mu$$

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Demostración:

Sí $\alpha = 0$, entonces $\alpha \ f = 0$ y se cumple que

$$\int \alpha \ f d\mu = 0 = \alpha \int f d\mu$$

Si $\alpha > 0$ entonces $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ y $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, por tanto

$$\int \alpha \ f d\mu = \int \alpha \ f^+ d\mu - \int \alpha \ f^- d\mu$$

$$= \alpha \left[\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right]$$

$$= \alpha \int f d\mu$$

Para la segunda parte, si f y g pertenecen a L, entonces $|f|, |g| \in L$ y desde que $|f+g| \le |f| + |g|$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz entonces $f+g \in L$. Para llegar a la relación deseada:

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

Desde que $(f^+ + g^+)$ y $(f^- + g^-)$ son funciones integrables no negativas, entonces

$$\int (f+g)d\mu = \int (f^{+}+g^{+})d\mu - \int (f^{-}+g^{-})d\mu$$

Lo que finalmente nos genera que

$$\int (f+g)d\mu = \int f^{+}d\mu + \int f^{-}d\mu - \int f^{-}d\mu - \int g^{-}d\mu$$

$$= \int f d\mu + \int g d\mu$$

Lo que demuestra el teorema.

4.1.4.3. Comparación de la integral de Riemann, Riemann-Stieltjes y Lebesgue

La diferencia entre la definición de Riemann y Lebesgue sobre la integración consiste en que para la integral de Lebesgue se toman a las particiones como conjuntos más particulares que solo intervalos.

Claramente existe la relación entre la integral de Riemann y la de Lebesgue, para la demostración se utiliza un caso simple.

Teorema 3.2.4.3.1.

Si la integral de Riemann $R(A)=\int_a^b f(x)dx$, existe, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$

y

$$R(A)=\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\mu = L(A)$$

<u>Demostración:</u>

Consideramos la subdivisión del intervalo $I=[a,b]$ en 2^n partes, por los puntos

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a)$$

Las sumas de Darboux de la **definición 2.1.4.1.5.** Y el **lema 2.1.4.2.1.** Corresponden con las subdivisiones

$$S = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_k$$

$$s = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_k$$

Donde M_k cota superior de $f(x)$ sobre el segmento

$$x_{k-1} \le x \le x_k$$

Y m_k es la cota inferior de $f(x)$ en el mismo segmento. Además por la definición de la integral de Riemann tenemos que

$$R(A) = \lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} s$$

Ahora sea

$$f_n^+(x) = M_k \text{ Para } x_{k-1} \le x \le x_k$$

$$f_n^-(x) = m_k \text{ Para } x_{k-1} \le x \le x_k$$

En el punto $x = b$, la función $f_n^+(x)$ y $f_n^-(x)$, pueden ser definidas arbitrariamente de tal forma que

$$\int_{[a,b]} f_n^+(x)\, d\mu = S$$

$$\int_{[a,b]} f_n^-(x)\, d\mu = s$$

Como la sucesión $f_n^+(x)$ no es creciente sino que está por encima nada más de $f(x)$, y la sucesión $f_n^-(x)$ no es decreciente sino que está por debajo nada más de $f(x)$, tenemos que casi en todos los puntos

$$f_n^+(x) \to f^+(x) \geq f(x)$$

$$f_n^-(x) \to f^-(x) \leq f(x)$$

Se tiene que

$$\int_{[a,b]} f^+(x)d\mu \to \lim_{n\to\infty} S = R(A) = \lim_{n\to\infty} s = \int_{[a,b]} f^-(x)d\mu$$

Entonces

$$\int_{[a,b]} \left| f^+(x)d\mu - f^-(x)d\mu \right| = 0$$

Por lo tanto

$$f^+(x)d\mu - f^-(x)d\mu = 0$$

$$f^+(x)d\mu = f^-(x)d\mu = f(x)d\mu$$

$$\int_{[a,b]} f^+(x)d\mu = \int_{[a,b]} f^-(x)d\mu = \int_{[a,b]} f(x)d\mu = L(A)$$

Finalmente el teorema queda demostrado.

El significado de este teorema es que toda función que puede ser integrada a través de las técnicas de cálculo puede ser integrada a través de la técnica de Lebesgue. Donde la integral de Lebesgue Converge ala integral de Riemann. Y es que utilizando la definición en una partición $I = [a,b]$, correspondiente con un conjunto E Lebesgue medible se tiene que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$, además como f es Lebesgue integrable el valor de ambas integrales se encuentra entre cualquier suma inferior y superior y ambas coinciden.

Es fácil dar ejemplos de funciones acotadas que son Lebesgue integrables pero que no son Riemann integrables (por ejemplo la función de Dirichlet que fue mencionada tempranamente, la cual es la unidad en racionales x y cero en irracionales x).

En general funciones no acotadas no pueden ser Riemann integrables, sin embargo muchas de ellas son Lebesgue integrables. En particular para cualquier función $f(x)$ para la cual la integral de Riemann

$$\int_{\varepsilon}^{1} | f(x) | dx$$

Tiene un límite finito en $L(A)$ cuando $\varepsilon \to 0$, es Lebesgue integrable sobre $[0,1]$, es decir

$$\int_{\varepsilon}^{1} f(x) d\mu = \int_{[a,b]} f(x) d\mu$$

En relación con esto es interesante mencionar que las integrales impropias

$$\int_{\varepsilon}^{1} f(x) d\mu = \lim_{\varepsilon \to} \int_{\varepsilon}^{1} | f(x) | dx = \int_{[a,b]} f(x) d\mu$$

No es Lebesgue integrable cuando $\lim_{\varepsilon \to} \int_{\varepsilon}^{1} | f(x) | dx = \infty$.

Armados con los teoremas de convergencia de la sección anterior, podemos determinar exactamente qué funciones son integrables de Riemann. Sabemos que las funciones continuas y las funciones monótonas son integrables de Riemann. Además, es posible alterar una función en muchos puntos sin afectar la integrabilidad. Sin embargo hay funciones integrables de Riemann que ni siquiera son continuas en partes (continuas en absoluto, pero finitamente en muchos puntos). Resulta que las discontinuidades deben restringirse a un conjunto de medida cero. De hecho, una función acotada es Riemann integrable sí y solo si es continúa en casi todas partes.

4.1.4.4. Algunos ejemplos de funciones Lebesgue integrables

Ejemplo 31:

Sea la función $f(x)=\begin{cases}1/x, & 0<x\le 1\\ 1/(x-2), & 1<x<2\end{cases}$, ver grafica en **anexo 5**.

La función *f* es no acotada positiva y negativa. Podemos definir la integral

$$\int_{(0,2)} f = \int_{(0,1]} f + \int_{(1,2)} f$$

$$\int_{(0,2)} f = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}(1/x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1}^{2-\varepsilon}(1/x-2)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(\varepsilon,1]}(1/x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{[1,2-\varepsilon)}(1/x-2)dx$$

$$=\infty-\infty \text{ (No definida)}$$

Ejemplo 32:

Sea $f(x)=x^{-1/2}, 0<x\le 1$, (ver grafica en **anexo 6**) *f* es no negativa y no acotada, por tanto

$$\int_{(0,1]} f = \int_{(0,1]} x^{-1/2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} x^{-1/2}dx = 2$$

Ejemplo 33:

Sea $f(x)=\begin{cases}(-1)^n(n+1)^{-1}, & n\pi<x<(n+1)\pi\\ 0, & \text{en cualquier otro punto}\end{cases}$ $;n=0,1,2,...$ (ver grafica en **anexo 7**)

$$\int_{[0,\infty)} f = \pi\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\right)$$

Sin embargo dado que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge por tanto la integral no es calculable, sin embargo si se toma el principio inicial de la integral como tal, se tendría que

$$\int_{[0,\infty)} f = \pi\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots +\right) = \pi \ln 2$$

Ejemplo 34:

Sea $f(x) = \begin{cases} -x^{-1/2}, & 0 < x \leq 1 \\ x^{-2}, & x > 1 \end{cases}$

$$\int_{(0,\infty)} f^{+} = \int_{(1,\infty)} x^{-2} dx = 1$$

$$\int_{(0,\infty)} f^{-} = \int_{(0,1]} x^{-1/2} dx = 2$$

Por tanto $\int_{(0,\infty)} f = 1 + 2 = 3$

4.1.4.5. Integral de Lebesgue-Stieltjes

La idea de reemplazar la variable de integración *x* en una integral $\int f(x)dx$ por una función $\alpha(x)$ ya se ha expuesto de forma desarrollada. La definición más simple de una integral de Stieltjes $\int f(x)d\alpha$ es como el límite de sumas aproximadas. Sin embargo, también existe otra integral que involucra los avances de Stieltjes y las medidas de Lebesgue.

Para definir esta integral primero es necesario definir las evaluaciones de las medidas que se tendrán, esto con el objetivo de aproximar la función cuando se tengan distintos intervalos *I*, abiertos, cerrados, medios abiertos.

Definición 3.2.4.5.1.

Sea $\alpha : R \to R$ una función creciente monótona y sea I un intervalo con extremos a, b definimos una $\mu - medida$ de I, denotada como $\mu_\alpha(I)$ como:

$$\mu_\alpha([a,b]) = \alpha(b^+) - \alpha(a^-)$$
$$\mu_\alpha((a,b]) = \alpha(b^+) - \alpha(a^+)$$
$$\mu_\alpha([a,b)) = \alpha(b^-) - \alpha(a^-)$$
$$\mu_\alpha((a,b)) = \alpha(b^-) - \alpha(a^+)$$

Siempre que $a < b$. El intervalo abierto (a,a) es por su puesto un conjunto vacío, definimos su medida como $\mu_\alpha(a,a)$ como cero para toda $a \in R$ así como los intervalos $(a,a]$, $[a,a)$.

4.1.4.6. Definición de la integral del Stieljes a través de Lebesgue.

Se muestra ahora la definición de funciones a pasos o funciones simples anteriormente estudiadas, pero en este caso, esta como tal está sujeta a la medida de Lebesgue en las funciones $\alpha(x)$ de Stieltjes.

Definición 3.2.4.6.1.

Sea $f : I \to R$ una función no negativa sobre I. una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ se dice que es admisible para f si satisface las condiciones:

α_j Se llama función a pasos $\mu - sumable$ sobre I, para cada $f : I \to R$

i. $\alpha_j(x) \geq 0, \ \forall x \in I, \ j = 1, 2, \ldots$

ii. $0 \leq f(x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)$

Se asocia con una función no negativa $f : I \to R$ un número real

$$L_\alpha(f) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} A_\alpha(\alpha_j)\right\}$$

Donde la mayor cota inferior es tomada de las sucesiones $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,$ que son admisibles para f. desde que $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)$ es no vacío y tiene al cero como la cota inferior, entonces $L_\alpha(f)$ existe y además $L_\alpha(f)\geq 0$ para cualquier función no negativa. Evaluación de Integrales

La actual evaluación de integrales por Lebesgue-Stieljes toma como punto de inicio el hecho de tener intervalos de la forma $[a,b]$ para la integral ordinaria de Riemann (si es que existe), $\int_a^b f(x)dx$ tiene el mismo valor de las integrales de Lebesgue $\int_{[a,b]} fdx$, de la misma forma para incluso integrales impropias bajo las reglas de integración de Riemann, que especifica que deben de ser absolutamente convergente.

Las integrales de Lebesgue se corresponden con Riemann por lo tanto pueden ser evaluadas con todas las técnicas elementales que son familiares. Sin embargo, de forma general la integrales de Lebesgue-Stieljes se pueden desarrollare reduciéndolas a través de combinaciones de integrales que sean equivalentes a integrales de Riemann que son más fáciles de evaluar.

Ahora se muestran fórmulas de integración para resolver integrales de Lebesgue-Stieltjes.

Corolario 3.2.4.6.1.

Sea $\alpha = \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots,$ $\alpha_j : R \to R$ es una función monótona creciente y además c_j es un número real no negativo. Si una función $f : I \to R$ es integrable sobre I con respecto a cada α_j, entonces es integrable en I con respecto a α, y

$$\int_I f d\alpha = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_I f d\alpha_j$$

Corolario 3.2.4.6.2.

Si α es continua en a, entonces se tiene que para el conjunto de integrables

$$\int_{[a,b]} f d\alpha = \int_{(a,b]} f d\alpha \quad \boldsymbol{Y} \int_{[a,b)} f d\alpha = \int_{(a,b)} f d\alpha$$

En el sentido de que una existe, la otra también y estas son iguales.

Si α es continua en b, entonces

$$\int_{[a,b]} f d\alpha = \int_{[a,b)} f d\alpha \quad \boldsymbol{Y} \int_{[a,b]} f d\alpha = \int_{(a,b]} f d\alpha$$

Corolario 3.2.4.6.3.

Para cualquier intervalo I, $\int_I 1 d\alpha = \mu_\alpha(I)$

Corolario 3.2.4.6.4.

Si α es una constante en un intervalo I, entonces

$$\int_I f d\alpha = 0$$

Corolario 3.2.4.6.5.

Para cualquier función definida en a,

$$\int_{[a,a]} fd\alpha = f(a)[\alpha(a^{+}) - \alpha(a^{-})]$$

Corolario 3.2.4.6.6.

Si α es diferenciable en todos los puntos en un intervalo abierto I, entonces

$$\int_I fd\alpha = \int_I f\alpha' dx$$

Corolario 3.2.4.5.7

Sea I un intervalo abierto, y sea $\beta : I \rightarrow R$ una función monótona creciente sobre I tal que $\alpha(x) = \beta(x),\ \forall x \in I$ entonces

$$\int_I fd\alpha = \int_I fd\beta$$

Ejemplo 35:

Sea $\alpha : R \rightarrow R$ definida por

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & si\ \ x < 2 \\ 1, & si\ \ x \geq 2 \end{cases}$$

Se observa el grafico en la siguiente **figura 10**.

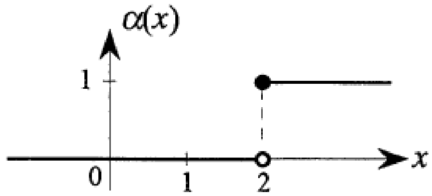


Figura 10. Grafica de la función del ejemplo 35.

Entonces $\int_{[2,3]} x^2 d\alpha = \int_{[2,2]} x^2 d\alpha + \int_{(2,3]} x^2 d\alpha$ por el **corolario 3.2.4.6.2**. Y el **Corolario 3.2.4.6.5.** (Notando que la función α es discontinua en 2. Se tiene que

$$\int_{[2,2]} x^2 d\alpha = 2^2(\alpha(2^+) - \alpha(2^-)) = 4(1-0) = 4,$$

Ejemplo 36:

Sea $\alpha : R \to R$ definida por

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & si\, x < 0 \\ 3 - e^{-2x}, & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Se observa el grafico en la siguiente **figura 11.**

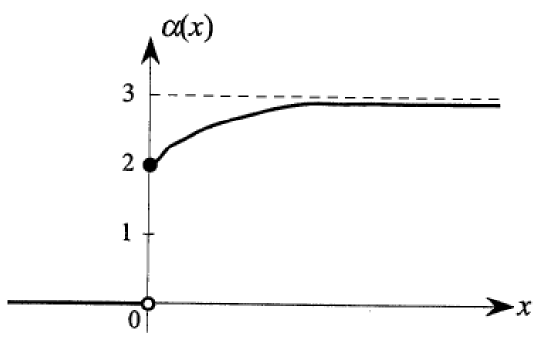


Figura 11. Grafica de la función del ejemplo 36.

Entonces $\int_{[0,\infty)} e^x d\alpha = \int_{[0,0]} e^x d\alpha + \int_{(0,\infty)} e^x d\alpha$ por el **Corolario 3.2.4.6.2.**

$$= e^{0}\left[\alpha(0^{+})-\alpha(0^{-})\right]+\int_{(0,\infty)} e^{x}d(3-e^{-2x})$$ ***Por el*** *corolario 3.2.4.6.6.* ***Y el*** *corolario 3.2.4.6.5.*

Y aplicando a la segunda integral se obtiene

$$\int_{[0,\infty)} e^{x}d\alpha = 1(2-0)+\int_{(0,\infty)} e^{x}(2e^{-2x})dx$$

$$= 2+\int_{0}^{\infty} 2e^{-x}dx \quad \textit{(Integral impropia de Riemann)}$$

$$= 2+\lim_{c\to\infty}\left[2e^{-x}\right]_{0}^{c}$$

$$= 2+\left[0-(-2)\right]=4$$

4.1.4.7. Otras aplicaciones de la integral de Lebesgue.

Para la época de la aparición de la integral de Lebesgue, Borel estaba trabajando en la búsqueda de una medida de probabilidad en [0,1] que a cada intervalo abierto le asignase su longitud. Es la época del nacimiento de la **σ-algebra** de Borel como la mínima σ-algebra que contiene los intervalos de [0,1]; por otra parte, la regularidad de la medida de Lebesgue implica que cualquier conjunto medible Lebesgue es un conjunto medible Borel unido con un conjunto de medida cero.

Anteriormente se habían planteado que la teoria de probabilidades debía están fundamentada en el intervalo (0,1), para quien un evento será un conjunto medible, una variable aleatoria una función medible cuya esperanza es la integral de Lebesgue de esa función, en caso que dicha integral exista. Luego se plantea que los espacios donde se desarrollaban las distintas probabilidades estaban conformados por la tripleta **Ω**, Σ, P donde Σ es una σ-algebra de subconjuntos de **Ω** y P una medida con P (**Ω**) = 1.

Así pues se puede decir que la integral de Lebesgue revoluciono la matemática tal como se veía desde el punto de vista del análisis, sus avances incluyeron incluso áreas de la estadísticas para las que Riemann no tuvo protagonismo y que Stieltjes apenas iniciaba.

Capítulo V

5.1. Conclusiones

- Se demostró algunos de los resultados básicos de la integral de Riemann, se expresó que si una función es Lebesgue integrable y Riemann integrable sobre un mismo intervalo, entonces ambas integrales coinciden; aún más, se expuso que si una función es absolutamente Riemann integrable, entonces también es Lebesgue integrable. A diferencia de la integral de Stieltjes que puede variar respecto a la función con la que está siendo integrada.

- Las condiciones y criterios, en la integral de Riemann, Riemann-Stieljes y Lebesgue se diferencian entre sí, una respecto al intervalo como una función continua y acotada, otra respecto a una función sobre un intervalo que puede tener una cierta cantidad de discontinuidades que se pueden obviar con el fin de no volver el problema irresoluble. Y por último Lebesgue quien tomo las teorías y las hizo propias, las revolucionó, aplicando sus criterios a los dominios y cambiando grandemente las condiciones que seguían las anteriores en sus rangos, con la capacidad de limitar el área como se desea.

- La integral de Lebesgue ha permitido el avance teórico de muchas áreas, y es que la teoria de la probabilidad está construido bajo los espacios desarrollados por tal teoria, la construcción de funciones de probabilidades son de gran utilidad, y las medidas como tal de estas funciones están desarrolladas para que se comporten de tal forma que no superen la medida máxima del conjunto en el rango.

- La integral de Riemann carece de ciertas propiedades límites deseables. En particular, la clase de funciones integrables de Riemann no está cerrada bajo límites puntuales, incluso para secuencias monótonas limitadas los cuales aparecen en algunos problemas reales complejos que se presentan y necesitan solución en la vida real.

- La integral de Riemann-Stieltjes estudió de forma más general las funciones a pasos, las discontinuidades contables y la variación respecto al conjunto de una forma más general, y lo generalizo para calcular la integral.

- Para generalizar su teoria Stieltjes utilizó los procedimientos enfocados siempre en los criterios de Riemann, se necesitó que se cumplan todas las condiciones básicas, así mismo sus propiedades para que sea análoga a las que se conocen pero con mayor alcance ya que no se ve limitada por los criterios de Riemann. Se trata que la función integrada aproximada se hizo a través de su dx, es decir, no se habla de su variación en su intervalo, sino respecto a otra función, esta será la variación respecto a otra función que es llamada integradora.

- La función integradora a pasos en Riemann-Stieljes, parece ser la misma que la de Riemann, sin embargo si se ubica bien, la utilización de la función a pasos se mostraría distinta respecto a la anterior ya que en la integral de Riemann, esta se utilizaba para aproximar *f*, mientras que con la integral de Riemann-Stieltjes se utiliza para aproximar la función $\alpha(x)$.

- Stieltjes formalizo un teorema de existencia básica de la integral de Riemann-Stieltjes. Este teorema establece que si f es una función continua y es una función de variación acotada en un intervalo cerrado de línea real, f es Stieltjes integrable con respecto a $\alpha(x)$.
- Los problemas analizados por Lebesgue en el análisis pueden ser tratados con más comodidad al relacionarlos con los objetos geométricos (a como se ha venido haciendo a través de rectángulos). Lebesgue ve en el concepto de medida como

generalización de los conceptos geométricos de longitud, área y volumen la clave para resolver el problema de la integración.

- Lebesgue permite obtener una idea del conjunto de todos los conjuntos medibles, además dado que cada conjunto abierto que pertenece al plano se puede representar como una unión de un número finito o contable de rectángulos abiertos, es decir, conjuntos medibles.

- Para funciones medibles, la definición clásica de la integral de Riemann generalmente no es aplicable en todos los casos.

- La conocida función de Dirichlet que es igual a cero en puntos irracionales es obviamente medible, pero no es integrable en el sentido de Riemann.

- El concepto de integral de Riemann resulta ser de poca utilidad con respecto a las funciones medibles de igual forma no es analizable mediante la integral de Riemann-Stieltjes debido a la infinitud de puntos de discontinuidad que posee.

- La idea básica de la integral de Lebesgue consiste en el hecho de que, a diferencia de la integral de Riemann, los puntos x se agrupan no por su cercanía en el eje x, sino por la cercanía de los valores de las funciones en estos puntos.

- La integral de Lebesgue se define exactamente de la misma manera para las funciones que se definen en cualquier espacio con medidas, mientras que la integral de Riemann se introduce primero para funciones de una variable, y solo entonces podría transferir las posibilidades para otras variables.

- La nueva teoría de Lebesgue en realidad ofrece una mejora sobre la teoría de Riemann y Stieltjes con respecto a las propiedades de convergencia. Es esta mejora la que hace que la teoría de Lebesgue sea valiosa en muchas aplicaciones teóricas.

5.2. Recomendaciones

1. Para los docentes, realizar trabajos de la integral de Riemann con mayor detalle, como por ejemplo, teoremas de convergencia, tipo Teorema de la Convergencia Monótona, Teorema de la Convergencia Dominada, etc.

2. A los estudiantes de estadística, realizar trabajos de las aplicaciones de las probabilidades desarrolladas por Stieltjes para funciones de densidad.

3. A los estudiantes de Matematica, estudiar la relación de la integral de Riemann, Riemann-Stieltjes y Lebesgue con otras integrales, tales con la integral de Henstock-Kurzweil.

4. Para estudiantes egresados, realizar trabajos en las propiedades del espacio de las funciones Riemann absolutamente integrables, como sub espacio del espacio de Banach de las funciones Lebesgue integrables.

5. A los docentes del departamento de Matematica y Estadística, utilizar el presente trabajo como material de apoyo para las materias de Análisis Matemático I, II y III.

5.3. Referencias y Bibliografía

1. Ahlfors, L. V. (1966). *complex analysis.* Cambridge, Estados Unidos: MacGray-Hill.
2. Ávila, V. H. (Agosto de 2013). LA INTEGRAL DE NEWTON Y SU RELACIÓN CON LA INTEGRAL DE LEBESGUE" . Puebla, Mexico.
3. Bartle, R. (1990). *Introduccion al analisis Matematico de una Variable.* Limusa.
4. Bliss, G. A. (1917). A Necessary and Sufficient Condition for the Existence of a Stieltjes Integral. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.
5. Bylinski, C. (1990). Functions and Their Basic Properties. Varsovia, Polonia.
6. Bylinski, C. l. (1990). Finite Sequences and Tuples of Elements of a Non-empty Sets. Varsovia, Polonia: Warsaw University.
7. Chap6: The Riemann-Stieltjes Integral. (23 de Diciembre de 2010). Hsinchu, Taiwan: Department of Applied Mathematics, National Chiao Tung University, Hsinchu, Taiwan.
8. Chile, U. d. (s.f.). *Universidad de Chile.* Recuperado el 03 de Septiembre de 2019, de https://docencia.dim.uchile.cl › material › tutoria_semana › semana07
9. Costa, R. A. (15 de Febrero de 2017). Una introduccion a la integral de Riemann-Stieltjes. Bogota, Colombia: Universidad Francisco Jose De Caldas.
10. Dunham, W. (2005). *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue.* Princetown. Princetown University Press.
11. Fournier, R. A. (1975). *Sobolev Spaces* (2da ed.). Vancouver, Canada, CAnada.
12. Guardeño, D. (1996). *Historia con personajes de los conceptos del cálculo.* España, España: Alianza Editorial S.A.
13. Lara, F. M.-C. (s.f.). Teoría de Integración. Mexico: Publicaciones Electrónicas Sociedad Matemática Mexicana .
14. Moral, E. F. (2003). *Apuntes de Analisis 1.* Logroño, España: Universidad de la Rioja.
15. Noboru Endou, K. W. (2001). Darboux’s Theorem. Matsumoto, Japon: Shinshu University.
16. S.L. Gupta y Nisha Rani. Fundamental Real Analysis. Vikas Pub., 1986.

17. Einar Hille. Methods in classical and functional analysis. Addison-Wesley Publishing Co., Halsted Press, 1974**.**

18. H. Kestelman. Modern theories of integration. Dover Publications, 2nd edition, 1960.

19. Keiko Narita, Noboru Endou, and Yasunari Shidama. Riemann integral of functionsfrom R into real Banach space. Formalized Mathematics, 21(2):145–152, 2013. Doi: 10.2478/forma-2013-0016.

20. Keiko Narita, Kazuhisa Nakasho, and Yasunari Shidama. Riemann-Stieltjes integral. Formalized Mathematics, 24(3):199–204, 2016. doi:10.1515/forma-2016-0016.

21. Daniel W. Stroock. A Concise Introduction to the Theory of Integration. Springer Science& Business Media, 1999.

22. Andrzej Trybulec. Binary operations applied to functions. Formalized Mathematics, 1 (2):329–334, 1990.

23. Michał J. Trybulec. Integers. Formalized Mathematics, 1(3):501–505, 1990.

24. Wojciech A. Trybulec. Non-contiguous substrings and one-to-one finite sequences. Formalized Mathematics, 1(3):569–573, 1990.

25. Edmund Woronowicz. Relations and their basic properties. Formalized Mathematics, 1 (1):73–83, 1990.

5.4. Anexos

Procesos limitantes bajo el signo integral de Lebesgue

En esta sección derivaremos algunos teoremas que limitan procesos bajo el signo integral de Lebesgue, que representan bastantes generalizaciones de largo alcance del teorema correspondiente del análisis clásico.

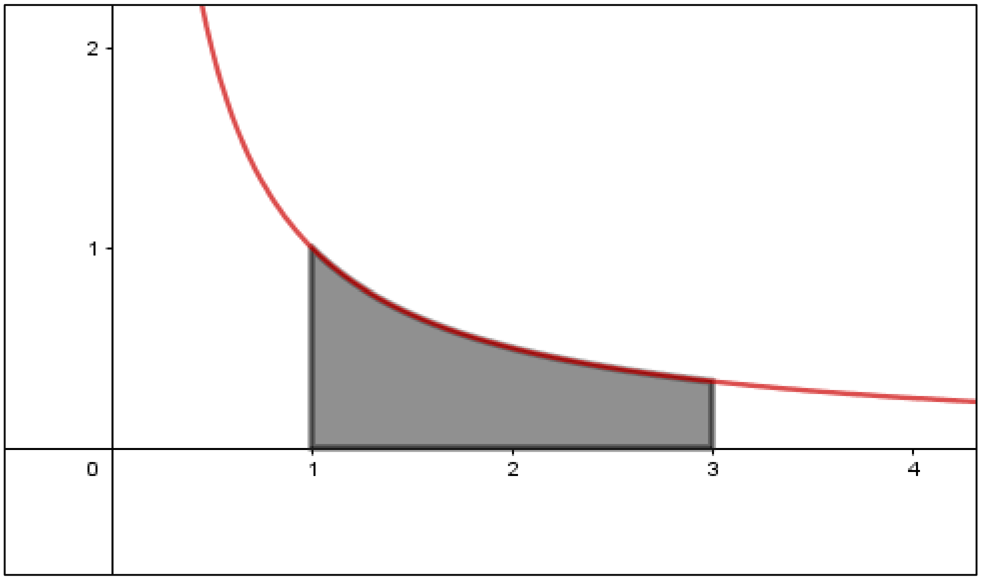
Teorema 5.9.2.1

Una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ sobre E converge a $f(x)$ si para todo n se tiene que

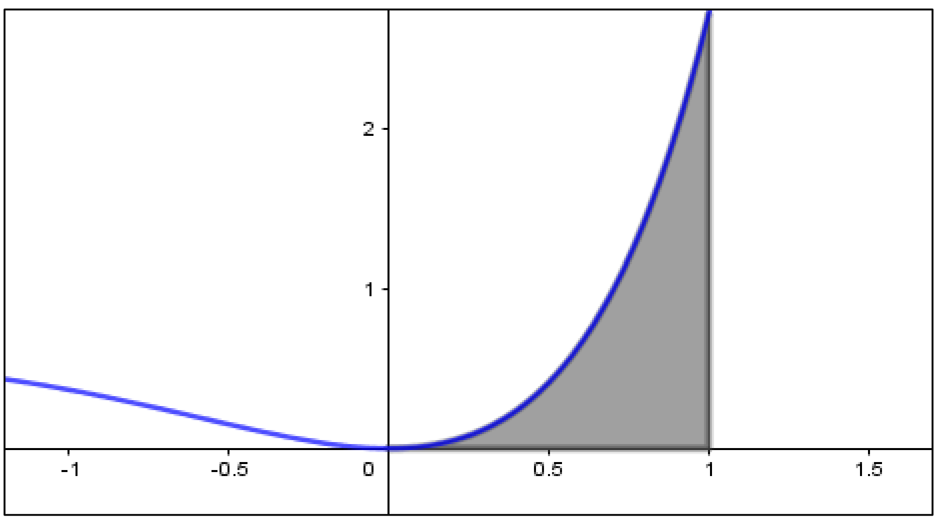
$$|f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

Donde $\varphi(x)$ es integrable sobre E, entonces la función limite $f(x)$ es integrable sobre E y

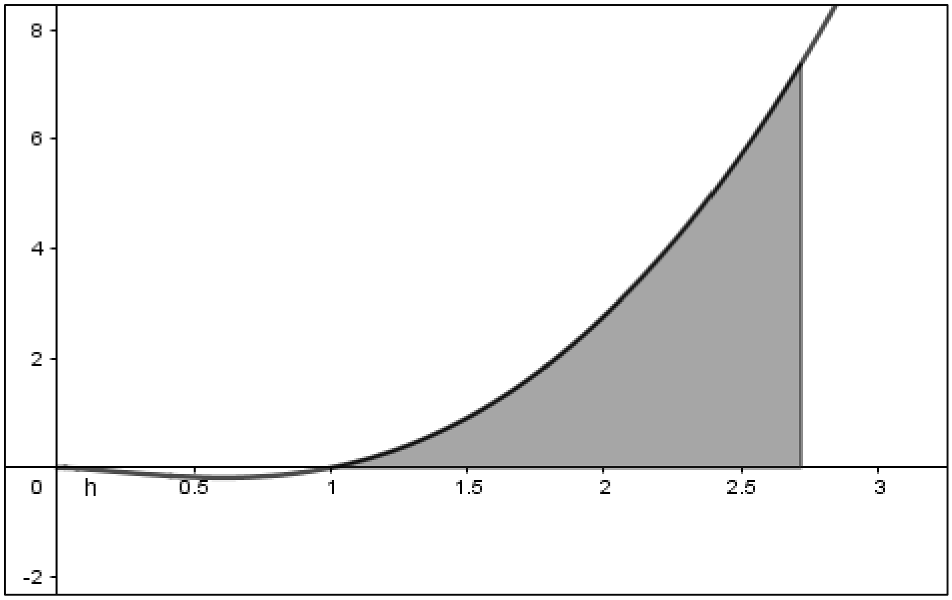
$$\int_E f_n(x)d\mu \to \int_E f(x)d\mu$$



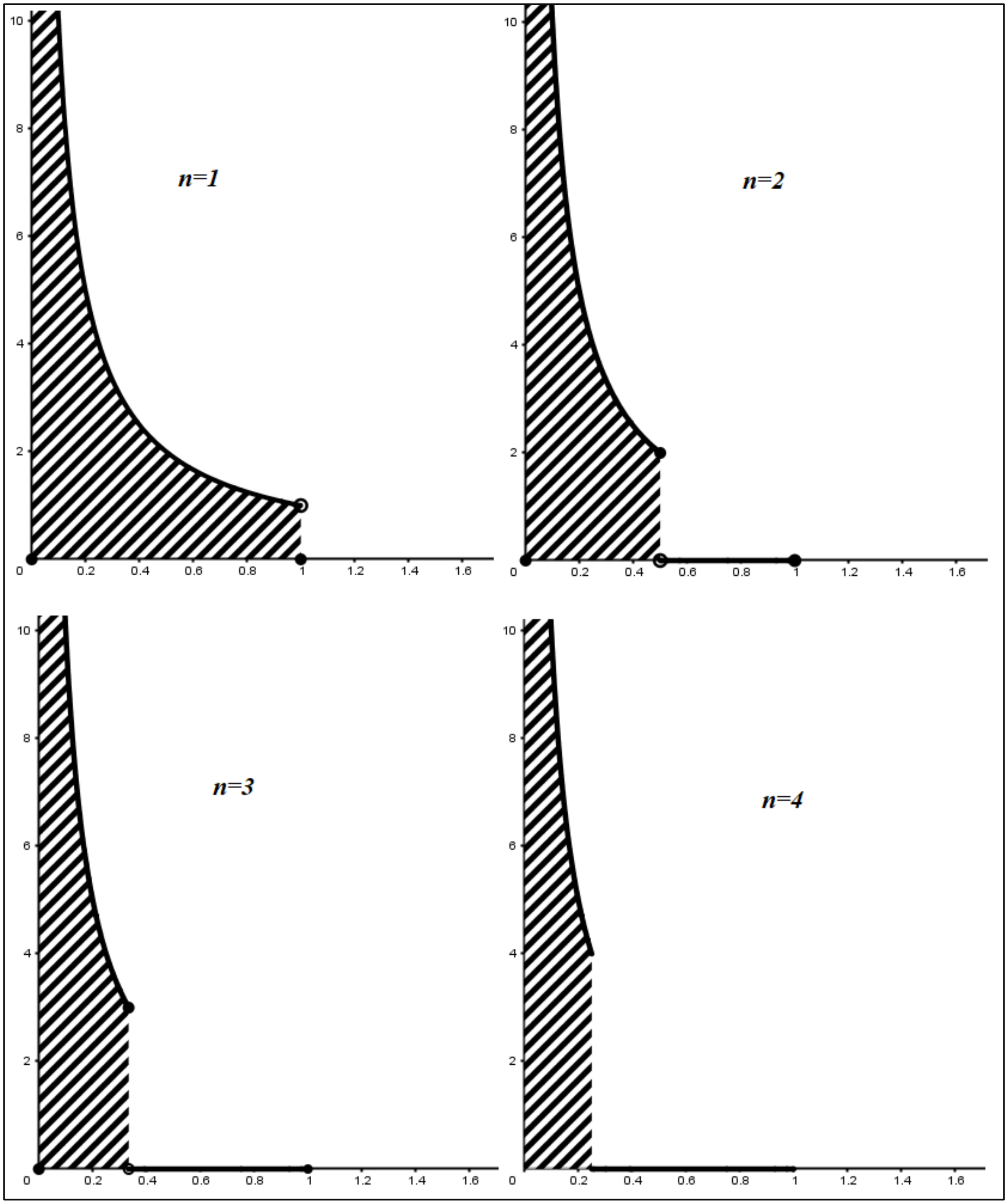
Anexo 1. Grafica de la función del ejemplo 4. (Creación propia a través del software Geogebra)



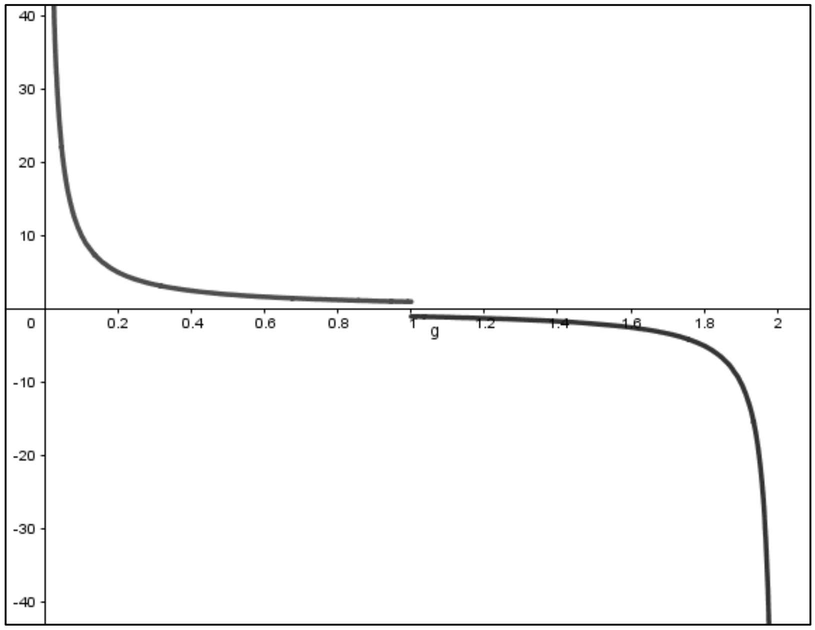
Anexo 2. Grafica de la función del ejemplo 11. (Creación propia a través del software Geogebra)



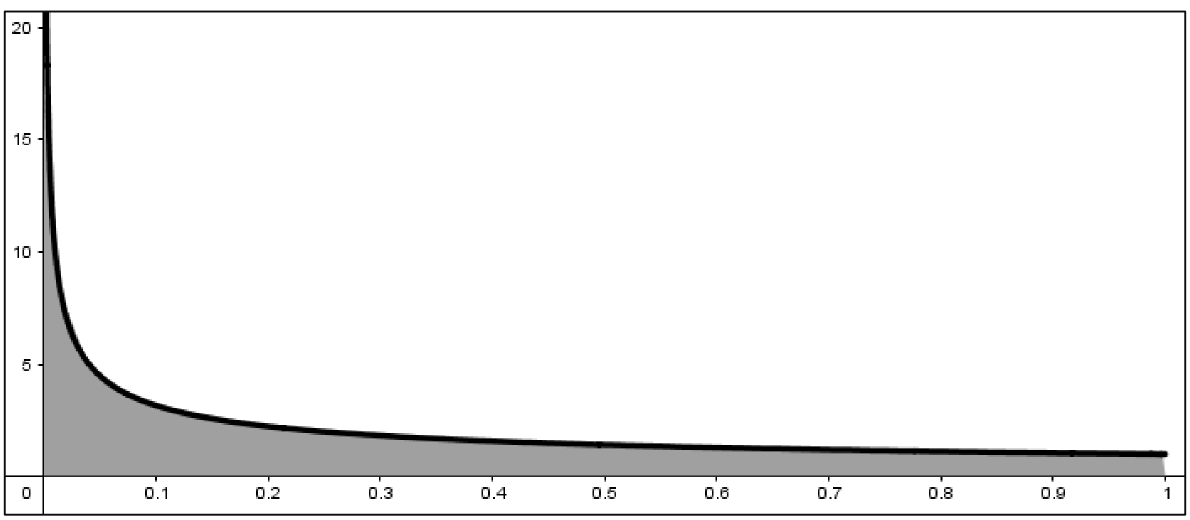
Anexo 3. Grafica de la función del ejemplo 12. (Creación propia a través del software Geogebra)



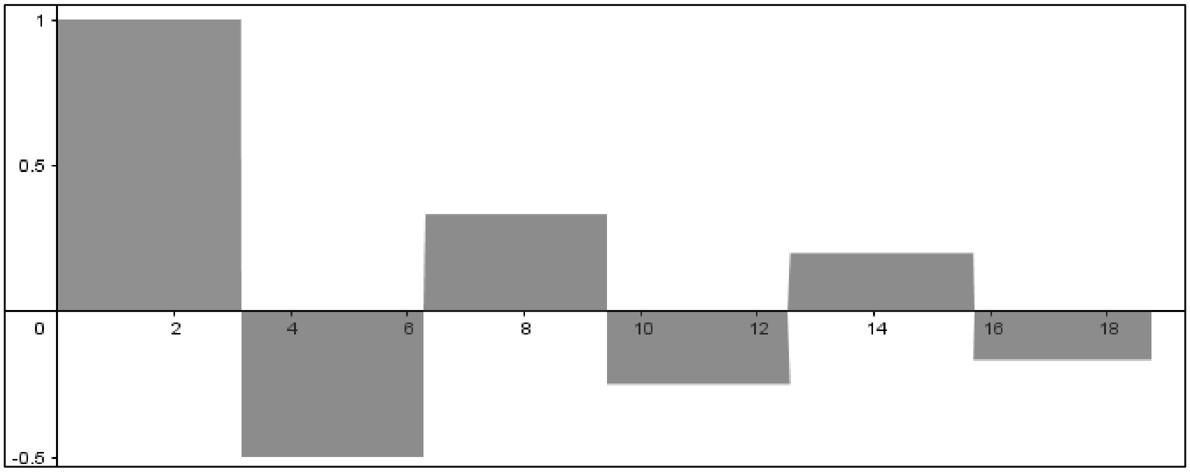
Anexo 4. Grafica de la función del ejemplo 29. (Creación propia a través del software Geogebra)



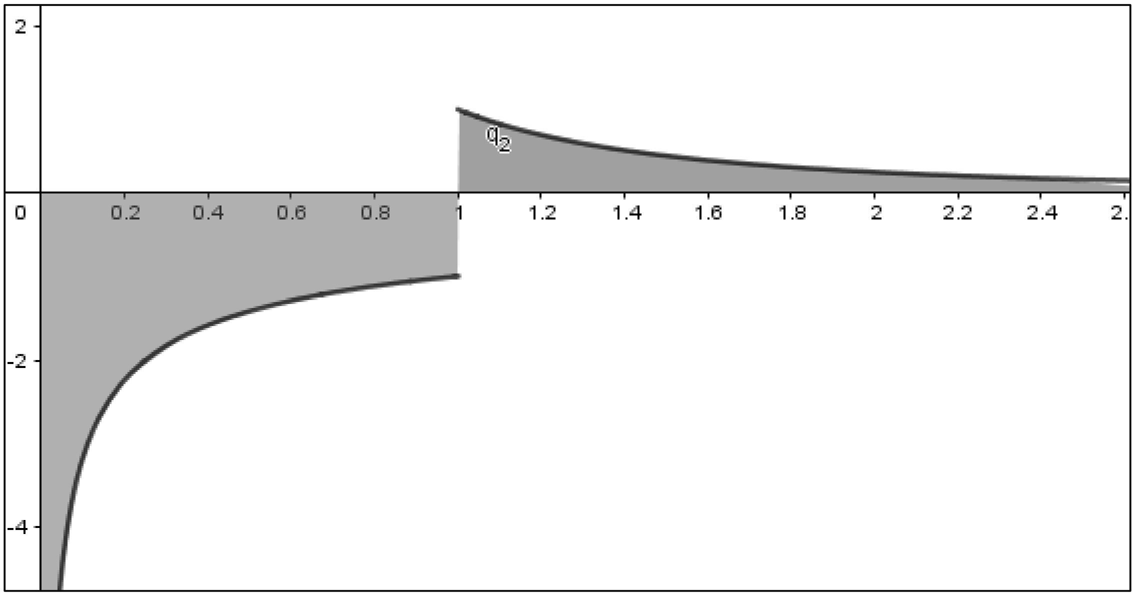
Anexo 5. Grafica de la función del ejemplo 31. (Creación propia a través del software Geogebra)



Anexo 6. Grafica de la función del ejemplo 32. (Creación propia a través del software Geogebra)



Anexo 7. Grafica de la función del ejemplo 33. (Creación propia a través del software Geogebra)



Anexo 8. Grafica de la función del ejemplo 33. (Creación propia a través del software Geogebra)

Personajes más importantes de la teoria de integración actual.

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Nació el 17 de septiembre de 1826, en Breselenz, Hannover (ahora Alemania) y falleció el 20 de julio de 1866, en Selasca, Italia. Ingreso en el liceo de Hannover, donde estudio hebreo y trato de probar la certeza del libro del Génesis por medio de razonamientos matemáticos. En 1846 ingreso en la Universidad de G¨ottingen, que abandono un año después para trasladarse a la de Berlín y estudiar bajo la tutela de insignes matemáticos, como Steiner, Jacobi y Dirichlet. En Gottingen asistió a las clases que Dirichlet impartía sobre teoria de números, teoria de la integral y ecuaciones en derivadas parciales... En su corta vida contribuyo a muchísimas ramas de las matemáticas: integrales de Riemann, aproximación de Riemann, método de Riemann para series trigonométricas, matrices de Riemann de la teoria de funciones abelianas, funciones zeta de Riemann, hipótesis de Riemann, teorema de Riemann-Roch, lema de Riemann-Lebesgue, integrales de Riemann-Liouville de orden fraccional..., aunque tal vez su más conocida aportación fue su geometría no euclidiana, basada en una axiomática distinta de la propuesta por Euclides, y expuesta detalladamente en su célebre memoria “Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría.” Esta geometría se sigue si se considera la superficie de una esfera y se restringen las figuras a esa superficie. Medio siglo más tarde, Einstein demostró, en virtud de su modelo de espacio-tiempo relativista, que la geometría de Riemann ofrece una representación más exacta del universo que la de Euclides. Murió de tuberculosis antes de cumplir los cuarenta años.

Camille Jordan

Nació en Lyon en 1838 y murió en Paris en 1922. Fue un maten ático francés conocido tanto por su trabajo, fundamental, sobre la teoria de los grupos como por su anuente texto “Cours d´analyse”. Jordan estudio en la Escuela Politécnica (promoción 1855). Fue ingeniero de minas y más tarde ejerció como examinador en la misma escuela. En 1876 entró como profesor en el Colegio de Francia, sustituyendo a Joseph Liouville. Su nombre se asocia a un determinado número de resultados fundamentales:

El teorema de la curva de Jordan: un resultado topológico recogido en análisis complejo. La forma normal de Jordan en algebra lineal.

El trabajo de Jordan incidió de manera sustancial en la introducción de la teoria de Galois en la corriente del pensamiento mayoritario. El 4 de abril de 1881 fue elegido miembro de la Academia de la Ciencia. De 1885 a 1921 dirige la revista “Journal de mathematiques pures et apliques”, fundada por Liouville

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo y murió el 6 de enero de 1918 en Halle (Alemania). Georg heredo los considerables talentos musicales y artísticos de sus padres ya que fue un destacado violinista. Fue educado en el Protestantismo, religión de su padre, mientras su madre era Católica... En 1873 Cantor probo que los números racionales son numerables, es decir, que pueden colocarse en correspondencia uno-a-uno con los números naturales. También mostró que los números algebraicos, es decir, los números que son raíces de ecuaciones polinomiales con coeficientes enteros, son numerables... Sus teorías solo fueron reconocidas a principios del siglo XX, y en 1904 fue galardonado con una medalla de la Sociedad Real de Londres y admitido tanto en la Sociedad Maten ática de Londres como en la Sociedad de Ciencias de Gotinga. En la actualidad se le considera como el padre de la teorıa de conjuntos, punto de partida de excepcional importancia en el desarrollo de la matemática moderna. Murió en una institución mental, en la que estuvo ingresado desde 1917.

Henri León Lebesgue

Nació en Beauvais el 28 de Junio de 1875 y murió en Paris el 26 de julio de 1941. Estudio en la Ecole Normale Superieure de Paris entre 1894 y 1897. En el periodo 1899-1902 impartió clases en el Lycee Centrale de Nancy. Inspirado en el trabajo de otros maten áticos, como ´Emile Borel y Camille Jordan, Lebesgue formuló la teoria de la medida en 1901. Al año siguiente definio la integral de Lebesgue, la cual generaliza la noción de la integral de Riemann al extender el concepto de área bajo una curva para incluir funciones discontinuas. Este es uno de los logros del análisis moderno que tiene aplicaciones a diversas ramas de la matemática, como por ejemplo el análisis de Fourier. Lebesgue dio a conocer este desarrollo en su tesis doctoral titulada Intégrale, longueur, aire presentada en la Universidad de Nancy en 1902, y publicada en los Annali di Matematica de ese mismo año. En el primer capítulo desarrolla la teoria de la medida de una forma más general que la de Borel, asignando a cada subconjunto una medida interior y una medida exterior... A partir de 1921 fue profesor en el Colegio de Francia. Fue elegido miembro de la Royal Society de Londres el 3 de mayo de 1934. Era miembro también (desde 1922) de la Academia de Ciencias de Parıs.

A su vez, contribuyó en otras ´áreas de matemáticas como topología, teoria del potencial y análisis de Fourier. En 1905 presentó una discusión sobre las condiciones que Lipschitz y Jordan habían utilizado para asegurar que *f(x)* es la suma de su serie de Fourier. En Paris no se concentró en el área de estudio que ´el mismo había iniciado, ya que su trabajo era una generalización, mientras que Lebesgue era temeroso de las mismas. En sus palabras “reducida a teorías generales, las matemáticas serian una forma hermosa sin contenido. Morirían rápidamente.” A pesar de que desarrollos posteriores demostraron que su temor no tenía fundamentos, ´este nos permite entender el curso que siguió su trabajo.

Félix Edouard Justin Emile Borel

Nació el 7 de enero de 1871 en Saint-Affrique (Provenza) y murió el 3 de febrero de 1956 en Paris. Su carrera de estudiante fue brillante. Se graduó en 1892 y su tesis, Sur quelques points de la theorie de fonctions, fue publicada en los Annales de Ecole Normale en 1895. Realizo notables trabajos sobre Teoria de funciones y Probabilidades, con títulos como Le hasard, Principes et methodes de la theorie des fonctions, Lespace et le temps, etc. Se le puede considerar creador de la primera teorıa de la medida de conjuntos de puntos. Comparte con Baire, Poincaré y Lebesgue el inicio de una nueva era en el estudio de las funciones de variable real. En su libro Lecons sur la theorie des fonctions (1898) da la primera definición útil de medida de un conjunto. Cantor probo que todo abierto de la recta real es unión de intervalos abiertos disjuntos. Apoyándose en este resultado, define la medida de un abierto acotado como la suma de las longitudes de sus componentes (los intervalos abiertos disjuntos cuya unión es el abierto dado). Además, caracteriza los conjuntos que se pueden obtener a partir de abiertos por medio de las operaciones unión numerable y diferencia, comprobando que para ellos se puede definir una medida completamente aditiva (es decir, dado un conjunto de conjuntos de este tipo, disjuntos dos a dos, su medida es la suma de las medidas de sus componentes). Estos conjuntos reciben hoy día el nombre de Boreliano en honor a su creador y han servido de base para la medida exterior definida por Lebesgue para la construcción de la integral que lleva su nombre. Otros temas de trabajo de Borel, en los que ha obtenido también brillantes resultados, son las funciones enteras, las funciones meromorfas y las series divergentes.

5.4.1. Algunos ejercicios propuestos

1. Calcula la integral de la función por el método apropiado si es que existe:

   a. $\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ 2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

   b. $\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in C \cap Q \\ 2, & x \in C \cap Q' \\ 3, & x \in [0,1] - C \end{cases}$

2. Determinar si existe la integral

$$\phi(x) = \begin{cases} 2x, & x \in Q \\ 1 - x, & x \in Q' \end{cases}$$

3. Calcular la integral de las siguientes funciones:

a. $\int_0^1 x^2 e^x dx$

b. $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$

c. $\int_0^{\pi/4} e^{-x} \cos(2x) dx$

d. $\int_0^4 x^2 d([x])$

e. $\int_0^n x^2 d([x])$

f. $\int_0^{10} x d(x + [x])$

g. $\int_0^2 x^2 d(|x|)$

h. $\int_0^3 f(x)d\left(\alpha(x)\right)$ donde

i.

$$f(x)=\begin{cases}2x, 0\le x\le 1\\ 2x^3, 1<x\le \frac{3}{2}\\ e^x, \frac{3}{2}<x\le 3\end{cases} \text{ y } \alpha(x)=\begin{cases}0, 0\le x<1\\ 1, 1\le x\le 2\\ 3, 2<x\le 3\end{cases}$$

4. Determinar el valor de integral

$$\int_{[1,\infty)}\frac{1}{x^2}dx$$

5. Calcular la integral de la función $\int_{(0,1]}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ si:

a. $\phi_1=1,\ 0<x\le 1$

b. $\phi_2=\begin{cases}2,\ 0<x\le\frac{1}{4}\\ \frac{3}{2}, \frac{1}{4}<x\le\frac{4}{9}\\ 1,\ \frac{4}{9}<x\le 1\end{cases}$

6. Calcular la integral de las siguientes sucesiones de funciones si es que existen:

a. $f_n=x^n,\ 0\le x\le 1$

b. $f_n=xn^2e^{-nx},\ 0\le x\le 1$

c. $f_n=\begin{cases}\frac{1}{n},\quad 0\le x\le n\\ 0,\qquad n<x\end{cases}$

d. $f_n = \dfrac{nx}{1+nx}$, $0 \le x \le 1$

e. $f_n = \dfrac{2n^2x}{1+n^2x^2}, x \ge 0$

f. $f_n = \begin{cases} \dfrac{1}{nx}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

g. $f_n = \dfrac{2x}{1+n^2x^2}$, $x \ge 0$

h. $f_n = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}, x \ge 0$

7. Demostrar que $\int_{[0,1]} e^{-x} dx = 1 - e^{-1}$, utilizando el teorema de convergencia Dominada.

8. Demostrar que $\int_0^{\infty} \dfrac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \left(\dfrac{\sin x}{x} \right)^2 dx$.