UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE NICARAGUA, MANAGUA

UNAN-Managua

Recinto Universitario Rubén Darío

Facultad de Ciencias e Ingenierías

Departamento de Matemática y Estadística

Tesis Monográfica para optar al título de Licenciado en Matemáticas

"Aplicación de las Ecuaciones en Diferencias a los modelos: Telaraña y de Consumo"

Autores:

- **Br. José Abraham Aguirre Álvarez**
- **Br. Yasser Antonio Rocha Rodríguez**

Tutor: MSc. Wilfredo Calderón

Asesor Metodológico: MSc. Sergio Ramírez Lanzas.

Managua, 03 de Diciembre del 2015.

Managua, Jueves 03 de Diciembre de 2015

Maestra
Hellen Amanda Parrales Cano
Directora
Departamento de Matemática y Estadística
Facultad de Ciencias e Ingenierías
UNAN-MANAGUA

Estimada Maestra:

Por este medio y en calidad de tutor notifico que el trabajo monográfico titulado: **"Aplicación de las Ecuaciones en Diferencias en los Modelos Económicos Telaraña y Consumo"**.

Elaborados por los bachilleres:

José Abraham Aguirre Álvarez **03422391**

Yasser Antonio Rocha Rodríguez **03422466**

Cumple con los requisitos técnicos y metodológicos establecidos en el reglamento, como forma de culminación de estudio, para optar al título de **Licenciado en Matemática**, el cual deberá ser evaluado por el jurado calificador.

Sin más a que hacer referencia, me suscribo y le saluda.

Atentamente,

M.Sc. Wilfredo Calderón Carmona
Docente Departamento de Matemática y Estadística
Tutor

CC. Archivo

INDICE

Contenido

INTRODUCCION

Las ecuaciones en diferencias desempeñan una gran importancia en la vida cotidiana debido a las múltiples aplicaciones que estas tienen en diferentes campos tales como en las ciencias de la computación y sobre todo en lo referente a sistemas de control digital, señales en el tiempo discreto, así como en otras muchas áreas del saber, la aplicación de esta herramienta matemática nos permite la síntesis de programas que realicen una determinada tarea que sabemos con certeza como sería (o habría de ser), de forma empírica, mediante una secuencia de "n" elementos. En este documento se hará un ejercicio de abstracción, para estudiar un poco más a fondo las ecuaciones de tipo.

En consecuencia, las ecuaciones en diferencias nos describen este la evolución temporal de un sistema o un fenómeno, de forma que los diferentes estados discretos, por los que pasa sucesivamente, son función directa de los correspondientes estados inmediatamente anteriores; estos son los llamados sistemas dinámicos discretos, es decir con evoluciones a saltos en el tiempo y no de forma continua, lo que vendría expresado por una ecuación diferencial.

Las ecuaciones en diferencias tienen discrepancia con las ecuaciones diferenciales en que las primeras están definidas en el dominio de tiempo discreto es decir, para números enteros y las ecuaciones diferenciales están definidas en el campo de números reales es decir en el dominio de tiempo continuo.

Cuando las variables cambian en forma discontinua o discreta en lugar de continua o instantáneamente, se utilizan las llamadas ecuaciones en diferencias en vez de las ecuaciones diferenciales, para expresar las relaciones existentes entre sus cambios. Las ecuaciones en diferencias suelen ser útiles en los análisis propios de la administración y la economía, pues muchos datos económicos se registran considerando periodos uniformemente espaciados. Por ejemplo, el producto nacional bruto puede darse anualmente; la utilidad por trimestre; las cantidades producidas (compradas o vendidas) en reporte mensual; etc.

En muchos análisis de carácter económico, el tiempo es la variable independiente, y el estudio se enfoca en los cambios de otras variables en función del tiempo que se denomina análisis periódico, y las ecuaciones en diferencias son la base para tales estudios analíticos.

Recordemos que cuando los periodos o lapsos (o más generalmente, los cambios en la variable independiente) se hacen cada vez más pequeños, las ecuaciones en diferencias tienden a las ecuaciones diferenciales como es el caso de aplicar límite.

En muchos estudios de análisis económicos y administrativos, incluyendo los modelos que se estudiarán a lo largo de esta investigación y en muchos textos, comúnmente la variable independiente se designa por la letra t; pero en esta investigación nosotros utilizaremos la variable x.

Después de definir y clasificar las ecuaciones en diferencias, se determinará su solución. Luego se analiza el método de resolución y el comportamiento de la sucesión o secuencia que representa una solución particular de las ecuaciones lineales en diferencias, de primer y segundo orden con coeficientes constantes, y se ilustra la aplicación de estas ecuaciones en algunos modelos económicos.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar doy gracias al Dios todo poderoso del universo, por brindarme la sabiduría y la salud ya que sin la ayuda de él no hubiese sido posible culminar con éxito mis estudios de preparación profesional.

En segundo lugar quiero dar muchas gracias a mis queridos padres: Carlos Aguirre y Rosa Álvarez por haber estado ellos siempre pendientes con el apoyo económico y así pude culminar los estudios de mi preparación académica.

También de igual forma quiero agradecerle de manera muy especial al profesor MSc. Wilfredo Calderón Carmona por su dedicación y apoyo en las tutorías de mi tesis monográfica hasta dar por concluido dicho trabajo.

José Abraham Aguirre Álvarez

Primeramente quiero dar infinitamente gracias a Dios por haberme dado salud ya que por la ayuda de el pude culminar mis estudios.

En segundo lugar quiero dar muchas gracias a mis padres: Fredis Javier Rocha, Ligia del Carmen Rodríguez y a mi esposa Jenny Lynoska Vallecillo ya que siempre estuvieron a mi lado para apoyarme y alentarme cada día a seguir adelante.

También quiero agradecer muy especialmente a nuestro tutor el profesor MSc. Wilfredo Calderón Carmona por habernos brindado de su valioso tiempo y conocimiento en las tutorías de nuestra tesis monográfica.

Yasser Antonio Rocha Rodríguez.

0BJETIVOS.

OBJETIVO GENERAL:

- Demostrar algunas aplicaciones de las ecuaciones en diferencias de primer y segundo orden en los modelos económicos Telaraña y Consumo

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Definir la teoría de ecuaciones en diferencias según su aplicación con otras ciencias.

- Analizar la teoría de los modelos económicos telaraña y consumo.

- Resolver las ecuaciones en diferencias a los modelos económicos telaraña y consumo.

- Representar gráficamente la solución de los modelos de la Telaraña y Consumo.

CAPITULO 1: Definiciones básicas

En el presente capítulo se definen y se analizan la clasificación de las ecuaciones en diferencias dependiendo de su orden y de su grado, debido que la mayor parte de las ecuaciones en diferencias que se aplican en la práctica son lineales, también se definen los siguientes operadores: **Identidad, Desplazamiento y Diferencia**.

Definición1: Una ecuación ordinaria en diferencias es una ecuación que contiene una o más diferencias de una función desconocida cuyo argumento es el tiempo.

$$f\left(y_x,\ \Delta y_x,\ \Delta^2 y_x, \Delta^3 y_x, \dots, \Delta^n y_x\right) = 0$$

Donde Δ representa el operador retardo o diferencia. Si el argumento no es únicamente el tiempo la ecuación pierde el calificativo de ordinaria y pasa a denominarse ecuación en diferencias finitas parciales.

Así pues, si un sistema se encuentra en un estado y_{x+1} con $x \in Z^+$, $x=\{0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots a,\ a+1,\ a+2,\ \dots\}$, la formulación general de este tipo de ecuaciones se expresará: $y_{x+1} = f\left(y_{x+1}\right)$

o, alternativamente, partiendo de un estado inicial para el sistema, y_0, podemos generar la secuencia $y_0,\ f(y_0),\ f\left(f(y_0)\right),\ f\left(f\left(f(y_0)\right)\right), \dots$

que habitualmente se escribe en la forma siguiente:

$$f^0(y_0) = y_0$$
$$f^1(y_0) = f^1(y_0);$$
$$f^2(y_0) = f\left(f(y_0)\right);$$
$$f^3(y_0) = f\left(f\left(f(y_0)\right)\right)\dots$$

O su forma general sería: $y_{x+1} = f^{n+1}(y_0) = f(y_x) = f\left(f^n(y_0)\right)$

Para familiarizarse mejor de cómo manejar la nomenclatura convencional en estos casos, diremos que:

$f(y_0)$ es llamado primer iterante de y_0 en la función f.

$f^2(y_0)$ es llamado segundo iterante de y_0 en la función f.

$\vdots$

$f^n(y_0)$ es llamado n-ésimo iterante de y_0 en la función f.

El conjunto de todos los iterantes, que se representa normalmente por $f^n(y_0)$, $n \in Z^+$, o bien por $f(y_0)$, se denomina órbita de y_0.

Ejemplo1: Sea $f(y_x) = (y_x)^{1/2}$ y $y_0 = 256$. Entonces la secuencia de iterante se corresponde a:

$$\begin{aligned}
&y_0 = 256;\\
&f(y_0) = 16;\\
&f(f(y_0)) = 4;\\
&f(f(f(y_0))) = 2;\\
&f(f(f(f(y_0)))) = 1.41; \ldots\\
&256;\ 16;\ 4;\ 2;\ 1.41;\ 1.19;\ etc
\end{aligned}$$

Como se puede apreciar fácilmente, esta secuencia tiende a la unidad, que sería entonces un punto atractor de la órbita, donde, además, permanecería el sistema indefinidamente. Es decir, podríamos considerarlo como un estado de equilibrio del sistema. En la resolución de este tipo de ecuaciones (obviamente no en el ejemplo precedente) se encontrarán comportamientos curiosos de este tipo: ***puntos atractores***, a los que el sistema tiende asintóticamente; ***puntos de equilibrio***, donde el sistema, una vez alcanzados, permanece, y que a su vez pueden ser estables o inestables; ***puntos periódicos*** entre los cuales el sistema oscila, tomando valores iguales alternativamente; y ***puntos de bifurcación***, en los que el sistema puede tomar varios valores simultáneamente, encontrando vías diferentes de evolución.

1.1 Elementos del cálculo de las Ecuaciones en Diferencias

El cálculo correspondiente a las ecuaciones en diferencias es muy similar al correspondiente de las ecuaciones diferenciales e integrales y, en este capítulo se discutirán estas analogías que ayudan a resolver las ecuaciones en diferencias, haciendo uso de las técnicas de resolución de las ecuaciones que nos ocupan. Se definirán una serie de operadores que facilitarán los cálculos y que serán muy útiles en el futuro. Estos operadores son: operador identidad, operador desplazamiento, y operador anti diferencia.

1.2 Definición de Operadores Discretos: Identidad, Desplazamiento, Diferencia y Antidiferencia.

Dada una función discreta,
$$\begin{aligned} &f : \square \subset \square \longrightarrow \square \\ &\forall x \in \square \longrightarrow f(x) = y_x \end{aligned}$$

Definición 2: Operador Identidad: Denominamos **operador identidad** (**I**) a aquella operación en el sistema que deja invariante (sin cambios) su estado, es decir:
$$\forall x \in \square : \quad I y_x = y_x$$

Su aplicación sucesiva será: $Iky_x = Iy_x = y_x$

Definición 3: Operador Desplazamiento (E) (también llamado **operador Siguiente**) es la operación que nos lleva a obtener el estado futuro de un sistema a partir del estado precedente. Consecuentemente este operador coincide con la propia definición de ecuación en diferencias cuando el grado de la ecuación es uno, mientras que será diferente si el grado de la ecuación es superior a la unidad:
$$\forall x \in \square : \; E y_x = y_{x+k}$$

Obviamente, la aplicación sucesiva del operador desplazamiento hace posible el salto de un estado a otro alejado en el futuro, o en forma abreviada: $Eky_x = y_{x+k}$.

Definición 4: Operador Diferencia: Denominamos Operador Diferencia (D) al proceso que lleva a obtener la diferencia entre dos estados consecutivos, o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned}\forall x \in \square\ , \ \boldsymbol{D}y_x &= y_{x+1} - y_x \\ &= Ey_x - Iy_x \\ &= (E-I)\,y_x\end{aligned}$$

Este operador D también suele designarse por la letra griega Δ, denominada a su vez ***Retardo.***

Es inmediato encontrar que el operador diferencia es combinación de los operadores identidad y desplazamiento, siendo complicada la relación directa entre D y E

$$Dy_x = (E-I)\,y_x = y_{x+1} - y_x$$

Por lo tanto, su aplicación sucesiva se puede escribir como:

$$Dky_x = (E-I)\,ky_x$$

Que, recordando el desarrollo de la potencia de un binomio:

$$\begin{aligned}&(a-b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2 \\ &(a-b)^3 = a^3 - 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3 \\ &\vdots \\ &(a-b)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} (a)^{(k-1)}.b^i\end{aligned}$$

donde

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)...3.2.1}{i(i-1)(i-2)(i-3)...3.2.1(k-i)(k-i-1)(k-i-2)...3}$$

Con $0!=1$.

Utilizando los operadores esto equivale a:

$$\begin{aligned} D^k y_x &= [E-I]^k y_x \\ &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^k \binom{k}{i} E^{(k-i)} I^i y_x \\ &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^k \binom{k}{i} E^{(k-i)} y_x \\ &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^k \binom{k}{i} y_{x+k-i} \end{aligned}$$

Correspondiente se puede demostrar:

$$E^k y_x = \sum_{i=0}^{K} \binom{k}{i} D^{(k-i)} y_x$$

El operador diferencia D es el equivalente al operador derivada en el cálculo diferencial.

También son fáciles de demostrar las siguientes igualdades:

$$\sum_{x=0}^{n-1} D^n y_x = y_x - y_0$$

$$D^n \left(\sum_{x=0}^{n-1} y_x \right) = y_x$$

Similarmente podemos definir una suma de potencias del operador desplazamiento E, en forma polinomial:

$$P(E) = a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + a_2 E^{n-2} + \ldots + a_{n-1} E + a_n I$$

Definición 5: operador Antidiferencia (D^{-1} ó Δ^{-1}): Denominamos operador **antidiferencia** a la operación que consiste en deshacer la correspondiente operación del operador diferencia. Obviamente, en el contexto de las ecuaciones diferenciales ello equivale a realizar la integración. Su definición será:

$$\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{D}^{-1}\,y_x = y_x$$

O bien:

$$\boldsymbol{D}.\boldsymbol{D}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

Recordemos la definición del operador diferencia y de la propia ecuación en diferencias:

$$y_{x+1} = f(y_x)$$
$$\boldsymbol{D}\,y_x = y_{x+1} - y_x$$

Por consiguiente:

$$\boldsymbol{D}\,y_{x+1} = y_{x+2} - y_{x+1}$$
$$\boldsymbol{D}\,f(y_x) = f(y_{x+1}) - f(y_x)$$

Si añadimos una constante a la función que determina la ecuación:

$$y_{x+1} = f(y_x) + b$$

la operación D será:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}\,y_x &= y_{x+1} - y_x \\ &= f(y_x) + b - f(y_{x-1}) - b \\ &= f(y_x) - f(y_{x-1}) \\ &= \mathbf{D}\{f(y_{x-1}) + b\} \\ &= \mathbf{D}\{f(y_{x-1})\} \end{aligned}$$

Es decir, añadir una constante al valor de un estado proporciona el mismo valor **para la** operación diferencia. Obviamente el operador anti diferencia en solitario no **tiene por** qué proporcionar exactamente el valor de la función que determina el **salto de** un estado a otro, sino ese valor salvo una constante, ya que la aplicación **posterior** del operador diferencia nos dará el mismo resultado. Llamemos $F(y_x)$ a **función** tal que

$$\mathbf{D}^{-1} f(y_x) = F(y_x)$$

De la definición de anti diferencia:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}\,\mathbf{D}^{-1} f(y_x) &= f(y_x) \\
&= \mathbf{D}F(y_x) \\
&= \mathbf{D}\{F(y_x + b\}
\end{aligned}
$$

O consecuentemente: $\mathbf{D}^{-1} f(y_x) = F(y_x) + b$

Donde b puede tomar el valor cero (0). En definitiva tenemos infinitos estados posibles, diferenciados mediante constantes, en la aplicación del operador anti diferencia. Consecuentemente: $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}F(y_x) = F(y_x) + b$

Mientras que: $\mathbf{D}\,\mathbf{D}^{-1} f(y_x) = f(y_x)$

En este caso se dice que los operadores $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{D}^{-1}$ no conmutan, puesto que su aplicación en orden diferente produce resultados distintos.

Por otra parte, como $D\left(\sum_{x=1}^{n-1} y_x\right) = y_x$

se puede inferir con facilidad el resultado $D^{-1} y_x = \sum_{x=0}^{n-1} y_x + b$

1.3 Propiedades de los operadores

Si $\forall x \in \square$, y_x, z_x son dos funciones discretas, se cumple:

Los operadores I, E, Δ son lineales. Es decir, $\forall x \in \square$, $\forall \lambda \in \square$,

1.3.1 $I(y_x + z_x) = Iy_x + Iz_x;\quad I(\lambda . y_x) = \lambda . Iy_x.$

1.3.2 $E(y_x + z_x) = Ey_x + Ez_x;\quad E(\lambda . y_x) = \lambda . Ey_x.$

1.3.3 $\Delta(y_x + z_x) = \Delta y_x + \Delta z_x;\quad \Delta(\lambda . y_x) = \lambda . \Delta y_x.$

Demostración:

Por definición de los operadores se demuestran las propiedades

1.3.1) $\Delta(\lambda y_x) = \lambda(\Delta y_x)$

$$= \lambda(y_{x+k} - y_x)$$

$$= \lambda \Delta y_x. \; lqqd$$

1.3.2) $I[y_x + z_x] = [y_x] + [z_x]$

$$= Iy_x + I z_x \quad lqqd.$$

1.3.3) $E[y_x + z_x] = [y_{x+k}] - [z_{x+k}]$

$$= Ey_x + E z_x \quad lqqd.$$

1.3.4) $\Delta[y_x + z_x] = [y_{x+k} + z_{x+k}] - [y_x + z_x]$

$$= [y_{x+k} - y_x] + [z_{x+k} - z_x]$$

$$= \Delta y_x + \Delta z_x \quad lqqd.$$

1.4 Identidad, Desplazamiento y Diferencia de un producto de funciones discretas: $\forall x \in \square$, y_x, z_x.

1.4.1) $I(y_x . z_x) = Iy_x \, . \, Iz_x.$

1.4.2) $E(y_x \, . \, z_x) = Ey_x \, . \, Ez_x.$

1.4.3) $\Delta(y_x \, . \, z_x) = \Delta z_x . Ey_x + z_x . \Delta y_x$

Demostración:

1.4.1) $I(y_x . z_x) = [y_x] \cdot [z_x]$

$$= Iy_x \, . I z_x \quad lqqd.$$

1.4.2) $E(y_x \cdot z_x) = [y_{x+h}] \cdot [z_{x+h}]$

$$= Ey_x . E z_x \quad lqqd.$$

1.4.3) $\Delta\left(y_x \cdot z_x\right) = y_{x+k} \cdot z_{x+k} - y_x \cdot z_x$

$$= y_{x+k} \cdot z_{x+k} - y_{x+k} \cdot z_x + y_{x+k} z_x - y_x . z_x$$

$$= y_{x+k}\left[z_{x+k} - z_x\right] + z_x\left[y_{x+k} - y_x\right]$$

$$= y_{x+k} . \Delta z_x + z_x . \Delta y_x \quad lqqd.$$

1.5 Identidad, Desplazamiento y Diferencia de un cociente de funciones discretas: Si, $\forall x \in \square$, $z_x \neq 0$, **se cumple:**

1.5.1) $I\left(\dfrac{y_x}{z_x}\right) = \dfrac{Iy_x}{Iz_x}.$

1.5.2) $E\left(\dfrac{y_x}{z_x}\right) = \dfrac{Ey_x}{Ez_x}.$

1.5.3) $\Delta\left(\dfrac{y_x}{z_x}\right) = \dfrac{\Delta y_x . z_x - \Delta z_x . y_x}{Ez_x . z_x}$

Demostración:

1.5.3) $\Delta\left(\dfrac{y_x}{z_x}\right) = \dfrac{y_{x+k}}{z_{x+k}} - \dfrac{y_x}{z_x}$

$$= \frac{\left(y_{x+k}\right)\left(z_x\right) - \left(y_x\right)\left(z_x\right) - \left(y_x\right)\left(z_{x+k}\right) + \left(z_x\right)\left(y_x\right)}{\left(z_x\right)\left(z_{x+k}\right)}$$

$$= \frac{z_x\left(y_{x+k} - y_x\right) - y_x\left(z_{x+k} - z_x\right)}{\left(z_x\right)\left(z_{x+k}\right)}$$

$$= \frac{z_x . \Delta y_x - y_x . \Delta z_x}{\left(z_x\right)\left(z_{x+k}\right)} \text{ por definición del operador } E$$

$$= \frac{\Delta y_x . z_x - \Delta z_x . y_x}{\left(z_x\right)\left(Ez_x\right)} \; lqqd$$

1.6 Punto de Equilibrio de una ecuación en diferencias.

Es particularmente interesante estudiar los puntos de equilibrio. Llamamos punto o estado de equilibrio de una ecuación en diferencias a aquel estado y_x que verifica:

$$y_{x+1}=f(y_x)=y_x$$

es decir, el estado permanece invariante. Veámoslo mediante un ejemplo. Sea el valor del estado: $y_x=x$

y la función que determina la evolución del sistema:

$$y_{x+1}=f(y_x) = y_x \cdot y_x \cdot y_x = y_x^3 = x^3$$

Esta ecuación representa un sistema con tres puntos de equilibrio, a saber:

$$x = 1,\ \ x = -1 \text{ y } x = 0$$

Si el sistema llega alguna vez a tomar alguno de estos tres valores, tras partir de una condición inicial (un valor de x) determinada, habrá alcanzado un punto de equilibrio.

Existe una diferencia fundamental entre este tipo de equilibrio, obtenidos mediante ecuaciones en diferencias y los obtenidos mediante una ecuación diferencial. Mientras en estas últimas los equilibrios son soluciones bien definidas de la ecuación, en los sistemas tratados en diferencias, una solución de la ecuación puede no representar un equilibrio de partida pero, tras un número finito de iteraciones, puede alcanzar un punto de equilibrio y, si es estable, permanecer en él y ello dependerá de las condiciones iniciales del problema, es decir del valor de x. El ejemplo anterior no es muy ilustrativo al respecto, ya que x^3 sólo puede alcanzar alguno de los tres valores si parte inicialmente de ellos. Pero se pueden encontrar sistemas que se comporten de tal manera que se alcance la estabilidad dependiendo de la condición inicial.

Ejemplo2: Sea el sistema descrito por la ecuación en diferencias: $y_{x+1}=f(y_x)$

Con $f(y_x)=2y_x$, si y_x toma valores en el intervalo cerrado $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, (es decir, con inclusión de los valores correspondientes a los extremos).

$f(y_x)=2\,(1-y_x)$, si y_x toma valores en el intervalo abierto por la izquierda $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$, (es decir, con inclusión del valor del extremo derecho y exclusión del correspondiente valor del borde izquierdo).

$f(y_x) = 2y_x-1$ si y_x toma valores mayores que la unidad.

Tomemos como condición inicial $y_0=\frac{1}{8}$, siguiendo el proceso de iteración,

Encontramos:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{4} \\
y_2 &= \frac{1}{2} \\
y_3 &= 1 \\
y_4 &= 0 \\
y_5 &= 0 \\
y_6 &= 0
\end{aligned}
$$

y así indefinidamente.

Es decir hemos alcanzado un punto de estabilidad en sólo cuatro iteraciones, donde el sistema permanecerá en el futuro, sin cambio alguno. El estado de equilibrio es 0. Se puede comprobar fácilmente que existe otro punto de equilibrio de valor $2/3$.

Sin embargo, si tomamos como condición inicial $y_0=5/9$, el sistema crece en valor indefinidamente.

Las ecuaciones en diferencias proveen, en muchas áreas del conocimiento (Economía, Física, Biología, Ingeniería, etc.), la solución de problemas ligados a la estabilidad, asintoticidad de un comportamiento dinámico, oscilaciones, teoría del control, caos, fractales, etc

1.7 Diferencias sucesivas de una ecuación.

Supongamos que y es función de x, es decir, $y=f(x)$ donde y está definida para valores entero de x, o sea, $x=0,1,2,\ldots$ En el contexto de las ecuaciones en diferencias, la relación funcional, $y=f(x)$ se indica frecuentemente por y_x. El cambio en y cuando x varía de x a $x+1$ es la primera diferencia de y_x y se escribe:

$$Dy_x = y_{x+1} - y_x$$

Observe que Δy_x es también una función de x, Δ es un operador que proporciona la regla para evaluar Δy_x a partir de la sucesión (o secuencia) $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k$. Así mismo, se obtiene diferencias de orden superior como diferencias de diferencias aplicando el operador Δ.

La segunda diferencia de y_x es:

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_x &= \Delta(y_x)\\ &= \Delta y_{x+1} - \Delta y_x\\ &= (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x)\\ &= y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x.\end{aligned}$$

La tercera diferencia de y_x es:

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_x &= \Delta(\Delta^2 y_x)\\ &= (\Delta y_{x+2} - 2\Delta y_{x+1} + \Delta y_x)\\ &= (y_{x+3} - y_{x+2}) - 2(y_{x+2} - y_{x+1}) + (y_{x+1} - y_x)\\ &= y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x.\end{aligned}$$

$$D_y(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y(x)}{h}$$

D es el operador de diferenciación que aplicado a una función no es más que la derivada de dicha función. El cociente $\frac{\Delta y(x)}{h}$ es la pendiente de la recta que une los puntos de la representación gráfica de y correspondientes a las abscisas x y $x+y$.

Las sucesivas diferenciaciones de una función se indican con potencias sucesivas del operador D la segunda derivada se representa por $D^2 y$, la tercera derivada por $D^3 y$, etc.

1.9 Operación inversa de la diferenciación

Dada una función Y tal que $DY = y,$ se dice que Y, es la funciòn primitiva de y para ser consecuentes con la notacion utililizada, simbolizaremos el operador inverso de diferenciaciòn con la notación D^{-1} y escribiremos $Y = D^{-1} y.$

Aunque esta notación es de gran utilidad en esta investigación y en muchos textos, es mas frecuente la notación $Y = \int y dy$ y la denominación para Y de integral indefinida de la función y, puesto que $DY = y$ y también $D(Y + C) = y$ siendo C una constante arbitraria.

Utilizando esta notación ($\int$ en vez de de D^{-1}) se exponen algunos resultados conocidos del cálculo diferencial y las fórmulas análogas que le corresponden al cálculo de diferencias. Una de estas fórmulas del cálculo diferencial se demostrará fácilmente a partir de los correspondientes resultados del cálculo de diferencias sin mas que aplicar límites.

Tabla de analogía entre el cálculo en diferencias y el cálculo diferencial

1. $\Delta y(x)=y(x+h)-y(x)$	1′. $Dy(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta y}{h}$
2. $\Delta^n y=\Delta\left(\Delta^{n-1}y\right)\ \ n=1$	2′. $D^n y=D\left(D^{n-1}y\right)\ \ n=1,2,3\ldots$
3. $\Delta\left(cy\right)=c\Delta y$	3′. $D\left(cy\right)=cDy$
4. $\Delta\left(c_1y_1+c_2y_2\right)=c_1\Delta y_1+c_2\Delta y_2$	4′. $D\left(c_1y_1+c_2y_2\right)=c_1Dy_1+c_2Dy_2$
5. Si y es un polinomio de grado n, $\Delta^n y$ Es constante y las diferencias de orden superior son nulas	5′. Si y es un polinomio de grado n, $\Delta^n y$ Es constante y las derivasa de orden superior son nulas.
6. $\Delta x^{(n)}=nhx^{(n-1)}$	6′. $Dx^{(n)}=nhx^{n-1}$
7. $\Delta\left(u.v\right)=(Eu)\Delta v+v\Delta u$	7′. $D\left(u.v\right)=uDv+vDu$
8. $\Delta\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\Delta u-u\Delta v}{vEv}$	8′. $\Delta\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vDu-uDv}{v^2}$
9. Si $\Delta Y=y,\Delta^{-1}y=Y+p$ donde p es una función periódica de periodo h.	9′. Si $DY=y,\int y=Y+C$

CAPITULO 2: Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden.

[illegible] Orden o grado de las ecuaciones en diferencias

Los ejemplos expuestos hasta ahora son de ecuaciones de primer orden, o también de primer grado, porque cada estado depende del inmediato anterior. Si la ecuación describiera el valor de un estado x en función del valor de dos o más estados anteriores, pongamos por caso:

$$y_{x+1}=f\left(y_{x-4}\right)$$

[illegible] que es de un grado u orden mayor que la unidad. En el ejemplo anterior [illegible] grado sería 5, ya que un estado concreto es función directa de lo que aconteció [illegible] estados anteriores.

Pueden existir combinaciones de varios estados anteriores, como por ejemplo:

$$y_x = f(y_{x-4}) + g(y_{x-3}) + h(y_{x-1})$$

Llamaremos "**designador de instante**" al número entero que, restado del valor de x, indica cuántos estados anteriores hay que considerar en el correspondiente término de la ecuación. Así la expresión anterior podríamos escribirla como:

$$y_x = f\left(y_{x-a_1}\right) + g\left(y_{x-a_2}\right) + h\left(y_{x-a_3}\right)$$

con valores $a_1 = 4, a_2 = 3$ y $a_3 = 1$. Los coeficientes a_i son los designadores de instante y han de pertenecer a los enteros positivos $\left(a_i \in \mathbf{Z}^+\right)$.

El grado u orden de la ecuación vendrá determinado por el mayor de los designadores de instantes (a_i). La ecuación:

$$3y_{x+1} - 2y_x = x + 2$$

es de grado uno, (además de tratarse de una ecuación lineal no homogénea). Sin embargo, la siguiente:

$$3y_{x+5} - 2y_x = 0$$

Consiste en una ecuación de quinto grado (que es además lineal y homogénea).

La resolución de estas ecuaciones necesita de tantos valores iniciales como grado tenga, ya que, en principio, no están definidas todas las condiciones de partida de las mismas. Es decir, continuando con el mismo ejemplo anterior, si se conoce el valor de y_x, también se conocerá el estado de y_{x+5}, pero se desconocen los estados intermedios y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3} e y_{x+4} y no podremos determinar directamente y_{x+6}, y_{x+7}, y_{x+8}, y_{x+9} y sus correspondientes posteriores, salvo que se conozcan estos valores explícitamente al comienzo.

Este tipo de ecuaciones lineales en diferencias de orden mayor que la unidad son clásicas en casi todos los ámbitos de la ciencia. Así están presentes en el estudio de la dinámica de poblaciones de una sola especie (cuando se hacen intervenir varias especies, nos enfrentaríamos a la resolución de sistemas de ecuaciones en diferencias), en la evolución de la economía, cuando se hace intervenir una sola variable, en el estudio del movimiento de un único cuerpo en física.

2.2 Solución de las ecuaciones lineales en diferencias.

Si una ecuación es lineal de cualquier grado, sea homogénea o no, con coeficientes constantes o variables, es decir:

$$y_{x+1} = \sum_{k=0}^{n} g_k(x) y_x$$

Siendo x un número entero, y admite más de una solución, la suma combinada (combinación lineal) de las soluciones es también solución de la ecuación. Efectivamente, sean y_{1x} e y_{2x} dos soluciones cualesquiera. La combinación:

$$y_x = \mathrm{P}\, y_{1x} + \mathrm{Q}\, y_{2x}$$

Con P y Q dos números reales indeterminados, también es solución. Escribamos la ecuación en la forma:

$$y_{x+1} - \sum_{k=0}^{n} g_k(x) y_x = 0$$

Como y_{1x} e y_{2x} son soluciones, ambas verifican:

$$y_{1\,x+1} - \sum_{k=0}^{n} g_k(x) y_{1x} = 0$$

$$y_{2\,x+1} - \sum_{k=0}^{n} g_k(x) y_{2x} = 0$$

Por lo tanto:

$$P\left[y_{1\,x+1}-\sum_{k=0}^{n} g_k(x)y_{1x}\right]+Q\left[y_{2x+1}-\sum_{k=0}^{n} g_k(x)y_{2x}\right]=0$$

Ello nos resultará especialmente útil para encontrar las soluciones generales de nuestras ecuaciones: aquellas soluciones que nos permiten definir la evolución de un sistema para cualquier condición inicial.

Si tenemos un conjunto de soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal, es decir, una combinación lineal arbitraria de ellas en la forma:

$$P_1 y_{1x} + P_2 y_{2x} + P_3 y_{3x} + \ldots + P_m y_{nx}$$

que sólo puede anularse si se anulan cada uno de los coeficientes P_m, la combinación anterior es también solución no trivial de la ecuación. Si ese conjunto de soluciones es completo, es decir hemos encontrado todas las soluciones linealmente independientes posibles, esa combinación lineal nos proporciona la solución llamada general y podremos determinar el valor de y_x para un valor cualquiera de y_0.

[illegible] Ecuaciones lineales en diferencias.

Definición 6: Una ecuación en diferencia se dice que es lineal si en la variable dependiente solo aparece en expresiones de primer grado, es decir, si la variable dependiente no figura con un exponente mayor que la unidad, y no se presenta en términos de producto cruzado. Por tanto una ecuación en diferencias es lineal si se puede escribir en la forma:

$$a_0(x)y_{x+n} + a_1(x)y_{x+n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)y_{x+1} + a_n(x)y_x = g(x)$$

En donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ y g son funciones de x (pero de y_x) definidas para $x = 1, 2, 3, \ldots$

Una ecuación lineal en diferencias es de orden n si está escrita en la forma, tanto a_0 como a_n.

Son distintas de cero para todos los valores de x que se consideran es decir; una ecuación lineal en diferencias es de orden n si comprende valores de y correspondiente a valores de x que difieren en n pero no en más de n. Las ecuaciones en diferencias que no son lineales, en general son muy difíciles de resolver, y rara vez se emplean.

Una ecuación en diferencias de orden n puede escribirse como función implícita de los valores de la variable y en n diferentes valores de x (es decir, los n valores espaciados de y).

$$F\left[y_{x+n}, y_{x+n-1}, \ldots, y_x\right]=0$$

O bien, puesto que el conocimiento de $x+1$ valores de y permite calcular el valor de y y sus primeras n diferencias:

$$F\left[\Delta^n y_x, \Delta^{n-1} y_x, \ldots, \Delta y_x, y_x\right]=0$$

Ejemplo 4: $\Delta^2 y_x - 3\Delta y_x - 3y_x = x$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(y_{x+1}-y_x\right)-3\Delta y_x-3y_x=x\\
&\left(y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x\right)-3\left(y_{x+1}-y_x\right)-3y_x=x\\
&y_{x+2}-5y_{x+1}+y_x-x=0
\end{aligned}$$

2.4 Soluciones de las ecuaciones en diferencias.

Una solución de una ecuación en diferencias es una relación funcional que no contiene diferencias, que está definida para los enteros no negativos y que satisfacen la ecuación en diferencias.

La solución general de una ecuación en diferencias de orden n es la que contiene n constantes arbitrarias. La función discreta $f(k, C_1, \ldots, C_n) = y_k$ siendo $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ es la solución general de una ecuación en diferencias de orden n si es una solución que depende de tantas constantes como indica el orden de la ecuación.

Se puede demostrar que la solución general de una ecuación en diferencias es única o unívoca.

Una solución particular de una ecuación en diferencias es la que se puede obtener a partir de la solución general así dándole valores particulares a las constantes arbitrarias de esta solución. Como en el caso de las ecuaciones diferenciales, las constantes arbitrarias de una ecuación en diferencias de orden n comprende n constantes arbitrarias, y una solución particular requiere, por consiguiente, la especificación de n condiciones iniciales o de frontera, para que la función pase por un punto concreto.

Ejemplo 5: Comprobar que la función $y_x = 3x - 1$, es una solución particular de la ecuación en diferencias $y_{x+1} + 2y_x - 9x = 0$

Solución: Sustituyendo los valores de y_x, en la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned} [3(x+1)-1] + 2(3x-1) - 9x &= 0 \\ 3x + 3 - 1 + 6x - 2 - 9x &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

2.5 Ecuaciones lineales en diferencias de primer orden con coeficientes constantes.

En esta sección se estudiará el método de resolución para las ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con coeficientes constantes. Además se analizará el comportamiento de la sucesión que representa una solución, y se definen así mismo los conceptos de equilibrio y estabilidad.

Una ecuación en diferencias lineal y de primer orden puede escribirse en la forma:

$$a_0(x)y_{x+1}+a_1(x)y_x=g(x) \qquad x=0,1,2,\ldots$$

Donde los coeficientes $a_0(x)\neq 0$ y $a_1(x)\neq 0$. En forma alternativa

$$y_{x+1}.=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}+\frac{g(x)}{a_0(x)}$$

Si $a_1(x)$, $a_2(x)$ y $g(x)$ son constantes, es decir, de hecho no son funciones de x, entonces $y_{x+1}=Ay_x+B$

En donde A y B son constantes y $A\neq 0$. Se tiene que $B=0$ solo si $g=0$ en la ecuación original. Así, la ecuación en diferencias $y_{x+1}=Ay_x+B$ es la ecuación general lineal, de primer orden y con coeficientes constantes.

La solución de tal ecuación puede obtenerse por inducción, tal como sigue:

$$\begin{aligned}
y_1 &= Ay_0+B\\
y_2 &= Ay_1=A\left(Ay_0+B\right)+B\\
&=A^2y_0+AB+B\\
y_3 &= Ay_2=A\left(A^2y_0+AB+B\right)+B\\
&=A^3y_0+A^2B+AB+B\\
y_4 &= Ay_3=A\left(A^3y_0+A^2B+AB+B\right)+B\\
&=A^4y_0+A^3B+A^2B+AB+B\\
&\vdots\\
y_x &= A^xy_0+B\left(1+A+A^2+A^3+,,,+A^{x-1}\right)
\end{aligned}$$

- En consecuencia, observamos que $1+A+A^2+A^3+,,,+A^{x-1}$ es una serie geométrica cuya suma es $\frac{\left(1-A^x\right)}{\left(1-A\right)}$, la solución de $y_{x+1}=Ay_x+B$ es:

$$y_x = A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A} \quad \text{para} \quad A \neq 1 \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$$y_x = y_0 + Bx \quad \text{para} \quad A = 1 \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Observemos que esta solución, obtenida por inducción, satisface de hecho la ecuación

$y_{x+1} = Ay_x + B$ ya que para $A \neq 1$

$$\begin{aligned} y_{x+1} &= Ay_x + B \\ &= A\left(A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A}\right) + B \\ &= A^{x+1}y_0 + B\left(\frac{A - A^{x+1} + 1 - A}{1-A}\right) \\ &= A^{x+1}y_0 + B\frac{1-A^{x+1}}{1-A} \end{aligned}$$

Para $A = 1$

$$\begin{aligned} y_{x+1} &= y_x + B \\ &= (y_0 + Bx) + B \\ &= y_0 + B(x+1) \end{aligned}$$

Existen tres casos especiales de la ecuación $y_{x+1} = Ay_x + B$ que ocurren frecuentemente en el análisis de datos de las ciencias económicas.

Caso 1: La diferencia de primer orden es una constante:

$y_{x+1} - y_x = B$ (caso especial para $A = 1$)

Solución: $y_x = y_0 + Bx$

Caso 2: La diferencia de primer orden es proporcional a la variable:

$y_{x+1} - y_x = \alpha y_{x+1}$ (caso especial: $A = \frac{1}{1-\alpha}$, $B = 0$)

Solución: $y_x = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x y_0$

Caso 3: La diferencia de primer orden es función lineal de la variable:

$y_{x+1} - y_x = \alpha y_{x+1} + \beta$ (Caso especial: $A = \frac{1}{1-\alpha}$, $B = \frac{1}{1-\alpha}$)

Solución: $y_x = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x y_0 + \frac{\beta}{\alpha}\left[\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^x - 1\right]$

Ejemplo 6: Resolver la ecuación en diferencias $3y_{x+1} - 9x + 8 = 0$ y obtener la solución particular si $y_0 = \frac{1}{3}$.

$$3y_{x+1} - 9x + 8 = 0$$
$$y_{x+1} = 3x - \frac{8}{3}$$

donde claramente se sabe que $A = 3$, $B = -\frac{8}{3}$

$$y_x = 3^x y_0 - \frac{8}{3}\left(\frac{1-3^x}{-2}\right)$$

$$y_x = 3^x y_0 + \frac{4}{3}\left(1-3^x\right)$$

$$y_x = \left(y_0 - \frac{4}{3}\right)3^x + \frac{4}{3}$$

$$si\ y_0 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow$$

$$y_x = \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right)3^x + \frac{4}{3}$$

$$y_x = \frac{4}{3} - 3^x \quad \square$$

2.6 Comportamiento de la secuencia solución de una ecuación en diferencias.

Una sucesión o secuencia es un conjunto de términos sucesivos que se forman de acuerdo con una regla, o lo que es lo mismo, una sucesión es una función definida para valores de números enteros positivos de la variable dependiente. La solución de una ecuación en diferencias es, por consiguiente, una secuencia o sucesión. Cuando la variable independiente es el tiempo, dicha sucesión se llama a veces "trayectoria en el tiempo" de la variable dependiente. En el caso de una ecuación en diferencia lineal y de primer orden, la especificación de y_0 determina o genera la secuencia solución $y_0, y_1, y_2, \ldots$; cada término se determina a partir de la ecuación en diferencias

$$y_{x+1} = Ay_x + B \quad x = 0,1,2,\ldots$$

O en forma equivalente, a partir de la solución,

$$y_x = A^x y_0 + B\frac{1-A^x}{1-A} \text{ para } A \neq 1 \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$$y_x = y_0 + Bx \text{ para } A = 1 \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Cuando se dan los valores de A y B, la especificación de y_0 determina, por consiguiente, una secuencia solución de número reales.

El comportamiento de la sucesión que es la solución particular de una ecuación en diferencias es de mucho interés en muchas aplicaciones, tal comportamiento depende de los valores de y_0, A y B . Tal como se muestra en la tabla siguiente: además se presenta un esquema para cada tipo de comportamiento según cada caso señalado en dicha tabla.

2.6.1 Comportamiento de la secuencia solución de $y_{x+1} = Ay_x + B$

Caso	A	B	y_0	$y_x, x=1,2,..$	**Comportamiento de la secuencia solución**
a.	$A \neq 1$		$y_0 = y^*$	$y_x = y^*$	Constante: $y_x = y^*$
b.	$A > 1$		$y_0 > y^*$	$y_x > y^*$	Diverge en $+\infty$ (monótona creciente)
c.	$A > 1$		$y_0 < y^*$	$y_x < y^*$	Diverge en $-\infty$(monótona decreciente).
d.	$0 < A < 1$		$y_0 > y^*$	$y_x > y^*$	Converge en y^*(monótona decreciente)
e.	$0 < A < 1$		$y_0 < y^*$	$y_x < y^*$	Converge en y^*(monótona creciente)
f.	$-1 < A < 0$		$y_0 \neq y^*$		Converge en y^*(oscilatoria amortiguada)
g.	$A = -1$		$y_0 \neq y^*$		Diverge (oscila finitamente)
h.	$A < -1$		$y_0 \neq y^*$		Diverge (oscila infinitamente)
i.	$A = 1$	$B = 0$		$y_x = y_0$	Constante $y_x = y_0$
j.	$A = 1$	$B > 0$		$y_x > y_0$	Diverge en $+\infty$ (monótona creciente)
k.	$A = 1$	$B < 0$		$y_x < y_0$	Diverge en $-\infty$ (monótona decreciente)

Los resultados de esta tabla se pueden resumir en el siguiente Teorema:

Teorema: La ecuación en diferencias lineal y de primer orden $y_{x+1} = Ay_x + B \qquad x = 0,1,2,...$ tiene la solución:

$$y_x = A^x(y_0 - y^*) + y^* \quad si\ A \neq 1 \quad x = 0,1,2,...$$
$$y_x = y_0 + Bx \qquad si\ A = 1 \quad x = 0,1,2,...$$

En dónde $y^* = \dfrac{B}{1-A}$. Si $-1 < A < 1$, la secuencia solución converge en y^*; de lo contrario diverge, a no ser que $y_x = y_0$.

Ejemplos 7: Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias, determine el comportamiento de la secuencia solución, y calcula los primeros cuatro valores para dicha sucesión.

A. $6y_{x+1} + 2y_x - 3 = 0, \qquad y_0 = 1$

Solución: Reescribimos la ecuación en diferencias de la forma:

$$y_{x+1} = -\frac{1}{3}y_x + \frac{1}{2}$$

Donde $$A = -\frac{1}{3} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la solución general

$$y_x = \left(-\frac{1}{3}\right)^x y_0 + \frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^x}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}\right]$$

$$y_x = \left(-\frac{1}{3}\right)^x y_0 + \frac{3}{8}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^x\right)$$

$$y_x = \left(-\frac{1}{3}\right)^x \left(y_0 - \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{8}$$

Si $y_0 = 1$, $y_x = \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^x + \frac{3}{8}$ (solución particular)

Como $-1 < -\frac{1}{3} < 0$ y $y^* = \frac{3}{8}$ sabemos que la sucesión corresponde al caso f) de la tabla anterior por lo tanto y_x converge a $y^* = \frac{3}{8}$ y es oscilatoria amortiguada y los cuatro primeros términos de dicha sucesión son:

$$y_0 = \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{3}{8} = 1$$

$$y_1 = \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^1 + \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$$

$$y_2 = \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{8} = \frac{4}{9}$$

$$y_3 = \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{3}{8} = \frac{19}{54}$$

B . $3y_{x+1} - 2y_x - 6 = 0$, $y_0 = 4$

Solución: Reescribimos la ecuación en diferencias

$$y_{x+1} = \frac{2}{3}y_x + 2$$

$$A=\frac{2}{3} \quad \text{y} \quad B=2$$

$$y_x=\left(\frac{2}{3}\right)^x y_0+2\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1-\frac{2}{3}}\right]$$

$$y_x=\left(\frac{2}{3}\right)^x y_0+6-6\left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$y_x=(y_0-6)\left(\frac{2}{3}\right)^x+6$$

$$Si\, y_0=4 \Rightarrow y_x=-2\left(\frac{2}{3}\right)^x+6$$

Como $0<\frac{2}{3}<1$ y $y_0<y^*$ se sabe que la sucesión corresponde al caso e) de la tabla anterior por tanto la sucesión es monótona creciente y converge en $y^*=6$

Los cuatro primeros términos de dicha sucesión son:

$$y_0=4$$
$$y_1=\frac{14}{3}$$
$$y_2=\frac{46}{9}$$
$$y_3=\frac{146}{27}$$
$$y_4=\frac{454}{81}$$

CAPITULO 3: Ecuaciones en diferencias lineales y de segundo orden con coeficientes constantes.

Es esta sección se estudiará el método de solución para las ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes constantes, y el comportamiento que toma la secuencia solución. Se utilizarán métodos especiales de resolución cuando las ecuaciones de segundo orden no son homogéneas; se describen tales métodos y se definen el equilibrio y la estabilidad para dicha sucesión.

La ecuación en diferencias general, lineal, de segundo orden y con coeficientes constantes se puede expresar en la forma siguiente:

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = g(x)$$

Consideremos el primer caso especial cuando $g(x) = 0$.

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

Una ecuación cuyo término constante es cero se llama homogénea. Así pues, $y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$ es la ecuación en diferencias general, lineal, homogénea, de segundo orden y con coeficientes constantes. La definición de una ecuación *homogénea* no debe confundirse con la definición de función homogénea; los dos usos de la palabra homogénea no tienen relación entre sí.

A fin de obtener la solución

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

Se forma la ecuación auxiliar $m^2 + A_1 m + A_2 = 0$

Y se obtienen sus raíces, usando la fórmula cuadrática

$$m_1 = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}$$

$$m_1 = \frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}$$

Tales raíces m_1 y m_2 pueden ser reales y distintas, reales e iguales, o bien, complejas. La forma de la solución de la ecuación $y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$ depende de la naturaleza de los valores de las raíces m_1 y m_2, como se resumirán en esta sección más adelante. La solución general de una ecuación en diferencias de segundo orden incluye dos constantes arbitrarias, y una solución particular la especifican dos condiciones de frontera, es decir, dos valores consecutivos de y.

Caso 1: m_1 y m_2 son reales y distintas $(m_1 \neq m_2)$

Solución: $y_x = C_1 m_1^x + C_2 m_2^x$

Caso 2: m_1 y m_2 son reales e iguales $(m_1 = m_2 = m)$

Solución: $y_x = C_1 m^x + C_2 x m^x$

Caso 3: m_1 y m_2 son complejas $\left(m_1 = a+bi,\ \ m_2 = a-bi \text{ en donde } i = \sqrt{-1}\right)$

Solución: $y_x = r^x\left(C_1 \cos\theta x + C_2 sen\theta x\right)$

Donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y θ es el ángulo para el cual $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$; en forma alternativa, θ para el cual: $sen\theta = \dfrac{a}{r}$, $\cos\theta = \dfrac{b}{r}$.

Ejemplo 8: Obtener la solución general para la ecuación en diferencias

$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 0$ y la solución particular sí $y_0 = 1$ y $y_1 = 6$.

Solución: La ecuación auxiliar es

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \quad \text{y}$$

$$m_1 = \frac{4+\sqrt{16-16}}{2} = 2$$

$$m_2 = \frac{4-\sqrt{16-16}}{2} = 2$$

sección más adelante. La solución general de una ecuación en diferencias de segundo orden incluye dos constantes arbitrarias, y una solución particular la especifican dos condiciones de frontera, es decir, dos valores consecutivos de y.

Caso 1: m_1 y m_2 son reales y distintas $(m_1 \neq m_2)$

Solución: $y_x = C_1 m_1^x + C_2 m_2^x$.

Caso 2: m_1 y m_2 son reales e iguales $(m_1 = m_2 = m)$

Solución: $y_x = C_1 m^x + C_2 x m^x$

Caso 3: m_1 y m_2 son complejas $\left(m_1 = a+bi,\ \ m_2 = a-bi \text{ en donde } i=\sqrt{-1}\right)$

Solución: $y_x = r^x\left(C_1 \cos\theta x + C_2 sen\theta x\right)$

Donde $r=\sqrt{a^2+b^2}$ y θ es el ángulo para el cual $\tan\theta = \frac{a}{b}$; en forma alternativa, θ para el cual: $sen\theta = \frac{a}{r}$, $\cos\theta = \frac{b}{r}$.

Ejemplo 8: Obtener la solución general para la ecuación en diferencias

$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 0$ y *la solución particular sí* $y_0 = 1$ y $y_1 = 6$.

Solución: La ecuación auxiliar es

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \quad \text{y}$$

$$m_1 = \frac{4+\sqrt{16-16}}{2} = 2$$
$$m_2 = \frac{4-\sqrt{16-16}}{2} = 2$$

Entonces la solución general está dada por:

$$y_x = C_1 2^x + C_2 x 2^x$$

Si $y_0 = 1$

$1 = C_1 + 0$

Si $y_1 = 6$

$6 = 2C_1 + 2C_2$

$C_1 = 1$

$C_2 = 2$

Y la solución particular es: $y_x = 2^x + x2^{x+1}$ •

3.1 Comportamiento de la secuencia solución.

El comportamiento de la sucesión o secuencia solución particular depende tanto de la ecuación en diferencias como de las condiciones iniciales; las raíces de la ecuación auxiliar indican el comportamiento en el límite de la secuencia solución, como sigue:

Caso 1: Raíces reales distintas, $m_1 \neq m_2$

Si m_1 es la raíz de valor absoluto mayor, es decir, $|m_1| > |m_2|$, entonces el comportamiento en límite, de la secuencia solución $\{C_1 m_1^x + C_2 m_2^x\}$, es el mismo que para $\{C_1 m_1^x\}$ considerando que $C_1 \neq 0$.

Esto puede demostrarse escribiendo

$$C_1 m_1^x + C_2 m_2^x = m_1^x \left[C_1 + C_2 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^x \right]$$

Como $-1<\frac{m_2}{m_1}<1$, $\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^x \to 0$ a medida que $x \to \infty$ y

$$\frac{C_1 m_1^x}{C_1 m_1^x + C_2 m_2^x} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 (m_2 / m_1)^x} \;\to\; \frac{C_1}{C_1} = 1 \text{ a medida que } x \to \infty.$$

De este modo el comportamiento en el límite de $\{C_1 m_1^x + C_2 m_2^x\}$ es el mismo que el de $\{C_1 m_1^x\}$ si $|m_1| > |m_2|$. El comportamiento en el límite de $\{C_1 m_1^x\}$ ya se analizó en la sección anterior cuando hablábamos de las secuencias solución de las ecuaciones en diferencias de primer orden. El comportamiento en el límite puede resumirse con la notación de esta sección como sigue:

Si $|m_1| \le 1$, la sucesión o secuencia converge.

Si $|m_1| < 1$, la sucesión diverge.

Si $-1 < m_1 < 0$, la sucesión es oscilatoria amortiguada.

Si $m < -1$, la sucesión oscila infinitamente.

Si $C_1 = 0$, la sucesión solución es $\{C_2 m_2^x\}$ y aseveraciones semejantes a las mencionadas se aplican a esta secuencia. Observemos que si $C_1 = 0$, entonces $y_0 = C_2$ y $y_1 = C_2 m_2$. De manera que $C_1 = 0$ implica condiciones de frontera que especifican una solución particular.

Caso 2: Raíces reales iguales, $m_1 = m_2 = m$

La secuencia solución es $\{(C_1 + C_2 x) m^x\}$, que diverge si $|m| > 1$, a menos que $C_1 = C_2 = 0$ y también diverge si $|m| = 1$ a menos que $C_2 = 0$. Si $|m| < 1$, la secuencia solución $\{x m^x\}$ converge a cero, y $\{(C_1 + C_2 x) m^x\}$ también converge a cero. Si m es negativa, la sucesión es oscilatoria.

Caso 3: Raíces complejas, $m_1 = a + bi,\ m_2 = a - bi$.

La secuencia solución es oscilatoria; converge a cero si $0 < \sqrt{a^2 + b^2} < 1$ y diverge si $\sqrt{a^2 + b^2} > 1$.

Se requiere una clasificación completa de las secuencias solución de las ecuaciones en diferencias homogéneas lineales de segundo orden: $y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$ ya que para valores iniciales excepcionales para C_1 ó C_2 ambos, son iguales a cero. Existe un caso en el que la secuencia solución para la ecuación lineal homogénea de segundo grado converge en cero para cada posible par de valores iniciales, como se resume en el teorema siguiente:

Teorema 2: Si $\rho = \mathrm{máx}(|m_1|, |m_2|)$, en donde m_1 y m_2 son las raíces de la ecuación auxiliar de la ecuación en diferencia lineal homogénea de segundo orden, $y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$ entonces $\rho < 1$ es una condición necesaria y suficiente para que la sucesión solución $\{y_x\}$ converja con límite igual a 0, para todos los valore iniciales y_0 y y_1.

Más específicamente la definición de ρ es la siguiente:

Caso1: m_1 y m_2 son reales y distintas

$\rho = \mathrm{máx}(|m_1|, |m_2|)$

Caso 2: m_1 y m_2 son reales e iguales, $m_1 = m_2 = m$

$\rho = |m|$

Caso 3: m_1 y m_2 son complejas: $m_1 = a + bi,\ \ m_2 = a - bi$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

3.2 Ecuaciones en diferencias de segundo orden no homogéneas

Si la ecuación en diferencias homogénea lineal de segundo orden $y_{x+2}+A_1y_{x+1}+A_2y_x=0$ tiene solución general y_x, entonces las ecuación en diferencias lineal de segundo orden no homogénea $y_{x+2}+A_1y_{x+1}+A_2y_x=g(x)$

Tiene la solución general y_x+y_p, en donde y_p es una solución particular de la ecuación en diferencia no homogénea.

Por desgracia no existe una regla general para determinar y_p. La forma de y_p depende de la forma de $g(x)$; para las formas más sencillas, y_p es semejante a $g(x)$, pero hay muchos casos especiales.

Cuando $g(x)$ es una constante, y_p puede determinarse fácilmente. Supongamos que $g(x)$es una constante, k; es decir

$$y_{x+2}+A_1y_{x+1}+A_2y_x=k$$

Primero probemos una solución de la forma y_p= constante, o bien $y_p=k$. Si la solución $y_p=k$ satisface la ecuación en diferencias, entonces

$$k+A_1k+A_2k=K \qquad \text{y}$$

$$k=\frac{K}{1+A_1+A_2}$$

Por tanto $y_p=\dfrac{K}{1+A_1+A_2}$ es una solución de la ecuación en diferencias $y_{x+2}+A_1y_{x+1}+A_2y_x=K$, a menos que $1+A_1+A_2=0$.

Si $1+A_1+A_2=0$, pruébese una solución de la forma $y_p=kx$, por consiguiente

$$k(k+2)+A_1k(k+1)+A_2kx=K$$
$$k(1+A_1+A_2)x+k(2+A_1)=K$$

Pero $1+A_1+A_2=0$, y así

$$k=\frac{K}{A_1+2}$$

Y entonces $y_p=\frac{K}{A_1+2}$, a menos $1+A_1+A_2=0$ y $A_1+2=0$.

Si $1+A_1+A_2=0$ y $A_1=-2$, es decir, si $A_1=-2$ y $A_1=1$, entonces pruébese una solución de la forma: $y_p=kx^2$, puede verificarse que, este caso, $y_p=\left(\frac{K}{2}\right)x^2$.

Obsérvese que esta solución es apropiada solo para la ecuación en diferencias de la forma $y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x=K$. Excepto si $g(x)$ es una constante, la ecuación en diferencias $y_{x+2}+A_1y_{x+1}+A_2y_x=g(x)$ tiene una solución particular, y_p, que es una constante.

En resumen cuando $g(x)$ es una constante, la ecuación en diferencias $y_{x+2}+A_1y_{x+1}+A_2y_x=g(x)$ tiene como solución particular:

$$y_p=\frac{K}{1+A_1+A_2}, \qquad 1+A_1+A_2\neq 0$$

$$y_p=\frac{K}{A_1+2}, \qquad A_1+2\neq 0$$

$$y_p=\frac{K}{2}x^2 \quad \text{si} \quad \begin{matrix} 1+A_1+A_2=0 \\ A_1+2=0 \end{matrix} \qquad \text{(es decir, } A_1=-2,\ A_2=1\text{)}$$

Ejemplo 9: Encontrar la solución general de la ecuación en diferencias.

$y_{x+2}-6y_{x+1}+8=9$ y una solución particular si $y_0=10,\ \ y_1=25$. La ecuación auxiliar de la ecuación homogénea es:

$$m^2-6m+8=0$$
$$(m-4)(m-2)=0$$
$$m_1=4 \wedge m_2=2$$

Por tanto la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_x=C_1 4^x+C_2 2^x$$

Y la solución general de la ecuación no homogénea es:

$$y_x=C_1 4^x+C_2 2^x+y_p$$

En donde $y_p=\dfrac{K}{1+A_1+A_2}=\dfrac{9}{1-6+8}=3$ y en consecuencia,

$$y_x=C_1 4^x+C_2 2^x+3 \text{ si } y_0=10,\quad y_1=25,$$

$$C_1+C_2=10-3=7$$
$$4C_1+2C_2=25-3=22$$
$$2C_1=8$$
$$C_1=4$$
$$C_2=3$$

Por tanto la solución particular es: $y_x=4^{x+1}+(3)2^x+3$ •

CAPITULO 4: Resolución de las ecuaciones en diferencias del modelo de la telaraña o cobweb.

Este modelo debe su nombre a que la trayectoria seguida por el precio y la cantidad adopta la forma de una telaraña. Es considerado como un modelo dinámico simple donde las cantidades del producto que se van a ofrecer en el mercado, están en función del precio del mismo en el periodo inmediatamente anterior.

Supuestos básicos del Modelo de la telaraña

Supuesto 1: Se debe estar en un mercado de competencia perfecta, es decir, un mercado donde existan muchos productores y demandantes, los productos ofrecidos son homogéneos, información perfecta, maximización de beneficios, libre movilidad de factores y costos de transacción nulos.

Supuesto 2: Las cantidades demandadas están en función del precio (supuesto implícito del modelo), es decir;

Q demandadas = $F = (P_t)$

Supuesto 3: Las cantidades ofrecidas están en función del precio del periodo inmediatamente anterior (supuesto implícito), es decir;

Q Ofrecidas = $F = (P_{t-1})$

Supuesto 4: Economía cerrada, por lo tanto, no se podrá importar ni exportar productos. (Supuesto Explicito)

Supuesto 5: Existe poca capacidad de almacenamiento. (Supuesto explicito).

El modelo de la telaraña trabaja para situaciones económicas donde es importante los conceptos de oferta y demanda, el cual se puede estudiar con el siguiente modelo.

Oferta $\quad q_t = \alpha + \beta p_{t-1}$

Demanda $\quad p_t = \gamma + \delta q_t$

Con $q_0 = q_0$ (valor conocido en $t = 0$)

$$\beta > 0, \quad \delta < 0$$

Donde α, β, γ y δ son constantes, p es precio y q es cantidad, y ambas son funciones del tiempo t, sustituyendo la segunda ecuación de dicho modelo en la primera:

$$q_t = \alpha + \beta\gamma + \beta\delta q_{t-1}$$

Y ahora sustituyendo la primera ecuación en la segunda de dicho modelo:

$$p_t = \gamma + \alpha\delta + \beta\delta p_{t-1}$$

Estas ecuaciones se pueden resolver por el método usual, sin embargo, lo que interesa es el comportamiento de la secuencia solución en cada uno de los casos. Como $\beta>0$, $\delta<0$ entonces el producto $\beta\delta<0$ y la secuencia solución es siempre oscilante y el punto de equilibrio es;

$$\left(p^*, q^*\right) = \left(\frac{\gamma+\alpha\delta}{1-\beta\delta}, \frac{\alpha+\beta\gamma}{1-\beta\delta}\right)$$

Si $-1<\beta\delta<0$ las secuencias o sucesiones $\{p_t\}$ y $\{q_t\}$ son amortiguadas y converge a $\left(p^*, q^*\right)$; si $\beta\delta<-1$. La sucesión oscila de manera finita; si $\beta\delta<-1$, las sucesiones oscilan de modo infinito. Por tanto el equilibrio es estable solo si $-1<\beta\delta<0$.

4.2 Demostración matemática del modelo de la telaraña

Sea $\begin{array}{l} D_t = a - bP_t \\ S_t = -y + wP_{t-1} \end{array}$ donde D_t representa la demanda y S_t la oferta.

Donde bP_t representa la pendiente de la función de demanda y wP_{t-1} la pendiente de la función de oferta. Ahora se procede a igualar la función de la oferta con la demanda y se obtiene lo siguiente:

$$a - bP_t = -y + wP_{t-1} \qquad (1)$$

Sumándoles un periodo a ambas pendientes y agrupando términos semejantes obtenemos;

$$a+y \;=\; bP_t + wP_{t-1} \qquad (2)$$

Luego de aplicar operaciones matemáticas básicas obtenemos la siguiente ecuación;

$$P_{t+1} = \frac{a+y}{b} - \frac{wP_t}{b} \qquad (3)$$

$$C = \frac{a+y}{b}$$

$$A = -\frac{w}{b}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación 3 obtenemos la forma reducida:

$$P_{t+1} \;=\; AP_t \;+\; C \qquad (4)$$

Por lo tanto para obtener los precios para periodos futuros podemos hacerlo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
P_1 &= A.P_0 + C && (5)\\
P_2 &= A.P_1 + C\\
P_2 &= A.(A.P_0 + C) + C\\
P_2 &= A^2.P_0 + A.C + C && (6)\\
P_3 &= A.P_2 + C\\
P_3 &= A.(A^2.P_0 + A.C + C) + C\\
P_3 &= A^3.P_0 + A^2.C + A.C + C\\
P_3 &= A^3.P_0 + C.(A^2 + A + 1) && (7)
\end{aligned}$$

De una manera genérica e infinita podemos visualizar la fórmula general del modelo de la telaraña:

$$P_t = A^t.P_0 + \frac{C.(A^t - 1)}{A - 1} \qquad (8)$$

Restituyendo las expresiones iniciales (las vistas hasta la ecuación 3), se puede observar lo siguiente:

$$P_t = \left(\frac{-w}{b}\right)^t P_0 \quad + \quad \frac{a+v}{b}\left[\frac{\left(\frac{-w}{b}\right)^t - 1}{\left(\frac{-w}{b}\right) - 1}\right] \qquad (9)$$

Operacionalizando la ecuación anterior obtenemos lo siguiente:

$$P_t = \left(P_0 - \frac{a+v}{w+b}\right).\left(\frac{-w}{b}\right)^t + \frac{a+v}{w+b} \qquad (10)$$

Donde; $\qquad P_e = \dfrac{a+v}{w+b}$

$P_e = \dfrac{a+v}{w+b}$ Representa el precio de equilibrio en un mercado

Cambiando P_e por la expresión correspondiente en la ecuación (10), se obtiene la fórmula reducida del modelo de la telaraña;

$$P_t = (P_0 - Pe).\left(\frac{-w}{b}\right)^t + Pe \quad \textbf{lqqd.}$$

Ejemplo 10: En las ecuaciones lineales en diferencias, tenemos el modelo de la telaraña, que se refiere a la versión discreta del modelo de ajuste del precio de un bien en el mercado.

$$\begin{cases} D_t = 5 - 3P_t \\ S_t = -2 + P_{t-1} \quad \text{con} \quad P_0 = 4 \end{cases}$$

Calcular:

1) La trayectoria temporal del precio.

2) La tendencia del precio a largo plazo.

3) La representación gráfica de la solución del modelo.

Solución:

Igualando ambas ecuaciones de la oferta y de la demanda, se obtiene la ecuación en diferencias:

$$5-3P_t = -2+P_{t-1}$$
$$3P_t + P_{t-1} = 7 \quad (*)$$

La ecuación característica de la ecuación homogénea es $3\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{3}$

luego la solución general de la ecuación homogénea es $P_t = C\left(-\frac{1}{3}\right)^t$.

Por otra parte, una solución particular de la ecuación completa se obtiene haciendo $3A+A=7$ de la ecuación (*) en donde $A=\frac{7}{4}$.

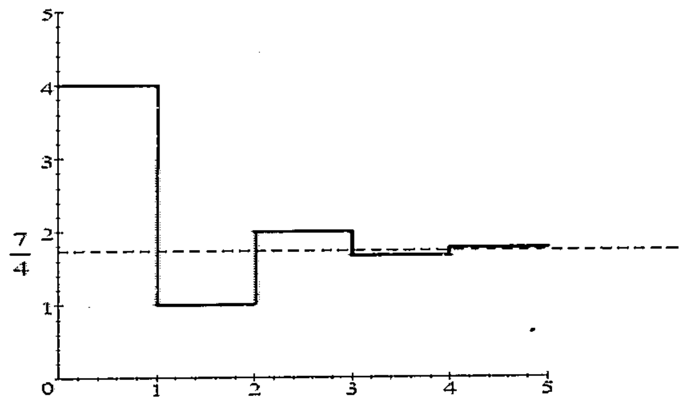
Luego la solución general completa de la ecuación es $P_t = C\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{7}{4}$

Para $t=0$, $4=C+\frac{7}{4} \Rightarrow \frac{9}{4}$ de donde se obtiene la trayectoria temporal del precio

$P_t = \frac{9}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{7}{4}$.

2) aplicando $\lim_{t\to\infty} P_t$ se sabe que P_t converge a $\frac{7}{4}$.

3) La gráfica es la siguiente:



4.3 Dentro del modelo de la telaraña tenemos otros tipos:

- **Modelo de la telaraña Amortiguado o Convergente:** en este caso el nivel de precios y las cantidades tienden al equilibrio, partiendo de una situación en la cual la demanda del producto en su periodo inicial es mucho mayor a la cantidad ofrecida, que luego por presiones de demanda y de oferta, tiende en el mediano o largo plazo al equilibrio, ver las siguientes gráficas:

Grafico 1

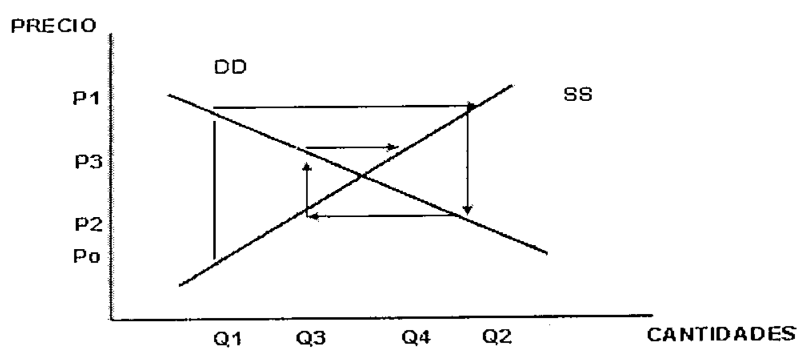
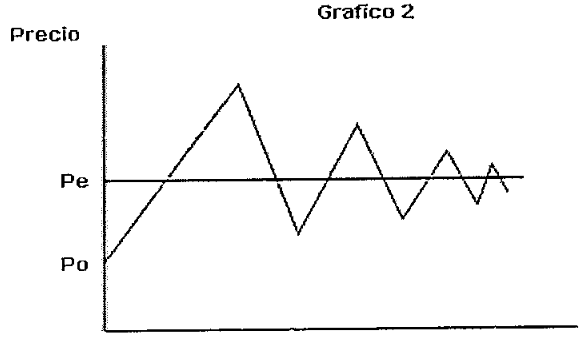


Grafico 2



En esta gráfico se puede observar más fácilmente como el precio del producto tiende el largo plazo a estabilizarse e igualarse con el precio de equilibrio.

- **Modelo de telaraña Explosivo o Divergente:** Es llamado de esa manera porque existen fuertes y grandes fluctuaciones en el nivel de precios, lo que va generando la no existencia de un punto de equilibrio, es decir, no va a ver coincidencia entre los productores y los demandantes, gráficamente se puede visualizar lo anterior;

Grafico 3

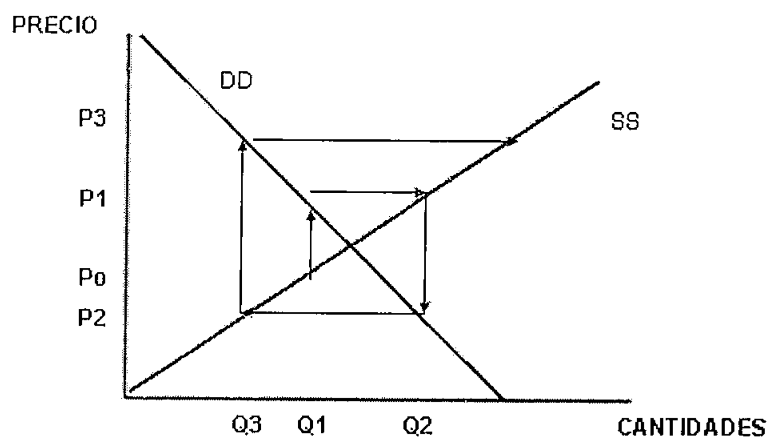
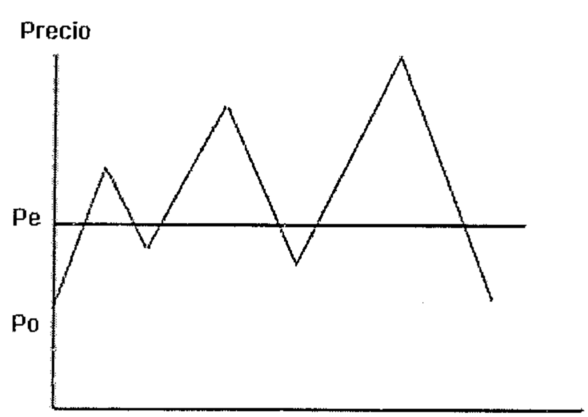


Grafico 4



Al contrario del gráfico 2, en este se puede evidenciar como conforme pasa el tiempo el nivel de precio del producto tiende a retirarse paulatinamente del precio de equilibrio

- **Modelo de Telaraña Constante:** en este caso, debido a que las inversas de las pendientes de las curvas de oferta y demanda son iguales, se presenta una forma de telaraña que se mantiene fuera del equilibrio, pero no se va alejando del mismo, se mantiene en un movimiento constante en el mismo sitio, observe la siguiente gráfica:

Grafico 5

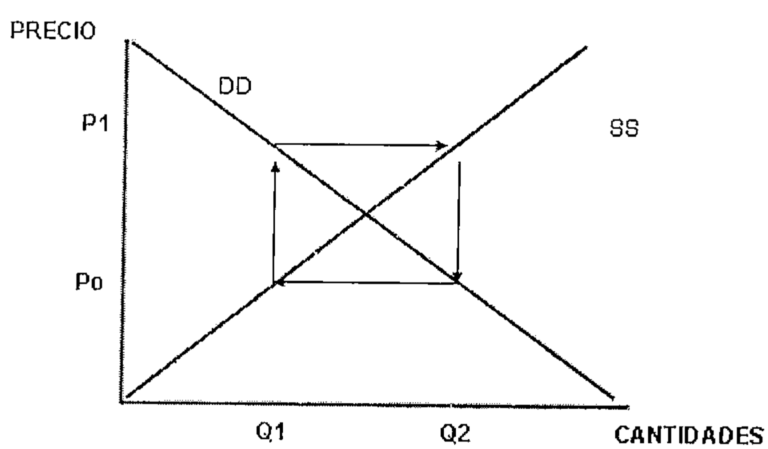
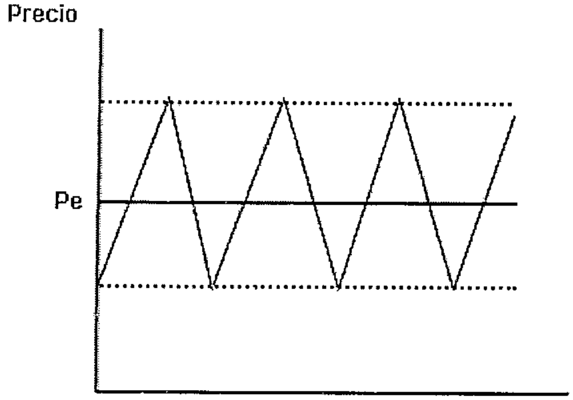


Grafico 6



Obsérvese como en este caso la evolución del precio del producto se mantiene alrededor del precio de equilibrio y nunca de aleja lo suficiente como para asemejarse al modelo explosivo o nunca se aleja lo demasiado para parecerse al modelo amortiguado.

4.4 Relación entre Precio – Cantidad.

En el modelo de la telaraña las decisiones sobre la oferta se toman con un periodo de anticipación, por ejemplo un año, 6 meses, 3 meses, etc. Este supuesto es relativamente razonable en el caso de muchos productos que se oferten en el sector agrícola. Por ejemplo, supongamos que los agricultores toman su decisión de sembrar en función del precio del último periodo, una vez que se ha sembrado los agricultores tienen que vender al precio que rija en el mercado. A su vez si los productores observan que el precio de mercado está muy bajo, ellos no tendrán muchos incentivos de llevar una gran producción al mercado, por el contrario los demandantes estarían dispuestos a comprar mucho por un precio bajo, lo cual evidencia que para los demandantes existe una relación inversa entre precio y cantidades (mientras más alto precio, la demanda será menor) y para los oferentes existirá una relación directa y positiva (mientras mas alto el precio, la oferta será mayor).

Las consecuencias sobre el ajuste del precio y las cantidades a lo largo del tiempo pueden analizarse gráficamente (ver gráfico 1). El proceso se inicia con Precio = P_0 en el momento cero, donde los productores están dispuestos a ofrecer Q_{e1} en el periodo 1, pero el mercado absorbe Q_{e1}, pero al precio P_1. Este nivel de precio, considerado alto para tanto para productores como para demandantes conduce a una oferta de Q_{e2} en el periodo 2, pero el mercado está dispuesto a consumir Q_{e2} al precio P_2. En esta gráfica este proceso se repite en el tiempo hasta que se llega a un equilibrio, donde se iguala la oferta y la demanda, igualmente puede visualizarse en el gráfico 2, como el precio promedio del producto tiende en largo plazo a igualar al precio de equilibrio.

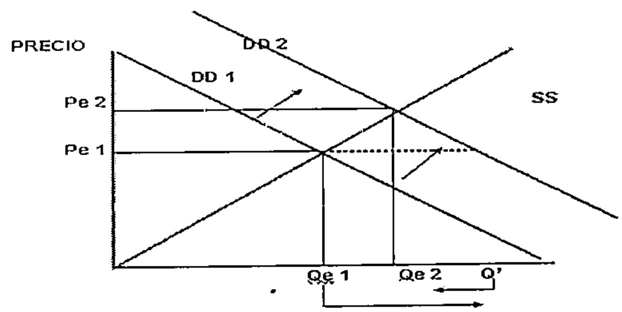
Resulta, sin embargo, que en el proceso de ajuste a largo plazo del modelo de la telaraña, no está garantizado que el mercado sea estable y pueda equilibrarse. Como lo ilustra el gráfico 3 y 4, el primero caracterizado por un proceso explosivo donde la relación de equilibrio entre precio y cantidades se va alejando cada vez más del equilibrio de mercado, y el segundo caracterizado por un proceso estacionario alrededor del precio de equilibrio, o lo que es lo mismo el equilibrio de mercado.

4.5 Relación entre Oferta - Demanda

4.5.1 Desplazamientos en la Curva de Demanda

Como ya es conocido en la teoría económica básica la curva de demanda refleja la cantidad de producto que los agentes económicos están dispuestos a demandar a un precio determinado y la curva de oferta la cantidad de producto que los oferentes están dispuestos a llevar al mercado. Conocido esto se procede a analizar el efecto de los cambios de la demanda y la oferta en un mercado determinado. En el gráfico 7 se presenta un caso donde hay un desplazamiento en la demanda arriba y la derecha ($\mathbf{DD}_1$ a $\mathbf{DD}_2$). Esto genera, que la oferta rígida o constante, que los demandantes estén dispuestos a consumir $\mathbf{Q'}$ al precio $\mathbf{P}_{e1}$, pero debido a la actitud maximizadora de los productores y la presión de demanda, ocurre un movimiento hacia arriba en el nivel de precios hasta $\mathbf{P}_{e2}$, donde los demandantes estarían dispuestos a consumir $\mathbf{Q}_{e2}$, generando un nuevo equilibrio en el mercado. Por lo tanto, se concluye que desplazamiento hacia arriba de la función de demanda ocasiona incrementos en el nivel de precios, y por el lado de las cantidades ocasiona un primer incremento y luego una caída por el ajuste del precio. Un desplazamiento hacia debajo de la curva de demanda generaría un efecto contrario al anteriormente presentado.

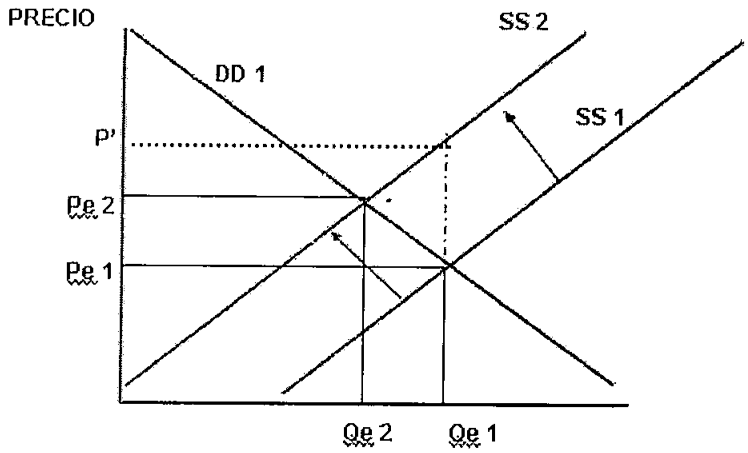
Grafica 7



4.6 Desplazamientos en la curva de oferta

Los efectos ocasionados por un desplazamiento en la curva de oferta se pueden visualizar en la gráfica 8. En este caso puede visualizar un desplazamiento hacia arriba y la izquierda de la función de oferta (lo que denota una caída en la capacidad productiva o la salida de empresas en la industria), esto ocasiona un alza en los precios del producto hasta **P'**, pero por restricciones de oferta y presiones de demanda (por el alto precio) el precio y las cantidades de equilibrio pasan de P_{e1} a **P'** y luego a P_{e2} y las cantidades pasan de Q_{e1} hasta Q_{e2}, llegando a un nuevo equilibrio. Por lo tanto podemos afirmar que una caída en la capacidad productiva de la industria ocasiona caídas en producción y precio, caso contrario ocurre con un incremento en la oferta de las empresas, el cual tiene el mismo efecto que un desplazamiento positivo y hacia arriba de la función de demanda.

Gráfica 8



CAPITULO 5: EL CONSUMO INTERTEMPORAL

La teoría económica considera al tiempo como una variable muy importante, lo que no se considera cuando se efectúa un análisis estático. En el caso estático, el análisis se efectúa entre caso y caso de un determinado periodo de tiempo, lo cual no deja de ser importante. La diferencia entre un análisis estático y dinámico se puede explicar si comparamos fotos con una película. Todos sabemos muy bien la diferencia, sin embargo, las fotos siguen vigentes, dado que es mucho más práctico su uso en cualquier momento.

El presente documento tiene como objetivo analizar la toma de decisiones de los consumidores a través del tiempo dado el costo de oportunidad del dinero.

Las personas valoran el tiempo de diferente manera dependiendo la edad, cultura y región donde viven. Las actividades deportivas, por ejemplo, tienen diferente consumo de tiempo, y de ahí que algunas personas gusten de practicar deportes intensivos en tiempo.

En tal sentido, las personas valoran de diferente manera el tiempo libre, entonces existirá un costo de oportunidad del tiempo para cada persona. Inclusive se puede dar el caso que personas prefieran pagar más por una actividad, cultural, por ejemplo, que esperar mucho tiempo para acceder a la ventanilla de boletos. En este caso, esta persona tiene un mayor valor del tiempo libre, es decir, el costo de oportunidad es mayor. En este caso, el costo de oportunidad del tiempo es alto. Si esta persona paga más de lo que normalmente se paga por una actividad cultura, destinará mucho menor tiempo para la adquisición del ticket respectivo, lo que significa que el costo del tiempo disminuye pro el costo monetario aumentó. Esta persona verá que el costo total, incluyendo el monetario y el del tiempo disminuye, porque, de lo contrario, no estaría dispuesto a pagar más por el ticket. La suma de ambos costos es menor después que paga más por el ticket, Sin embargo, valorizar el costo del tiempo no es tarea fácil. En este caso, la valorización se puede dar en el siguiente sentido: "que estaría dejando de hacer esta persona cuando se demora demasiado en adquirir el ticket". Se da en este caso una comparación de actividades, y de manera subjetiva dicha persona valora más una actividad respecto a la otra, que en este caso, es el tiempo que invierte en la adquisición del ticket.

Así podemos apreciar que las personas efectúan comparaciones entre actividades y las valoran de manera subjetiva. Existirá entonces un óptimo en la elección de las actividades de las personas en base a parámetros subjetivos personales.

El mercado de crédito es un caso excelente sobre la economía del tiempo. En este mercado se define una tasa de interés que influye en el consumo al crédito de las personas.

Cuando una persona consume al crédito el día de hoy, tendrá que pagar el valor de este consumo más un interés que le cobra el vendedor del servicio. Igual sucede si se adquiere un bien al crédito.

El vendedor cobra un interés en base a la tasa de interés que este mismo se financia con una institución financiera más un margen de ganancia.

La pregunta es ¿por qué el vendedor cobra un interés? La respuesta es la siguiente: "el vendedor cobra un interés porque ha entregado un bien sin recibir ningún dinero adelantado (asumimos una venta sin cuota inicial por efecto de simplificación), y este monto de dinero le daría intereses a este vendedor si estuviera depositado en un banco comercial. Entonces, la tasa de interés que cobra el vendedor incluirá este costo de oportunidad del vendedor, gastos financieros y administrativos.

El consumidor estará obteniendo un bien sin desembolsar dinero el día de hoy pero en el futuro pagará más por la adquisición que efectuó. En este caso, esta persona está dispuesta a pagar más en el futuro por consumir el día de hoy sin desembolsar dinero. Otras personas no gustarán de endeudarse y consumirán al contado. Entonces, ¿de qué dependerá que ciertas personas consuman al crédito y otras no deseen consumir al crédito?

En la realidad, las personas no llevan las cuentas de cuanto estará cobrando una tienda si se consume al crédito o cuanto me cobrará tal tarjeta de crédito. Lo que las personas realmente perciben es la carga financiera que estarán asumiendo al consumir al crédito, es decir, los pagos que deberán efectuar mensualmente y que proporción de su ingreso mensual corresponden estos pagos. Si la proporción es pequeña entonces, las personas estarán incentivadas a consumir, pero si los pagos comienzan a tener una gran proporción del ingreso mensual, entonces las personas recapacitarán y dejarán de consumir al crédito. Sin embargo, en muchas circunstancias de la vida de una persona, el ingreso mensual no satisface algunas de las necesidades que se pudieran presentar de un momento a otro como es el caso de la salud, viajes urgentes, adquisición de ciertos bienes, etc.

Estas personas recurrirán al crédito para satisfacer esta necesidad pero en el futuro deberán devolver este valor más un interés que se basa en la tasa de interés que le cobra el vendedor al crédito.

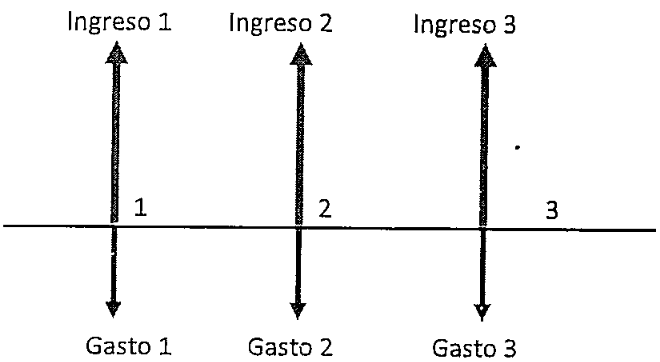
El siguiente mes tendrán menor disponibilidad de su ingreso mensual porque parte de éste será destinado a pagar el principal de la deuda más los intereses. El pago del principal es el que verdaderamente disminuye la deuda, el pago de los intereses es la ganancia del vendedor, a su vez, el costo del comprador al crédito.

Si la persona dispone menos de su ingreso, entonces, no estará incentivada a endeudarse más hasta que haya amortizado la deuda en su totalidad.

Las personas se pondrán un límite de endeudamiento que lo controlará conociendo la proporción que representa las cuotas de pago respecto a su ingreso mensual. Así se puede observar que existiría un ciclo personal o familiar de "inicio y paro de endeudamiento". Si la persona o familia tendrá mayores ingresos, entonces estarán incentivadas a consumir al crédito. Si la tasa de interés aumenta, se desincentivarán de consumir al crédito.

5.2 Un Modelo de Consumo Intertemporal

Sea el siguiente diagrama de flujos:

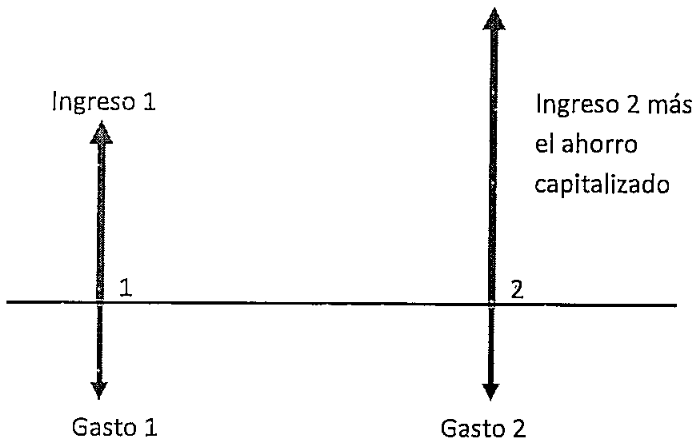


Analizando la figura de arriba, que es un flujo de ingresos y gastos proyectado, asumimos que existen tres periodos donde cada uno tiene un ingreso y un gasto. Para simplificar utilizaremos solamente el periodo1 y el periodo 2.

Vemos que en el periodo 1 el gasto es menor que el ingreso lo que significa que esta persona está sacrificando consumo presente y ahorrará. El consumo extra que podrá tener en el periodo 2 será definido por la siguiente ecuación.

$$\text{ahorro\_capitalizado} = (I_1 - C).(1+i)$$

Es decir, el ingreso en el periodo 2 es el ingreso fijo pero existirá un adicional que es ahorro capitalizado. La diferencia entre el ingreso y el gasto es el ahorro en el periodo 1, y es multiplicado por un factor de capitalización que incluye la tasa de interés "i".



Si esta persona sigue consumiendo el mismo valor durante los siguientes periodos entonces, el ahorro cada vez será mayor y crecerá exponencialmente de la siguiente manera:

$$\text{ahorro\_per\_2} = (I_1 - G_1).(1+i) + I_2 - G_2$$

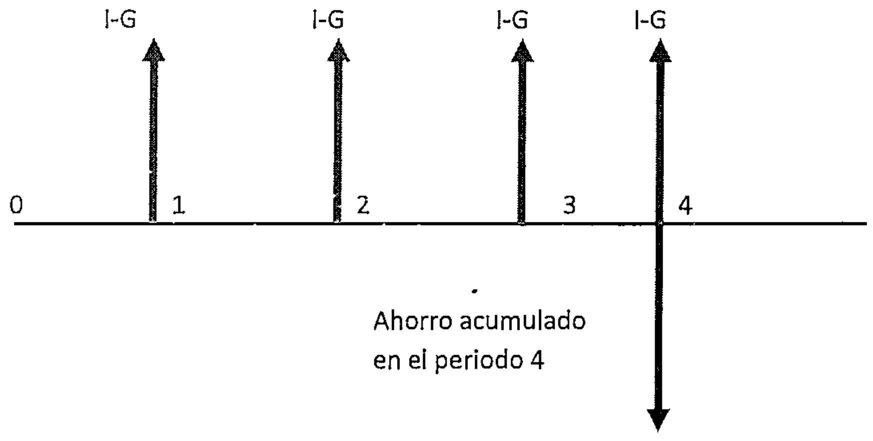
En esta ecuación vemos que el ahorro disponible del consumidor en el periodo 2 será el ahorro capitalizado más su ingreso regular mensual menos el consumo del periodo 2.

Asumiendo que los gastos e ingresos son iguales todos los periodos y proyectando éstos hasta el periodo 4 tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\text{ahorro\_per\_3} = (I-G).(1+i)^2 + (I-G).(1+i)^1 + (I-G)$$

$$\text{ahorro\_per\_4} = (I-G).(1+i)^3 + (I-G).(1+i)^2 + (I-G)(1+i) + (I-G)$$

Vemos así que se forma una serie uniforme que se capitaliza de acuerdo al siguiente diagrama de flujos de la figura 3.



Tenemos así un diagrama dinámico equivalente aún teniendo en consideración que el ahorro aumenta mensualmente.

Este diagrama puede ser explicado por una ecuación en diferencia de primer grado:

$$A_{t+1} = A_t(1+i) + (I_n - G)$$

Siguiendo el método de resolución de ecuaciones en diferencia de primer grado

Sea la siguiente ecuación en diferencias.

$$Y_{t+1} + aY_t = C$$

De tal manera que comparándola con nuestra ecuación de consumo, y dándole la forma respectiva, tenemos que

$$A_{t+1} - (1+i)A_t = (I_n - G)$$

Luego, el parámetro "a" es el factor de capitalización $(1+i)$, y el parámetro "C" es: $(I_n - G)$

La solución de la ecuación en diferencia de primer grado, siguiendo el método de la referencia:

$$Y_t = \left(Yo - \frac{C}{1+a} \right)(-a)^t + \frac{C}{(1+a)}$$

Aplicando esta solución a nuestra ecuación de consumo, tenemos que:

$$A_t = \left(Ao - \frac{I-G)}{1-(1+i)} \right).[-(-(1+i))]^t + \frac{I-G}{(1+(-(1+i))}$$

Asumiendo que el ahorro en el periodo "0" es cero, y que $t=n$:

$$A_t = (I_n - C)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Con esta ecuación se puede estimar el ahorro disponible y acumulado en "n" periodos. El ejercicio teórico planteado inicialmente consistía en que una persona ahorra mensualmente, mantiene sus gastos constantes y percibe un ingreso mensual fijo. Este ahorro que se va formando mensualmente se comporta como si fuese una serie uniforme.

En esta ecuación se puede tener como objetivo cierto ahorro en determinado tiempo y se puede estimar el ahorro por periodo que deberá efectuarse, es decir, el sacrificio en el consumo. O también se puede tener como dato el ahorro acumulado deseado, el ahorro mensual y tener como incógnita el periodo de tiempo con el cual se logrará el ahorro acumulado deseado, dada la tasa de interés.

También se pueden efectuar corridas para diferentes tasas de interés.
Hasta el momento hemos efectuado un análisis de un consumidor que ahorra. Sin embargo, también se hace necesario analizar el endeudamiento y observar cómo se vería afectado el consumo en el futuro.
Supongamos que una persona se endeuda el día de hoy con un monto "P". Las cuotas que pagará serán las siguientes:

$$C = P\left[\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Donde C es la cuota que pagará en "n" periodos. Esta ecuación es deducida de la siguiente:

$$A_t = (I_n - G)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

En esta última ecuación, una serie de ahorros se proyectan con una tasa de interés, "n" periodos y se obtiene el acumulado. Si esta ecuación la dividimos entre $(1+i)^n$, que sería una operación de actualización, obtendríamos el valor presente de los ahorros.

En lugar de los ahorros, en nuestro análisis irían las cuotas a ser pagadas, y en lugar del valor presente de los ahorros, una vez agregado el factor de actualización, $(1+i)^n$, iría el monto del préstamo "P".

La ecuación quedaría de la siguiente forma: $P = C\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}\right]$

Despejando el valor de las cuotas, "C", tendríamos luego la ecuación planteada anteriormente, la misma que reproducimos:

$$C = P\left[\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Ahora bien, cuando el consumidor se endeuda, verá reducido su ingreso disponible de la siguiente manera:

$$\text{ingreso\_disponible} = I - P\left[\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Supongamos que el consumidor se vuelve a endeudar, luego, aparecerá otras cuota que se irá sumando a la anterior y así.

Esta persona deberá poner un tope al monto de la cuota que querrá pagar como parte de la deuda. Asumiendo que este monto es:

$$\text{máxima} \quad \text{cuota} = R$$

Donde la diferencia entre el ingreso "i" y la cuota a ser pagada "R" es el monto que el consumidor requiere para su manutención.

Luego, esta máxima cuota deberá ser, igual a la cuota a ser pagada:

$$R = P\left[\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Si efectuamos arreglos, tenemos: $\dfrac{R}{P} = \left[\dfrac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}\right]$

Esta ecuación nos explica que, dada la tasa de interés del crédito y la cantidad de periodos del mismo, la cuota máxima de pago será una proporción determinada del monto total de endeudamiento. Conociendo esta proporción en base a los datos del ratio dentro del corchete de la última ecuación, y teniendo el dato de "R", se puede estimar fácilmente el valor del máximo endeudamiento.

5.3 Un Modelo de Consumo Intertemporal de dos Periodos

Sea un consumidor que ahorra en el primer periodo, capitaliza este ahorro y en el siguiente periodo consume el ahorro capitalizado más el ingreso de dicho periodo. Esta lógica la expresamos en la siguiente ecuación: $(I_1 - C_1).(1+i) + I_2 = C_2$

Efectuando arreglos: $C_2 = I_2 + I_1.(1+i) - C_1.(1+i)$

Si el consumo en el periodo 1 es igual que cero, entonces el consumidor podrá consumir en el periodo 2 el ingreso de dicho periodo más el ingreso del periodo 1 capitalizado al periodo 2.

Sin embargo este argumento no es muy lógico por lo que deberá existir un consumo en el periodo 1.

La última ecuación es lineal de pendiente negativa con una pendiente igual que el término $(1+i)$. Este término es el factor de capitalización. A medida que el consumir aumenta su consumo en el periodo 1, es decir, ahorra menos, consumirá menos en el periodo 2. Si ahorra más en el periodo 1, consumirá más en el periodo 2. Si se endeuda en el periodo 1, entonces consumirá en el periodo 2 menos que su ingreso en dicho periodo. Así se observa que todo sacrificio de consumo hoy es un mayor consumo en el futuro. Y en sentido inverso, todo consumo mayor que el ingreso de hoy, ocasiona un sacrificio de consumo en el futuro. Éstos son los argumentos más interesantes del modelo de consumo intertemporal de dos periodos.

Ejemplos de modelo de consumo:

Ejemplo 1. En el marco del modelo de consumo de dos periodos, considere una familia que gana \$100 en el primer periodo y \$220 en el segundo periodo, siendo la tasa de interés del 10%.

a) Determine la restricción presupuestaria de esta familia

El modelo de consumo de dos periodos es un modelo sobre la elección de consumo y ahorro de las familias en el que se considera en abstracto al primer periodo como el presente y al segundo periodo como el futuro. La principal ventaja de este esquema es que modeliza la mayoría de los aspectos intertemporales interesantes de las decisiones económicas de las familias de forma muy simple.

Pues bien, formalizando los datos del problema conforme a los términos del mencionado modelo tenemos que: $I_1 = 100,\quad I_2 = 220,\quad i = 0.10$

Ahora, en el modelo de consumo de dos periodos la restricción presupuestaria intertemporal de la familia viene dada por: $C_1 + \frac{C_2}{1+i} = I_1 + \frac{I_2}{1+i}$

Expresión que puede reformularse como: $C_2 = I_2 + (1+i)I_1 - (1+i)C_1$

Reemplazando los datos tenemos: $C_2 = 220 + (1+0.10)100 - (1+0.10)C_1$

Finalmente se tiene que la restricción presupuestaria de la familia viene dada por:

$$C_2 = 330 - 1.10C_1$$

b) Si las preferencias de esta familia son tales que desea consumir exactamente el mismo monto en ambos periodos, ¿Cuál será el valor de su consumo y ahorro en cada periodo?

De acuerdo con el modelo de dos periodos las preferencias de las familias pueden ser expresadas en términos de una función de utilidad. Así para el caso de una familia que desee consumir exactamente el mismo monto en ambos periodos la función de utilidad será: $U = \text{Min}(C_1, C_2)$.

La cual se maximiza siempre que este sobre la senda de expansión, es decir, cuando $C_1 = C_2$

Entonces, reemplazando en la restricción presupuestaria intertemporal hallada tendremos que: $C_1 = 330 - 1.10C_1$

De lo cual, resolviendo, se obtiene el consumo de cada periodo:

$$C_1 = C_2 = 157.14$$

Dado esto, no es difícil hallar el ahorro. Siendo el ahorro la parte del ingreso que no se consume el mismo vendrá determinado por la expresión:

$$A_t = (I_n - C)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

De este modo, para el primer periodo, dado que el ingreso disponible es igual al generado en la producción, tendremos que:

$$A_t = (100 - 157.14)\left[\frac{(1+0.10)^1 - 1}{0.10}\right]$$

$$A_t = -57.14$$

En cambio, para el segundo periodo, donde hay ganancia o pérdida por intereses, tendremos que

$$A_{t+1} = (220 - 157.14)\left[\frac{(1+0.10)^2 - 1}{0.10}\right]$$

$$A_{t+1} = 132.006$$

Nótese que el ahorro del segundo periodo es mayor al del primero pero con signo contrario. Así, en función de su elección de estabilizar perfectamente el consumo esta familia se endeuda en el presente y paga en el futuro.

Ejemplo 2. Suponga que el ingreso permanente se calcula como un promedio ponderado del ingreso del periodo corriente y pasado según la siguiente fórmula:

$$Yp = \theta Y_t + (1-\theta)\, Y_{t-1}$$

Donde:

Yp: Ingreso permanente

θ: Parte de la renta que se considera permanente

Y_t: Ingreso corriente

Y_{t-1}: Ingreso del periodo anterior

Suponga además que el consumo viene dado por $C = 0.8Yp$.

a) Si una persona ha ganado $5000 durante los últimos años, ¿Cuál es su ingreso permanente?

Los individuos buscan como suavizar su consumo a lo largo de su vida gastando más en función de su ingreso permanente o a largo plazo en función de su ingreso corriente.

Entendido esto resulta claro, sin necesidad de hacer la operación que el ingreso permanente del individuo en cuestión es de $5000.

b) Suponga que el próximo año esta persona gana $5500, asumiendo $\theta = 0.7$ ¿Cuál será su ingreso permanente?

Como en este caso ha habido una variación en el nivel de ingreso de un periodo es pertinente aplicar la ecuación pues el individuo tendrá que re-estimar su ingreso permanente. De esta forma:

$$Yp_{t+1} = 0.7\,(5500) + (1-0.7)\,5000$$

$$Yp_{t+1} = 5350$$

Por tanto el nuevo ingreso permanente de esta persona será de $5350.

c) ¿Cuál es su consumo de este año y el próximo?

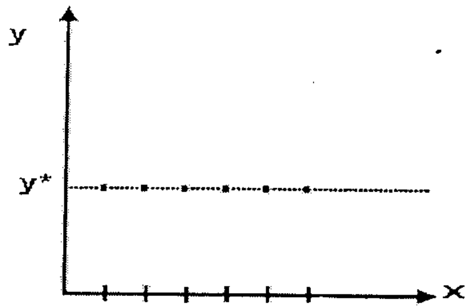
Habíamos dicho que aquí el consumo depende directamente del ingreso permanente, así: $C_t = 0.8\,(5000) = 4000$

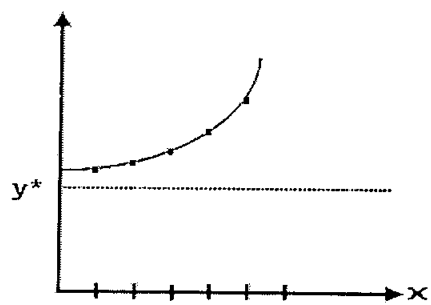
$$C_{t+1} = 0.8\,(5350) = 4280$$

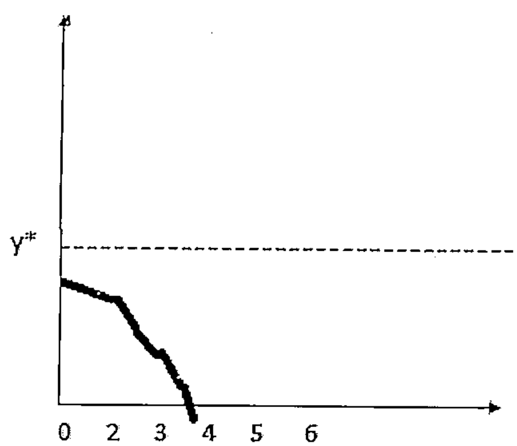
Es decir, el consumo de este año será de \$4000 y el del próximo de \$4280.

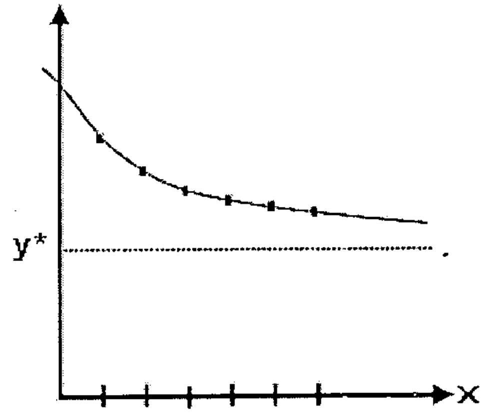
ANEXOS

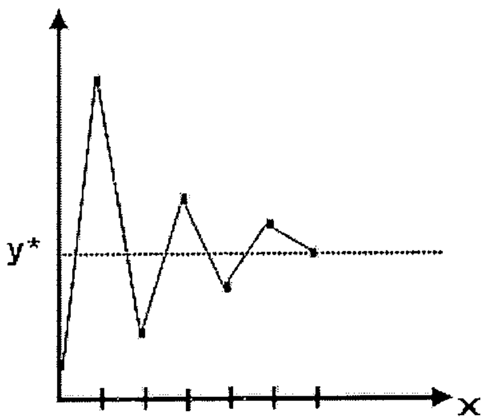
Gráficas correspondientes a la tabla 2.6.1 que presenta cada uno de los casos de comportamientos de la trayectoria de la sucesión solución de la ecuación en diferencias.

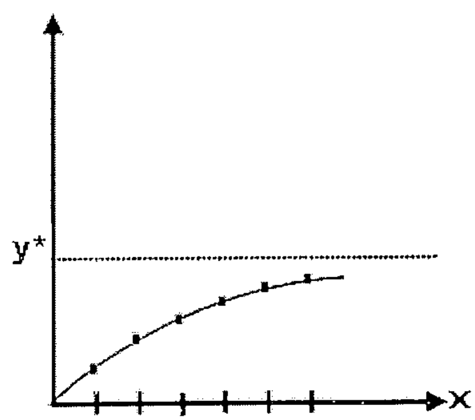


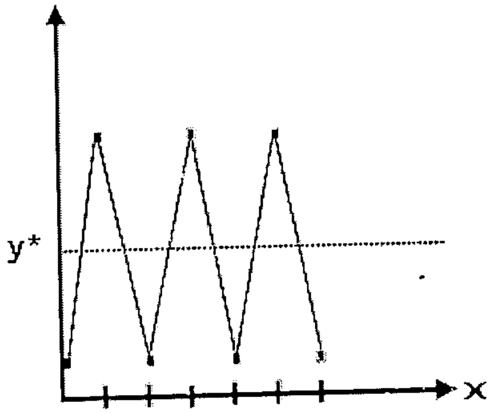


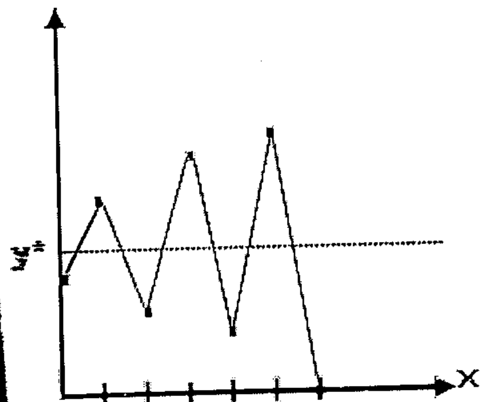


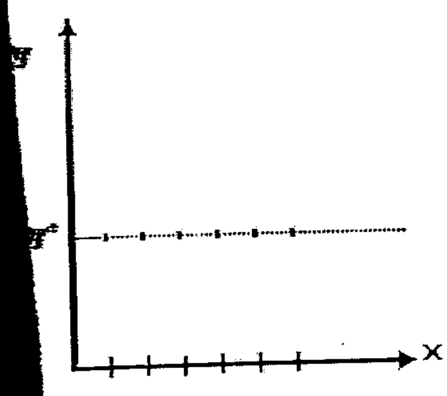

y*
x

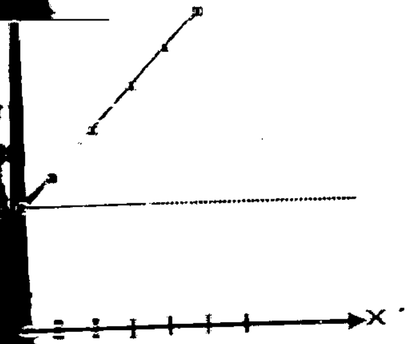

y*
x

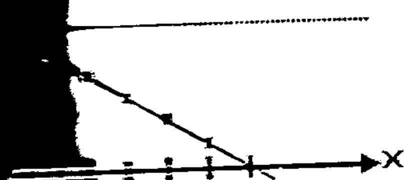

y*
x


y*
x


y*
x


x


X


X

CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha desarrollado la teoría de ecuaciones en diferencias la cual permitió una mayor compresión y análisis de los modelos económicos telaraña y consumo ya que se hicieron demostraciones de mayor rigor matemático, también nos permitió definir la teoría de ecuaciones en diferencias según su aplicación con otras ciencias logrando obtener un mayor conocimiento en dicha área.

Además se hizo un análisis de la trayectoria que describe gráficamente cada ecuación según a que clase pertenece y la teoría de los modelos económicos telaraña y consumo a través de ejemplo prácticos.

De igual manera se logró resolver las ecuaciones en diferencias a los modelos económicos telaraña y consumo aplicando los distintos métodos de solución. Por último también se ha logrado representar gráficamente la solución de los modelos de la Telaraña y Consumo.

BIBLIOGRAFIA.

- Matemáticas empresariales. 1995, editorial ac, Madrid,
- Matematicas para la Administración y Economía, cuarta edición 1984. Jean E. Weber. Editorial Harla Mexico.
- Arya, Jagdish C, y lardner, Robin W. Matematicas aplicadas a la administración y la economía. Quinta Edición, Pearson Educacion Mexico, 2009 ISBN: 978-607-442-302-0.
- Introducción a las ecuaciones en diferencias finitas. Samuel Goldberg. Editorial Pueblo y educación Calle 15 Nº 604

Web grafía

- http://ocw.unican.es/ciencias-sociales-y-juridicas/macroeconomia-[illegible]material-de-clase-2/ocwlb.pdf
- http://www.zanaeconomica.com/modelo-telarana
- http://webdelprofesor.ula.ve/economia/christi/programas_materias/Introduccion_Economia_I/Introduccion_7.pdf
- http://www.monografias.com/trabajos87/teorema-telarana/teorema-telarana.shtml
- http://www.economia48.com/spa/d/teorema-de-la-telarana/teorema-de-la-telarana.htm