UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA

UNAN - MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDISCIPLINARIA, MATAGALPA

FAREM MATAGALPA

SEMINARIO DE GRADUACIÓN

para optar al título de Licenciado en Ciencias de la Educación con mención en Matemática.

Tema

Resolución de problemas en Geometría de Sólidos, aplicando Método de Polya, décimo grado, departamento de Matagalpa, segundo semestre 2017.

Subtema

Resolución de problemas en Área y Volumen de la Pirámide, aplicando Método de Polya, décimo grado A y B, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa, segundo semestre 2017.

Autores

Claudio José López Hernández

Deyvin Raúl Gaitán Rizo

Tutora

MSc. Nesly de los Ángeles Laguna Valle

Enero, 2018

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN - MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDISCIPLINARIA, MATAGALPA
FAREM MATAGALPA

SEMINARIO DE GRADUACIÓN

para optar al título de Licenciado en Ciencias de la Educación con mención en Matemática.

Tema

Resolución de problemas en Geometría de Sólidos, aplicando Método de Polya, décimo grado, departamento de Matagalpa, segundo semestre 2017.

Subtema

Resolución de problemas en Área y Volumen de la Pirámide, aplicando Método de Polya, décimo grado A y B, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa, segundo semestre 2017.

Autores
Claudio José López Hernández
Deyvin Raúl Gaitán Rizo

Tutora
MSc. Nesly de los Ángeles Laguna Valle

Enero, 2018

TEMA

Resolución de problemas en Geometría de Sólidos, aplicando Método de Polya, décimo grado, departamento de Matagalpa, segundo semestre 2017.

SUBTEMA

Resolución de problemas en Área y Volumen de la Pirámide, aplicando Método de Polya, décimo grado A y B, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa, segundo semestre 2017.

ÍNDICE

DEDICATORIA

A Dios, por permitirnos presentar este trabajo investigativo en el tiempo idóneo y por darnos la paciencia que es la esencia para lograr los propósitos planteados en nuestro ámbito profesional.

A nuestros padres:

- Raúl López Hernández
- Guadalupe Hernández López

- Raúl Gaitán Pérez
- Nubia Rizo Gaitán.

Ya que han brindado el apoyo económico, hospitalidad y por alentar palabras de superación.

A nuestra apreciada maestra MSc. Nesly de los Ángeles Laguna Valle, ya que con su empeño y profesionalismo nos ayudó en los momentos más importantes como tutora de este proceso investigativo.

AGRADECIMIENTO

Se agradece como primera instancia al ser supremo que es el dador de vida, salud, sabiduría, inteligencia y entendimiento, ya que con su poder majestuoso ayuda a superar las dificultades que surgen en el transcurso de la vida estudiantil, así como también en el fortalecimiento de la espiritualidad divina.

Por otra parte, se les agradece a nuestros padres que dan su apoyo incondicional, ya que han luchado para vernos convertidos en personas con una formación académica superior, capaces de enfrentar la vida con un talento exitoso de manera que seamos reconocidos por la sociedad y capacitados para desempeñar una labor con eficiencia por el nivel de preparación alcanzado.

Asimismo, se detalla la labor y el tiempo que dedicó la docente tutora MSc. Nesly de los Ángeles Laguna Valle, para dar seguimiento y acompañamiento al proceso investigativo que con voluntad propia se esmeró para corregir y dar sugerencias a las dificultades que se presentaban.

No obstante, a la dirección del Centro Escolar Publico Rubén Darío – Susulí, por abrirnos las puertas de dicho centro, también al docente de Matemática Roberto César Alvarenga y a los estudiantes de décimo grado A y B, los cuales fueron de mucho provecho para la recopilación de información durante el proceso investigativo.

VALORACIÓN DEL DOCENTE

Por este medio avalo la entrega para su debida defensa ante el tribunal examinador del informe final del seminario de graduación para optar al título de Licenciado en Ciencias de la Educación con mención en Matemática, que lleva por nombre:

Resolución de problemas en Geometría de Sólidos, aplicando Método de Polya, décimo grado, departamento de Matagalpa, segundo semestre 2017.

Subtema

Resolución de problemas en Área y Volumen de la Pirámide, aplicando Método de Polya, décimo grado A y B, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa, segundo semestre 2017.

Autores

Claudio José López Hernández. N° Carné: 13063140

Deyvin Raúl Gaitán Rizo N° Carné: 13064779

Considero que el informe final reúne los requisitos básicos establecidos en el Reglamento de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, UNAN-Managua, se ha cumplido con la metodología propuesta para desarrollar el seminario, así mismo la estructura obedece a lo contemplado en la normativa de la Universidad.

MSc. Nesly de los Ángeles Laguna Valle

Tutora

UNAN Managua, FAREM Matagalpa

RESUMEN

Con respecto a diferentes situaciones que ocurren en el ámbito educativo a nivel de secundaria regular, se resalta en este estudio la resolución de problemas en Área y Volumen de la Pirámide, aplicando Método de Polya, décimo grado A y B, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa, segundo semestre 2017.

La investigación se realizó con el propósito de analizar la resolución de problemas en Área y Volumen de la Pirámide, aplicando Método de Polya, esto para poder contribuir a que la unidad de Geometría de sólidos se dé a conocer mediante el enfoque de resolución de problemas.

Asimismo, es importante abordar esta situación, pues muchos estudiantes presentan dificultad al momento de aceptar el reto de resolver problemas Matemáticos, a la vez porque la Geometría de Sólidos no se imparte de la manera correcta como unidad última del año escolar.

Con respecto a la resolución de problemas de Área y Volumen de la Pirámide, se encontró que el docente hace uso de problemas de investigación Matemática y ejercicios ajustados a problemas, presenta material concreto, hace uso de recursos audio visuales, realiza gráficos y solicita la participación activa de los estudiantes.

Además, el Método de Polya es utilizado por el docente, asimismo, los estudiantes, conocen y hacen uso del Método, pero hay dificultad en utilizarlo correctamente y frente a un problema de la vida cotidiana presentan deficiencia en encontrar la respuesta a dicha problemática; por tal razón se elaboró una propuesta sobre resolución de problemas aplicando Método de Polya.

I. INTRODUCCIÓN

El abordaje de la unidad de Geometría de Sólidos se presenta en el segundo semestre de cada año escolar, según el diseño curricular y en el cual se enfatiza la resolución de problemas en Área y Volumen de Cuerpos Geométricos Sólidos ajustados a la vida cotidiana.

En el desarrollo de la unidad de Geometría de Sólidos es común que los estudiantes muestren algunas dificultades con respecto a la resolución de diversos problemas, es por tal razón que el tema en estudio resalta la resolución de problemas en el cálculo de Área y Volumen de la Pirámide aplicando el Método de Polya, décimo grado, turno vespertino, Centro Público Rubén Darío, Susulí-Matagalpa, segundo semestre 2017.

Con respecto a la resolución de problemas a través de los métodos Matemáticos, es un eje de investigación muy importante en el área de Matemática, ya que para resolver problemas no hay un camino específico a seguir y es en donde se muestra mucha dificultad, a continuación, se presentan resultados de estudios que hacen referencia a la resolución de problemas aplicando el Método de Polya; se citan algunos aportes de investigaciones a nivel internacional:

Peña (2008), en la universidad de los Andes, núcleo universitario “Rafael Rangel”, efectuó un trabajo especial de grado sobre el Método de Polya en el diseño de estrategias metodológicas para facilitar la resolución de problemas relacionados con áreas de figuras planas, esto para optar al título de licenciada en educación con mención en Física y Matemática; su propósito se fundamentó en la búsqueda de estrategias que realmente permitan a los estudiantes iniciar su proceso de construcción de la realidad y del conocimiento, con el cual puedan realmente descubrir cómo comprender problemas. Por tal razón el objetivo de la investigación se centralizó en diseñar estrategias a partir del Método de Polya para facilitar la resolución de problemas relacionados con área de figuras planas en estudiantes de tercer año de la disciplina de Matemática.

En Perú, Rimarachín (2014) realizó una tesis sobre la aplicación del Método de George Polya, para mejorar el talento en la resolución de problemas Matemáticos, en los estudiantes del primer grado de Educación Secundaria de la Institución Educativa "Víctor Berríos Contreras" – Cullanmayo – Cutervo – 2014. En dicho trabajo se trata de aplicar una Matemática significativa, recreativa, que tenga su relación con las situaciones Matemáticas de la vida real, en donde para enseñar la resolución de problemas se debe aplicar una metodología que ayude al estudiante a hallar la solución correcta de una manera comprensiva. Es por eso que propuso como objetivo de estudio: determinar la influencia del Método de George Polya en la mejora del talento en la resolución de problemas Matemáticos.

En Guatemala, Martínez (2015) realizó una tesis de grado sobre el Método de Polya en la resolución de problemas Matemáticos, en donde el propósito se enfocaba en formar estudiantes con competencias cognitivas y que a la vez se adquirieran capacidades constructivas e innovadoras. El objetivo en el cual se enmarcó dicha investigación fue determinar los procesos que aplica el Método Polya en la resolución de problemas Matemáticos en los estudiantes de quinto grado primaria de la Escuela Oficial Rural Mixta "Bruno Emilio Villatoro" del municipio de la Democracia, departamento de Huehuetenango, Guatemala C.A.

A nivel nacional se han abordado investigaciones que hacen énfasis a la resolución de problemas aplicando métodos Matemáticos, de estos, se citan algunos elaborados en UNAN – Managua, FAREM – Matagalpa:

En el año 2013, se realizó un seminario de graduación con el tema: Modelos de resolución de problemas, aplicados en álgebra y funciones, en educación secundaria, Departamentos de Jinotega y Matagalpa, de tales subtemas, en esta investigación se tomará como foco informativo, el trabajo realizado por:

Cruz & Flores (2013) quienes se refirieron al estudio de los modelos de resolución de problemas de ecuaciones lineales con una variable, octavo grado, turno matutino, Instituto Nacional de la Dalia, Matagalpa, segundo semestre 2013, y fue realizada con el propósito de analizar los modelos de resolución de problemas en el proceso enseñanza aprendizaje.

En dicha investigación se obtuvieron los siguientes resultados: el proceso de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones lineales con una variable, se desarrolló bajo un enfoque tradicional; durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones lineales con una variable, no se resolvieron problemas de aplicación, debido a que solo resolvieron ejercicios; durante el desarrollo del tema de ecuaciones lineales con una variable, no se logró cumplir con la propuesta del Ministerio de Educación, ya que no se resolvieron problemas de aplicación; el enfoque constructivista se está aplicando, pero no se está desarrollando adecuadamente porque los estudiantes no resuelven problemas; además se propusieron ejemplos de problemas de ecuaciones lineales con una variable aplicados al entorno y resueltos con cada uno de los modelos estudiados.

Siles & Siles (2016) realizaron una monografía para optar al título de Licenciado en Ciencias de la Educación con mención en Física - Matemática, el cual se basó en investigar los modelos de resolución de problemas aplicados durante el proceso de enseñanza aprendizaje de los números enteros en estudiantes de séptimo grado F y G, turno vespertino, Instituto Nacional Eliseo Picado, departamento de Matagalpa, municipio Matagalpa, primer semestre 2016.

En dicho informe se dio a conocer el estudio de la resolución de problemas y los modelos Matemáticos más conocidos para resolver problemas, tales como: modelo de Polya, modelo de Allan Schoenfeld, modelo de Mason, modelo de Miguel De Guzmán y el enfoque de resolución propuesto por el MINED y en donde cada modelo fue aplicado a un problema específico, pero por ende se obtuvieron datos en que el docente aplicó el modelo de Polya en la resolución de problemas con números enteros pero no dio a conocer los pasos ni el nombre del modelo aplicado, además de que los estudiantes tienen dificultades para aplicar un modelo de resolución de problemas y le es complicado identificar el orden lógico de los pasos de cada modelo y a la vez los estudiantes presentan dificultad en la aplicación de procedimientos, en encontrar la solución y en realizarse un esquema.

Por otra parte, la investigación en cuestión se enfatizó en si se están resolviendo problemas de Área y Volumen de la Pirámide relacionados a la vida cotidiana y a la vez de como se están resolviendo, ya que por ser la unidad de Geometría de Sólidos abordada al final del año escolar, el tema de la pirámide no es impartida a profundidad por los docentes, ya que el tiempo para desarrollar el tema es corto y por tal razón en los últimos días de estudio los estudiantes se preocupan más por irse de vacaciones de fin de año que por recibir clases con el debido interés, es por eso que posiblemente la evaluación de este tema no se da de manera exigente.

Asimismo, esta investigación posee como propósito la presentación del Método de Polya como una alternativa viable para poder resolver problemas sobre Área y Volumen de la Pirámide, de tal forma que pueda favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

El enfoque de dicha investigación es cuantitativo con algunos elementos cualitativos, ya que la linealidad del proceso de consolidar el problema se realizó paso a paso, al hacerse uso de algunas mediciones numéricas y de un análisis estadístico, el cual resultó de la información recolectada externamente para poder entender la situación que ocurre.

Además, la investigación es de tipo descriptivo, ya que se describió la aplicación del Método de Polya en la resolución de problemas de Área y Volumen de la Pirámide, el cual se hizo por medio del uso de ciertos procedimientos de estadística descriptiva para poder analizar los factores que pudiese estar influyendo con el problema que se estudió.

De igual manera la investigación es de tipo transversal con un diseño no experimental, porque solo se trató de estudiar o de abordar el aspecto conceptual de la problemática, es decir, no se manipularon las variables consideradas para este estudio durante el segundo semestre 2017; sino que se realizó una detallada observación contextual del fenómeno y posteriormente se efectuó un exhaustivo análisis, con el cual se logró muchos aspectos que aportaron a cada uno de los objetivos que fueron planteados para dicha investigación.

Se utilizó el método teórico, a partir de la búsqueda de antecedentes, información en documentos acreditados por la veracidad y por la efectuación de análisis propio. Asimismo, juntamente en base a la teoría existente también se aplicó el método empírico durante la etapa de la recolección de información, ya que, a través de ciertas técnicas como: encuestas, observación y entrevista a docente que impartió la asignatura de Matemática en décimo grado, se logró abordar a los informantes.

La población de estudio estuvo conformada por 38 estudiantes de décimo grado del Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa, del segundo semestre 2017 y estos están distribuidos en dos secciones nombradas A y B, en donde en la sección A se encontraban 18 estudiantes y en la sección B 20 estudiantes. Además, formó parte de la población el docente que imparte la asignatura de Matemática, asimismo la población fue considerada como la muestra de estudiantes para aplicar la encuesta pertinente.

La encuesta aplicada a los estudiantes del Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa, durante el segundo semestre 2017 describe 15 ítems, planteadas de dos formas: con dos respuestas, o sea, dicotómicas y otras con varias opciones en donde los encuestados seleccionaron la que consideraban la ideal. Asimismo, se elaboró una entrevista para el docente de Matemática que participó en dicho estudio y estuvo conformada de 10 interrogantes. También se diseñó una guía de observación que en su estructura posee dos aspectos importantes como es la resolución de problemas y la aplicación del Método de Polya, y éste consta por el primer aspecto de cuatro ítems y por el segundo también de cuatro ítems, y fue dirigido al proceso de enseñanza aprendizaje con la finalidad de poder obtener información valiosa acerca del tema investigado.

La forma de procesamiento de los datos se enfocó en la elaboración de tablas de resultados para la información que se recolectó de los encuestados, otra tabla para procesar la entrevista que se le realizó al docente, estas tablas fueron hechas en programas electrónicos tales como SPSS y Microsoft Excel, los cuales fueron utilizados también para procesar cálculos numéricos, porcentajes, elaboración de gráficos, es decir, todo lo concerniente a la estadística descriptiva.

Las variables de estudio son: una independiente que es resolución de problemas y la otra dependiente que es Método de Polya, por otra parte, la operacionalización de estas variables están desarrollada en el anexo I.

II. JUSTIFICACIÓN

Para ésta investigación se ha considerado una situación que se presenta en el ámbito educativo a nivel de secundaria, la cual tiene su base en la Geometría de Sólidos contemplada en el programa de Matemática de décimo grado y el cual es uno del que todos los maestros le dan realce al final de un curso lectivo escolar; dicha temática es fundamentada en Área y Volumen de Cuerpos Sólidos, pues como los demás contenidos del programa son de gran interés conocer su aporte mediante la solución de diversos problemas para luego darle un buen desarrollo en el ámbito laboral y profesional.

Éste se realiza con el propósito de analizar la resolución de problemas en Área y Volumen de la Pirámide, aplicando Método de Polya, décimo grado, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa; para poder contribuir a que la unidad de Geometría de Sólidos se dé a conocer mediante el enfoque de la resolución de problemas, como lo estipula la competencia de grado que enmarca el programa de estudio de educación secundaria, Matemática de 10° y 11° (MINED).

Probablemente esta dificultad en los estudiantes se deba a la falta de autoestudio que de cierta forma está en decadencia en el tema de la Pirámide, falta de bibliografía, el tiempo limitado para abordarse el tema, además falta de apropiación de métodos estratégicos eficaces para el desarrollo del pensamiento cognitivo.

De igual manera los discentes en la actualidad posiblemente se han acostumbrado a que presenten la Matemática de solo desarrollar ejercicios y no orientado en la resolución de problemas, esto tal vez se debe al poco interés que tienen los docentes de dar a conocer el tema enfocado a problemas o porque observan la complicación de explicarlos detalladamente o quizás por la mínima atención que prestan los estudiantes en recibir los temas de Geometría de Sólidos; por lo tanto esta problemática amerita una investigación científica.

Asimismo, esta investigación es de gran importancia abordarse por el hecho de que el tema de la Pirámide presenta un nivel de complejidad al momento de operarse un problema, además por la falta de utilización de métodos Matemáticos que faciliten a los estudiantes la comprensión y el análisis de problemas, a la vez porque los discentes de la actualidad no están desarrollando el hábito de resolver problemas o de generar un pensamiento crítico, analítico y reflexivo.

No obstante, al abordarse en esta investigación un método que facilite el análisis y la resolución de problemas como el Método de Polya, se está encausando a los docentes de Matemática a que se apropien de dicho método y que sea aplicado didácticamente.

Esta investigación beneficiará tanto a docentes en la enseñanza como a estudiantes en el aprendizaje, también a las demás personas con intereses propios de lectura del trabajo y a otros investigadores que de una u otra manera necesiten apropiarse de este trabajo investigativo.

III. OBJETIVOS

3.1. Objetivo general

Analizar la resolución de problemas en Área y Volumen de la Pirámide, aplicando Método de Polya, décimo grado, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa, segundo semestre 2017.

3.2. Objetivos específicos

3.2.1. Caracterizar los problemas que se están resolviendo, relacionados al Área y Volumen de la Pirámide, décimo grado, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa, segundo semestre 2017.

3.2.2. Identificar la forma didáctica en que se están resolviendo los problemas sobre Área y Volumen de la Pirámide, con estudiantes de décimo grado, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa, segundo semestre 2017.

3.2.3. Describir la implementación del Método de Polya al resolver problemas sobre Área y Volumen de la Pirámide, con estudiantes de décimo grado, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa, segundo semestre 2017.

3.2.4. Proponer resolución de problemas de Área y Volumen de la Pirámide aplicando los pasos del Método de Polya.

IV. DESARROLLO DEL SUBTEMA

4.1. Resolución de problemas

El aspecto más importante en Matemática se centra en la resolución de problemas, aunque es algo que se distingue mucho del resolver ejercicios, ya que presenta menos dificultad el abordaje de ejercicios que problemas relacionados a la vida diaria; pero el resolver problemas, desarrolla en el resolutor habilidades para contrarrestar diferentes situaciones problemáticas y darle una solución realista, es decir, que si la persona se hace un resolutista de problemas alcanza una mejor percepción y entendimiento de todo aquello que está o sucede en el entorno.

4.1.1. Concepto de resolución de problema en Matemática

Para Caballero y Caballero (2005), la resolución de problemas se define como "el proceso de ataque de ese problema: aceptar el desafío, formular preguntas, clarificar el objetivo, definir y ejecutar el plan de acción y evaluar la solución" (p. 5). Lo cual conlleva al resolutor a hacerse un esquema mental o escrito, que evidencie cada paso para llegar a la solución del problema, aunque hay que tener en cuenta que se puede tener una o varias ideas del cómo encontrar la solución, el cual para poder llegar hasta el final y obtener resultados satisfactorios se comienzan a probar el funcionamiento de esas ideas, pues atacar un problema se centraliza en poseer diversidad de caminos a seguir y en la habilidad de poder ejecutar bien cada idea que surgieron al momento de dar lectura detenida a un problema dado.

Hay que tener en cuenta que, al resolver un problema, el resolutor puede tener varios, uno o ningún camino a seguir, y si se prestan las dos últimas condiciones este debe realizar indagaciones para encontrar diversas maneras de cómo afrontar el problema, y se puede hacer buscando problemas similares resueltos o preguntar a personas conocedoras de la temática o que se especialicen en el campo Matemático, es decir, el que se presta a resolver problemas debe ser ingenioso para encontrar lo que realmente quiere saber ya que se pueden tener varias vías de cómo resolverse, pero puede suceder que ninguna de ellas pueda funcionar.

Caballero y Caballero (2005), da a entender que, si al resolutor se le presenta un problema de aplicación, éste debe hacer uso de la heurística, o sea, una forma de poder llevar acabo la búsqueda de la solución de un problema, pero se debe tener mucho cuidado si se tiene prescrita de antemano una forma de solución, ya que entonces el camino a seguir sería un algoritmo y el problema a atacarse se convertiría en ejercicio.

Por otra parte, Castillo y Johnson (2012), exponen que la resolución de problemas Matemáticos “es una habilidad que permite encontrar soluciones a los problemas que plantean la vida y las ciencias” (p. 9). Pues así es, mediante fenómenos que ocurren en la naturaleza o por medio de simulaciones cotidianas, se generan los problemas, ya sea de una duda, de un querer saber y de un desear hacer, es entonces cuando se manifiestan inquietudes modeladas en su gran mayoría a procesos Matemáticos, y es ahí cuando surge el resolutor queriendo encontrar solución a dichas interrogantes.

Un ejemplo clave es cuando un observador desea conocer ¿cuánto material selecto se ocuparía para poder cubrir una columna en forma de una pirámide cuadrada, sabiendo que los lados de la base miden 50 cm y la altura 1.5 metros? Un buen solucionador le daría entusiasmo en saber el resultado; en fin, del entorno se puede obtener diversidad de preguntas, las cuales para poderlas contestar se tiene que poseer amor por saber escudriñar la incógnita.

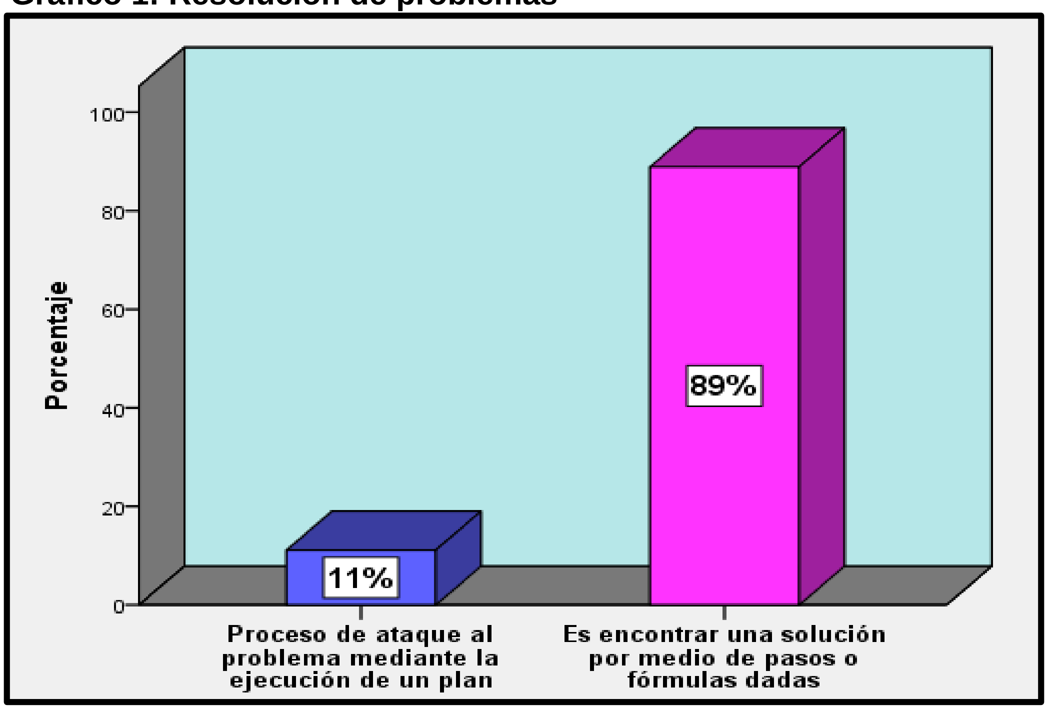
Así mismo, Mora (2002), citado por Peña (2008), establece que “lo más importante es hacer Matemática con interés y motivación y no por obligación o exigencias curriculares” (p. 40), algo muy esencial en la Educación, impartir la Matemática con el entusiasmo vivo por parte del docente, que se sienta el ambiente que querer darla a conocer, ya que así el estudiante poseerá confianza, interés, el querer saber, el querer hacer y el desear aprender, pero todo esto sucederá si el docente emprende un carácter que elogie amor por dar la Matemática de la mejor manera.

Un docente que irradie alegría transmitirá esa alegría y más aún si imparte la Matemática con el objetivo de que los estudiantes puedan aprender, obtendrá resultados muy satisfactorios, pues ama la vocación y lo hace con amor y el que posee estas características no imparte conocimientos por obligación de cumplir algo que le imponen o por ganar un sueldo mensualmente, éste lo hace porque lo desea hacer pues siente la necesidad de ayudar a niños para que estos forjen un futuro mejor.

Por otra parte, por medio de la entrevista se le preguntó al docente que entendía por resolución de problemas en Matemática, en donde él detalló “es brindar respuesta a una interrogante”, y al dar la solución a un problema, primeramente, se debe entrar en el análisis de los datos y la ejecución de un plan para desarrollarlo y dar una respuesta verás.

Al igual, en la encuesta aplicada, se les preguntó a los estudiantes sobre qué entienden por resolución de problemas Matemáticos, lo cual dichos resultados obtenidos se detallan en el siguiente gráfico 1:

Gráfico 1: Resolución de problemas



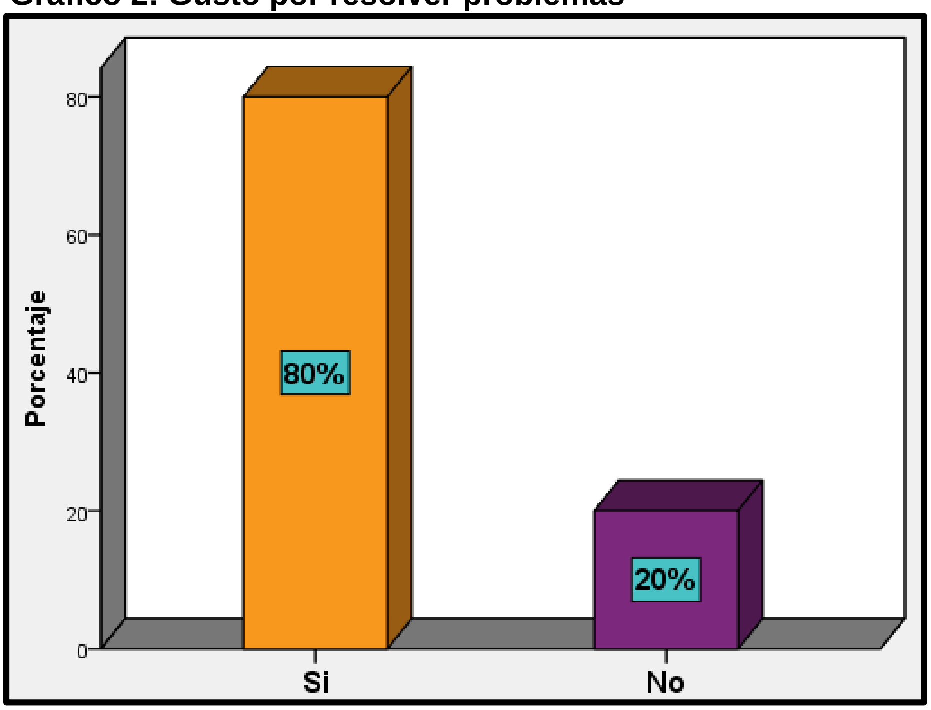
Fuente: Resultados de la investigación

Es algo sorprendente en los datos que se obtuvo ya que un 89 % que corresponde a 34 estudiantes erró en elegir la respuesta correcta y sólo 4 estudiantes correspondientes al 11 % seleccionó la respuesta indicada que era proceso de ataque al problema mediante la ejecución de un plan, y al no poder discernir una respuesta viable a lo que se refiere resolución de problemas, entonces se argumenta que hay dificultad para reconocer cuándo es un problema Matemático.

Y por medio de una guía de observación se constató que el docente desarrolla la clase mediante la resolución de problemas con respecto al tema de la pirámide, siempre tomando en cuenta el aprendizaje de los discentes para una mejor calidad educativa.

Al dar a conocer los resultados obtenidos en la entrevista y la observación se detalla que el docente posee un entusiasmo y empeño de impartir conocimientos, en donde su esfuerzo, interés y preparación le permiten tener dominio de la Matemática, lo cual corresponde tener base a dar respuestas idóneas y de enfrentar el reto de educar e instruir.

Gráfico 2: Gusto por resolver problemas

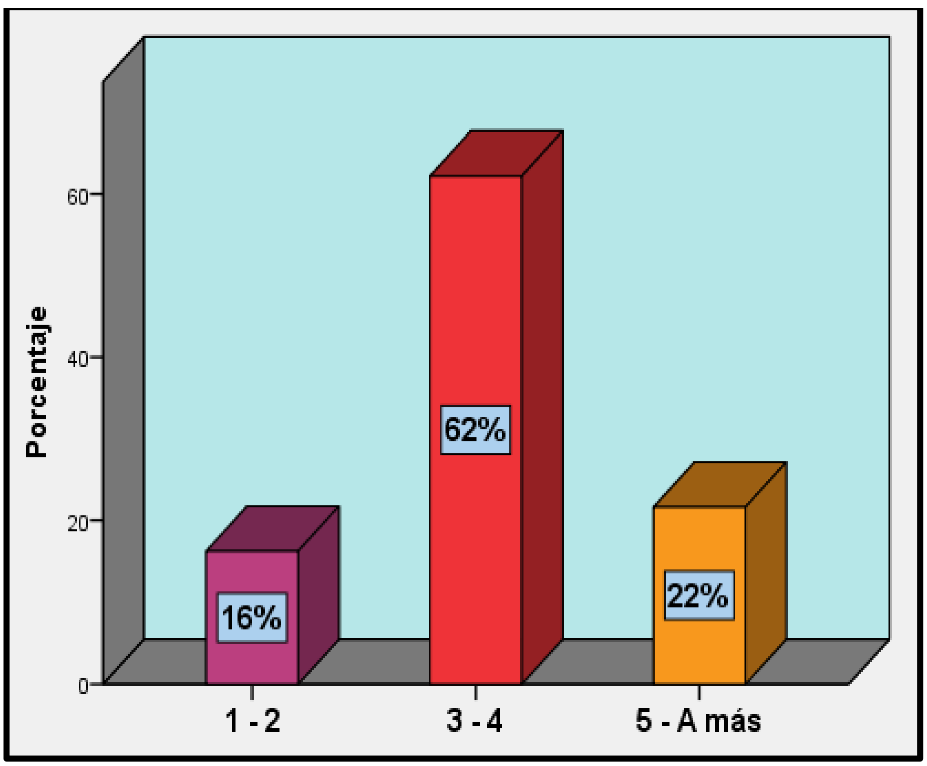


Fuente: Resultados de la investigación

Asimismo, en el gráfico 2, detalla resultados obtenidos a través de la encuesta aplicada a los estudiantes, un 80% que equivale a 30 discentes consideraron gustarle resolver problemas y el contrario opina no gustarle, lo que representa un 20% o sea 8 estudiantes. Por lo tanto, es algo muy viable que la mayoría de los educandos tenga la noción de resolver problemas, aunque debe ser en todos los estudiantes, pues este proceso es el corazón de la Matemática, ya que permite en los aprendices despertar el proceso de análisis, comprensión y habilidades para resolver situaciones de cualquier índole.

Por otra parte, para saber cómo se prepara el estudiante para atacar un problema se le preguntó por medio de la encuesta: cuántas veces lee el problema antes de proceder a resolver, el cual la mayoría de los educandos se detiene un rato para dar lectura al enunciado del problema para comprenderlo, pues la gráfica 3 lo demuestra:

Gráfico 3: Las veces que se lee un problema para comprenderlo



Fuente: Resultados de la investigación

Es decir que el comportamiento de los datos da a conocer un nivel de lectura excelente para comprender un problema, ya que el 16% que equivale a 6 discentes indica que leen de 1 a 2 veces, el 62 % que representa a 24 educandos estableció que lee de 3 a 4 veces y mayor a 5 veces el 22% es decir 8 estudiantes, y entre más se lea el enunciado, más preciso será encontrar la respuesta y muy poco se frustraría el resolutor pues sería más efectiva encontrar el resultado esperado.

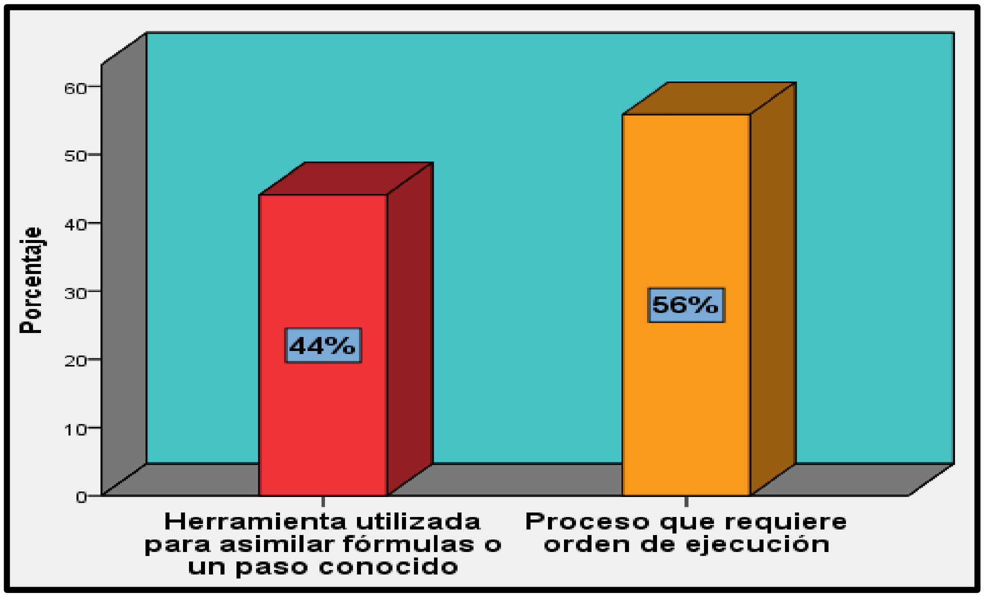
4.1.2. Concepto de ejercicio en Matemática

Según García (1998), da a conocer que “los ejercicios son herramientas útiles para que los alumnos automaticen grupos de rutinas y procedimientos, asimilen determinados algoritmos por la aplicación mecánica de los mismos o simplemente memoricen las formalizaciones” (p. 159). Esto se visualiza en casi todos los temas de Matemática que imparten los docentes, después del desarrollo teórico se da a conocer la resolución de un ejercicio, esto se efectúa con la intención de que el discente pueda aplicar bien un procedimiento dado o una fórmula Matemática.

El resolver ejercicios en Matemática facilita en gran medida al estudiante desarrollar la habilidad del saber el cómo atacar el ejercicio y encontrar la solución, pues así lo afirma García (1998), ya que señala: “realizar ejercicios solamente requiere que los alumnos hagan uso de la memorización, selección y la aplicación de un grupo de fórmulas, algoritmos o patrones de resolución” (p. 159), y asimismo la importancia del saber cómo resolver un ejercicio radica en que cuando se le presente un problema al aprendiz, después que éste haga el análisis y formule las operaciones Matemáticas necesarias para encontrar la solución, no tenga complicaciones en la resolución del esquema Matemático que se planteó.

Es por tal razón que se les preguntó a los estudiantes a través de una encuesta sobre que entendían por ejercicio Matemático, dichos resultados se detallan en el gráfico 4:

Gráfico 4: Ejercicio Matemático



Fuente: Resultados de la investigación

Las respuestas obtenidas de la información mostrada en el gráfico 4, no fueron las esperadas, ya que un 44% el cual equivale a 17 discentes acertaron a la respuesta correcta y los que no definieron la respuesta exacta corresponde al 56% correspondiendo a 21 estudiantes, estos datos reflejan que casi la mitad de los educandos no pueden definir para que se utilizan o cual es el funcionamiento de los ejercicios Matemáticos; algo muy sorprendente ya que estudiantes de décimo grado deben tener claro de lo que es un ejercicio en Matemática y a la vez su connotación en el proceso de resolver una situación problemática, pues resolver un ejercicio, es una herramienta útil para que los estudiantes realicen determinados procedimientos y se adapten a algoritmos y fórmulas para resolver determinados problemas.

4.1.3. Concepto de problema en Matemática

De acuerdo con Caballero y Caballero (2005), un "problema sería una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, Matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos" (p. 4). En efecto, al darse a conocer un problema y darle una pausada lectura y análisis, el lector se da cuenta que para tratar de resolverlo se puede tener varios caminos y a la vez que se deben tener conceptos previos Matemáticos para resolver.

Por otra parte al darse a conocer un problema, constituye un reflejo operacional complejo ya que para iniciar se debe implementar el análisis lógico por medio de conocimientos Matemáticos, el cual representa un alto para comenzar, una vez teniendo una idea clara de ataque al problema, se procede a llevar a cabo dicho proceso; pero al no tener claro muchas nociones que se deben tener presente al momento de estar frente a un problema o el poco análisis puede llevar a la frustración y al desánimo y esto pasa muchas veces con los estudiantes, pues ellos tienden a olvidar conceptos Matemáticos muy necesarios de grados anteriores, es por tal razón que cuando se le presenta un problema poseen muchas dificultades de comprensión y asimilación al momento de empezar a atacar el problema.

Además, al encontrarse con problemas que tienen su propio nivel de complejidad, es necesario apropiarse de técnicas y recursos que puedan ayudar a encontrar solución a dichas incógnitas que surgen, también se debe contar con concepciones Matemáticas o tener conocimiento de la temática en estudio, asimismo mucho interés y voluntad por el autoestudio.

Así mismo, Caballero y Caballero (2005), expresan que, para tratar un problema, se debe tener en cuenta las ganas de resolver problemas y la alta dedicación de tiempo y esfuerzo, como también usar el razonamiento Matemático y la lógica de algunas situaciones parecidas a la que se trata, lo que permite tener mayor precisión en la solución de las interrogantes planteadas que se dan y así poder desarrollar la habilidad y el gusto de buscar soluciones a los problemas y asimismo contribuir al alcance de un aprendizaje a largo plazo.

Por otra parte, Jarquín (2011), citados por Cruz y Flores (2013), especifica que “el problema que no se resuelve por rutina exige cierto grado de creación y originalidad por parte de las y los estudiantes, mientras que el problema de rutina no exige nada de eso" (p. 30). Es decir, se puede dar una variedad de problemas, para poner en juego todo tipo de conocimientos alcanzado o para la adquisición de saberes nuevos, como también para desarrollar el hábito de resolver problemas que muchos no la poseen, entonces la presentación de problemas a los educandos corresponde orientar a que adecue sus conocimientos adquiridos con los actuales, para así armonizar un intento eficaz y certero en el enfrentamiento que se tiene de la dirección que conlleva el problema.

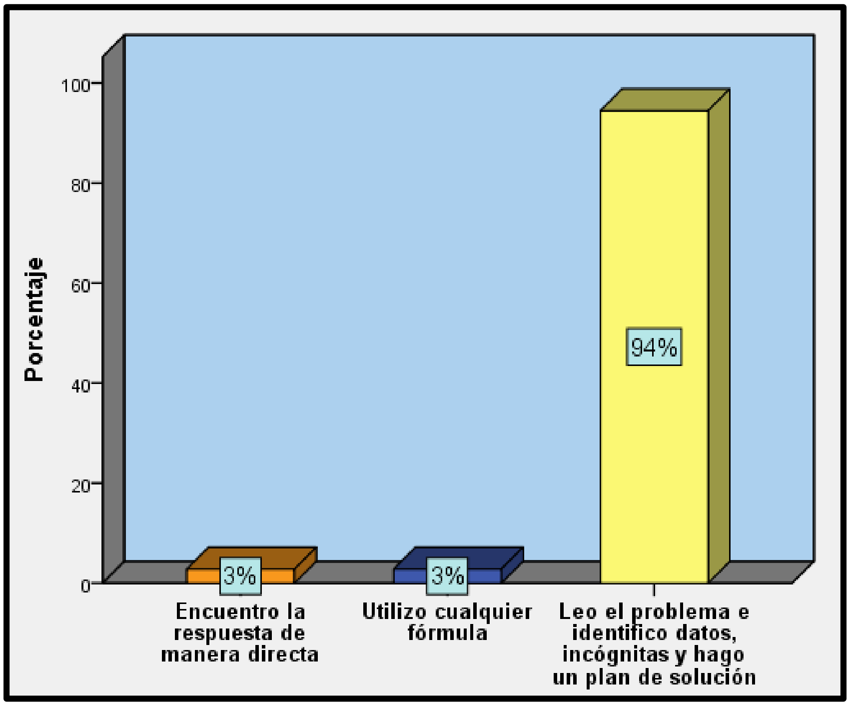
No obstante, el dar a conocer un problema a los estudiantes y luego otro problema similar, suficiente para que se asimile en una excelente escala, es aquí en donde el docente debe cambiar el modelaje del siguiente problema que se asignará, esto para que surja un interés fuerte por encontrar la solución de ese problema que no debe tener semejanza con los antes resueltos, esto para que el estudiante sienta ánimo de resolverlo, si en un dado caso resolvió con muchas ganas los demás problemas.

Además, Taha (2007), citado por Martínez (2015), describe que "en Matemática existen números, letras y gráficos, cosas y más cosas que a veces es difícil enfrentarse a un problema Matemático" (p. 17). Es así, el campo Matemático es muy amplio, los descubrimientos que se hacen son muy profundos y hasta abstractos, pero aquí es donde surge el cuido del docente de no presentar un problema muy complejo, ya que la Matemática dada a los estudiantes tiene que ser descubridora de conceptos manejables y comprensibles, para que así no se pierda el ánimo de seguir estudiando cada día, pues es en el área de la Matemática, donde existen los problemas de baja promoción con respecto al rendimiento académico.

Asimismo, a través de la entrevista aplicada al docente se le preguntó sobre qué entendía por problema Matemático, dando como respuesta "que es una situación donde se necesita apoyarse de herramientas Matemáticas para solucionarse y dar respuesta", aunque para desarrollarse se necesita de diversos aspectos que al aplicarlo paso a paso se logra obtener resultados satisfactorios.

Es por tal razón que, por medio de la encuesta se preguntó a los estudiantes que si al momento de estar frente a un problema Matemático, que hacen para encontrar la solución a ese problema, y los resultados obtenidos se reflejan en el gráfico 5:

Gráfico 5: Qué hacer para resolver un problema



Fuente: Resultados de la investigación

El 3% representando a 1 discente aseguraba que se podía encontrar la respuesta de manera directa, otro 3% indicando a 1 estudiante afirmó utilizar cualquier fórmula y por lo tanto el 94% el cual equivale a 36 estudiantes indicaron que se debe leer el problema e identificar datos, incógnitas y elaborar un plan de solución, algo muy lógico ya que estar frente a un problema se deben tomar todas las medidas pertinentes para lograr el objetivo de encontrar la solución al problema en ejecución.

Y para detallar la forma en cómo aborda el docente un problema en conjunto con los estudiantes se puede constatar que hace uso del pausado en la lectura, analiza cada detalle del problema, configura un plan, aplica detalladamente lo planificado para dar solución y valora el resultado obtenido y al realizar estas técnicas, poco a poco se irá adquiriendo que estudiantes con gran dificultad de comprensión ante los problemas Matemáticos tengan la oportunidad de encontrar por si solo la respuesta a un problema.

4.1.4. Diferencia entre ejercicio y problema en Matemática

Con respecto a lo que se difiere entre ejercicio y problema, Martín (1999), expresa que:

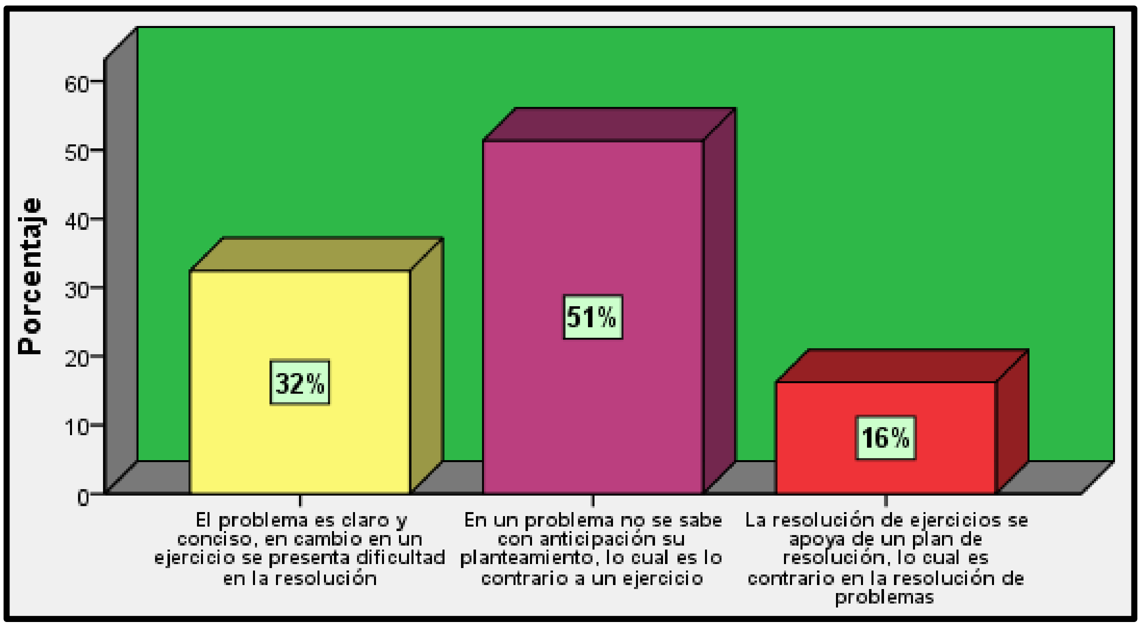
> En los ejercicios se puede decidir con rapidez si se saben resolver o no; se trata de aplicar un algoritmo, que pueden conocer o ignorar. Pero, una vez localizado, se aplica y basta. Justamente, la proliferación de ejercicios en clase de Matemáticas ha desarrollado y arraigado en los alumnos un síndrome generalizado; en cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una somera reflexión, contestan: "lo sé" o "no lo sé", según hayan localizado o no el algoritmo apropiado.
>
> En los problemas no es evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios; y desde luego no está codificado y enseñado previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y no siempre de Matemáticas; hay que relacionar saberes procedentes de campos diferentes, hay que poner a punto relaciones nuevas. (p. 9)

La diferencia que enmarca estos dos conceptos son la de solucionar un ejercicio a través de un algoritmo Matemático que se apoya de una definición establecida o bien de un ingenio de resolución del mismo, por otra parte, los problemas tienen fundamento teórico apropiado de la realidad y relación de otras disciplinas con la Matemática, por lo tanto, se requiere de un análisis profundo, apoyarse de recursos didácticos, técnicas, artificios Matemáticos, habilidad mental, etc., esto con el propósito de encontrar la solución correcta del problema planteado.

Es por eso que por medio de la entrevista realizada al docente de Matemática de décimo grado se le preguntó cuál era la diferencia entre ejercicio y problema dando a conocer la siguiente respuesta: “cuando se resuelve un problema brinda una solución general que se puede aplicar a la solución de ejercicios y resolver un ejercicio consiste en encontrar soluciones especifica que son útiles sólo para esa situación que satisface su respuesta; es decir, en los problemas Matemáticos se establecen modelos como fórmulas y en los ejercicios solo se aplica las fórmulas”.

Asimismo, para afrontar nuevamente el cuestionamiento de la diferencia entre ejercicio y problema, se abordó a través de la encuesta a los estudiantes de décimo grado en donde los resultados conseguidos se presencian en el gráfico 6:

Gráfico 6: Diferencia entre ejercicio y problema

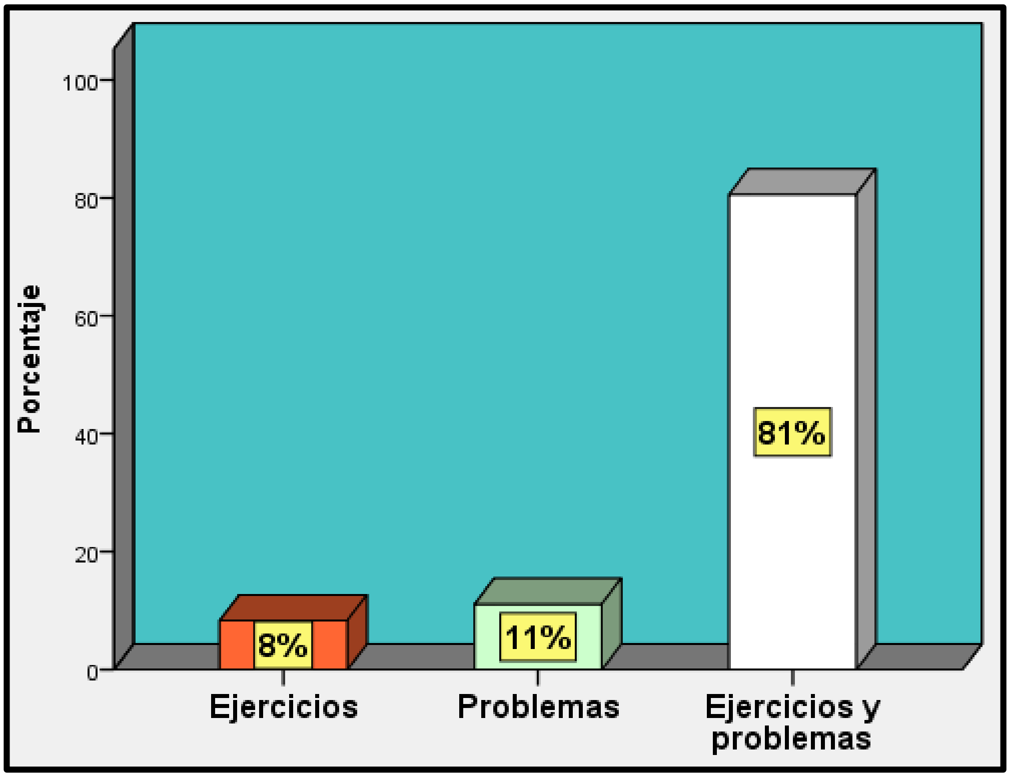


Fuente: Resultados de la investigación

El 32% representando a 13 educandos indicaron que el problema es claro y conciso, en cambio en un ejercicio se presenta dificultad en la resolución; por otra parte, un 51% el cual equivale a 19 estudiantes detallan que un problema no se sabe con anticipación su planteamiento, lo cual es lo contrario en un ejercicio, además 6 estudiantes que corresponde el 16% indica que la resolución de ejercicios se apoya de un plan de resolución lo cual es contrario en la resolución de problemas, dichos resultados detallan que más de la mitad de los estudiantes logran diferenciar un ejercicio de un problema, lo que es muy grato en el estudiantado ya que ante cualquier situación que el docente presente en la clase de Matemática, el discente tendrá conocimiento de lo que realmente se le presenta.

Y de acuerdo a la observación aplicada en el momento que se impartía el tema de la Pirámide se encontró que el docente enfatiza la clase mediante el abordaje de ejercicios y problemas de una manera que los estudiantes se mantuvieran atento en la clase.

Gráfico 7: Tiempo de inversión en Matemática



Fuente: Resultados de la investigación

Por otra parte, se les preguntó a los estudiantes en qué situación invierte más tiempo: en resolver ejercicios, problemas o ambos, para la primera alternativa un 8% que equivale a 3 estudiantes dedica más tiempo en resolver ejercicios, para resolver solamente problemas un 11% representando a 4 estudiantes, y algo muy importante ya que 31 discentes el cual equivale al 81% relataron invertir su tiempo en ambas cosas, y esa inversión de tiempo logra establecer una gran diferencia entre lo que es ejercicio y problema y también expresa que los discentes en la clase de Matemática o en tiempo libres dedican tiempo en resolver ejercicios y problemáticas del ámbito Matemático.

4.1.5. Clasificación de los problemas Matemáticos

Según Nieto (1993, pp. 3-8), da a conocer la clasificación de los problemas Matemáticos, el cual a continuación se detallan:

a) **Problemas de traducción simple o compleja:** Son problemas formulados en un contexto concreto y cuya resolución supone una traducción del enunciado, oral o escrito, a una expresión Matemática.

b) **Problemas de proceso:** Son problemas que se diferencian de los problemas de traducción simple o compleja en que la forma de cálculo no aparece claramente delimitada, dándose la posibilidad de conjeturar varios caminos para encontrar la solución.

c) **Problemas de situaciones reales:** Se trata de plantear actividades lo más cercanas posibles a situaciones reales que requieren el uso de habilidades, conceptos y procesos Matemáticos.

d) **Problemas de investigación Matemática:** Son problemas directamente relacionados con contenidos Matemáticos, cuyas proposiciones pueden no contener ninguna estrategia para representarlo, y sugieren la búsqueda de algún modelo para encontrar la solución. En estas actividades son usuales las expresiones como: probar que, encontrar todos los, para que, es, etc.

e) **Problemas de Puzles:** Son problemas en los que se pretende mostrar el potencial recreativo de las Matemáticas. Obliga a flexibilizar la forma de atacar un problema y a considerar varias perspectivas ya que normalmente el contexto y la formulación que se hacen de estos problemas suele ser engañosa.

f) Historias Matemáticas: Hace referencia a historias, más o menos completas, en cuyo interior guardan intencionalmente ciertas cuestiones Matemáticas que van provocando la curiosidad y participación del lector.

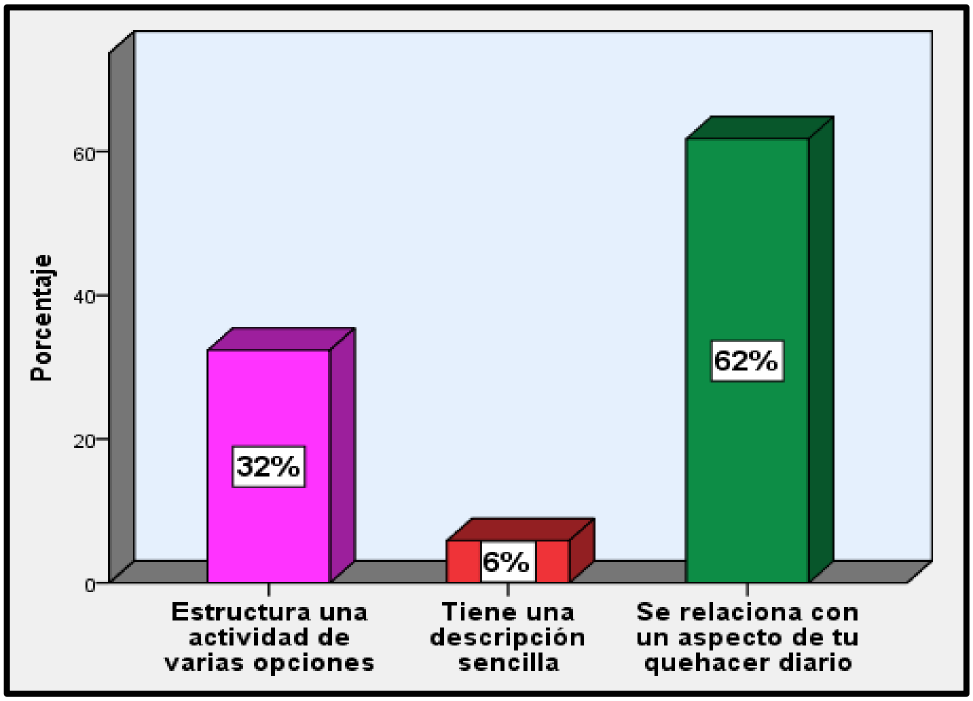
Las clasificaciones de los problemas en Matemática poseen una estructura lógica, pero a la vez se relacionan ya que cada uno tiene una línea a seguir en cuanto al proceso de resolución de problemas, además se trata de dar a entender al estudiante y al docente como están estructurado los problemas en Matemática, por lo tanto permite dar una caracterización y así poderlo aplicar mediante la práctica, ya que por ejemplo si al momento de introducir un tema se debate con los estudiantes una historia Matemática donde se encuentran elementos Matemáticos, fórmulas, conceptos, artificios o juegos de azar, entonces nos damos cuenta que estamos trabajando historias Matemáticas y así sucesivamente.

Por otra parte, un resolutor apoderado de su pasión por la resolución, concebirá en su larga lista variedad de problemas resueltos, pero más abre un fuerte análisis y del querer conocer son por los problemas que se relacionan con la vida cotidiana, es que estos, presentan una simulación de cosas que vemos a nuestro alrededor y es algo que gustaría saber que solución se obtendrá.

Mediante la aplicación de la entrevista, al docente se le hizo una pregunta que correspondía a los tipos de problemas que presenta a sus estudiantes, en donde él respondió: “problemas en las cuales las soluciones que se encuentran son fórmulas y problemas que sirven de modelo para resolver otro parecido”, lo cual detalla que presenta a los estudiantes problemas de verificación, aunque lo ideal es presentarle a los estudiantes problemas de la vida diaria así como está estipulado en el programa de estudio de décimo grado, pero aunque no aplique problemas concretos de la vida cotidiana en el aula de clase; los que él enseña también son fundamentales ya que desarrollan el pensamiento crítico y la capacidad de análisis.

Asimismo, se presenta los resultados de una interrogante estipulada en la encuesta y aplicada a los estudiantes, el cual hace referencia sobre cuando un problema es de la vida cotidiana, por lo tanto, los resultados alcanzados se muestran a continuación en el siguiente gráfico 8:

Gráfico 8: Reconocimiento de un problema de la vida diaria



Fuente: Resultados de la investigación

El 32% representando a 12 discentes encuestados indicaron que un problema es de la vida cotidiana cuando estructura una actividad de varias opciones y 2 estudiantes que equivale al 6% concluyen que tiene una descripción sencilla, sin embargo 24 educandos que corresponden al 62% opinan que se relaciona con un aspecto de tu quehacer diario, en fin, el grado de aporte fue bueno, porque acertaron en su mayoría a la respuesta correcta, dando a entender que comprenden a lo que se refiere un problema de la vida cotidiana. Sin embargo, al momento de realizar las observaciones se encontró que el docente utiliza problemas de investigación Matemática, ya que en el proceso de la clase se enfocó en la deducción de fórmulas y comparación de resultados entre las preguntas que presentaba el problema.

4.1.6. Características de los problemas Matemáticos

Según Shunk (1997) citado por Siles y Siles **(**2016, p.31) un problema Matemático es algo que debe cumplir con las siguientes características:

- Debe de tener una solución lógica.
- Debe de tener varias formas diferentes de resolverse.
- Debe de incluir datos que te ayuden a resolver el problema.
- Debe de mencionarse en el mismo, que se está buscando alguna solución, si no lo pide, no se le puede considerar un problema.

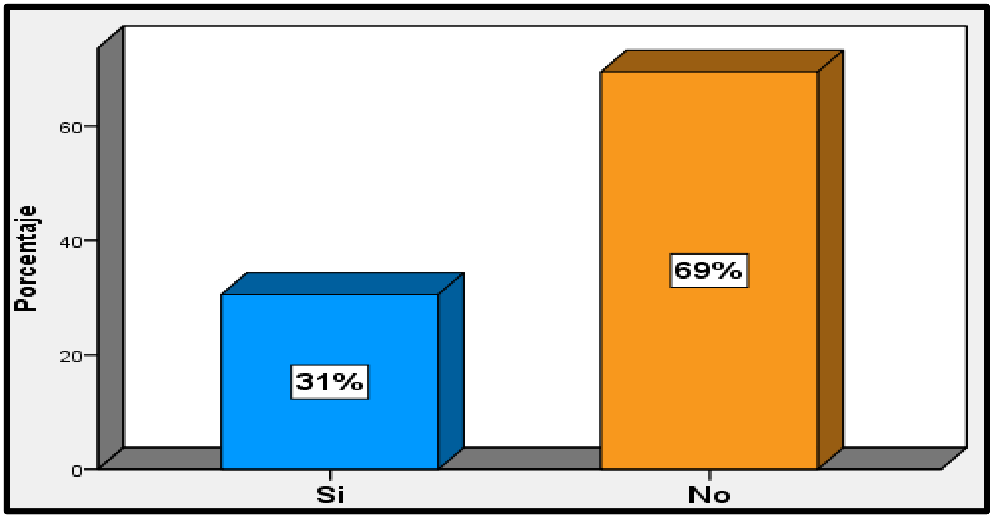
Al presentarle un problema a los estudiantes, el docente debe tener mucho cuidado, ya que la idea de resolver corresponde a encontrar lo que se desconoce; en muchos libros, revistas Matemáticas y otros medios se encuentran problemas realmente difíciles que, al momento de dar la respectiva lectura, el lector se sorprende por lo complicado al momento de analizarlo, por los datos minuciosos o por el nivel verbal utilizado que puede ser muy enredado.

Es por tal razón, que los problemas antes de darse a conocer a los discentes, estos deben ser tratados primeramente por el docente, para valorar su respectivo nivel de complejidad, ya que, para que el estudiante sienta ese deseo por resolver problemas, el querer hallar la respuesta, que se le antoje investigar y que logre recordar conceptos Matemáticos antes dados por los grados anteriores, el profesor debe presentar una situación problemática lógica, que al leerlo se logre saber qué hacer y que se le pide.

Además la presentación de problemas en el ámbito educativo debe enfocarse a situaciones de la vida cotidiana, ya que así el estudiante se esquematiza mentalmente el ambiente en que se enmarca el problema, como por ejemplo: se desea pintar el techo de una casa que es de la forma de una pirámide rectangular, en este caso, el estudiante al dar lectura a dicho enunciado, en su cerebro rápidamente se estructura una imagen o gráfico, pues éste posee conocimiento natural del enunciado en cuestión, lo que en gran medida contribuirá en el saber atacar el problema y llegar al resultado esperado.

Es por eso que se realizó una pregunta muy importante a través de la encuesta, la cual se basa en que, si en un problema no menciona lo que se debe buscar, se podrá considerar un problema, obteniéndose como resultado lo que estipula el gráfico 9:

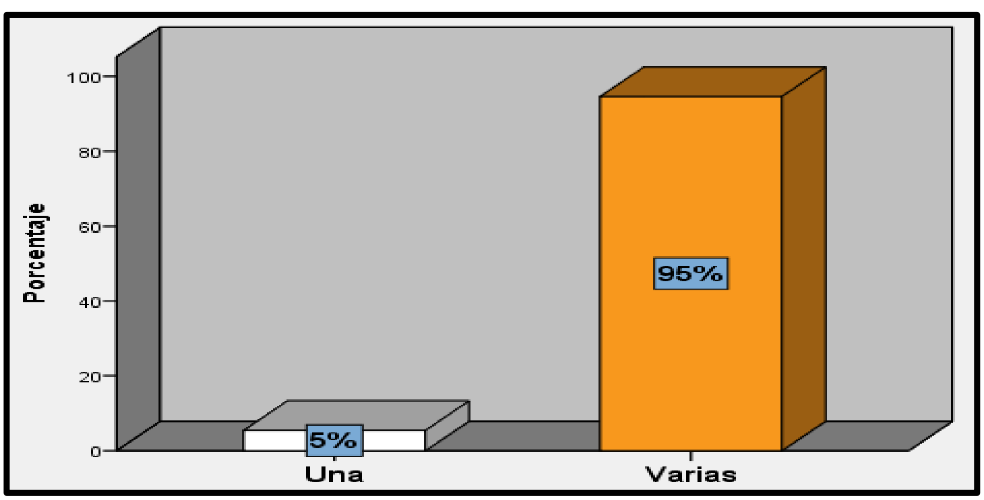
Gráfico 9: Cuándo se debe considerar un problema Matemático



Fuente: Resultados de la investigación

12 estudiantes el cual corresponde al 31% opina que, si se debe considerar un problema, en cambio el 69% el cual equivale a 26 estudiantes opina lo contrario, en donde es muy razonable pues si no se sabe qué es lo que se debe encontrar en un problema, entonces no cumple con las características esenciales para ser un problema.

Gráfico 10: Cuántas formas de resolverse tiene un problema Matemático



Fuente: Resultados de la investigación

En el gráfico 10, se presenta los resultados obtenidos a partir de la encuesta aplicada a los estudiantes, en donde se evaluó la pregunta ¿cuántas formas de resolver considera que tiene un problema Matemático?, en donde 2 estudiantes representando el 5% consideró que sólo hay una forma de resolverlo, en cambio el 95% el cual equivale a 36 estudiantes detallaron que hay varias formas de resolver el problema. Por lo tanto, los resultados fueron los esperados ya que la mayoría de los discentes seleccionó la respuesta ideal, lo que da a entender que han atacado problemas de diversas formas y han encontrado la misma respuesta, y se debe recalcar entonces que para resolver problemas no existe un solo camino para encontrar la solución, sino que existen varias.

4.1.7. Importancia de resolver problemas en Matemática

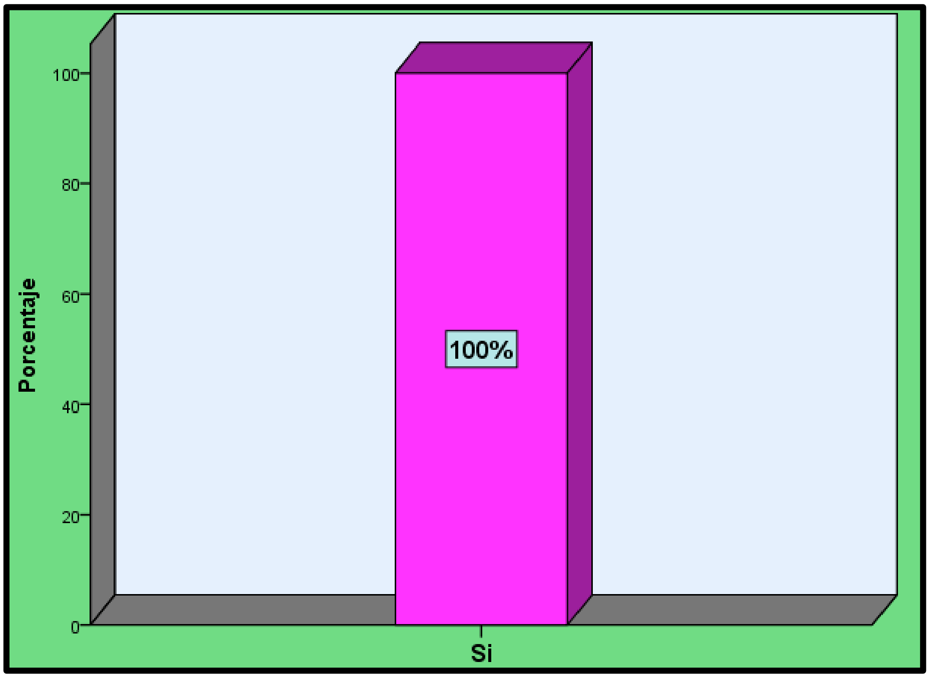
Martín (1999), da a conocer que "la resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación Matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea" (p. 8). Es decir, que es en el campo Matemático donde surge el pensamiento crítico, el razonamiento lógico del cómo tratar diversos ejercicios y problemas que tienen su propia esencia para solucionarse a través de técnicas, métodos, habilidades, artificios Matemáticos, lógica, etc.

Así mismo, el resolver problemas Matemáticos despierta un nuevo mundo de ideas en el resolutor, más conocimientos que le servirán para tratar otros problemas, sin embargo, la visualización de la perspectiva resolutiva por parte de los estudiantes es muy limitada, quizás el bajo autoestudio y la dedicación individual son la causa del no querer o de la frase que se está volviendo cotidiana: no deseo resolver ningún problema, pues no le entiendo.

El estudiante debe prestarse asimismo a una motivación que lo impulse a ser conocedor de nociones Matemáticas, promovedor de sus propias ideas del cómo llegar a la solución de algo e innovador de estrategias para buscar eso que se desconoce, ¿cómo puede lograr esto el estudiante? La forma más viable es apoderándose del querer resolver problemas, pues facilitará desarrollar la habilidad propia de cómo atacar el problema y el de establecer un compromiso individual de que, si no se logra hallar la solución, se investigará, es lo que se puede llamar: no darse por vencido.

Así que a través de la aplicación de la encuesta a los estudiantes se le solicitó que aportaran acerca de la importancia de resolver problemas en donde dichos resultados se muestran en el gráfico 11:

Gráfico 11: Importancia de resolver problemas



Fuente: Resultados de la investigación

El porcentaje obtenido alcanzó un 100% o sea los 38 estudiantes, el cual simboliza la gran importancia que tiene el proceso de resolución de problemas, pues permite en los estudiantes desarrollar su proceso cognitivo en el momento de aplicar técnicas, propiedades y definiciones hasta encontrar la respuesta a una interrogante.

Además, durante la entrevista aplicada al docente sobre los beneficios de resolver problemas, éste explicó que se "logra la capacidad de análisis, se desarrolla un pensamiento crítico y la persona se vuelve más independiente". Por lo tanto, se debe estar de acuerdo con este criterio de resolver problema, ya que permite en los estudiantes alcanzar un nivel de aprendizaje satisfactorio.

4.1.8. Algunos modelos Matemáticos que contribuyen a la resolución de problemas

En el área de Matemática, existen diversos modelos que facilitan la resolución de problemas, el cual poseen una estructura estrechamente ligada a llevar a cabo alternativas para encontrar la solución a un problema dado.

Se hace mención de algunos de ellos para visualizar la trascendencia e importancia que tienen para resolver problemas.

4.1.8.1. Modelo de Wallas.

Blanco (1996, p.12) señala que el modelo de Wallas es uno de los más relevantes entre los primeros propuestos, y que las cuatro fases de resolución serían:

1. Preparación. Recolección de información e intentos preliminares de solución.
2. Incubación. Dejar el problema de lado para realizar otras actividades o descansar.
3. Iluminación. Es cuando se produce la aparición de la idea clave para la solución (el famoso ajá o insight).
4. Verificación. Se comprueba la solución.

Así mismo Blanco (1996), recalca que este modelo fue presentado por primera vez en el libro más famoso de Wallas titulado The Art of Thought en 1926, y da a conocer que muchos otros modelos después propuestos para resolver problemas le son tributarios; por lo tanto conviene valorar el gran aporte que ha hecho este modelo para poder contrarrestar los problemas, así como también el despertar de Matemáticos interesados en buscar una línea estratégica que proporcione al resolutor atacar pausadamente un problema y que pueda obtener resultados satisfactorios.

4.1.8.2. Modelo de Miguel de Guzmán

Osamiz (1995, pp.139-140) en su libro Para Pensar Mejor expone su modelo para resolver problemas, el cual es conocido como el modelo de Miguel de Guzmán, en donde recalca que para centralizarse en el ataque del problema se debe tener ideas claras para poder proceder al proceso de resolución; a continuación, se da a conocer la estructura:

1. Familiarízate con el problema:
   - Trata de entender a fondo la situación.
   - Con paz, tranquilidad, a tu ritmo.
   - Juega con la situación, enmárcala, trata de determinar el aire del problema, piérdele miedo.
2. Búsqueda de estrategias:
   - Empieza por lo fácil.
   - Experimenta.
   - Hazte un esquema, una figura, un diagrama.
   - Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada.
   - Busca un problema semejante.
   - Inducción.
   - Supongamos el problema resuelto.
   - Supongamos que no.
3. Lleva adelante tu estrategia:
   - Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te hayan ocurrido en la fase anterior.
   - Actúa con flexibilidad. No te arrugues fácilmente. No te emperres en una sola idea. Si las cosas se complican demasiado, probablemente hay otra vía.
   - ¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución.
4. Revisa el proceso y saca consecuencias de él:
   - Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? O bien, ¿por qué no llegaste?
   - Trata de entender no sólo que la cosa funciona, sino porqué funciona.
   - Mira si encuentras un camino más simple.

- Mira hasta dónde llega el método.
- Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro.

Lo expuesto en este modelo, evidencia ideas claras y concretas para que se trate los problemas de lo mejor posible por parte del resolutor, cada fase del mismo sugiere un análisis perdurable para poder avanzar al siguiente paso, ¿cómo se hace?, el modelo propone sugerencias viables por medio de interrogaciones claves, algo que el resolutor debe apropiarse para obtener un resultado esperado al finalizar la resolución del problema.

4.1.8.3. Modelo de Allan Schoenfeld

Según Domínguez y Robayna (1994), expresan que "Schoenfeld inspirado en las ideas de Polya diseña uno de los modelos más completos sobre todo en estrategias heurísticas". (p. 85)

Por otra parte, el modelo expuesto por Schoenfeld (1985) citado por Domínguez y Robayna (1994, pp.85-86) hace la distinción de cuatro fases:

> análisis, exploración, ejecución y comprobación de la solución obtenida. Para ellas se ha preparado una tabulación de los principios heurísticos más frecuentemente utilizados en las Matemáticas de nivel universitario:
>
> Análisis:
>
> 1) Trazar un diagrama si es posible.
> 2) Examinar casos particulares.
>   a) Elegir valores especiales que sirvan para ejemplificar el problema.
>   b) Examinar casos límites, para explorar la gama de posibilidades.
>   c) Asignar a los parámetros enteros que puedan figurar, la secuencia de valores 0, 1, 2, … y buscar una pauta inductiva.
> 3) Probar a simplificar el problema:
>   a) Sacando partido a posibles simetrías.

b) Mediante razonamiento “sin pérdida de generalidad” (incluidos los cambios de escala)

Exploración

1) Examinar problemas esencialmente equivalentes:
   a) Por sustitución de las condiciones por otras equivalentes.
   b) Por recombinación de los elementos del problema de distintos modos.
   c) Introduciendo elementos auxiliares.
   d) Replanteando el problema mediante:
      - Cambio de perspectiva o de notación.
      - Considerando el razonamiento por el contra-recíproco o por contradicción.
      - Suponiendo que se dispone de una solución y determinando cuáles serían sus propiedades.
2) Examinar problemas ligeramente modificados:
   a) Elegir subobjetivos (satisfacción parcial de las condiciones)
   b) Relajar la condición y tratar de volver a imponerla.
   c) Descomponer el problema en casos y estudiar uno a uno.
3) Examinar problemas ampliamente modificados:
   a) Construir problemas análogos con menos variables.
   b) Mantener fijas todas las variables menos una para determinar qué efecto tiene esa variable.
   c) Tratar de sacar partido de problemas afines respecto a la forma, los datos o las conclusiones.
   d) Recordar que, al manejar problemas afines más fáciles se debería sacar partido, tanto del resultado, como del método de resolución.

Comprobación de la solución obtenida

1) ¿Verifica la solución obtenida, los criterios específicos siguientes?:
   a) ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
   b) ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
   c) ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?
2) ¿Verifica los criterios generales siguientes?:

a) ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
b) ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
c) ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
d) ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

La visualización que tiene Schoenfeld para atacar los problemas concibe una estructura solidificada a encontrar la solución pertinente, pero esto le corresponde al solucionador adecuarse a la línea posible a seguir, para obtener lo que se busca.

Además, para obtener información sobre los modelos para resolver problemas, por medio de la entrevista hacia el docente, él relató: "desconozco los nombres de los modelos Matemáticos para resolver problemas, aparte del modelo conocido como es el Método de Polya", es decir, que lo más esencial es que se debe conocer la estructura de cada modelo sin tener en cuenta el nombre, claro está que para cerciorarse de los diferentes modelos que existen se debe indagar sobre el propósito por el que fue hecho o su forma de aplicación, pues al conocer la base por lo que se elaboró, puede contribuir a la forma en cómo el estudiante debe atacar un problema.

Por otra parte, opinó que la similitud entre los modelos que conoce "es que parten de la comprensión del problema, y otra similitud es que siempre al finalizar hay que comprobar si la respuesta satisface la interrogante", y de acuerdo a los modelos Matemáticos para resolver problemas, estos permiten que el resolutor desarrolle su proceso de análisis mediante cuatros pasos, por tal razón los modelos antes mencionados tienen gran similitud en su estructura.

4.2. Método de Polya

En los apartados anteriores se dio a conocer algunos modelos Matemáticos que ayudan de una u otra manera al resolutor, posteriormente se enfatiza el abordaje del Método de Polya, que también es, uno que facilita en gran medida la resolución de problemas y del que muchos solucionadores de problemas Matemáticos tienen conocimientos, además se debe recalcar que otros modelos que se han mencionado han tomado ideas de George Polya.

4.2.1. Reseña histórica de George Polya

Según el Instituto tecnológico y Estudios superiores de Monterrey (2005) señala que:

> George Polya nació en Hungría en 1887. Obtuvo su doctorado en la Universidad de Budapest y en su disertación para obtener el grado abordó temas de probabilidad. Fue maestro en el Instituto Tecnológico Federal en Zurich, Suiza. En 1940 llegó a la Universidad de Brown en EUA y después pasó a la Universidad de Stanford en 1942.
>
> Las aportaciones de Pólya incluyen 250 documentos Matemáticos y tres libros que promueven un acercamiento al conocimiento y desarrollo de estrategias en la solución de problemas. Su famoso libro Cómo Plantear y Resolver Problemas que se ha traducido a 15 idiomas, introduce su Método de cuatro pasos, junto con la heurística y estrategias específicas útiles en la solución de problemas. Otros trabajos importantes de Polya son: Descubrimiento Matemático, Volúmenes I y II, y Matemáticas y Razonamiento Plausible, Volúmenes I y II. (p.3)

Por otra parte, Peña (2008) en sus escritos señala que “Polya murió en Palo Alto el 7 de septiembre de 1895” (p.124). Fue un pensador que no tiene una historia final ya que su aporte se fundamenta en la formación de docentes que se apropian de herramienta metodológicas para resolver problemas en Matemáticas, poniendo en prácticas distintos conocimientos adquiridos en su preparación académica, que de la misma manera se comparte con los estudiantes con el propósito de entender la temática y resolver problemas aplicando estrategias eficaces por medio de la orientación de los pasos propuestos por Polya.

Tal efectividad del Método de Polya debe estar ligado a que el solucionador posea un esquema de conceptos previos como el interés mismo de resolver, así, por ejemplo: para una determinada clase el docente se prepara en el tema de la pirámide estudiando características, definición fórmulas y aplicaciones en problemas de la vida real, pero el alumno trae connotación de grados anteriores sobre figuras planas, de las características que presentan los cuerpos geométricos, entre otros, si esto sucede en el aula de clase, entonces se dará un aprendizaje reciproco entre ellos al momento del debate de ideas, lo que hace fructífero la aplicación del Método en la resolución de problemas.

Cabe señalar que Polya físico, Matemático y filósofo deja un recuerdo en cada corazón de los docentes ya que refleja la vocación para enseñar y formar a discentes, además la manera de entender y resolver los problemas de Matemáticas, buscar la forma de que los alumnos sean capaz de desarrollar su proceso cognitivo mediante la puesta en prácticas de habilidades y destrezas.

4.2.2. Concepto del Método de Polya

Rimarachín (2014), enuncia que el Método de Polya “son estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizadas para la solución de problemas basada en la experiencia previa con problemas similares, provocando un aprendizaje significativo” (p. 61).

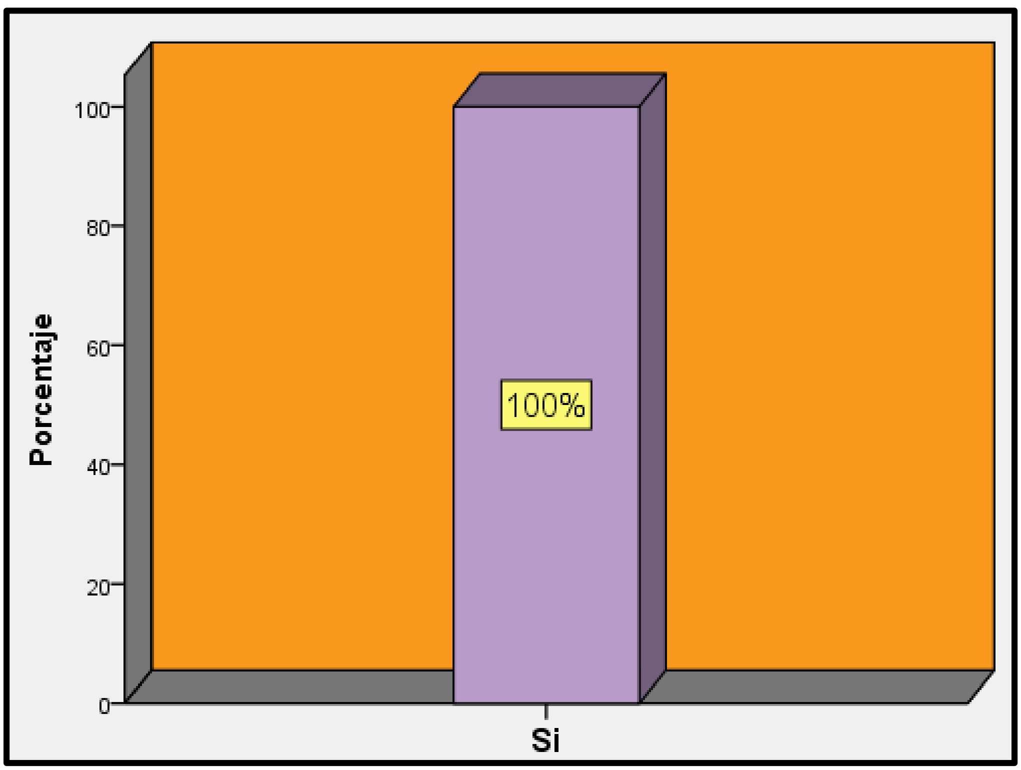
Es por eso que se describe que este Método tiene un procedimiento heurístico que permite al estudiante determinar que paso se está realizando o que procedimiento requiere de mayor atención, además facilita al docente una ejercitación previa para trabajar determinado tema de Matemática, es decir, que este Método es aplicable a cualquier contenido de Matemática, sin obviar la importancia que tiene su aplicación ya que desarrolla en aprendices y docentes diversas habilidades de comprensión y análisis.

Asimismo, se señala que este Método está centrado en la resolución de problemas, por lo tanto, los docentes que tienen dificultad en el dominio de su aplicación debe ejercitar constantemente y practicar la resolución de problemas utilizando este Método, para obtener resultados satisfactorios en el proceso enseñanza - aprendizaje y despertar diversos talentos para resolver problemas en Matemática en los discentes.

Es por tal razón que a través de la entrevista se abordó al docente para conocer su opinión acerca de ¿qué es el Método de Polya? En donde se obtiene la siguiente contestación: “es un modelo que establece una guía para resolver problema, no solo en Matemática, sino en cualquier índole”, es por eso que despierta en el resolutista interés por realizar otro problema similar o distinto cuando se finaliza de resolver un problema interesante, pues este Método permite escudriñar y aplicar los preconceptos antes aprendidos, provocando en el estudiantado un aprendizaje satisfactorio.

Asimismo, a los estudiantes se les preguntó en la encuesta aplicada si habían escuchado hablar del Método de Polya, en donde los resultados conseguidos se detallan en el gráfico 12:

Gráfico 12: Ha escuchado hablar del Método de Polya



Fuente: Resultados de la investigación

De acuerdo a las opiniones por parte de los estudiantes, se encontró que el 100% o sea los 38 estudiantes, ha escuchado hablar del Método de Polya, lo que indica que el Método se ha estado trabajando en pro de facilitarle a los discentes un camino a seguir al momento de resolver un problema determinado en Matemática.

4.2.3. Propósito del Método de Polya

De acuerdo con Blanco (1996), el propósito del Método de Polya es “conseguir que cualquier persona, preferiblemente con la ayuda de un tutor, logre asimilar las técnicas de resolución que se han demostrado efectivas, hasta convertirse en un buen resolutor de problema” (p.13). El Método de los cuatro pasos de Polya, enmarca su esencial valor constructivo para la enseñanza de la Matemática, dicho Método está enfocado en cuatro etapas fundamentales que debe identificar el aprendiz con el fin de poner en juego sus habilidades y destrezas, que siendo guiado por un monitor le permita resolver problemas de la vida diaria de una manera jerárquica y ordenada.

Por otra parte, el objetivo a seguir al momento de aplicar el Método de Polya se centra en el poder resolver problemas, por ejemplo: si el docente asigna un problema de aplicación, en conjunto se lleva a cabo la resolución por medio de los pasos: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida, aunque esto también se puede hacer en forma de diálogo entre alumno-maestro, o sea, manipular cada sugerencia que el mismo Polya diseñó para cada paso, lo cual al llevarlo a cabo se logra obtener resultados que se espera por el aplicador.

Mediante la entrevista realizada al docente se logró abordar que cuál era el propósito del Método de Polya, en donde el profesor contestó: “el propósito del Método de Polya, es guiar al individuo y establecer un proceso para resolver el problema”, y eso es lo que pretende al Método con respecto al resolutor, dar las pautas necesarias para conseguir lo que el problema pide como solución, claro está que se debe tener paciencia pues hay que tener en cuenta que existen problemas de diferente complejidad, es decir, entre más complicado sea, dicho método se debe aplicar de manera correcta y de la mejor forma para obtener el resultado esperado.

4.2.4. Pasos del Método de Polya

El gran aporte y algo muy importante en el área de Matemática, es exponer el cómo se debe atacar un problema, el cual es parecido a una guía que paso a paso revela el proceso ordenado para llegar a la solución de aquello que se propuso encontrar respuestas, por diversos estudios que realizó Polya, expuso en su famoso libro Cómo Plantear y Resolver Problemas, los pasos a seguir para resolver problemas, a continuación, se detallan.

4.2.4.1. Comprender el problema

Polya (1965, p.19) presenta diversas preguntas de análisis que le permite a los estudiantes tener una mejor comprensión del problema en cuestión, entre ello:

- ¿Cuál es la incógnita? ¿cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

En este primer apartado Polya manifiesta un descubrimiento, poniendo en práctica la curiosidad para resolver problema, con distintas preguntas que permite al estudiante abrir su pensamiento por medio de un juicio propio, además el docente produce la oportunidad de interactuar de manera directa, en donde debe aprovechar su tiempo, ejercitando con los alumnos distintos problemas de aplicación. Por otra parte, se menciona que los discentes al operar preguntas de este tipo su pensamiento se vuelve independiente y razonable, pero a la vez analógico.

Así por ejemplo, el docente presenta un problema de aplicación donde se debe resolver en conjunto con el grupo, este enunciado tiene ciertas características de análisis, en donde la idea sea: calcular área y volumen de una pirámide regular, entonces el docente busca la manera que el alumno le responda por lo menos 4 de 7 preguntas, tales como: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?, entre otras, de tal forma que tenga veracidad la respuesta, entonces es ahí donde comienza el juicio de aprendizaje entre estudiante y docente.

4.2.4.2. Concebir un plan

Se hace mención que el segundo paso descrito por Polya trata de concebir un plan, el cual tiene fundamento en el planeamiento de actividades que permiten al estudiante un razonamiento independiente, por lo tanto, se describe el siguiente cuestionamiento posible a seguir para poder configurar un plan, el cual fue propuesto por Polya (1965, p.19)

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿o ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con este? ¿conoce un teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado al suyo que se ha resuelto ya. ¿podría usted utilizarlo? ¿podría utilizar su resultado? ¿podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?

- ¿Ha empleado todos los datos? ¿ha empleado toda la condición? ¿ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

En este apartado Polya manifiesta su interés por la estructuración de la resolución de problemas Matemáticos, de tal forma que valora al estudiante de manera específica, tomando en cuenta sus habilidades y destrezas; además busca que cada estudiante realice un juicio propio de aprendizaje, con el propósito de llevar a cabo la operación del problema que se está resolviendo. Por otra parte, se debe tomar en cuenta el nivel en que se encuentra, como también las características del grupo para así presentar la propuesta de trabajo. No obstante, existen estudiantes que son más aventajados en el momento que se está resolviendo un problema de aplicación, los cuales estos con mayor facilidad se incorporan en el proceso.

No obstante, el docente antes de dar a conocer el problema debe realizar la operación pertinente en su escrito, de tal manera que se identifique el valor fundamental de este paso como también adecuarlo en tiempo y forma para poder desarrollar bien esta etapa con los estudiantes.

4.2.4.3. Ejecutar el plan

De igual manera, la fase de la ejecución del plan, está meramente enfocado en la parte práctica, ya que los resultados que se obtengan del proceso depende de cómo esté diseñado el plan y los cuales corresponden en cierto grado a la solución de la problemática.

Polya (1965, p.19) da a conocer cómo se debe tratar este paso, a continuación, se detalla algunas indicaciones:

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede ver usted claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

De igual manera se debe tomar en cuenta la preparación que tenga el docente para ejecutar lo programado, esta fase es muy importante ya que el maestro desempeña una función unánime en la enseñanza, ya que busca que los estudiantes despierten su creatividad, sus talentos e inteligencias para resolver problemas de la vida diaria y que mediante este proceso aprendan a resolver problemas parecidos. Ya que, por ejemplo: si se calcula área y volumen en el problema que se resuelve, entonces se debe resolver otro similar para que los estudiantes comprendan por completo cada etapa que se desarrolla para encontrar lo desconocido.

4.2.4.4. Examinar la solución obtenida

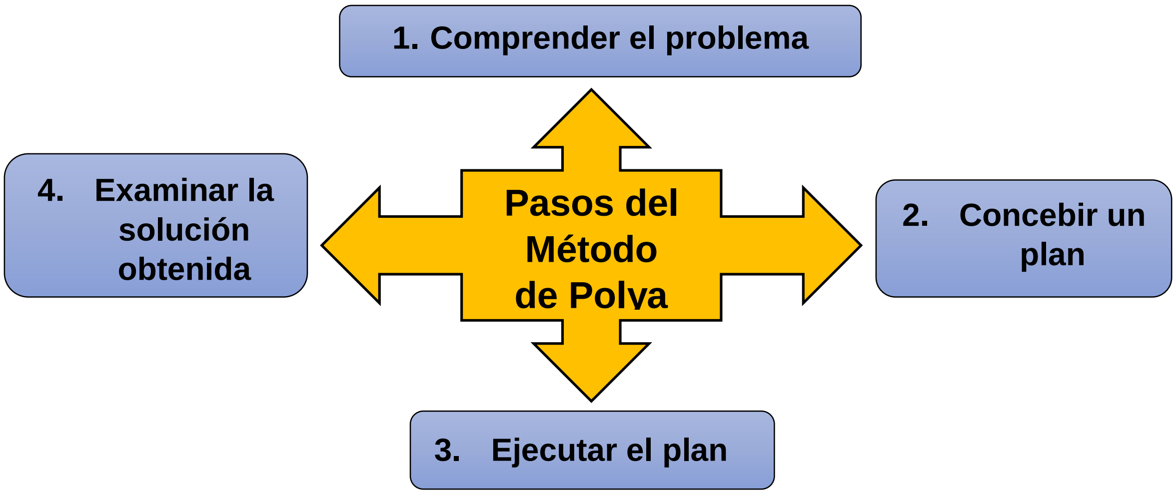
El abordaje de esta cuarta etapa: examinar la solución obtenida, tiene su cimiento en la revisión procedimental del problema resuelto, donde de manera oral o práctica se confirma si la solución del problema es correcta, en el cual según Polya (1965, p.19) tiene su desenlace en los siguientes ítems:

> ¿Puede usted verificar el resultado? ¿puede verificar el razonamiento? ¿puede obtener el resultado en forma diferente? ¿puede verlo de golpe? ¿puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema?

En este apartado se le da salida a las fases propuestas por Polya, ya que se necesita hacer una regresión de resultado para verificar si la parte del procedimiento descrita por los estudiantes tiene solución lógica, en caso de tenerla, el problema está resuelto, si es lo contrario se deben hacer las correcciones necesarias con el propósito de crear un juicio positivo en el estudiante, además regresarse hacia atrás retroalimenta los conceptos Matemáticos puestos en práctica, los cuales favorecerá en la aplicación en distintos problemas que se les presente. Así que cuando se termina de resolver un problema, es decir, cuando se haya encontrado la respuesta y se hizo el razonamiento de veracidad, entonces los alumnos tendrán presente el cómo se llegó a solucionar y qué se hizo.

A continuación, se presenta mediante un esquema los pasos del Método de Polya, los que representan las tácticas esenciales para solucionar un problema Matemático, aunque su aplicación se debe hacer de una manera en donde el estudiante logre entender el problema y la importancia que tiene el Método para dar las pautas necesarias para resolver dicho problema en cuestión.

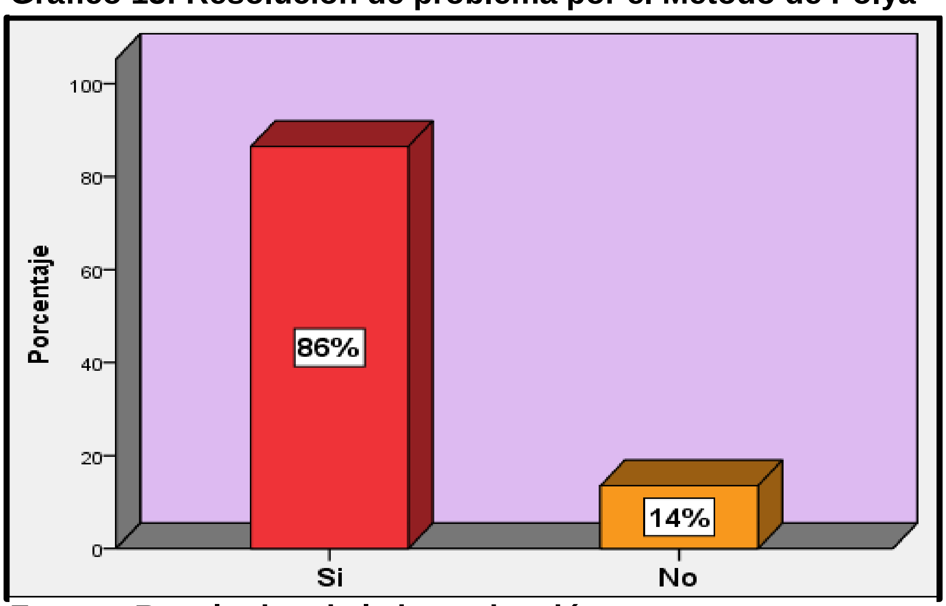
Ilustración 1. Pasos del Método de Polya



Fuente: Elaboración propia

Por otra parte, a través de la encuesta se abordó a los estudiantes para saber que, si habían resuelto un problema utilizando los pasos de Método de Polya, obteniendo los siguientes resultados los cuales se detallan en el grafico 13:

Gráfico 13: Resolución de problema por el Método de Polya



Fuente: Resultados de la investigación

Se encontró que un 86% el cual equivale a 33 estudiantes opinaron que, si han resuelto problemas a través del Método de Polya y un 14% representando a 5 estudiantes opinaron que no, esto quiere decir que se ha estado resolviendo problemas en clases de Matemática aplicando el Método de Polya, y ese porcentaje que corresponde al 14% es de pensar que estos no posean interés por la Matemática, no atiendan la clase o simplemente no realizan las actividades sugeridas por el docente.

Así mismo, se le preguntó al docente cuales eran los pasos que correspondían al Método de Polya, lo cual contestó lo siguiente: "comprender el problema: se refiere al análisis del problema, estar claro de cuáles son las variables, que datos nos proporciona el problema, qué condiciones se establece entre lo conocido y lo desconocido; elaborar un plan: se pregunta si conoce problemas similares, se establece la ruta que va a seguir para resolver el problema, establecer fórmulas y conceptos; ejecutar el plan: hacer todo lo que dijiste que ibas a hacer en el segundo paso, aplicar las fórmulas; examinar o comprobación de resultados: si satisface las condiciones iniciales, saber si ese problema se puede aplicar a otra situación".

Lo expresado por el docente es lo que realmente corresponde a los pasos del Método de Polya, Por otra parte, por medio de la encuesta se les hizo la misma pregunta a los estudiantes, en donde los resultados que se generaron se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 1: Pasos del Método de Polya

Pasos	**Respuestas**	
	N	**Porcentajes de casos**
Comprender el problema	25	65.8%
Concebir un plan	26	68.4%
Esclarecer cada paso realizado	10	26.3%
Ejecutar el plan	36	94.7%
Sintetizar la información	7	18.4%
Examinar la solución obtenida	32	84.2%

Fuente: Resultados de la investigación

En la tabla 1 muestra una información regular ya que una parte de los discentes aún les cuesta identificar los pasos que corresponden al Método de Polya. Por lo tanto, se detalla que identificar y saber cuáles son los pasos es base fundamental para hacer uso de ellos ante cualquier problema Matemático, pues su abordaje permite reflexionar, analizar y comprender la contextura del problema, al igual poder definir los datos, así como también la forma de cómo procesar la información.

Sin embargo, por medio de la observación a clase se constató que el docente hace uso del Método de Polya al momento de resolver problemas, en donde la aplicación de todos los pasos se hace notable, aunque no de la mejor forma, ya que el docente no es generador de preguntas claves (pistas) para que el estudiante argumente acerca de cómo resolver el problema, o sea, existe poca interacción entre el docente - estudiante, es por tal razón que la manera en que se está implementando los pasos del Método de Polya al resolverse problemas es regular.

4.2.5. Importancia de la aplicación del Método de Polya en la resolución de problemas

Polya (1965) da a conocer que "reconsiderando la solución, reexaminando el resultado y el camino que les condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes, para resolver problemas" (p. 35).

Por lo tanto, la importancia de este Método se enfoca en el proceso de enseñanza - aprendizaje, entre alumno y maestro; el estudiante mejora su nivel de conocimiento al aplicar cada paso expuesto por Polya, como también se da el mejoramiento de la comprensión, nivel de aplicación, el nivel de análisis y de síntesis. Por otra parte, se debe destacar el rol que juega el docente en este proceso, la manera de trabajar, la perseverancia en el proceso colectivo de enseñanza, su cuestionamiento razonable, por lo que este método beneficia de gran manera al grupo educativo a tener más interés por la Matemática.

Es por eso que a través de la observación a clases se contrastó que el Método de Polya facilita el intercambio de ideas entre docente y estudiantes, a la misma vez entre lo nuevo y lo conocido, pero se debe recalcar que la participación es mínima por el hecho que el docente no dejó que los estudiantes pensasen en cómo se debería de afrontar el problema, ya que dicho docente por medio de la proyección del data show llevó el esquema del problema y los puntos esenciales del primer y segundo paso ya completados, lo cual no puede ser así, pues lo ideal es presentar los pasos del Método de Polya por medio de un cuadro pero sin llenar, pues la contestación a cada paso se debe hacer en conjunto con los estudiantes dentro del aula de clase, para así contribuir a la participación activa y en poder despertar el deseo de resolver problemas.

Tabla 2: Aplicación de los pasos del Método de Polya por los estudiantes

Aplicación de los pasos de Polya en la resolución de problema de la vida cotidiana	Frecuencia	Porcentaje
Primer paso	22	58.0
Ni un paso	16	42.0
Total	38	100.0

Fuente: Resultados de la investigación

Al presentar en la encuesta un problema de la vida cotidiana para poder presenciar cómo los estudiantes lo resolvían, en la tabla 2 se detalla que nada más un 58% aplicó el primer paso del Método de Polya y de los otros tres pasos de dicho Método ninguno aplicó y un 42% no realizó ninguna operación, es decir sólo analizaron el problema a través de los datos presenciados y de estos mismos, algunos comenzaron a hacer cálculos sin poder llegar a la solución de dicho problema; y al obtener resultados en donde nadie llegó a la solución pertinente se puede decir que los estudiantes prestan poco interés a la aplicación del Método de Polya al momento que el docente detalla la resolución de problemas o también por la forma en cómo aplica dicho Método el profesor.

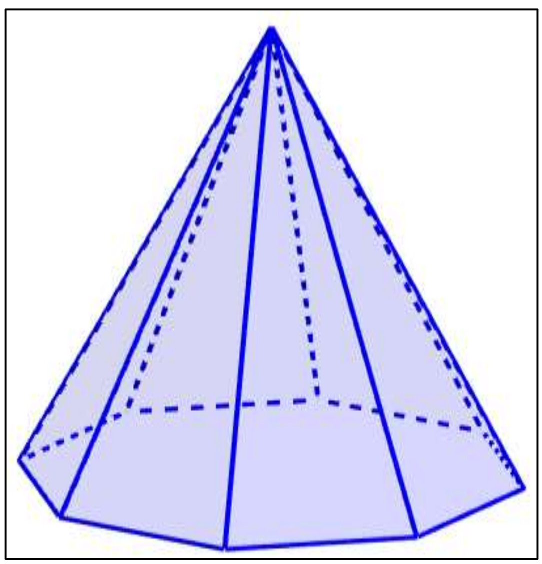
4.3. Generalidades de la pirámide regular

Se hace mención de los principales aspectos de la pirámide regular, es decir, sobre lo que se estudia en décimo grado en la unidad de Geometría de Sólidos.

4.3.1. Concepto de pirámide

De acuerdo con Baldor (2001), conceptualiza que “pirámide es un poliedro que tiene una cara llamada base, que es un polígono cualquiera y las otras, llamadas caras laterales, son triángulos que tienen un vértice común, llamado vértice o cúspide de la pirámide” (p. 253).

Figura 1: Pirámide



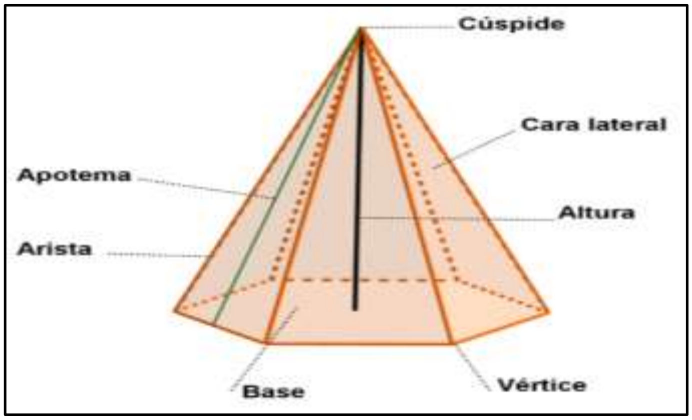
Fuente: Elaboración propia

Es fundamental tener conocimiento sobre nociones que permitan comprender mejor un tema Matemático, por tal razón se dice que el docente es el encargado de transmitir conocimientos previos a través de una enseñanza que sea duradera y que los estudiantes las perciban de una manera eficaz y los pongan en práctica, es por eso que para desarrollar un determinado contenido en Matemática se debe contar con ciertas herramientas que permitan llevar a la realidad conocimientos antepuestos adquiridos.

4.3.1.1. Elementos de la pirámide

En el libro de texto de Matemática de décimo grado elaborado por Rivera (2015, p.315) y dado a conocer por el MINED hacia los estudiantes para respaldar a la educación se hace mención de los elementos de la pirámide:

Figura 2: Elementos de la pirámide



Fuente: Elaboración propia

En donde:

- La base es la cara en la que se apoya la pirámide.
- Las caras laterales son las caras que comparten uno de sus lados con la base. La suma de sus áreas es el área lateral de la pirámide.
- Las aristas son los lados de la base y de las caras laterales.
- Los vértices son los puntos en donde concurren cada par de aristas.
- Las apotemas son las alturas de las caras laterales de la pirámide.
- La recta que pasa por el vértice de la pirámide y el centro geométrico de la base se denomina eje o altura de la pirámide.

Estos aspectos son importantes en la aplicación que tengan las pirámides, porque si se conoce como se estructura la misma, se tiene una idea en la parte cognitiva del estudiante de cómo se forma, y al momento de formularse un problema se le hace más fácil dar comprensión de la figura, además si se encuentra con un problema su planteamiento lo hará de una manera más fácil debido a sus conocimientos de anterioridad adquiridos.

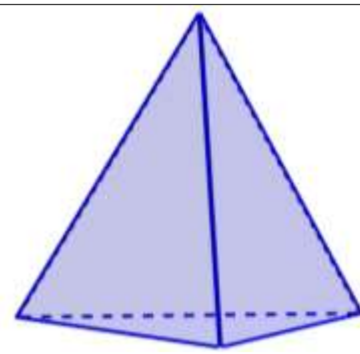
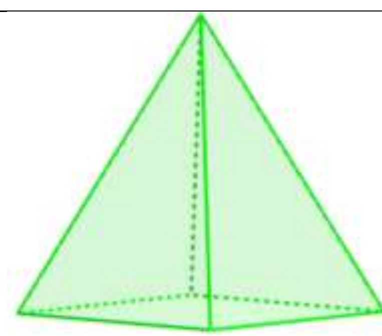
4.3.1.2. Clasificación de la pirámide

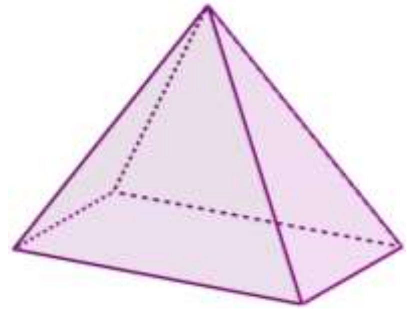
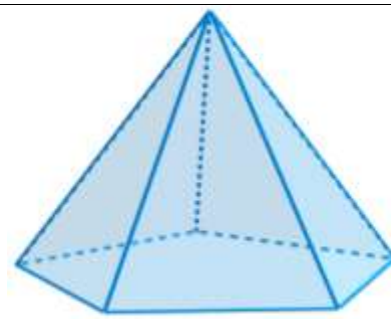
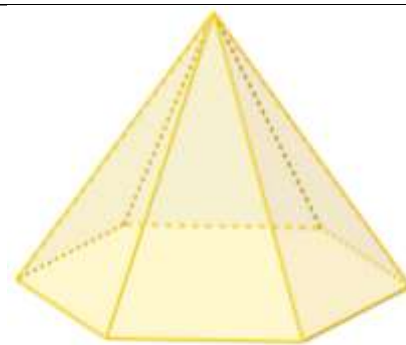
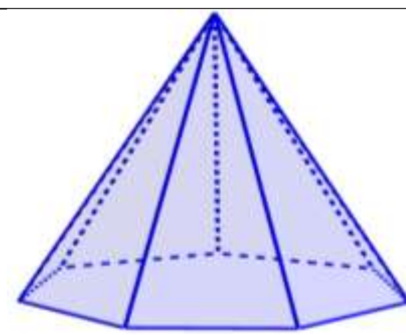
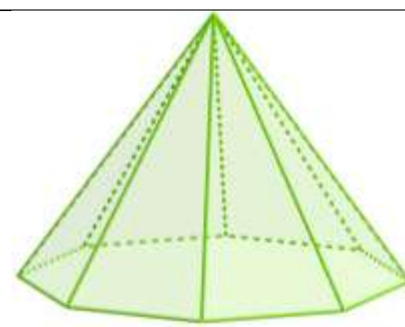
4.3.1.2.1. De acuerdo al polígono de la base

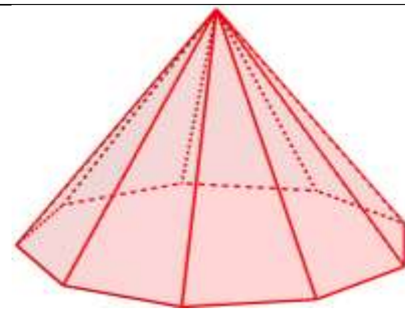
Baldor (2001) da a conocer en sus escritos que "de acuerdo con la clase de polígono de la base, las pirámides se clasifican en: triangulares, hexagonales, etc." (p. 253). Tener idea de cómo se clasifican las pirámides permite tener una mejor comprensión de su concepto, también que ayuda a descifrar sus características que como figura geométrica sólida representa y su clasificación de acuerdo al número de lados que tenga la base, el cual también coincide con el número de caras laterales, en donde si la base es un polígono regular, entonces las caras laterales son congruentes.

Se representa en el siguiente cuadro la clasificación de la pirámide y su forma ilustrativa; se dan a conocer las más utilizadas en el abordaje del tema de la pirámide:

Tabla 3: Clasificación de la pirámide de acuerdo al polígono de la base

Clase de polígono de la base	Clasificación de la pirámide	Ilustración de la pirámide
Triángulo	Pirámide triangular	
Cuadrilátero (Cuadrado)	Pirámide cuadrangular	

Cuadrilátero (Rectángulo)	Pirámide rectangular	
Pentágono	Pirámide pentagonal	
Hexágono	Pirámide hexagonal	
Heptágono	Pirámide heptagonal	
Octágono	Pirámide octagonal	

Eneágono	Pirámide eneagonal	

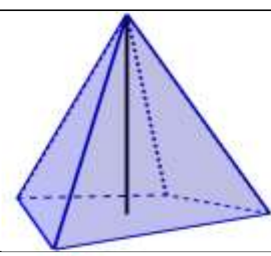
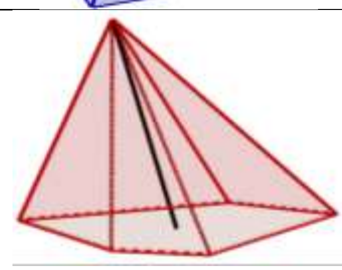
Fuente: Elaboración propia

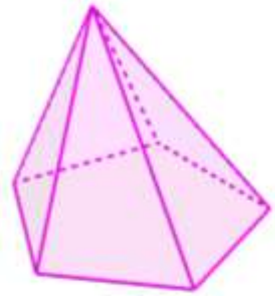
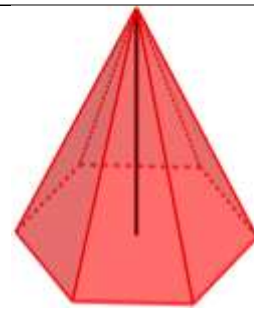
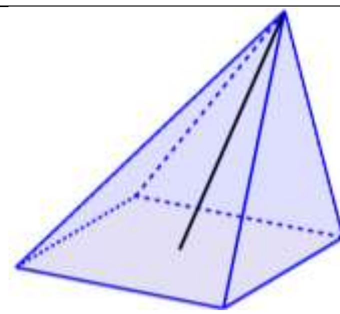
4.3.1.2.2. De acuerdo a otras características

Por otra parte, en el programa de estudio de educación secundaria de 10° y 11° MINED, (2011, p.70) expone que las pirámides se clasifican en:

- **Pirámide recta:** el eje es perpendicular a la base.
- **Pirámide Oblicua:** el eje no es perpendicular a la base.
- **Pirámide Regular:** la base es un polígono regular.
- **Pirámide Regular recta:** la base es un polígono regular y el eje es perpendicular a la base.
- **Pirámide Regular oblicua:** la base es un polígono regular y el eje no es perpendicular a la base.

Tabla 4: Clasificación de la pirámide de acuerdo a otras características

Clasificación de la pirámide	Ilustración de la pirámide
Pirámide recta	
Pirámide oblicua	

Pirámide regular	
Pirámide regular recta	
Pirámide regular oblicua	

Fuente: Elaboración propia

4.3.2. Área de la pirámide

Para entender adecuadamente a que se refiere el área de la pirámide se detalla el concepto de área que según Apolinar (2015), define que "es la medida de la superficie que cubre un cuerpo o figura geométrica. Sus unidades se miden en unidades cuadradas, también denominadas de superficie, como centímetro cuadrado (m^2), metros cuadrados (m^2), hectáreas (ha), etc."(p. 8)

La definición que se tenga sobre área de una figura geométrica permite identificar, comprender y detallar términos Matemáticos, como también saber a qué se refiere cuando en un problema se pide encontrar el área de un cuerpo geométrico. Por otra parte, el concepto se crea a través de la enseñanza práctica que el estudiante realiza dentro de la escuela y el docente como mediador es el que crea las pautas necesarias para entender dicho concepto.

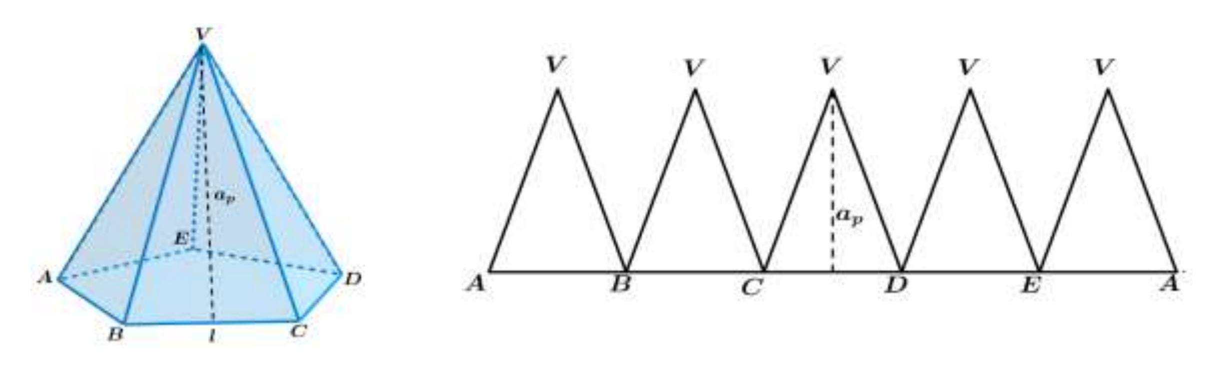
4.3.2.1. Área lateral en una pirámide

Baldor (2001) describe que “el área de un prisma o una pirámide es la suma de las áreas de las caras laterales” (p. 270). Es fundamental en el campo de las Matemáticas dominar el concepto que se tiene sobre el área de una pirámide, como también saber hacer muy bien sus cálculos, por lo tanto, se debe partir de la parte teórica y fundamentarse en la práctica para alcanzar rigurosos conocimientos que sirvan para la vida, es por eso que se debe disponer de la acción del docente, los estudiantes y el medio como tal.

4.3.2.1.1. Fórmula para el cálculo del área lateral en una pirámide regular

Baldor (2001,p.258) afirma que el “área lateral de una pirámide regular es igual al producto del semiperímetro de la base por la longitud del apotema de la pirámide, es decir $A_L = \frac{P}{2} \times a_p$.”

Tabla 5: Caras laterales de una pirámide regular



Fuente: Elaboración propia

De las caras desplegadas se deduce que:

Tomando un triángulo de las caras laterales en donde todos son congruentes, se tiene que el: $A_{Triángulo} = \frac{l \times a_p}{2}$

Por otra parte: n será el total de triángulo que posee la pirámide regular y por tener todos sus triángulos semejantes, entonces tenemos:

$$A_L = n\left(\frac{l \times a_p}{2}\right) = \frac{nl}{2} \times a_p$$

Se denota que $nl = perímetro\ P$, así que:

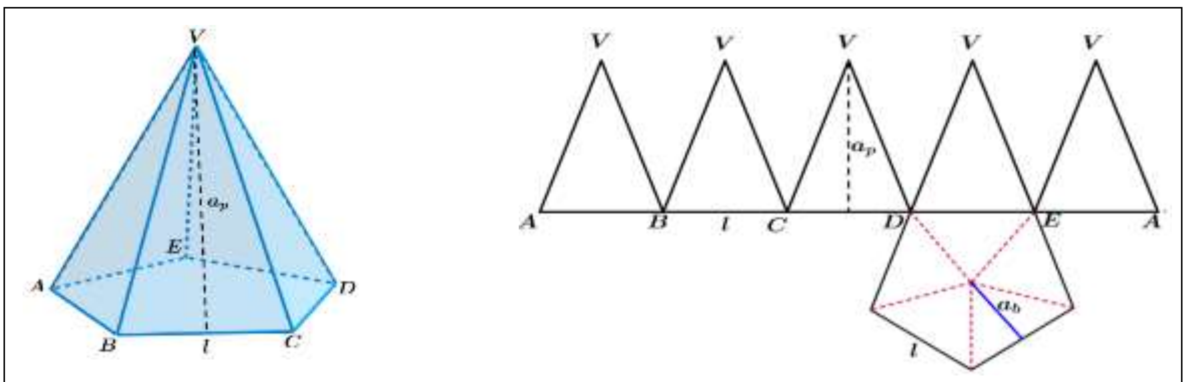
$$A_L = \frac{P}{2} \times a_p$$

4.3.2.1.2. Fórmula para el cálculo del área total en una pirámide regular

Baldor (2001) detalla que “para hallar el área total sumaremos el área de la base al área lateral. Como la base es un polígono regular tendremos: $A_T = A_L + B$”(p. 258).

De la siguiente figura de una pirámide pentagonal regular se tiene:

Tabla 6: Plantilla para el cálculo del área total de una pirámide regular



Fuente: Elaboración propia

Sabiendo que $A_L = \frac{P}{2} \times a_p$ y $A_B = Depende\ del\ polígono\ que\ sea\ la\ base$

Entonces el área total será la suma del área lateral con el área de la base.

Entonces del gráfico deducimos que el área de la base es:

Tomando un triángulo formado en la base en donde todos son congruentes, se tiene que: $A_{Triángulo} = \frac{l \times a_b}{2}$

Por otra parte: n será el total de triángulo que posee la pirámide regular y por tener todos sus triángulos semejantes, entonces tenemos:

$$A_B = n\left(\frac{l \times a_b}{2}\right) = \frac{nl}{2} \times a_b$$

Pero $nl = perímetro\ P$, así que:

$$A_B = \frac{P}{2} \times a_b$$

Es decir: $A_T = A_L + A_B = \frac{P}{2} \times a_p + \frac{P}{2} \times a_b = \frac{P}{2}\left(a_p + a_b\right)$

4.3.3. Volumen de la pirámide

Apolinar (2015) puntualiza que volumen es “el espacio que ocupa un cuerpo. Sus unidades se miden en litros, o unidades de longitud cubicas, como metro cúbico (m^3)” (p. 161). Por medio de un proceso de enseñanza de las Matemáticas se logran conocer definiciones que son muy importantes, y entre ella se encuentra el del volumen de un cuerpo que nos permite interpretar la capacidad o el espacio ocupado por un cuerpo sólido, de igual manera el docente diseña estos conceptos de una manera adecuada, con el propósito de que tenga larga duración en el pensamiento de los estudiantes, también que pueda diferenciar correctamente en la resolución de problemas Matemáticos.

4.3.3.1. Fórmula para el cálculo del volumen en una pirámide

Para Baldor (2001) “el volumen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto del área de la base por la medida de la altura, es decir: $V = \frac{1}{3} B \times h$ ” (p. 276).

V. PROPUESTA METODOLÓGICA PARA ABORDAR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ÁREA Y VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE APLICANDO EL MÉTODO DE POLYA.

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas en Matemática es una situación que amerita darle un tratamiento especial en las aulas de clase, porque el resolver problemas despierta en el resolutista capacidades analíticas, un pensamiento crítico y entusiasmo en la búsqueda de soluciones.

Aunque para obtener dichas cualidades, el resolutor debe dedicar un tiempo exclusivo a resolver problemas, es decir, no solo en el instante que el docente imparte la clase, sino, ir a la biblioteca o llegar a casa y resolver otros problemas semejantes, pero con un nivel de dificultad mayor a los problemas ya resueltos, para así adquirirse esas habilidades especiales que se puede desarrollar individualmente.

Para concientizar a los estudiantes a que despierten el interés por resolver problemas, se necesita mucha perseverancia por parte del docente, es decir, que debe valerse de la motivación, de ejemplos dinámicos, llamativos e ilustrativos, y algo muy esencial hacer que el estudiantado se sienta tomado en cuenta en la participación activa al momento de dar la resolución a problemas de situaciones reales.

Con respecto al uso de modelos Matemáticos para resolver problemas, El MINED dio a conocer el curso de actualización de docentes de 4to y 5to año de educación secundaria en herramientas científicas y metodológicas para la enseñanza de la Matemática en donde Morales (2009) afirma: “proponemos algunos modelos de resolución de manera que le permita al docente hacer una buena selección al momento de utilizarlos para planear y desarrollar su clase” (p. 7). Es decir, que el MINED especifica que el docente se apropie del modelo Matemático para resolver problemas que considere más ideal para planificar un contenido y desarrollarlo en el salón de clase.

Además, Morales (2009), detalla que, “una de las pautas a seguir para la resolución de problemas es la aplicación de modelos” (p.48), así que adecuarse a un modelo de resolución, es la esencia para enfrentarse a un problema de una forma ordenada; y lo importante de su utilización, es que permite que los discentes tengan la capacidad de comprender el enunciado, así como saber qué es lo que se debe cuestionar para buscar la solución a un problema.

Y entre los modelos que puede utilizar el docente según el MINED, Morales (2009) destaca los siguientes: “Mason, Burton y Stancey (un solo modelo), el modelo George Polya” (p.48). El Ministerio de Educación al proponer estos modelos, aunque existen otros, indica que son los más ajustados para utilizarlos en la resolución de problemas en Matemática.

Por otra parte, en el proceso de observación que se llevó a cabo en el Centro Escolar Público Rubén Darío en Susulí – Matagalpa, se encontró que el docente de Matemática hace uso del Método de Polya para resolver problemas de investigación Matemática, aunque no de la manera correcta. Asimismo, se visualizó que los discentes mostraron poco interés en aplicar el Método de Polya en la resolución de problemáticas relacionadas a la vida diaria, esto se dio por la mínima interacción entre docente – estudiante bajo las preguntas que permite desarrollar dicho Método, pues este tiene su fundamento en la capacidad de análisis que desarrolla el estudiante, su pensamiento crítico y su reflexión sobre diversos aspectos.

Además, para tener mayor dominio de la aplicación del Método de Polya en el cálculo de Área y Volumen de la Pirámide, se hace una propuesta metodológica en donde se da realce a la forma de como encauzar a que el docente sea un facilitador de ideas y el estudiante el portador de los detalles del cómo se puede resolver el problema que se ataca, es decir, que la propuesta presenta las herramientas necesarias para abordar un problema de la vida diaria a través de la utilización del Método de Polya y del cual, un docente puede apropiarse fácilmente para desarrollarlo en el aula de clase.

Asimismo, el propósito que presenta la propuesta es hacer que el docente se auxilie del Método de Polya al momento de resolver problemas, en donde esto ayudará a que el estudiante sepa qué hacer cuando esté frente a un problema Matemático y a la vez que se interese por resolver problemas a través de un método que le facilite obtener el resultado esperado.

Por otra parte, la aplicación del Método de Polya presentada en la propuesta metodológica conlleva a que el estudiante conteste de una manera acertada las preguntas realizadas por el docente, lo que en la realidad puede ocurrir lo contrario, entonces para apoyarse de dichas interrogantes se debe adecuar al momento en que se debe aplicar, ya que dicha propuesta presentada es similar a un plan de clase, pues no siempre dentro del aula de clase se aplica a como está estipulada.

Es por tal razón que dichas preguntas que presenta la propuesta pueden ser modificadas, quitadas o anexadas de acuerdo a las necesidades que se presente al momento de aplicarse dicho Método en la resolución de problemas de Área y Volumen de la Pirámide.

Además, dar a conocer cómo se debe aplicar el Método de Polya en la resolución de problemas de Área y Volumen de la Pirámide en situaciones de la vida cotidiana, como también la manipulación y uso del software Matemático Geogebra, permite tener mayor base teórica y práctica al momento de darse la interacción entre docente – estudiante.

OBJETIVOS

Objetivo general

Proponer resolución de problemas de Área y Volumen de la Pirámide aplicando los pasos del Método de Polya.

Objetivos específicos

1. Diseñar problemas de aplicación sobre el cálculo de Área y Volumen de la Pirámide relacionado a situaciones de la vida diaria.

2. Facilitar la forma de aplicación de los pasos del Método de Polya al resolver problemas de Área y Volumen de la Pirámide.

3. Valorar la utilidad del software Geogebra al resolverse problemas de Área y Volumen de la Pirámide aplicando el Método de Polya.

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

El resolver problemas permite desarrollar una amplia gama de experiencias, goce, satisfacción y adquisición de conocimientos en el resolutor, es por tal razón que para obtener resultados al momento de atacar un problema Matemático es viable tener un método que guíe paso a paso el proceso de resolución.

El ataque a problemas Matemáticos es el gran constituyente de construcción de aprendizaje y del desenvolvimiento de nuevos conocimientos, como lo afirma Polya (1965) que “un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema hay cierto descubrimiento” (p.5), entonces es algo muy eminente lanzarse al ataque a un problema pues no solo por encontrar la solución se obtiene beneficios sino que además el cerebro del resolutor desarrolla habilidades analíticas y por ende se empapa de conceptos Matemáticos que no se sabían.

Asimismo, Polya (1965) detalla que, si un docente de Matemática “pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello”(p.5), es por tal razón que en esta propuesta se plantean algunos problemas de Área y Volumen de la Pirámide con vistas que a través de la comunicación directa docente – estudiante, con el apoyo de herramientas educativas como el software Matemático Geogebra y materiales concretos, permitan el proceso de aprendizaje de la Matemática en estudiantes de décimo grado.

Además, la propuesta presenta la resolución de dichos problemas a través del afianzamiento de los pasos del Método de Polya, en donde la visualización del Método es encaminar o facilitarle una vía al resolutor para que pueda llegar a obtener los resultados que se desea.

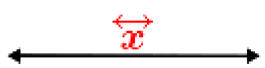
PRECONCEPTOS QUE SE DEBE TENER PARA EL ESTUDIO DE LA PIRÁMIDE

- Conocimiento sobre segmento.
- Representación de plano.
- Perímetro de un polígono.
- Área de un triángulo, del cuadrado, del rectángulo y de un polígono regular.
- Idea sobre las terminologías: cúspide, vértice, lados, altura y base.
- Elementos que estructuran a una pirámide.

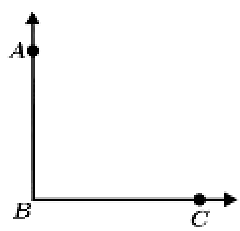
ACTIVIDADES INICIATIVAS

1. Diga cuál de las siguientes figuras representa un plano.

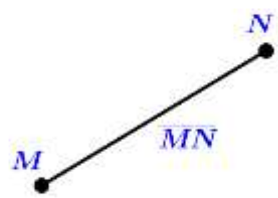
a)



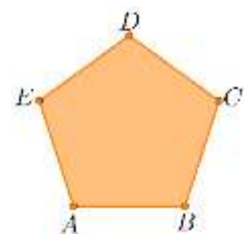
b)



c)

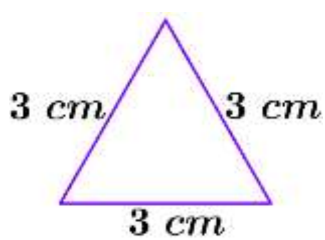


d)

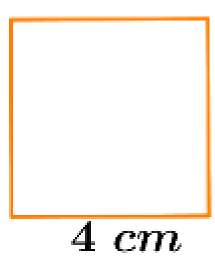


2. Encuentre perímetro y área de las siguientes figuras planas.

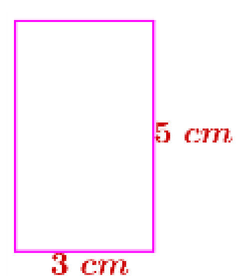
a)



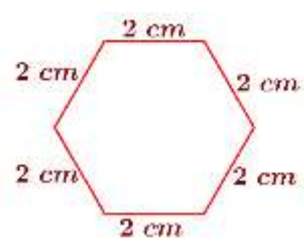
b)



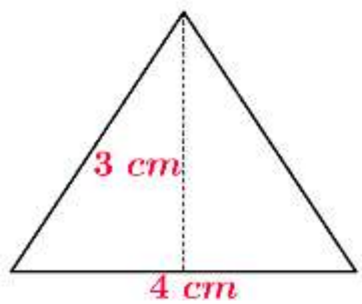
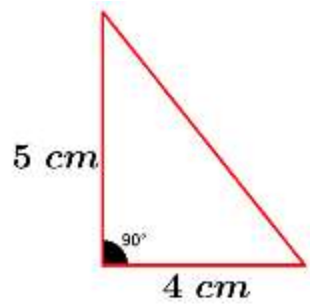
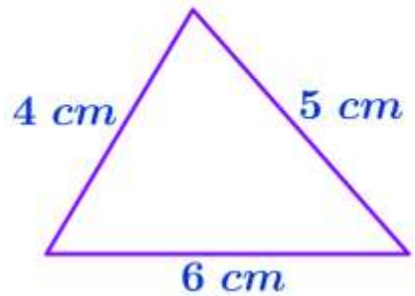
c)



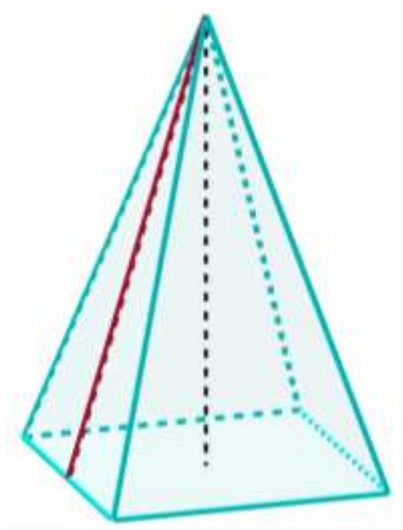
d)



3. Aplique la fórmula dada para encontrar el área de cada triángulo.

$A = \dfrac{b \times h}{2}$		$A = \sqrt{s(s -)(s - b)(s - c)}$ En donde $s = \dfrac{Perímetro\ del\ triángulo}{2}$
		

4. A través de la siguiente figura, describa las partes que usted conoce de dicha pirámide.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE ÁREA Y VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE APLICANDO EL MÉTODO DE POLYA.

PROBLEMA 1: EL TECHO DE UNA CASA

Felipe tiene curiosidad de conocer el área que ocupa el techo de una casa en forma de pirámide cuadrangular, la cual se encuentra ubicado a tres cuadras de donde él habita, pero no sabe con certeza las medidas correspondientes, entonces realiza una suposición de que el lado de la base del techo es L y la altura de dicho techo es H. Pueden ayudar a Felipe a averiguar el área en función de la altura y del lado de la base.

1 paso: Comprender el problema

Maestro: ¿Comprenden el enunciado?

Estudiante: Profesor se ve que es complicado porque no hay datos numéricos para los lados de la base y la altura.

Maestro: Tienen razón, así que debemos auxiliarnos de algo para encontrar lo que pide y, ¿qué es lo que pide el problema?

Estudiante: Bueno, área profesor.

Maestro: Así es, y ¿qué es área?

Estudiante: Es una superficie, o sea la parte externa de un cuerpo.

Maestro: Correcto, el área es lo que cubre a un determinado objeto o cuerpo a como ustedes lo conceptualizaron, entonces, a qué podemos llegar con esta información.

Estudiante: No se profesor.

Maestro: Contéstenme la siguiente pregunta: las caras laterales de una pirámide ¿qué forma tienen?

Estudiante: Profesor son triángulos isósceles, bueno es lo que me acuerdo de lo que usted nos había enseñado en la clase introductoria.

Maestro: Así es, además de ser triángulos isósceles, que otra característica presentan las caras congruentes.

Estudiante: Bueno profesor ya me acordé que los triángulos isósceles que conforman a la pirámide, son semejantes.

Maestro: Así es, pero eso sí, se cumple siempre cuando la base sea un polígono regular de lo contrario no se cumple.

Estudiante: Gracias profe por esa aclaración.

Maestro: Sabemos que es área la que calcularemos, pero ¿cuál de las que les he enseñado se buscará?

Estudiante: Profe yo digo que es área lateral, porque he visto el techo de las casas y son huecas, o sea no presentan una base.

Maestro: Claro en eso tiene razón, así que calcularemos área lateral.

Estudiante: Profe, sigo sin entender que cómo encontraremos el área lateral.

Maestro: Bueno como no tenemos datos numéricos, el área lateral se encontrará en función de lado de la base y de la altura que presenta el techo.

Estudiante: Ahora si entendí esa parte.

2 paso: Concebir un plan

Maestro: Le pregunto: ¿cómo llegar a encontrar el área lateral del techo?

Estudiante: Profe y si calculamos el área por cada parte que conforma a la pirámide.

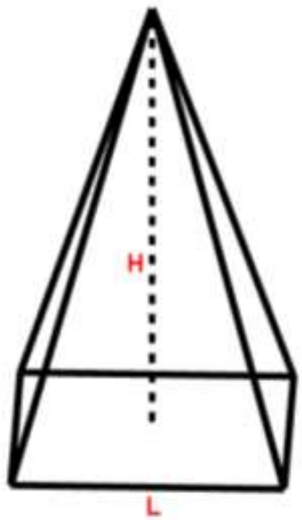
Maestro: Me parece muy bien, lo cual constituye sumar las áreas de todas las partes, en este caso las áreas de las caras laterales.

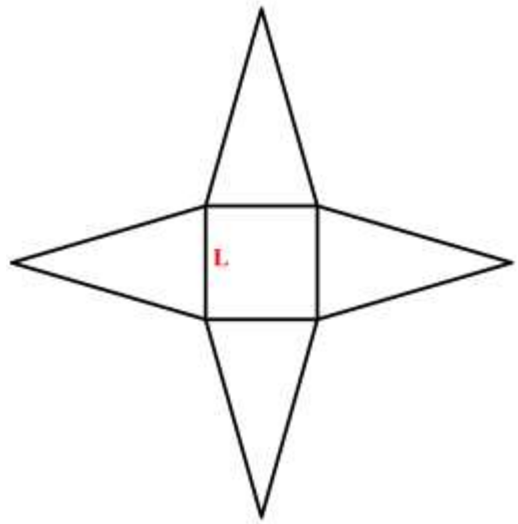
Estudiante: Profe no cree que para mayor ordenamiento se puede hacer un esquema de las partes del techo con forma de pirámide cuadrangular.

Maestro: Excelente idea, entonces utilizaremos una plantilla que modele el techo en forma de pirámide cuadrangular, eso para que nos guíe.

Estudiante: Bueno.

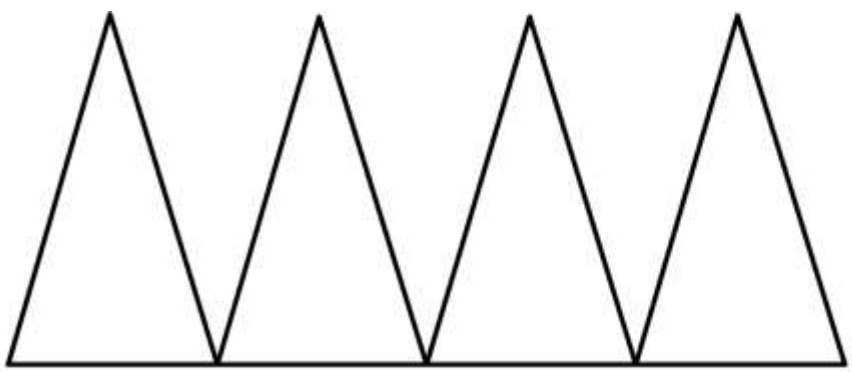
Maestro: Observen a la pirámide y la plantilla de la misma, ¿se tiene una mejor connotación del problema?





Estudiante: Si profe, además podemos separar la base de las caras laterales, ya que no utilizaremos la base.

Maestro: Me parece bien, dibujémosla en la pizarra.

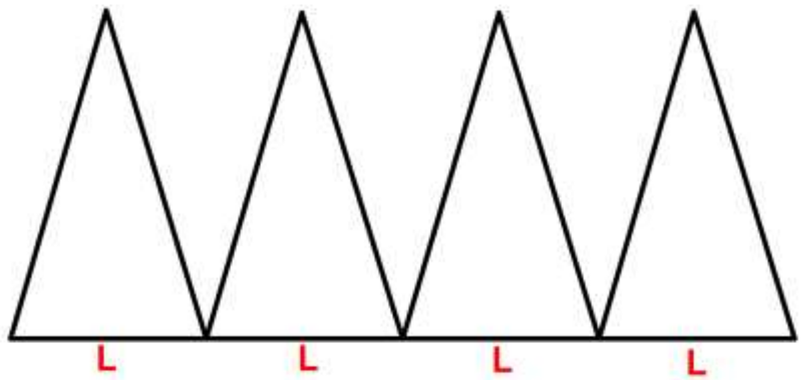


Estudiante: Entonces la medida de la base de cada triángulo cómo sería profesor.

Maestro: Se sabe que la base de la pirámide es un cuadrado y los lados de la base del cuadrado también corresponden a los lados de la base de cada triángulo, y si cada lado de la base del cuadrado es L, entonces para ustedes cuánto mide cada base de los triángulos.

Estudiante: Profe mediría L.

Maestro: Así es, entonces la plantilla quedaría de la siguiente manera.



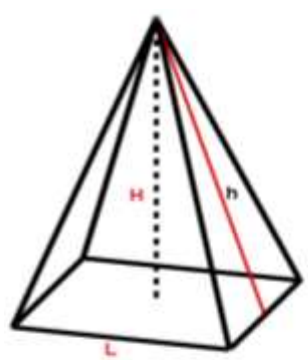
Estudiante: Bueno profe, ahora la altura de cada triángulo sería H.

Maestro: Realmente no es H la altura de cada triángulo, sino que H es la altura de la pirámide, o sea la que se traza desde la cúspide de la pirámide hasta el centro de la base.

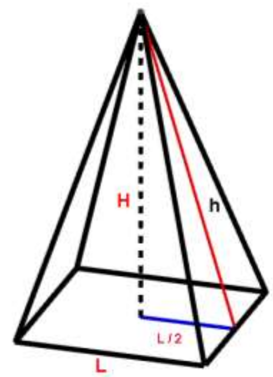
Estudiante: Y entonces como se calculará.

Maestro: Hay que buscar la forma, ya que el problema nada más nos proporciona la altura de la pirámide.

Estudiante: Profe tengo una idea, y si hago lo siguiente en la pirámide: se sabe que todos los triángulos son iguales por ende todos tienen la misma altura, entonces lo que quiero hacer es trazar una altura h en uno de los triángulos la cual se hace trazando un segmento desde la cúspide al punto medio de la base del triángulo, así profe:



Y como se sabe que la altura H cae perpendicularmente al centro de la base, entonces dibujamos una línea desde el centro de la base hasta el punto medio donde cae la altura del triángulo, bueno eso es lo llamado apotema de la base, pero como la base es un cuadrado y la apotema parte del punto medio al centro de la pirámide, entonces esa apotema será la mitad del lado de la base de la pirámide, así profe:



A como se observa profe, nos ha quedado un triángulo rectángulo y con el teorema de Pitágoras podremos calcular la altura del triángulo, que en este caso corresponde a la hipotenusa.

Maestro: Excelente, que buen análisis, y eso haremos, pero ¿qué se puede hacer para encontrar el área de cada triángulo que conforman las caras laterales?

Estudiante: Profe, muy fácil, al conocerse la base y la altura se aplicaría la fórmula: $\boldsymbol{A_{triángulo} = \frac{b \times h}{2}}$.

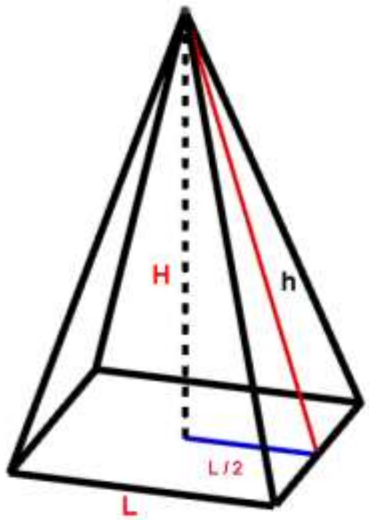
Maestro: Así es.

Estudiante: Si profe, y al ser todos los triángulos iguales, también las áreas serán iguales, entonces supongo que se debe multiplicar la primera área por cuatro ya que son cuatro triángulos lo que se formaron y así obtendremos el área lateral.

Maestro: Muy bien, así procederemos a solucionarlo.

3 paso: Ejecutar el plan

Maestro: Calculemos entonces la altura de uno de los triángulos, aplicando el teorema de Pitágoras.



Teorema de Pitágoras

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

En este caso la altura del triángulo h es la hipotenusa

$$\boldsymbol{h^2 = H^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{h = \sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{4H^2 + L^2}{4}} = \frac{\sqrt{4H^2 + L^2}}{2}}$$

Esa es la altura de un triángulo, pero como todos los triángulos son congruentes, entonces todos tendrán la misma altura.

Ya calculado la altura del triángulo, ¿qué seguía?

Estudiante: Calcular el área de un triángulo en donde se conoce que la base es L y la altura $\boldsymbol{h = \frac{\sqrt{4H^2+L^2}}{2}}$

$$\boldsymbol{A_{triángulo} = \frac{b \times h}{2}}$$

$$\boldsymbol{A_{triángulo} = \frac{b \times h}{2} = \frac{L \times \frac{\sqrt{4H^2 + L^2}}{2}}{2} = \frac{L\sqrt{4H^2 + L^2}}{4}}$$

Maestro: Ya encontramos el área de un triángulo, entonces para encontrar el área lateral, ¿qué haremos?

Estudiante: Profe el área del triángulo encontrado multiplicarlo por cuatro, y así ya encontramos el área lateral

Maestro: Muy bien, hagámoslo entonces:

$$A_L = 4\left(\frac{L\sqrt{4H^2 + L^2}}{4}\right) = L\sqrt{4H^2 + L^2}$$

Estudiante: Que bueno que ya encontramos el área lateral, fue un poco complicado y más por el análisis.

Maestro: Si así es, y si se le pidiera el área total, qué harían.

Estudiante: Profesor sumarle al área lateral el área de la base.

Maestro: En este caso, el área de la base cómo la fuesen calculado.

Estudiante: Como la base es un cuadrado, aplicando la fórmula: $A = l^2$

Maestro: Entonces encontremos el área de la base en donde conocemos que cada lado del cuadrado mide L.

$A_B = l^2 = L^2$

Ahora necesito que pase un estudiante a escribir la fórmula para encontrar el área total de la pirámide que estamos estudiando.

Estudiante: Entonces el área total sería:

$$A_T = L\sqrt{4H^2 + L^2} + L^2 \text{ ó } A_T = L\left(\sqrt{4H^2 + L^2} + L\right)$$

Profesor esto nos da a entender que el área total de una pirámide regular recta es sumar el área lateral con el área de la base: $A_T = A_L + A_B$

Maestro: Así es, muy buen análisis, y para que sepan, hemos deducido el área lateral de forma generalizada, la cual siempre será $\boldsymbol{A_L = n\left(\frac{b \times h}{2}\right)}$ ya que siempre las caras laterales serán triángulos iguales y **n** representa el total de triángulos que posea la pirámide.

Estudiante: Que bien profe.

4 paso: Examinar la solución obtenida

Maestro: Revisemos si ya tenemos la respuesta que pedía el problema.

Estudiante: Encontramos el área lateral del techo en forma de pirámide cuadrangular.

Maestro: Entonces ya tenemos lo que buscábamos.

Estudiante: Así es, ya que nos pedían encontrar el área lateral en función de la base y de la altura de la pirámide, y también, aunque no nos pedían el área total la calculamos, muy bonito profe tuvo el desarrollo de la resolución del problema, aprendimos mucho.

Maestro: Eso es lo bueno, y qué reacción obtendrán cuando les toque resolver un problema parecido.

Estudiante: Pondremos en práctica, nuestros conocimientos adquiridos en esta clase.

Maestro: Están todos de acuerdo con su compañero.

Estudiante: Claro que si profesor.

PROBLEMA 2: LA PECERA

Carlos observa que en el patio de su vecina se encuentra una pecera llena de agua, la cual tiene forma de pirámide cuadrangular. Él desea saber qué cantidad de litros de agua contiene dicho depósito; pero no puede saber con exactitud las medidas correspondientes, entonces supone que la longitud de la base será L y la altura de la pirámide H. Ayudar a Carlos a encontrar el volumen de la pecera en función de la altura y del lado de la base.

Paso 1: Comprender el problema

Maestro: Lean el enunciado del problema, si es posible varias veces hasta comprender lo que se quiere buscar.

Estudiante: Está bien profesor, por los momentos voy entendiendo un poco.

Maestro: Eso es bueno, y que datos nos está proporcionando el problema.

Estudiante: No nos dan datos específicos o sea numérico, pero es muy claro la connotación del enunciado.

Maestro: Entonces entienden lo que desea el problema que encontremos.

Estudiante: Así es, y algo muy interesante, que los valores incógnitos pueden tomar cualquier valor que uno desee.

Maestro: Claro que sí, puede describir el problema con sus propias palabras.

Estudiante: Me habla de una pirámide que está compuesta por una base cuadrada, y en donde la altura de la pirámide toma valor de H y los lados de la base tienen medidas L.

Maestro: Pero en sí, qué desea saber Carlos.

Estudiante: Profesor el problema enuncia que Carlos quiere saber la cantidad de agua en litros que posee la pecera, aunque no entiendo como calcularemos lo que nos pide, sino tenemos datos numéricos.

Maestro: Bueno en esa parte tiene razón, aunque el problema tiene una condición para encontrar la cantidad de agua, lean nuevamente el problema.

Estudiante: Cierto profesor, nos dice calcular la cantidad de agua en litros en función de los lados de la base que es L y de la altura de la pirámide que es H.

Maestro: Entonces en vez de tener las dimensiones como un dato numérico, lo trabajaremos con letras. Deseo saber algo: cuando se habla sobre cantidad de agua en litros que contiene el depósito, ¿a qué se refiere?

Estudiante: Profe al saber que el agua ocuparía la porción definida por el depósito en forma de pirámide cuadrangular, da referencia a que se calculará el volumen.

Maestro: Muy bien, tienen alguna duda.

Estudiante: Tengo una duda profesor, el problema pide la cantidad de agua en litros no el volumen.

Maestro: Ah es que primero calcularemos el volumen y después se convertirá a litros y así ya sabremos qué cantidad de agua contiene el depósito.

Estudiante: Bueno, aunque profesor si se graficase sería mejor.

Maestro: Tendré en cuenta tu idea.

Paso 2: Concebir un plan

Maestro: ¿Cómo encontraremos el volumen de la pecera en forma de pirámide cuadrangular?

Estudiante: Profesor, no se me ocurre nada.

Intervención de otro estudiante: Que tan cierto es profesor que el volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma, bueno es que lo escuché a mi prima comentarlo, ah y que para que se cumpla tanto la pirámide y el prisma deben tener la misma base y altura.

Maestro: Excelente aporte, yo diría, lo que a dicho su compañero, sea verificado a través de material concreto.

Estudiante: No entiendo eso.

Maestro: Se los voy a explicar: Hacer una pirámide y un prisma, ya sea con cartulina u otro material, en donde ambos tengan misma base y altura, después de realizada comprobamos que si el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma.

Estudiante: Y cómo haremos dicha comprobación.

Maestro: Ustedes saben que el volumen es lo que ocupa un cuerpo u objeto sólido, entonces utilizaremos azúcar como sustancia para saber cuánto ocupa el prisma y la pirámide.

Estudiante: Me parece muy bien profesor, pero para verificar lo que dijo mi compañero anteriormente, que el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma, yo pienso que llenando hasta el tope a la pirámide de azúcar y después vaciándolo en el prisma y hacer el mismo proceso tres veces, dicho prisma se deberá llenar y bueno si se cumple se verificará lo expuesto por mi compañero.

Maestro: Muy buena opinión, y eso haremos, al vaciar en el prisma tres veces la porción de azúcar que caben en la pirámide, deduciremos que el volumen de la pirámide corresponde a la tercera parte del volumen del prisma.

Estudiante: Profesor, hacer esa verificación es una bonita experiencia.

Maestro: Así es, poseen material para hacer la pirámide cuadrangular y el prisma que también será de base cuadrada.

Estudiante: Si profesor, aunque tengo una pregunta: si se logra obtener una verificación positiva, como expresaremos dicha confirmación en función de L y H.

Maestro: Bueno en la clase pasada estudiamos los prismas, quién recuerda ¿cómo se calculaba el volumen de un prisma?

Estudiante: Yo profe, multiplicando el área de la base y la altura.

Maestro: Muy bien, conociendo la forma de cómo se calcula el volumen del prisma nos será fácil expresar el volumen de la pirámide, ya que tanto el prisma y la pirámide tiene la misma base o sea misma área y a la vez misma altura.

Estudiante: Ahora si entendí profesor, gracias por la aclaración.

Maestro: Que bueno que hayan comprendido esa parte, pues es esencial que entiendan lo que vamos hacer.

Estudiante: Así es profesor, aunque ya conociendo el volumen de la pirámide como calcularemos la cantidad de agua en litros que puede contener el depósito en forma de pirámide cuadrangular.

Maestro: Bueno, si suponemos que las dimensiones de la pirámide están dadas en centímetros utilizaremos la unidad de medida del volumen que expresa que $1cm^3 = 0.001\ Lt$, la cual por medio de la aplicación de la regla de tres podemos encontrar la cantidad de agua y en donde debe estar expresada en función de L y H.

Estudiante: Está bien profesor, me gusta esa parte de la conversión, pues así estamos recordando lo aprendido en grados anteriores.

Paso 3: Ejecutar el plan

Maestro: Realicemos entonces el prisma cuadrangular y la pirámide también con base cuadrangular, ya saben que tienen igual altura y base, háganlo bien medido para que al verificar la respuesta correcta el resultado tenga exactitud.

Estudiante: Ya terminé profesor, puede observar cómo me quedó.

Maestro: Muy bien, he visualizado que están bien medidos.

Estudiante: Esperamos a los demás para hacer la verificación.

Maestro: Sí, pero hay que buscar la sustancia que ocuparemos para hacer la verificación.

Estudiante: Bueno, yo que ya terminé lo conseguiré.

Maestro: Me parece muy bien.

Estudiantes: Ya terminamos profesor.

Maestro: Bueno, empecemos entonces, llenemos la pirámide cuadrangular hasta el tope y vaciémoslo en el prisma, hagamos esto tres veces para ver qué pasa.

Primer proceso	Segundo proceso	Tercer proceso
		

Estudiante: Profesor, se ha llenado el prisma de base cuadrada con tres veces la cantidad de azúcar contenida en la pirámide.

Maestro: Que bien, entonces hemos comprobado lo que dijo su compañero, que el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen del prisma, esto porque se ha llenado después de vaciar tres veces lo contenido en la pirámide. Entonces copien en su cuaderno lo siguiente:

$$V_{Pirámide} = \frac{V_{Prisma}}{3} \quad \text{Ec 1}$$

Recordemos cómo se calcula el volumen del prisma.

Estudiante: Multiplicando el área de la base por la altura, o sea $V_{prisma} = A_b \times h$

Maestro: Sustituyamos lo que dijo su compañero en la Ec 1.

$$V_{Pirámide} = \frac{A_b \times h}{3} \text{ Ec } 2$$

Pregunto: La base tanto del prisma como de la pirámide como eran.

Estudiante: Eran de base cuadrada profesor.

Maestro: Y cómo calculamos el área de un cuadrado.

Estudiante: Elevando un lado al cuadrado, así profe: $A_{Cuadrado} = l^2$

Maestro: Sustituyamos en Ec 2 el área de la base por la expresión $A_{Cuadrado} = l^2$

$$V_{Pirámide} = \frac{l^2 \times h}{3}$$

Como sabemos que la pecera en forma de pirámide cuadrangular y el prisma tienen las mismas dimensiones con respecto a la altura y los lados de la base, entonces ahora expresaremos la ecuación que se ha originado en función de L y la altura H.

$$V_{Pirámide} = \frac{L^2 \times H}{3}$$

Estudiante: Profesor entonces ya hemos encontrado el volumen de la pirámide en función de L y H.

Maestro: Así es, y que sigue.

Estudiante: Usted profesor nos dijo que íbamos a suponer que las dimensiones fuesen expresadas en centímetros para después aplicar la unidad de conversión que dice $1cm^3 = 0.001\ Litros$

Maestro: Entonces hagámoslo.

$$V_{Pirámide} = \frac{(Lcm)^2 \times Hcm}{3} = \frac{L^2cm^2 \times Hcm}{3} = \frac{L^2Hcm^3}{3}$$

Ya expresado en centímetros cúbicos el volumen de la pirámide, podemos encontrar la cantidad de agua en litros, de la siguiente forma.

$1cm^3 \ = 0.001\ Litros$

$\frac{L^2Hcm^3}{3} \ = x$

En donde:

$$x = \frac{\frac{L^2Hcm^3}{3} \times 0.001\ lt}{1cm^3} = \frac{0.001\left(\frac{L^2H}{3}\right)lt}{1} = 0.001\left(\frac{L^2H}{3}\right)litros$$

Estudiante: Profesor lo que se ha encontrado ahorita ya corresponde a la cantidad de agua en litros expresada en función de L y H.

Maestro: Así es.

Paso 4: Examinar la solución obtenida

Maestro: Fue una tarea larga pero muy productiva y bueno será que hemos encontrado lo que nos pedía el problema.

Estudiante: Así como dice usted que fue una tarea extensa yo diría que se ha fortalecido más nuestra capacidad de análisis, y profe, yo digo que ya encontramos la respuesta, ya que nos pedía calcular la cantidad de agua en litros y expresada en función de L y H y bueno es de $0.001\left(\frac{L^2H}{3}\right)$ litros.

Maestro: Muy bien, y que harán cuando estén frente un problema similar.

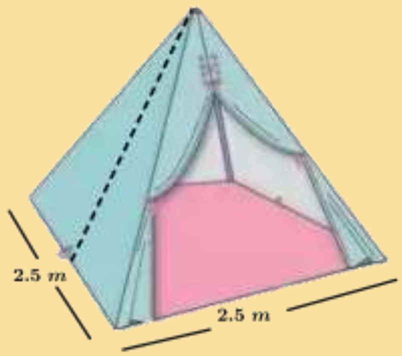
Estudiante: Aplicar detalladamente lo que se ha aprendido al resolverse este problema.

Maestro: Eso está muy bien, y gracias por su amable atención y colaboración.

Estudiante: Gracias a usted profesor.

PROBLEMA 3: TIENDA DE CAMPAÑA

Una familia de la zona urbana ha llegado a la comarca de Susulí a observar la belleza natural, aunque para disfrutar más de lo que presenta el lugar, deciden construir una tienda de campaña en forma piramidal de base cuadrangular a cómo se muestra en la figura. ¿Qué cantidad de lona tiene que comprar si la apotema de la pirámide es de 3 metros y uno de los lados de la base mide 2,5 metros?



Paso 1: Comprender el problema.

Maestro: ¿Puede usted comprender el enunciado?

Estudiante: Profe, tengo duda en lo siguiente: a qué se refiere apotema de la pirámide.

Maestro: Está bien, se refiere a la altura de una de las caras laterales de la pirámide, en donde es muy distinto a la apotema de la base, que si se diera en un problema se especifica que corresponde a la superficie basal.

Estudiante: Gracias profe por aclararme esa parte.

Maestro: Podrían ustedes describir el problema, con sus propias palabras.

Estudiante: Claro, se desea saber la cantidad de lona que se necesita para construir una tienda de campaña en forma de pirámide y que tiene base cuadrada.

Maestro: Así es y ¿cuáles son los datos?

Estudiante: El enunciado nos da la medida de uno de los lados de la base y la apotema de la pirámide.

Maestro: Muy bien, ¿pero saben a lo que se quiere llegar?

Estudiante: Lo que pide es la cantidad de lona para cubrir la tienda, o sea cuántos metros se necesitarían, y bueno como se habla de cubrir una superficie lo que se debe encontrar es el área.

Maestro: Muy bien analizado, alguna otra duda.

Estudiante: Profe, yo sé que debo calcular el área, pero no sé si es el área lateral o total.

Maestro: Entonces que se debe calcular: área lateral o área total.

Estudiante: Para mí que el área total, porque una tienda de campaña es cerrada en su estructura.

Maestro: Excelente, ya saben adónde llegar, y se posee información suficiente.

Estudiante: Sí profesor.

Paso 2: Concebir un plan

Maestro: Una pregunta para el grupo, este problema que estamos resolviendo es similar a algún otro que ustedes hayan resuelto antes.

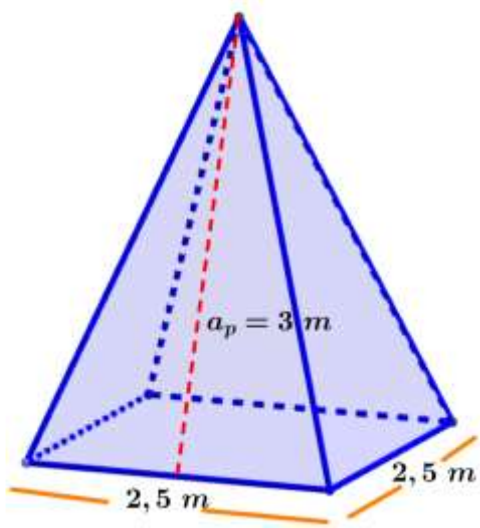
Estudiante: Profe, parecido a uno resuelto en la clase anterior del prisma, y bueno aparte de los conceptos previos alcanzado en primaria sobre la pirámide nos ayudará a darnos más idea para encontrar la respuesta.

Maestro: Muy bien, y que estrategia nos ayudaría para satisfacer lo que nos pide el enunciado.

Estudiante: Esquematizar bien la figura que muestra el problema, o sea, ubicar los datos proporcionados para buscar la forma ideal para encontrar el área lateral, en mi opinión dibujar una pirámide cuadrangular que se parezca al de la figura y trabajar en ella.

Maestro: Entonces necesitaré un voluntario para que dibuje una pirámide cuadrangular y ubique los otros datos que da el problema.

Estudiante: Está bien profe, yo voy a pasar.



Maestro: Gracias por su participación.

Estudiante: Profesor si es área total que encontraremos, no es mejor ilustrar esa pirámide cuadrangular dibujada como una plantilla.

Maestro: Buena idea, pero me gustaría saber cómo imagina encontrar el área total.

Estudiante: Bueno, como sabemos que las caras laterales de la pirámide son triángulos y todos congruentes, encontramos el área de uno de ellos y lo multiplicamos por el total de triángulos que tenga la pirámide, y así calculamos el área lateral, después le sumamos el área de la base y nosotros sabemos desde años anteriores como calcular el área de un cuadrado, pues en este caso la pirámide presenta una base cuadrangular.

Maestro: Su idea es espectacular, así que partiremos de una plantilla de una pirámide cuadrangular en donde se sabe que los lados de la base miden 2,5 metros y la apotema de la pirámide o sea la altura de una de las caras laterales que son triángulos tendrá una longitud de 3 metros.

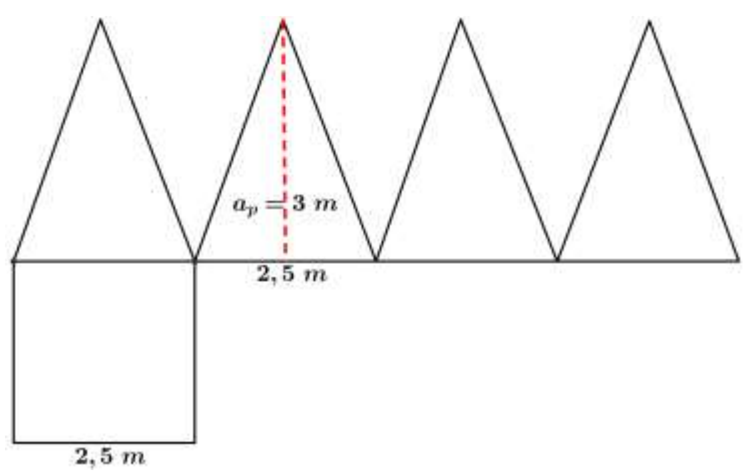
Estudiante: Si profesor, calculemos entonces lo que se nos pide.

Paso 3: Ejecutar el plan

Maestro: Hagamos entonces la plantilla de la pirámide que se ha dibujado en la pizarra

Estudiante voluntario: Le ayudo profesor.

Maestro: Bueno.



Estudiante: Ya finalicé profe.

Maestro: Muy bien, se le agradece a este joven, le quedó muy bonito.

Estudiante: Lo que sigue será encontrar el área lateral y después el área de la base para luego sumar y así tenemos el área total que es lo que se nos pide.

Maestro: Así es, y ¿cómo encontraremos el área lateral?

Estudiante: Profesor, encontrando el área de una de las caras laterales que es un triángulo, pues se conoce cuánto mide la base del triángulo pues es la misma medida de los lados de la base, también profesor la altura pues es la apotema de la pirámide y luego lo multiplicamos por cuatro ya que con base cuadrada se han formado cuatro triángulos.

Maestro: Muy bien, entonces procedamos a hacer lo dicho.

Área de una de las caras laterales;

$$A_{Triángulo} = \frac{b \times h}{2} = \frac{(2{,}5m)(3m)}{2} = \frac{7.5m^2}{2} = 3{,}75m^2$$

Como todas las caras laterales (triángulos) son semejantes y se han formado cuatro triángulos, entonces el área lateral es:

$$A_L = 4(3{,}75m^2) = 15m^2$$

Dando a conocer la fórmula para el cálculo del área lateral de una pirámide regular en función de la base y la altura de una de las caras laterales sería:

$$A_L = n\left(\frac{b \times h}{2}\right) = n\left(\frac{l \times a_p}{2}\right)$$

En donde:

n corresponde a la cantidad de caras laterales (esto depende de cuántos lados tenga la base).

l representa la longitud de un lado de la base.

a_p constituye a la altura de una de las caras laterales.

$\frac{b \times h}{2}$ corresponde a la fórmula para encontrar el área de un triángulo.

Estudiante: Que bien que ya encontramos el área lateral y su fórmula generalizada la cual está en función de la base y la altura de una de las caras laterales.

Maestro: Si, así es, y que sigue ahora.

Estudiante: Encontrar el área de la base, y en este caso la base es un cuadrado y para calcular su área es tomar un lado y elevarlo al cuadrado.

Maestro: Así es, y sabiendo que los lados de la base miden 3 metros, calculemos entonces el área de la base.

El área de la base sería:

$$A_{Cuadrado} = l^2 = (2{,}5m)^2 = 6{,}25m^2$$

Ya encontrado el área de la base, nos hace falta algo.

Estudiante: Profesor, sumar el área lateral con el área de la base y así encontraremos el área total pedida.

Maestro: Claro, entonces sumemos.

$$A_T = A_L + A_b = 15m^2 + 6{,}25m^2 = 21{,}25m^2$$

Estudiante: Que bien que ya hemos encontrado el área total de la pirámide regular.

Paso 4: Examinar la solución obtenida

Maestro: La respuesta del problema sería.

Estudiante: La respuesta profe es de $21{,}25m^2$

Maestro: Están seguros que esa es la respuesta.

Estudiante: Es correcto profe, porque el problema nos pedía calcular la cantidad de lona necesaria para construir la tienda de campaña.

Maestro: Tienen razón, entonces como podemos enunciar la respuesta.

Estudiante: Se necesita aproximadamente $21{,}25m^2$ de lona para fabricar una tienda campaña en forma de pirámide cuadrangular con lados de la base igual a 3 metros y apotema de la pirámide 2,5 metros.

Maestro: Todos están de acuerdo con esta respuesta.

Estudiante: Sí profe.

Maestro: Y como harán para calcular el área lateral y total en caso de resolver un problema parecido.

Estudiante: Emplearé la forma que he aprendido en este día profesor.

Maestro: Me gusta su idea.

PROBLEMA 4: RENOVACIÓN DEL TECHO DE LA TORRE DE UNA IGLESIA

El techo de la torre de una iglesia tiene que ser renovado, el techo tiene la forma de una pirámide regular con base cuadrada de $49m^2$ y una altura de $14.5m$. Calcule los costos para renovar el techo si la reposición de $1m^2$ cuesta C$ 25 (materiales y mano de obra)

Paso 1: Comprender el problema

Maestro: ¿Comprende usted lo que dice el enunciado?

Estudiante: Un poco profesor, solo que tengo una pequeña inquietud con respecto a lo que se refiere pirámide regular.

Maestro: Ah bien, se los explico, la pirámide regular se distingue por la base ya que éste debe ser un polígono regular, o sea, todos los lados congruentes. Puede decirme la descripción del problema con sus propias palabras.

Estudiante: Bueno, este problema nos dice que el techo de una iglesia tiene forma de una pirámide regular de base cuadrada y debe ser renovado, además, nos proporciona el área de la base y la altura, en donde nos pide que calculemos el costo para renovar el techo.

Maestro: Así es, y ¿cuáles son los datos que tenemos del problema?

Estudiante: Profe, nos dan el área de la base, la altura y el valor en córdobas de un metro cuadrado.

Maestro: Y están seguro a lo que se quiere llegar.

Estudiante: Si, se desea saber el costo para renovar el techo, o sea, nos da idea de superficie, entonces quizás se deba calcular el área lateral, pues se sabe que el techo tiene su base descubierta, por tal razón no se debe calcular el área total, cierto profesor.

Maestro: Si claro, así es y cree que después que se calcule este valor podemos encontrar el costo de la remodelación.

Estudiante: Claro que si profe, es lo esencial para contestar lo que nos pide el problema.

Maestro: Entonces ya saben a dónde llegar y hay mucha información.

Estudiante: Profe nos falta saber que fórmula utilizaremos para encontrar el área lateral, ah no se preocupe profesor pues usted nos dio la fórmula, así que tenemos bastante información.

Maestro: Así que no tenemos información extraña.

Estudiante: Parece profe.

Paso 2: Concebir un plan

Maestro: Alguna vez han resuelto problemas parecido a este que estamos operando.

Estudiante: Según tengo entendido en los prismas se calcula áreas laterales, área total y volumen.

Maestro: Que bueno, esos conocimientos nos pueden ayudar y díganme ¿qué estrategia se puede utilizar en la resolución de este problema?

Estudiante: Hacer un gráfico de una pirámide regular con base cuadrada en la pizarra, el cual éste simule el techo de la iglesia, esto para guiarnos y así poder iniciar, así como también escribir la fórmula a utilizar.

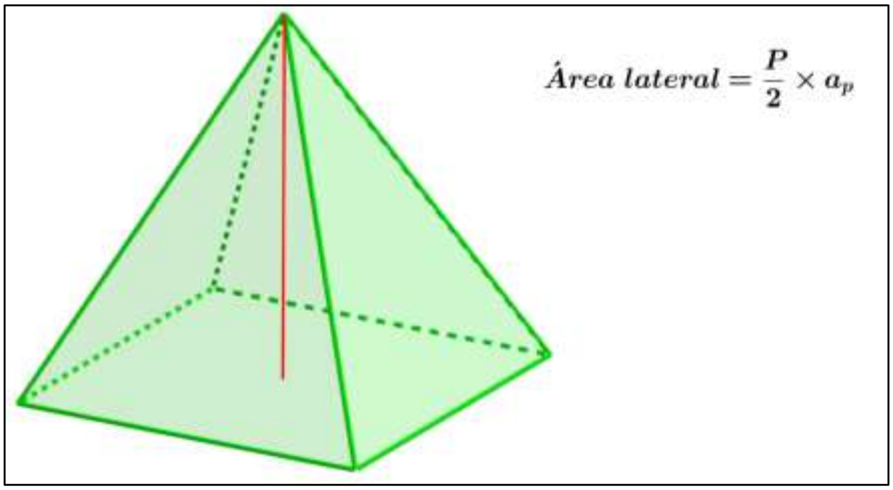
Maestro: Excelente idea.

Estudiante: Profe es raro ver un techo en forma de pirámide.

Maestro: Ah tienen razón, pero la arquitectura es rica en arte y en moldes que nos sorprenden.

Paso 3: Ejecutar el plan

Maestro: Observemos en la pizarra el gráfico, pero quiero antes de proseguir que me digan los elementos que componen a la pirámide.



Estudiante: Profe, se observa la base cuadrada, la altura, la cúspide y los vértices.

Maestro: Muy bien, díganme ¿qué debemos calcular primero?

Estudiante: Profe, observando la fórmula del área lateral, lo primero que se debe calcular es el perímetro de la base.

Maestro: Correcto, entonces procedamos.

Estudiante: Profe no tenemos los lados de la base, sino que nada más el área de la base que es de $49m^2$, como le hacemos.

Maestro: Alguna idea.

Estudiante: Profe de los grados anteriores me acuerdo que, para encontrar el área de un cuadrado, lo que hacíamos era elevar un lado al cuadrado, y que dice si hacemos el proceso inverso.

Maestro: Muy bien, excelente, entonces primero calcularemos el valor numérico de los lados de la base, ya que poseemos el área del mismo.

Estudiante: Esta bien, profe, el cálculo me da:

$A_{cuadrado} = l^2$

Sustituimos $49m^2 = l^2$

En ambos lados extraemos la raíz cuadrada $\sqrt{49m^2} = \sqrt{l^2}$

Operando nos queda $l = 7m$

Maestro: Ya conociendo el valor de los lados de la base, muy fácilmente encontramos el perímetro de la base.

Estudiante: Así es.

Maestro: procedamos entonces:

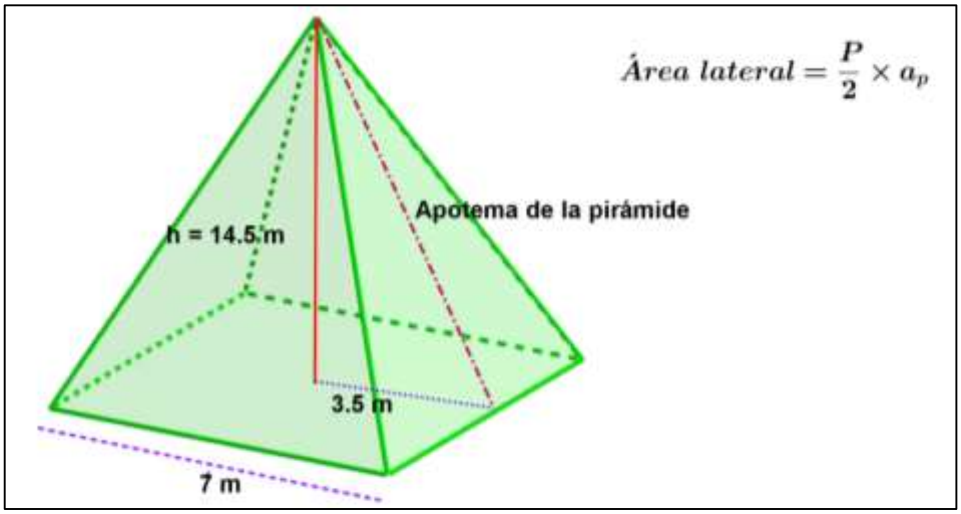
$P = 4l = 4(7) = 28m$

Estudiante: Profe da $28m$ el perímetro, ahora se debe calcular el apotema de la pirámide, no sé cómo profesor.

Maestro: Alguien posee una idea.

Estudiante: Si se sabe que la apotema de la pirámide corresponde a la altura de las caras laterales, entonces que dice si tomamos una cara lateral y trazamos la altura de ésta y como ya conocemos la altura de la pirámide formamos un triángulo rectángulo, en donde la base de este triángulo sería la mitad de un lado del cuadrado. Que dice profe.

Maestro: Que bien, así debe ser, entonces para mayor interpretación hagamos los trazos en el gráfico que tenemos en la pizarra.



Maestro: Ya realizamos los trazos para mejor interpretación. Alguien me puede decir como calculo la apotema.

Estudiante: Profe por ser triángulo rectángulo, se debe aplicar teorema de Pitágoras.

Maestro: Así es, muy bien, entonces apliquen.

Estudiante: Bueno profesor

$$(a_p)^2 = (14.5m)^2 + (3.5m)^2$$

Operamos $(a_p)^2 = 210.25m^2 + 12.25m^2$

Operamos $(a_p)^2 = 222.5m^2$

En ambos lados sacamos raíz cuadrada $\sqrt{(a_p)^2} = \sqrt{222.5m^2}$

Obtenemos $a_p = 14.92m$

Maestro: ¿Cuánto les dio?

Estudiante: Nos dio aproximadamente $14.92m$; ahora si profe podemos calcular el área lateral.

Maestro: Así es, entonces calculen, a ver cuánto le da.

$$A_L = \frac{P}{2} xa_p = \frac{28m}{2} \times 14.92m = 14m \times 14.92m = 208.88m^2$$

Estudiante: Nos dio $208.88m^2$ aproximadamente.

Paso 4: Examinar la solución obtenida

Maestro: Revisemos, esa es la respuesta que nos pide el problema.

Estudiante: Si claro, profesor.

Maestro: Están seguros, no nos falta un procedimiento final.

Estudiante: Es cierto profesor nos falta calcular el costo en dólares para remodelar el techo. Entonces por medio de una regla de tres simple se puede hacer, verdad profesor.

Maestro: Así es, hagan los cálculos para ver cuánto le da.

Si 1 $m^2 \longrightarrow$ \$25

$208.88m^2 \longrightarrow$ x

$$x = \frac{208.88m^2 \times C\$25}{1m^2} = 208.88xC\$25 = C\$5{,}222$$

Estudiante: El resultado es de C$ 5, 222

Maestro: Ah ya, entonces como modelaríamos la respuesta al problema.

Estudiante: A profe, se necesitan C$ 5,222 para remodelar el techo de la iglesia en materiales y mano de obra.

Maestro: Aproximadamente C$5,222, lo cual es una idea clara de cuanto es el costo de inversión.

Estudiante: Si profe.

Maestro: Entonces ¿qué van hacer cuando se le pida el área lateral de la pirámide?

Estudiante: Calculamos primero el perímetro, apotema lateral, para posteriormente calcular el producto del semiperímetro por la apotema de la pirámide.

Maestro: Muy bien, excelente.

PROBLEMA 5: EL PLUVIÓMETRO

El agua de lluvia es recogida en un pluviómetro que tiene forma de pirámide cuadrangular regular invertida. El agua recogida en un día de lluvia alcanzó una altura de 9 cm, formando una pequeña pirámide de 15 cm de arista lateral. ¿Cuál es la altura alcanzada por el agua al verterla en un depósito cúbico de 50 cm de arista?

Paso 1: Comprender el problema

Maestro: ¿Comprenden el enunciado?

Estudiante: No estoy claro de ¿qué es un pluviómetro?, tampoco de una pirámide invertida y lo de depósito cúbico.

Maestro: Está bien se los explicaré detalladamente: un pluviómetro es un aparato que sirve para medir la lluvia que cae en un lugar y en un tiempo determinado, la pirámide invertida es aquella que cambia su posición, en vez de tener la base hacia abajo la tiene hacia arriba, es decir, la cúspide queda para abajo y el depósito cúbico es aquel que posee la forma de un cubo. Puede describir a su manera el problema en cuestión.

Estudiante: Bueno en este enunciado nos dice que hay una pirámide cuadrangular regular y que a la vez está invertida, también que se forma una pirámide con el agua recogida en un día, lo cual al final me pide calcular la altura del agua vertida en un depósito cúbico.

Maestro: Correcto. ¿Cuáles son los datos que me da el problema?, ¿Lo pueden identificar?

Estudiante: Claro profesor, nos dan el valor de la altura y de la arista lateral de la pirámide pequeña formada por el agua recogida y nos dan la arista del depósito cúbico.

Maestro: Excelente, han analizado correctamente el problema, que buen trabajo de grupo. Ya saben a qué quieren llegar.

Estudiante: Bueno, creo que en este problema hay que calcular la altura que alcanza el agua en el depósito cubico, pero si hablamos de cantidad líquida, entonces antes hay que calcular el volumen.

Maestro: Muy bien, pero: ¿qué debemos de calcular primero para encontrar la altura del agua en el depósito cúbico?

Estudiante: Profe, lo primero es calcular el área de la base, para después calcular el volumen y seguidamente la altura que creo que utilizaremos el volumen de un prisma.

Maestro: Así será. ¿Cómo creen que lo haríamos?

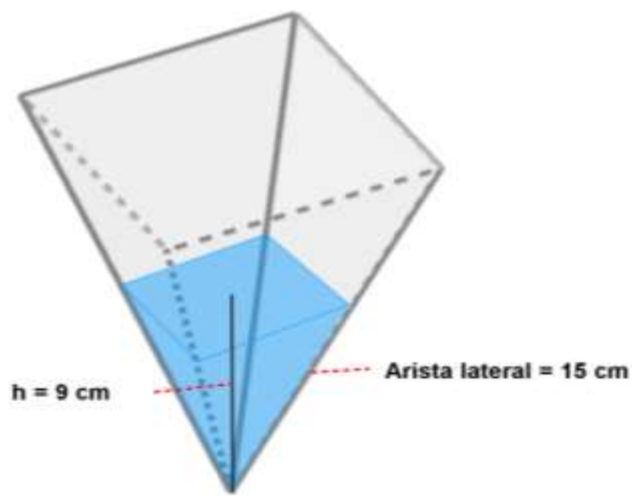
Estudiante: Profesor necesitamos un buen ordenamiento de ideas para resolver el problema.

Paso 2: Concebir un plan

Maestro: Bueno, vayamos paso a paso, ¿qué podemos hacer para encontrar lo que nos pide el problema?

Estudiante: Francamente realizar una gráfica de pirámide, que simbolice al pluviómetro, además tener en cuenta la fórmula para calcular el volumen de la pirámide y de ahí emprender la tarea de encontrar lo que nos piden.

Maestro: Muy bien, esa será la iniciativa. Entonces observemos la simulación del pluviómetro.



Estudiante: Bien profe, aunque para encontrar el volumen se debe conocer el área de la base, en donde necesitaremos conocer el valor de los lados, y al ver el gráfico se ve muy difícil.

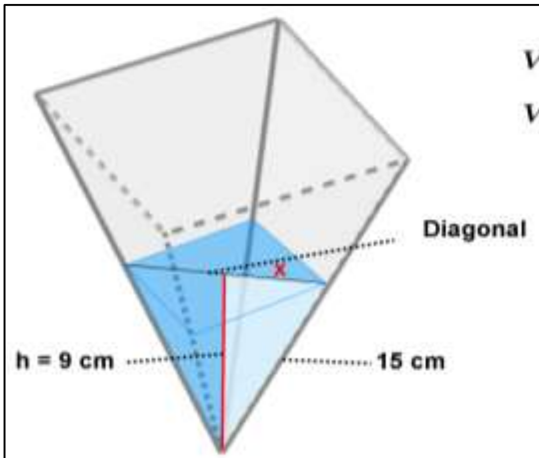
Maestro: Alguna idea de cómo calcular los lados de la base que forma el agua en el pluviómetro.

Estudiante: Profesor y si traza un segmento de vértice a vértice (vértices opuestos) en la base cuadrada, que realmente estaría trazando la diagonal, ya que se sabe que la diagonal es $\sqrt{2}a$ y en esa fórmula despejamos a que correspondería al valor de los lados del cuadrado.

Maestro: Pero como encontrarías la diagonal.

Estudiante: Como la diagonal pasa por el centro, y por ser base cuadrada, la diagonal se puede partir en dos mitades iguales y como ya conocemos la altura y la arista lateral, nuestra incógnita se basaría en encontrar el valor de una mitad de la diagonal y una vez hallado la multiplicamos por dos y nos dará a lo que equivale la diagonal y con esto encontrado podemos descubrir el valor de los lados de la base cuadrada.

Maestro: Entonces para entender bien haremos los trazos pertinentes en la simulación del pluviómetro, así como también escribiremos las fórmulas a usar para guiarnos.



$$Volumen\ de\ la\ pirámide = \frac{A_b \times h}{3}$$

$$Volumen\ de\ un\ prisma = A_b \times h$$

Maestro: Observando la ilustración, cómo podemos calcular el valor x, o sea, la mitad de la diagonal.

Estudiante: Profe podemos aplicar el teorema de Pitágoras donde dice que la suma de cada uno de los catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado.

Maestro: Si claro, aplicaremos teorema de Pitágoras y después que haremos.

Estudiante: Profesor por ser la base cuadrada, entonces la diagonal es igual a la raíz cuadrada de dos por el lado o sea $\sqrt{2}a$ y de aquí podemos despejar a.

Maestro: Correcto, entonces así ya podremos calcular el área de la base formada por la cantidad de agua en el pluviómetro.

Estudiante: Claro profe, y es muy fácil, ya que nada más es elevar al cuadrado un lado de la base y así después nos facilita encontrar el volumen de la pirámide.

Maestro: Excelente.

Paso 3: Ejecutar el plan

Maestro: Observando en la pizarra el gráfico, lo primero que calcularemos sería el valor de x.

$(15cm)^2 = (9cm)^2 + (x)^2$

Operamos $225cm^2 = 81cm^2 + (x)^2$

Cambiamos de posición $81cm^2 + (x)^2 = 225cm^2$

Despejamos $(x)^2 = 225cm^2 - 81cm^2$

Operamos $(x)^2 = 144cm^2$

En ambos lados sacamos raíz cuadrada $\sqrt{(x)^2} = \sqrt{144cm^2}$

Obtenemos $x = 12cm$

Estudiante: Así es profesor y nos da como resultado $12cm$ por tal razón la diagonal tiene una longitud de $24cm$, ya que la mitad de la diagonal era $12cm$.

Maestro: Que bueno, ahora nos dispondremos a encontrar la longitud de los lados de la base cuadrada.

Estudiante: Nos da $\frac{24\sqrt{2}}{2}cm = 12\sqrt{2}cm$.

Maestro: Pero me gustaría saber cómo hicieron para calcular el valor de los lados de la base cuadrada.

Estudiante: Bueno, como la diagonal en un cuadrado es $\sqrt{2}a$, entonces nosotros hicimos una sustitución una vez conocida la diagonal y bueno al final racionalizamos el denominador.

Maestro: Muy bien, ahora calcularemos el área de la base, el cual, por ser cuadrada, el área es igual a un lado al cuadrado.

$$A = \left(12\sqrt{2}cm\right)^2 = 288cm^2$$

Estudiante: Profesor ahora si podemos encontrar el volumen de la pirámide formada por el agua dentro del pluviómetro.

Maestro: Así es, entonces apliquemos la fórmula que conocemos.

$V = \frac{A_b xh}{3}$ por lo tanto operando queda $V = \frac{(288cm^2)(9cm)}{3} = 864cm^3$

Estudiante: Creo que ya tenemos la respuesta.

Maestro: Bien, pero están seguros que no nos falta algo.

Paso 4: Examinar la solución obtenida

Estudiante: Ya calculamos todo profesor y encontramos la respuesta.

Maestro: Seguros, leamos el problema nuevamente, identifiquemos bien los datos y lo que nos pide el enunciado.

Estudiante: Esta bien profesor: el problema enuncia la altura del agua, la arista lateral, y la arista del depósito cubico, los dos primeros datos ya lo utilizamos menos el último.

Maestro: Relean bien y díganme que nos pide encontrar el problema.

Estudiante: Nos pide encontrar la altura del agua en el depósito cubico.

Maestro: Claro que es eso lo que pide, y cómo calcularemos la altura del agua vertida en el depósito cúbico.

Estudiante: Profe para mí necesitaremos la fórmula para el cálculo del volumen de un cubo, que es área de la base por la altura, eso sí haremos un poco de artificio, ya que se necesita hacer el proceso inverso, en donde el volumen será el que encontramos en las operaciones anteriores y como nos dan el valor de las aristas del depósito cúbico, muy fácil encontramos el área de la base, pues por ser cúbico, los lados que lo componen, poseen las mismas medidas.

Maestro: Entonces hagamos la operación adecuada para calcular la altura alcanzada por el agua vertida al depósito cúbico, aunque primero se debe calcular el área de la base del cubo.

Estudiante: Así es profe y como todos los lados tienen las mismas medidas, entonces la base se convierte en un cuadrado, así que da: $A = l^2 = (50cm)^2 = 2{,}500cm^2$

Maestro: Así es, ya conocido el área de la base del cubo, entonces podemos encontrar la altura y para eso nos auxiliaremos de la fórmula del cálculo del volumen de un prisma

$V = A_b xh \Rightarrow$ Despejando

$$h = \frac{v}{A_b} = \frac{864cm^3}{2,500cm^2} = 0.3456cm$$

Estudiante: De donde salió el $864cm^2$.

Maestro: Buena pregunta mis queridos alumnos, $864cm^2$ corresponde al volumen de agua que había en el pluviómetro de base regular cuadrangular.

Estudiante: Bueno, entonces la altura del agua en el deposito cúbico es de 0.3456 cm.

Maestro: Aproximadamente es 0.3456 $cm.$, esta proximidad da una idea clara de cuánto es la altura que alcanzó el agua en el depósito cúbico ¿están de acuerdo?

Estudiante: Si profe.

Maestro: Entonces ¿qué van hacer cuando se le pida el volumen de la pirámide?

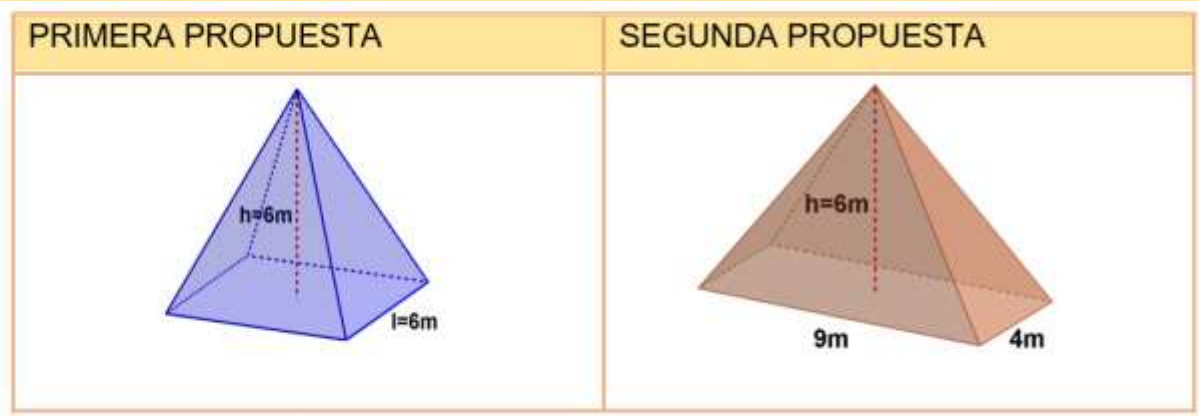
Estudiante: Calculamos primero el área de la base, para después multiplicarlo por la altura y este resultado dividirlo entre 3.

Maestro: Muy bien, excelente. Sin olvidar que hay que encontrar los valores de incógnitas desconocidas.

Estudiante: Esta bien querido profesor.

PROBLEMA 6: INVERNADERO DE PLANTAS

Dos albañiles proponen el diseño que puede tener un invernadero de plantas en forma de pirámide, dotados por su gran intelecto han esquematizado una pirámide cuadrangular y otra rectangular de la manera a como se presenta a continuación:



El gestionante desea invertir lo menos posible en la compra de lona para cubrir los lados laterales del invernadero, entonces ¿cuál de las propuestas permite una menor inversión? Si se sabe que un metro cuadrado de lona tiene un costo de C$ 300, ¿cuánto dinero invertiría?

Paso 1: Comprender el problema

Maestro: Jóvenes, hay que leer el enunciado de manera que se comprenda lo que pide.

Estudiante: Bueno; yo ya leí tres veces y entendí a lo que quiere llegar el enunciado.

Maestro: Excelente, dígame entonces su interpretación de dicho problema.

Estudiante: El interesado por el invernadero quiere ahorrar dinero en la compra de lona, el cual sería utilizado para tapar los lados laterales del invernadero que tiene forma de pirámide, además nos muestran las dos opciones que podría tener el invernadero, también el problema facilita el costo de la lona por metros cuadrados.

Maestro: Correcto, ahora pregunto: ¿qué se está pidiendo calcular en el problema, área o volumen?

Estudiante: Creo que es volumen, profesor.

Maestro: Seguro que es eso, analicen.

Estudiante: Profesor no es volumen, lo que pide el problema es encontrar el área, me había confundido.

Maestro: Así es; y ¿a qué se refiere área de una superficie?

Estudiante: Profesor, entiendo por área de una superficie todo aquello que cubre a dicha superficie.

Maestro: Que buen aporte, y claro, a eso se refiere. Interpretando más el problema, se sabe que es área lo que pide, pero cual área: lateral o total.

Estudiante: Profesor a mi parecer digo que es área lateral.

Maestro: ¿Por qué?

Estudiante: Es que es obvio, pues los invernaderos de plantas solamente cubren sus partes laterales, pues la parte de abajo o sea la base no se cubre, ya que es ahí donde hacen el vivero.

Maestro: Claro, usted tiene mucho conocimiento sobre los invernaderos.

Estudiante: Es que, en mi casa, mi papá construyó un invernadero de plantas.

Maestro: Bien, me gustaría explorar algunos conocimientos ¿cómo puedo encontrar un lado restante en un triángulo rectángulo?

Estudiante: Depende, si es el lado más largo solo se le extrae raíz cuadrada a la suma de cada lado al cuadrado, caso contrario se restaría.

Maestro: Muy bien, se ha explorado algo muy interesante, pero le contaré algo, para la resolución de dicho problema, utilizaremos el software didáctico Geogebra, así que no haremos procedimientos manuales.

Estudiante: Qué bien, enséñenos entonces profesor, me siento ansioso.

Maestro: Así que manipularemos el software Geogebra, los que lo andan instalado ya sea en Tablet, celulares o computadoras, abran dicho programa.

Estudiante: Profesor y en que nos ayudará utilizar Geogebra en la resolución de dicho problema.

Maestro: En muchas cosas, ya que Geogebra es una herramienta interactiva, nos facilitará ver dichas gráficas en 3D y calcular distancia, área, etc.

Estudiante: Está bien.

Paso 2: Concebir un plan

Maestro: Según las gráficas de las pirámides dadas y sabiendo que tendremos que calcular el área lateral, ¿qué debemos hacer con cada gráfica?

Estudiante: Aplicar la fórmula del área lateral que sería la mitad del perímetro basal multiplicado por la apotema de uno de los triángulos que forman las caras laterales.

Maestro: Así es, pero eso es aplicando la fórmula, pero como utilizaremos Geogebra, lo que se va a hacer es calcular el área de cada triángulo de las caras laterales y después lo sumamos, y eso sería el área lateral que nos pide.

Estudiante: Profesor, y si nada más encontramos el área de un triángulo que componen las caras laterales de la pirámide y después lo multiplicamos por la cantidad de lados que tiene la base, pues se sabe que los triángulos que conforman a la pirámide a su alrededor son isósceles y todos con las mismas medidas.

Maestro: Claro que se puede, pero hay que tener cuidado, que su idea solo aplica cuando la pirámide tiene como base un polígono regular.

Estudiante: Me aclaró esa parte profesor, gracias. Profe viendo ambas graficas del problema, me doy cuenta de que tienen la misma altura y de por si la misma área de la base, profe a mi juicio, no hay que averiguar cual posee menos área lateral, pues son semejantes.

Maestro: Está seguro.

Estudiante: Si profesor, sino pierde sentido, es que tanto la altura y el área de la base de ambas gráficas son semejantes.

Maestro: Para aclarar dichas dudas, invito a que utilicemos el programa Geogebra para ver dichos caracteres y así poder aclarar las incertidumbres que se tiene.

Estudiante: Está bien, y profe una vez que calculemos el área lateral de la pirámide que resulte conveniente para construir el invernadero lo multiplicamos por lo que vale el metro cuadrado de lona, para saber cuánto gastará el gestionante.

Maestro: Así es. Bueno yo voy haciendo los pasos en el programa a igual ustedes, les parece.

Estudiante: Está bien.

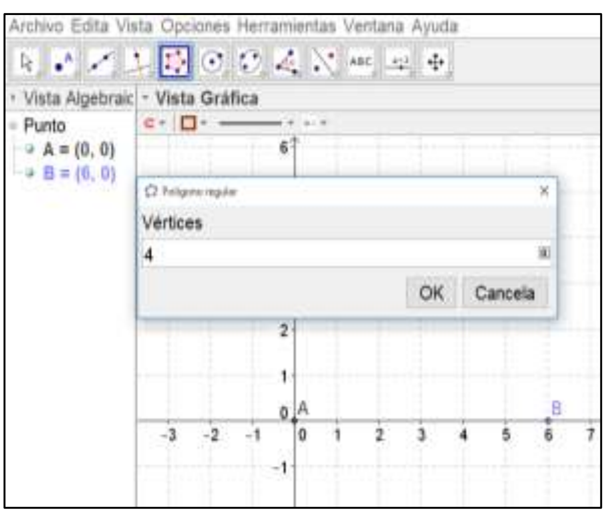
Paso 3: Ejecutar el plan

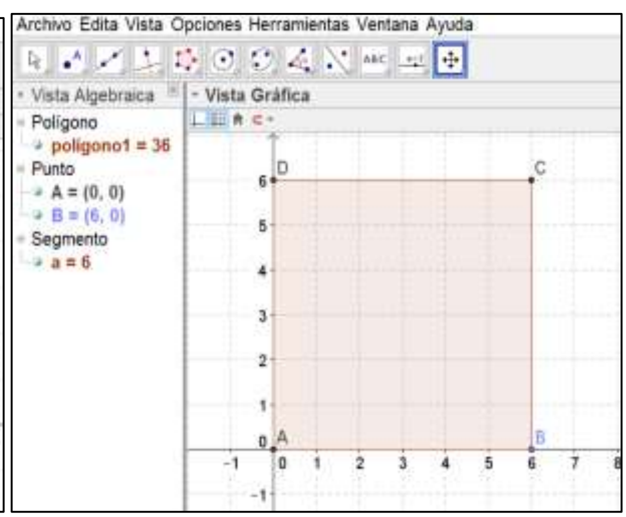
En este apartado solamente se dará a conocer la explicación detallada de los pasos necesarios para encontrar la solución a través del programa Geogebra por parte del docente, ya que los estudiantes deben hacer cada paso que se efectúe en los dispositivos en donde tengan instalado el programa Geogebra. El docente durante la explicación debe atender dudas referentes a cualquier trazo en Geogebra.

Para la gráfica de la propuesta 1

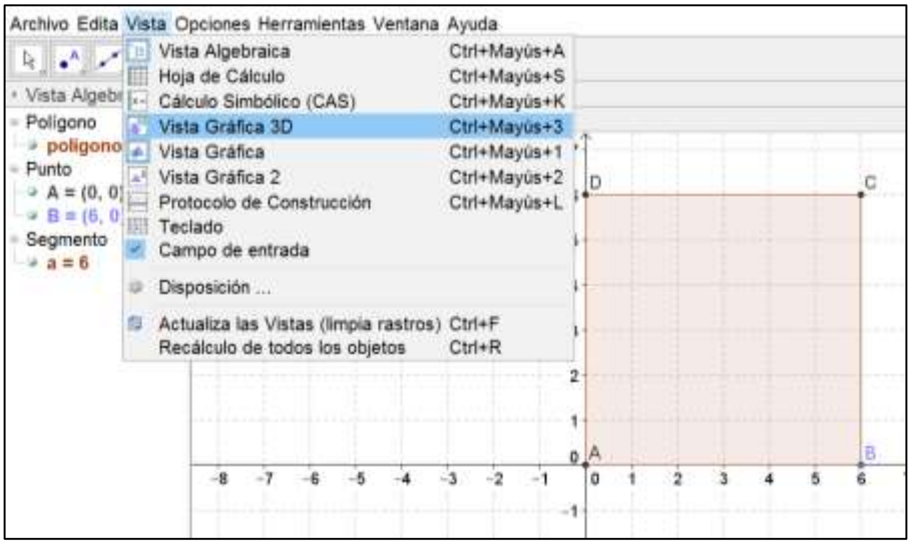
En la **Vista Gráfica 2D** haremos un cuadrado de lado 6, como medida de cada lado, ya que dicho cuadrado es la base del invernadero de la propuesta 1.

Para eso nos auxiliaremos del comando **Polígono regular**, lo seleccionamos y tecleamos en cualquier lugar de la **Vista Gráfica**, el cual instantáneamente nos graficará un punto y seguidamente tecleamos 6 lugares que puede ser a la derecha o izquierda, eso será la medida del lado del cuadrado, una vez que se hace, aparecerá un cuadro de diálogo, en el cual se pondrá el número de vértice, en este caso 4, tecleamos en **OK** y aparecerá ya el polígono regular cuadrado.

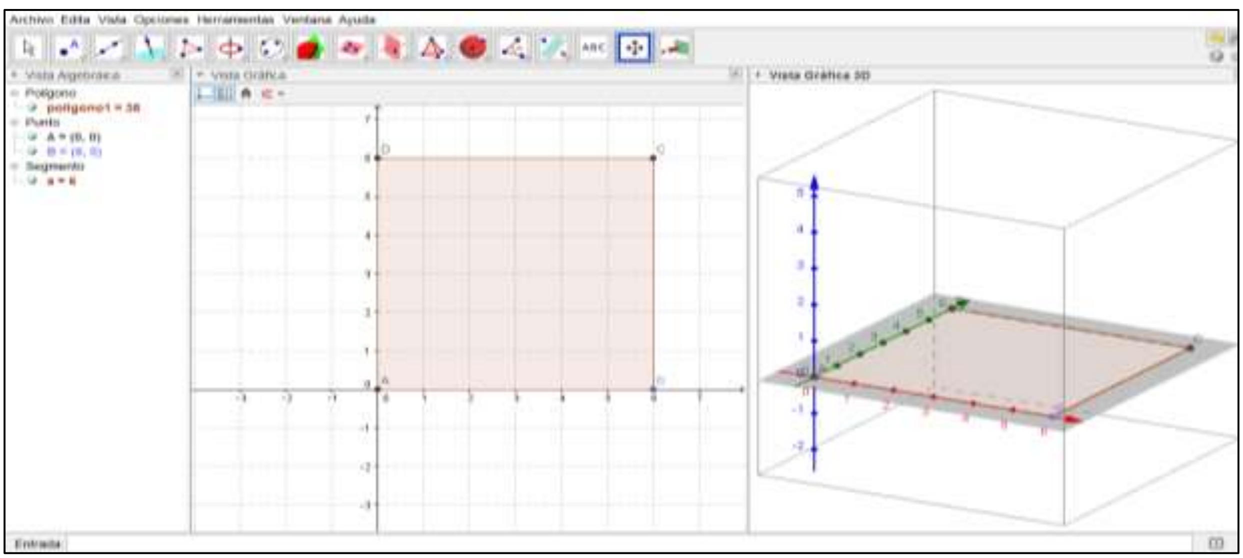




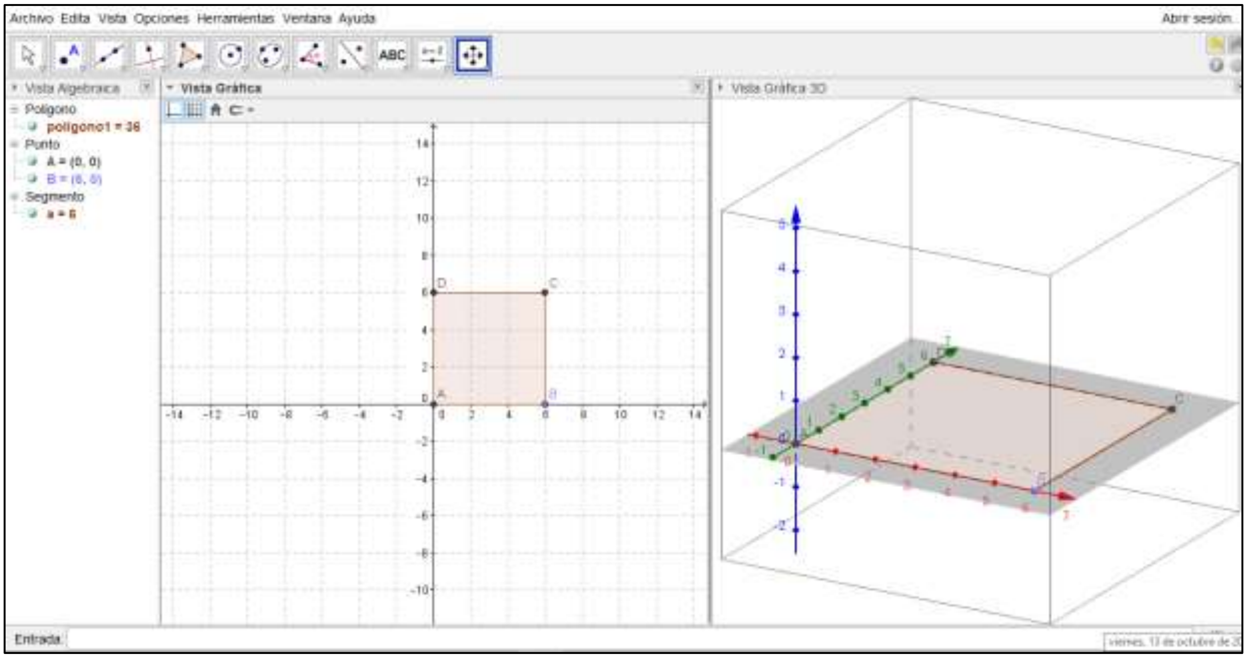
Una vez graficado el cuadrado, nos ubicamos en la parte superior izquierda del programa y elegimos **Vista,** abierta las opciones que presenta, seleccionamos la opción **Vista Gráfica 3D.**



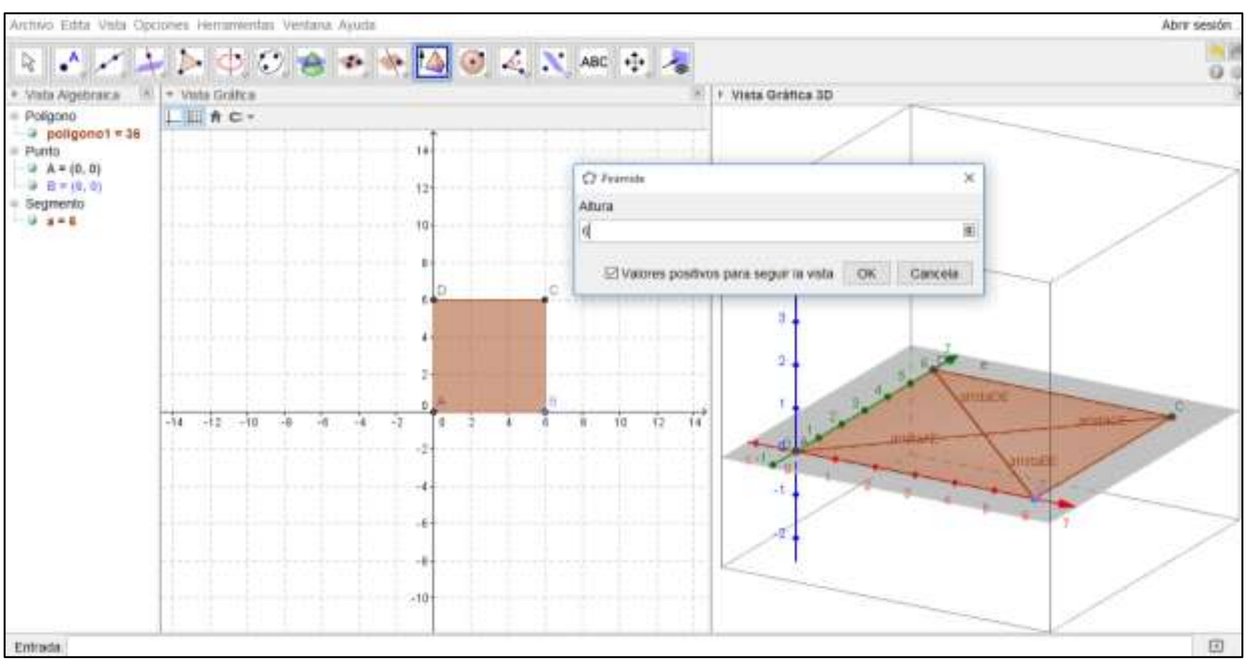
Una vez seleccionado nos aparecerá algo así:

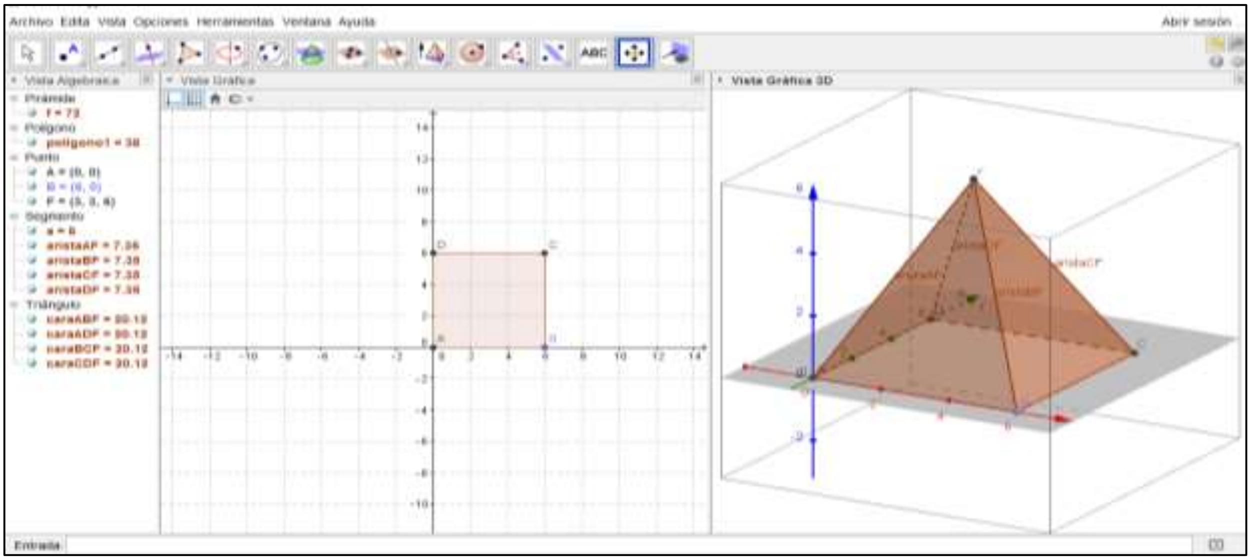


Con la opción **Desplaza Vista Gráfica** podemos achicar y mover a cualquier lado el polígono regular graficado en la **Vista Gráfica 2D**.



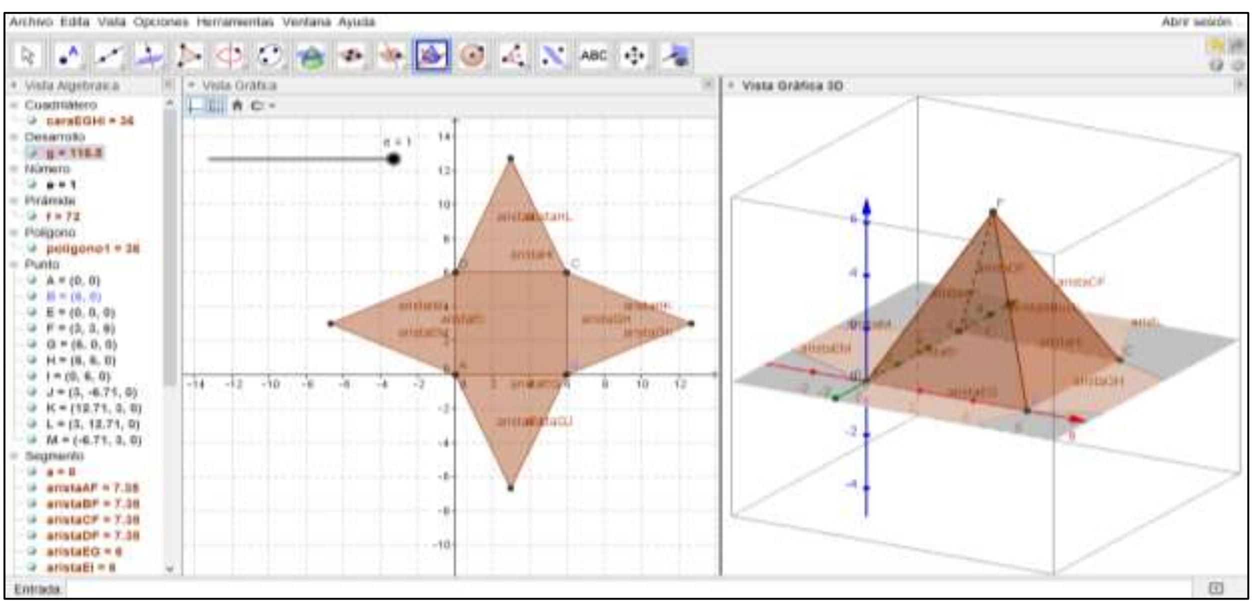
Ubicándose en la **Vista Gráfica 3D** seleccionar la alternativa **Pirámide o Cono desde su base,** esto para trazar la altura de dicha pirámide, ya seleccionado se da clic en la parte interior de la figura en forma de cuadrado que aparece en el plano **XY** en la **Vista Gráfica 3D**, cuando se da clic aparece una ventana, ahí se pone la altura que se desee, en este caso será 6, después de escribir dar clic en **OK.**



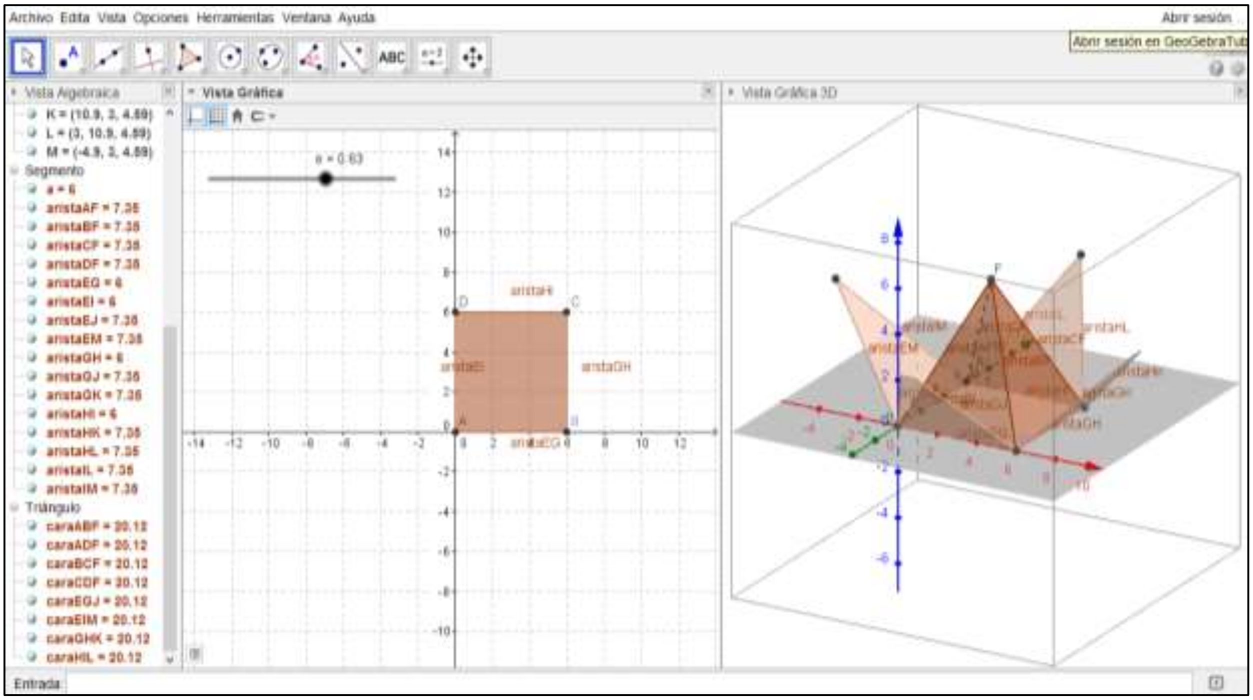


Si la pirámide en 3D se genera muy amplio, para minimizar pulsar la opción **Desplaza Vista Gráfica,** y se hace correr la rueda del mouse hacia adelante para maximizar la gráfica y hacia atrás para minimizar, si se desea mover mantenemos presionado el lado izquierdo del mouse y traslade la gráfica para donde se prefiera.

Para observar en 2D la estructura que la pirámide en 3D que se generó, se debe seleccionar la opción **Desarrollo** y después se da clic en la pirámide en 3D, y aparecerá la siguiente estructura en la **Vista Gráfica 2D**.



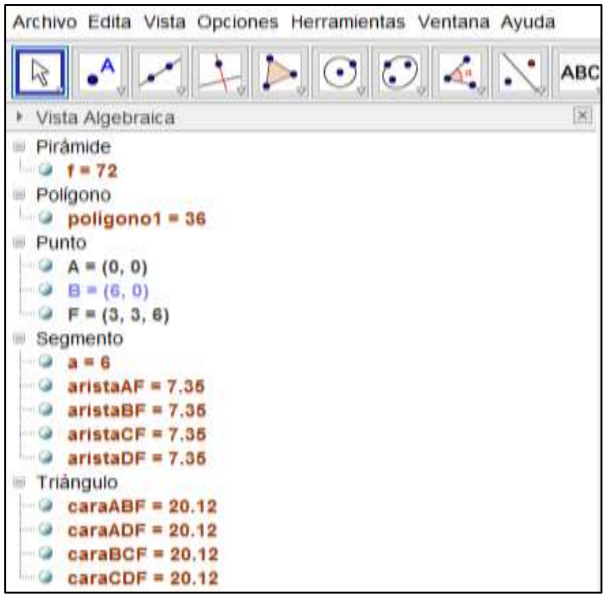
Si se desea observar la construcción de la pirámide en 3D de forma animada, se debe ubicar en el deslizador situado en la **Vista Gráfica 2D**, dar clic derecho encima del deslizador y seleccionar **Animación.** Si ya no desea la animación dar clic derecho sobre el deslizador y deseleccionar la opción **Animación.**



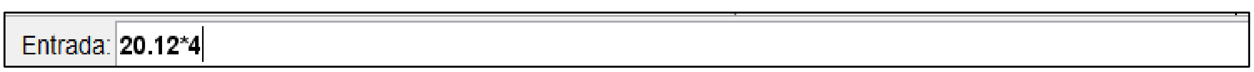
Una importante alternativa se presenta en la **Vista Algebraica** del programa, calcula automáticamente el área de cada cara lateral de la pirámide, y es lo que estamos buscando el área de cada cara lateral, y por ser la base un polígono regular cada cara es un triángulo isósceles con las mismas medidas.

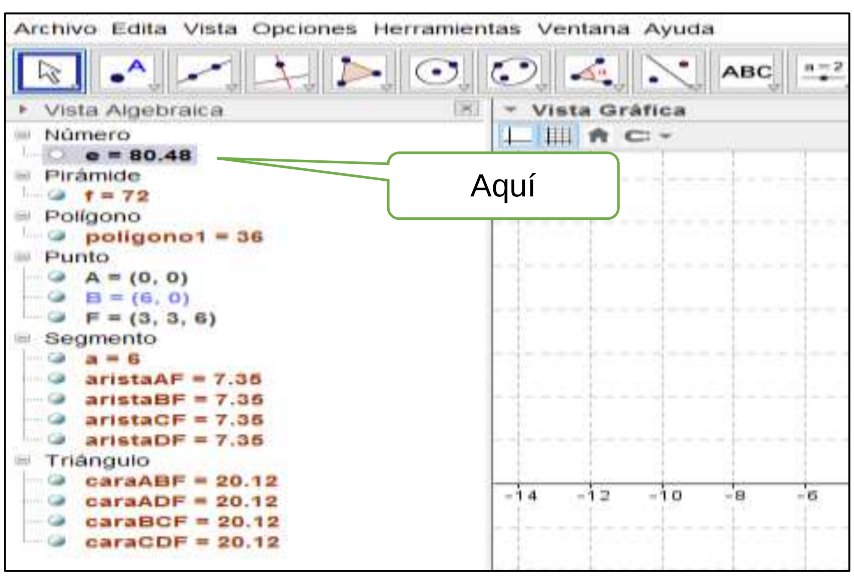
Pero para tener una mejor alternativa y visualizar mejor todos los aspectos que conforman la pirámide, eliminamos el deslizador, es muy fácil, se da clic derecho sobre el deslizador y seleccionamos **Borra**.

En la **Vista Algebraica** se puede observar la siguiente información:

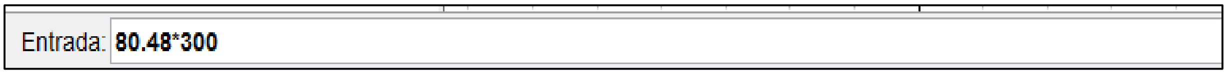


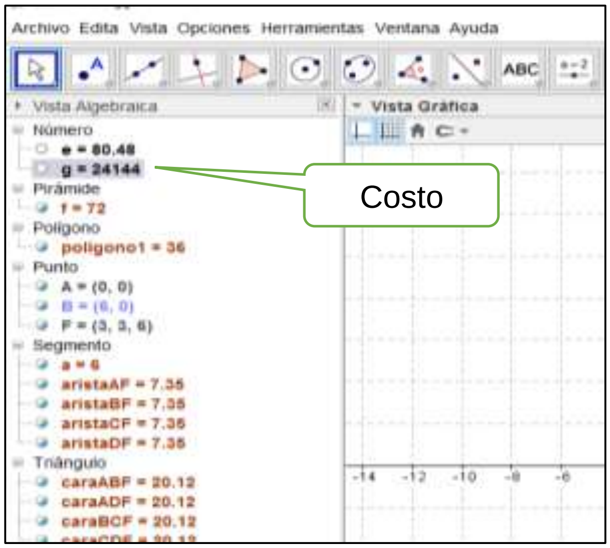
Cada cara lateral de la pirámide es un triángulo con igual área, así que, para saber el área lateral, se debe sumar las áreas de las caras laterales, como son iguales las áreas, se tomará el área de un triángulo y lo multiplicamos por el total de triángulos que tiene la pirámide, se realizará de la siguiente manera: ubicarse en la **Barra de Entrada** y escribir el área de un triángulo 20.12 multiplicarlo por 4, ya hecho esto, teclear **Enter** y ya aparecerá el área lateral de la pirámide en la **Vista Algebraica**.





Si se tiene conocimiento que por un metro cuadrado de lona tiene un costo de C$ 300 y al saber el área de la pirámide de base cuadrada, entonces ya se puede calcular cuánto invertiría de dinero, entonces en Geogebra se debe ubicar en la **Barra de Entrada** y multiplicar el área lateral por los C$300, ya escrito se pulsa **Enter.**





Se sabe entonces que el área lateral de la pirámide cuadrada es de $80{,}48m^2$ y que invertiría C$ 24144 en la compra de lona.

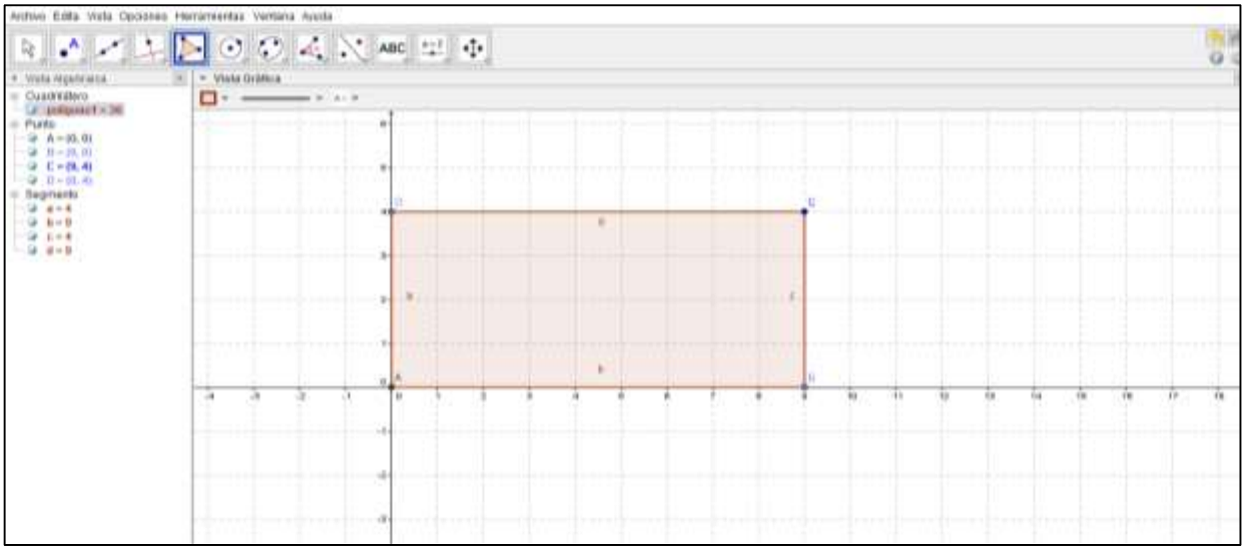
Estudiante: Profesor, que importante software Matemático, hemos aprendido muchas cosas, y bueno ya calculamos el área lateral de la pirámide de la primera propuesta y lo que gastaría de dinero en la compra de lona, ahora se debe encontrar el área de la segunda propuesta para saber cuál es la mejor opción para el gestionante.

Maestro: Claro que así es, comencemos.

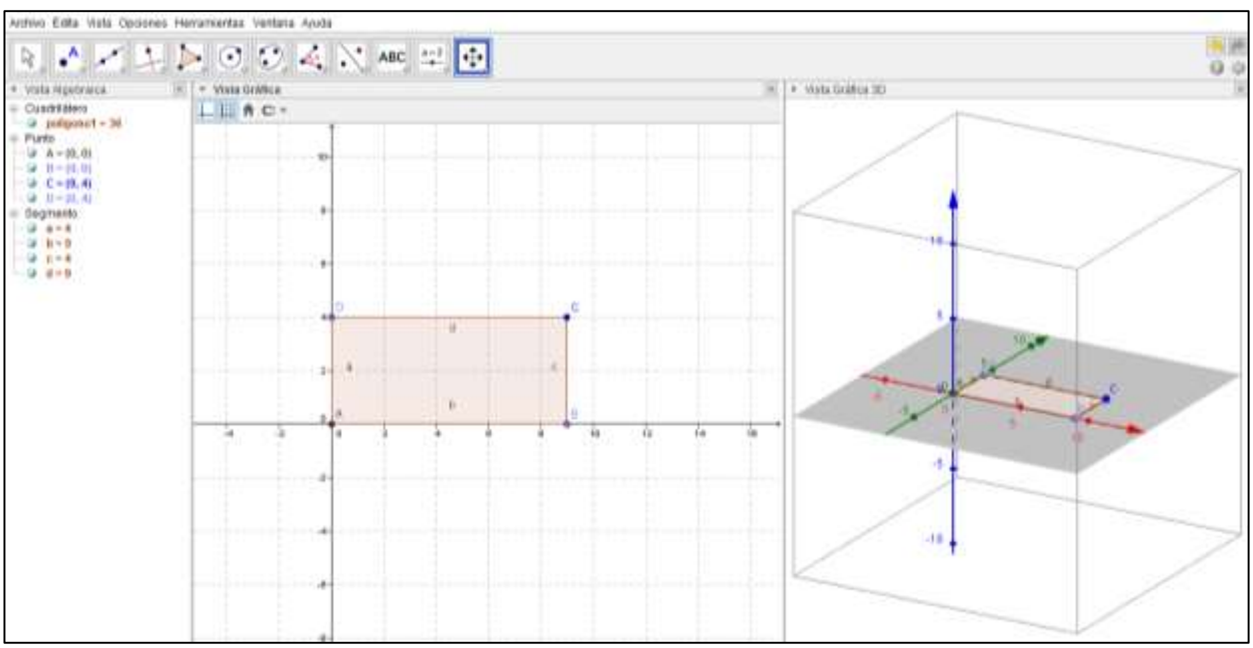
Para la gráfica de la propuesta 2.

Se abre una nueva ventana, se debe ubicar en la parte superior de la vista Geogebra, dar clic en archivo y seleccionar **Nueva Ventana.**

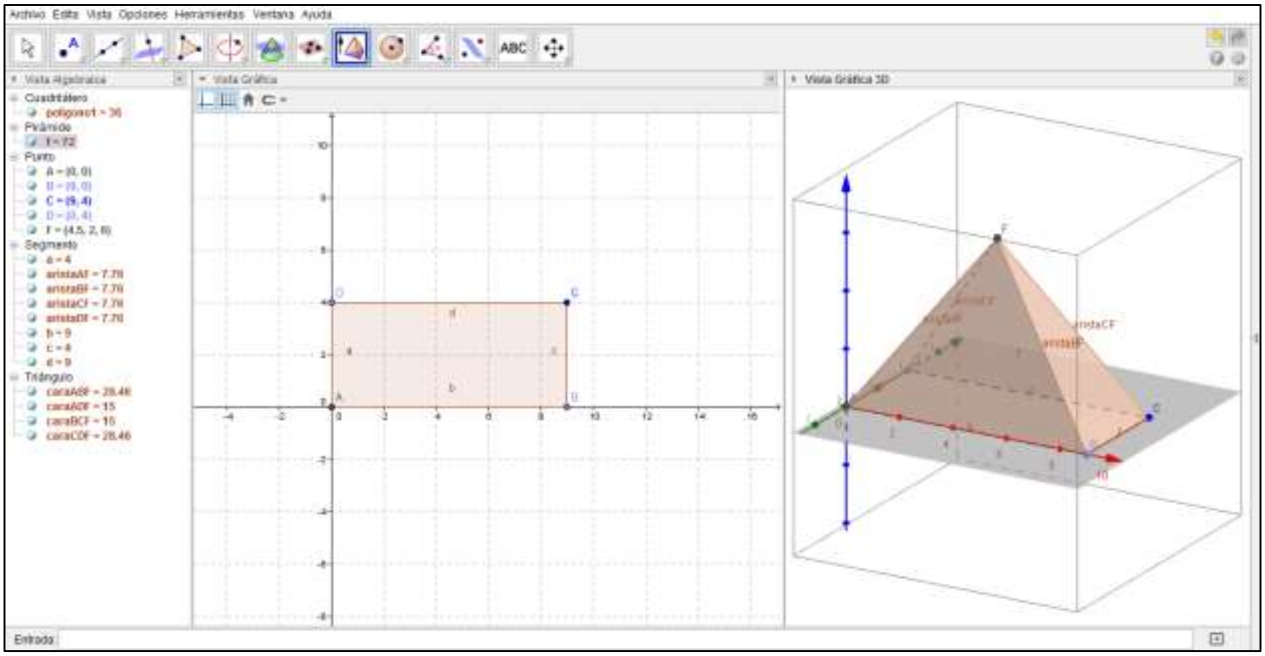
En la **Vista Gráfica 2D**, con la opción punto se realizará la esquematización de cada vértice del rectángulo que debe ser de 9 x 4, seguidamente con la opción **Polígono** unimos los puntos, se toma esta opción ya que un rectángulo no es un polígono regular.



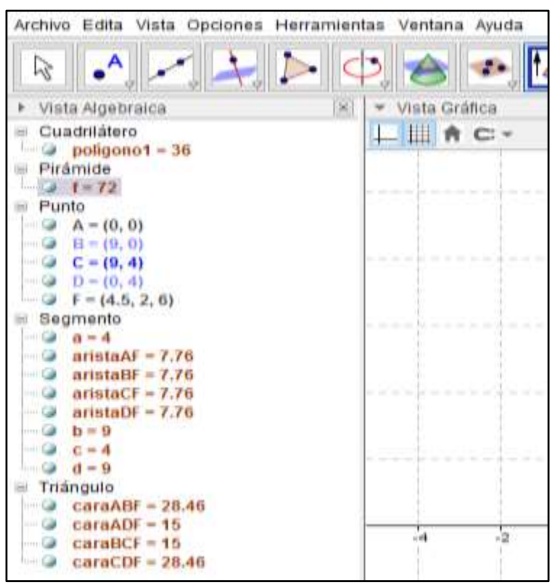
A como sea ha explicado anteriormente en la propuesta 1, ahora lo expresamos en 3D.



En la **Vista Gráfica 3D**, con la opción **Pirámide o Cono desde su base**, trazar la altura de la pirámide, dicha altura debe ser 6.



Como se desea calcular el área lateral, en la **Vista Algebraica** se observa el área de cada triángulo que conforman las caras laterales de la pirámide.

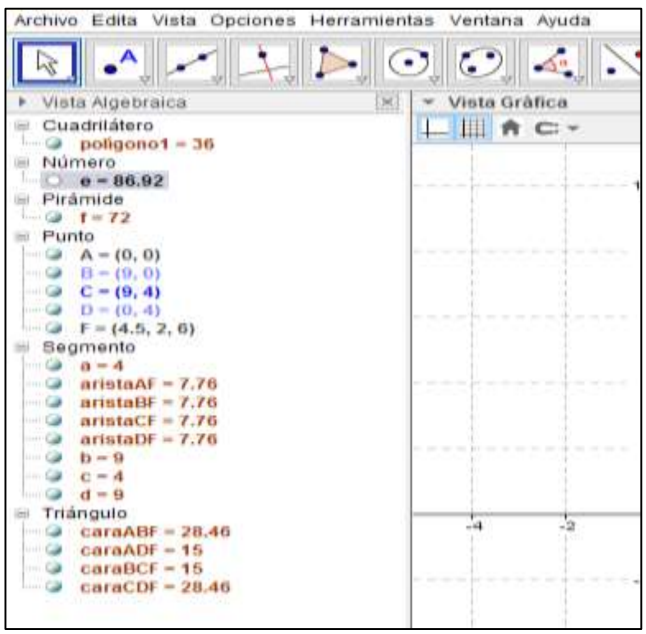


Maestro pregunta: ¿Por qué el área de cada triángulo que forman las caras laterales de la pirámide no son iguales?

Estudiante: Por los lados de la base, ya que como no son congruentes, y los lados de la base también definen un lado respectivo de los triángulos formados como caras laterales de la pirámide.

Maestro: Excelente, sigamos entonces.

Para calcular el área lateral, se debe sumar el área de cada triángulo de las caras laterales, y eso se realiza en la barra de entrada, escrito la suma, teclear **Enter**.



Entonces el área lateral es $86{,}92m^2$

Intervención del docente: Si comparamos las áreas laterales de las dos propuestas ¿cuál es la menor?

Estudiante: La de la propuesta 1, o sea la de la pirámide de base cuadrada.

Maestro: Entonces, es necesario calcular el total de dinero que gastará en la compra de lona en la pirámide la propuesta 2.

Estudiante: No hay necesidad, ya que a más área lateral tenga la pirámide más lona va a utilizar, lo que significa que más dinero va a invertir, y el problema pide que calcule cuál de las propuestas induce a una menor inversión.

Paso 4: Examinar la solución obtenida

Maestro: Leamos bien el enunciado, para cerciorar si ya llegamos a la respuesta.

Estudiante: Creo que no profe porque no se ha hecho una conclusión como respuesta al problema.

Maestro: Tiene razón, y para usted cuál sería su conclusión.

Estudiante: Como se pedía averiguar cuál de las propuestas para hacer el invernadero permitía una menor inversión con respecto al gasto por la compra de lona, mi conclusión es: El interesado debe elegir la propuesta 1 para hacer su invernadero de plantas ya que invertirá menos dinero en la compra de lona, o sea C$ 24144.

Maestro: Muy bien, claro que esa es la respuesta, y han aprendido que, aunque las propuestas presentaban igual área de la base y altura, no definió que ambas cubrían igual área lateral.

Estudiante: Eso sí es cierto, algo muy interesante aprendimos, y también me gustó mucho la manipulación del programa Geogebra, los cálculos son más directos y claros y aprendemos cosas nuevas lo cual al realizarlo manualmente no se aprende.

Maestro: Claro, Geogebra es un exquisito programa Matemático, bueno, que va a pasar si les presentan un problema parecido al que se acaba de realizar.

Estudiante: Lo que haré es: extraer datos, completar datos, aplicar condiciones y teoremas y sobre todo comparar, a la vez apoyarme del software Geogebra.

Maestro: Excelente, y un mensaje bonito les quiero dejar: el éxito se logra a través del interés, la aplicación y esfuerzo propio por aprender haciendo.

Estudiante: Muy precioso profesor, y muchas gracias.

PROBLEMA 7: FABRICACIÓN DE SOMBRILLA

Calcula los metros cuadrados de tela que se necesita para fabricar una sombrilla con forma de pirámide octogonal de 84 cm de arista de la base y 194 cm de arista lateral.

Paso 1. Comprender el problema

Maestro: ¿Pueden comprender el enunciado del problema?

Estudiante: Profe, un poco, me dificulta entender lo de arista de la base y arista lateral.

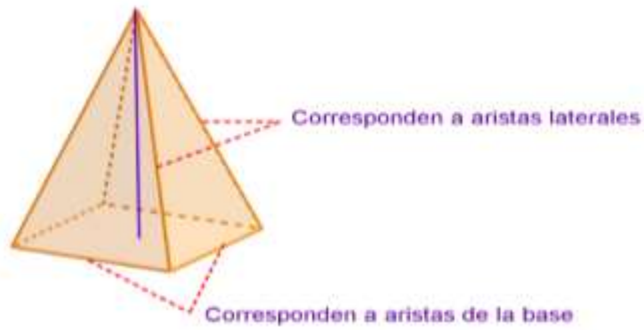
Maestro: Bueno, para entender bien estos conceptos, se debe tener claro qué es una arista, así que las aristas son segmentos, son los lados de las caras o mejor dicho cada arista hace frontera de dos caras; por lo tanto, las aristas de la base: son los lados que conforman la base que también se les llama aristas básicas, y las aristas laterales son los lados de las caras laterales y lo cual estos concurren en el vértice.

Estudiante: Profe no entendí bien, ahí me disculpa.

Maestro: Bueno, para una mejor aclaración hagamos un gráfico de una pirámide regular, que opinan.

Estudiante: Mejor profe, así podré visualizarlo y ya no tendré duda de su ubicación en cualquier pirámide regular que usted nos presente.

Maestro: Observen el gráfico.



Estudiante: Ahora si profe, ya entendí.

Maestro: Pueden decirme como han entendido el problema, con sus propias palabras.

Estudiante: Claro, se desea saber cuántos metros cuadrados se necesitarán para construir una sombrilla en forma de pirámide octogonal, o sea que la base posee ocho lados.

Maestro: Eso es, y ¿cuáles son los datos?

Estudiante: Nos dan la medida de la arista de la base y de la arista lateral.

Maestro: ¿Saben a lo que quieren llegar?

Estudiante: Nos dice el problema que se desea saber los metros cuadrados y eso nos refleja el cálculo de área, no otra cosa profe.

Maestro: Así es, muy bien analizado, no tienen duda alguna.

Estudiante: Profe, yo sé que debo calcular el área, pero no sé si es el área lateral o total, parece que nada más área lateral, ya que la sombrilla en su estructura no posee una base cubierta, sino que es como destapada.

Maestro: Entonces, que se debe calcular: área lateral o área total.

Estudiante: Nada más es el área lateral, ya que nos interesa la superficie que cubre las caras laterales.

Maestro: Excelente, ya saben adónde llegar, otra cosa les contaré, usaremos el software Geogebra para resolver el problema.

Estudiante: Que bien profesor, a mí me gusta mucho usar ese programa, pues tiene muchas herramientas Matemáticas que nos ayudan a comprender mejor el aspecto de la Geometría de Sólidos.

Maestro: Que bueno, ese entusiasmo que muestra es lo que se desea en un estudiante: amor por aprender y ejercitar.

Paso 2: Concebir un plan

Maestro: Les pregunto: este problema que estamos resolviendo es similar a algún otro que ustedes hayan resuelto antes.

Estudiante: Profe, parecidos, creo que en el tema anterior realizamos uno, pero recuerdo que mi profesora de primaria en sexto grado, nos llevó construida con cartulina una pirámide que llevaba reflejada las medidas pertinentes y bueno en grupo comenzamos a calcular el área lateral, total y el volumen.

Maestro: Muy interesante, y que estrategia nos puede ayudar para encontrar lo que nos pide el problema en cuestión.

Estudiante: A mi parecer, realizar un dibujo, colocarle los datos y buscar la fórmula para encontrar el área lateral.

Maestro: Bueno eso sería si utilizamos lápiz y cuaderno, pero como haremos uso de Geogebra, qué es lo que se puede hacer para iniciar.

Estudiante: Profesor yo digo que hagamos en el programa una pirámide en 3D y le ubiquemos sus datos, de ahí no tengo idea de lo que se debe hacer profesor para continuar.

Maestro: Su idea que ha expuesto al principio es lo que se puede hacer para iniciar, pero tenemos un problema no poseemos la altura de esa pirámide para graficarla en el programa ya que es lo esencial para ver su estructura en 3D, así que, primero graficaremos la base de dicha pirámide y la expresamos en 3D y con las herramientas que nos proporciona como comandos el programa Geogebra encontraremos lo que se nos pide como solución del problema, y si es necesario graficaremos al final la pirámide en 3D.

Por otra parte, nos coordinaremos en el aspecto que, yo voy explicándole con respecto a la manipulación del programa y ustedes en sus respectivos dispositivos tecnológicos en donde anden instalada la aplicación también lo irán realizando.

Estudiante: Esta bien profesor, nosotros haremos lo que usted nos indique.

Paso 3: Ejecutar el plan

Maestro: Abran una ventana en el programa Geogebra, realizaremos un octágono regular de 84 cm de arista basal, lo que corresponde a 0.84 m, hacemos la conversión pues lo que nos pide el problema es la cantidad de tela a usarse en metros cuadrados, así que la conversión es lo primero a realizarse con respecto a las longitudes dadas en el problema.

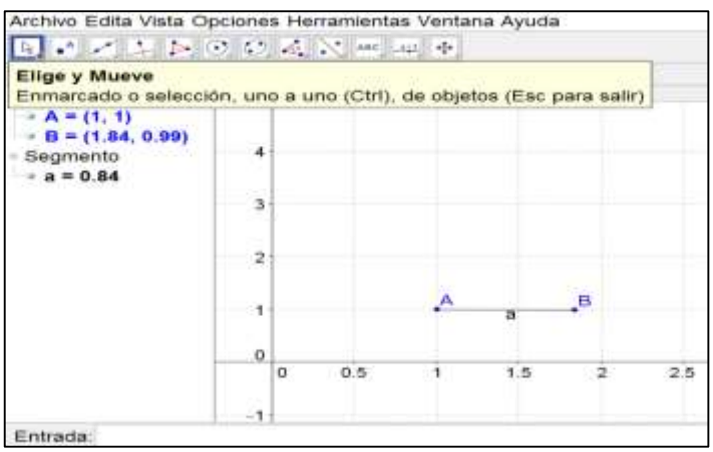
Estudiante: Profe como obtuvo 0.84 m.

Maestro: Bueno, cuando ustedes tengan una longitud expresada en centímetros y desean expresarla en metros, entonces lo que harán es dividirla por 100, esto porque un metro equivale a 100 centímetros.

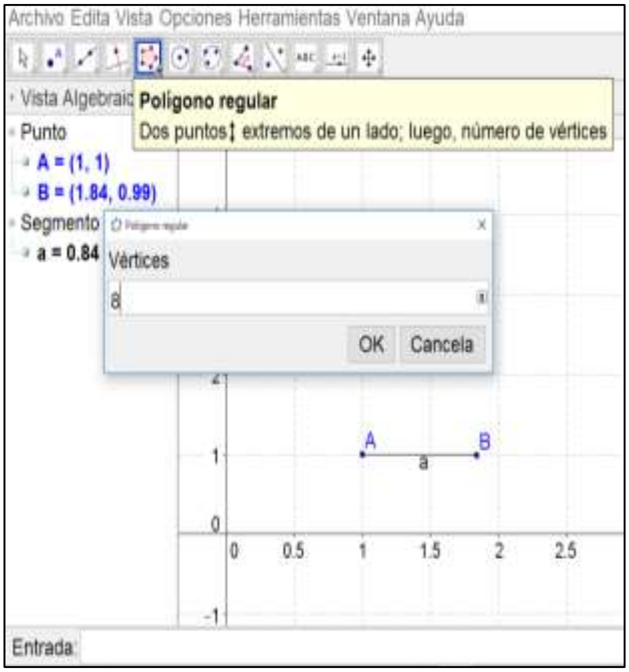
Estudiante: Entonces la arista lateral que es 194 cm corresponde a 1.94 m.

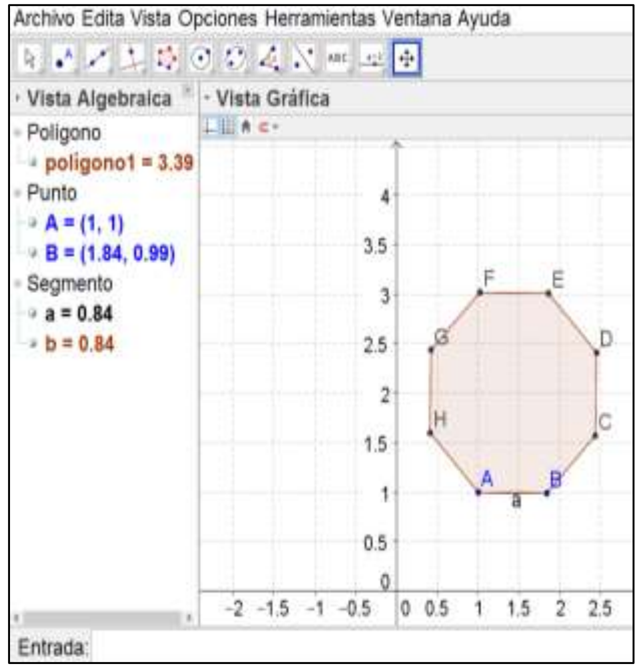
Maestro: Así es, entonces sigamos.

Para dibujar este polígono regular, primero graficaremos un segmento de 0.84 de medida, así que nos auxiliaremos del comando **Segmento** y luego seleccionamos **Elige y Mueve** para determinar con precisión la longitud de dicho segmento, el cual, para la seguridad en dicha medida, en la **Vista Algebraica** aparecerá la longitud que tiene el segmento graficado.

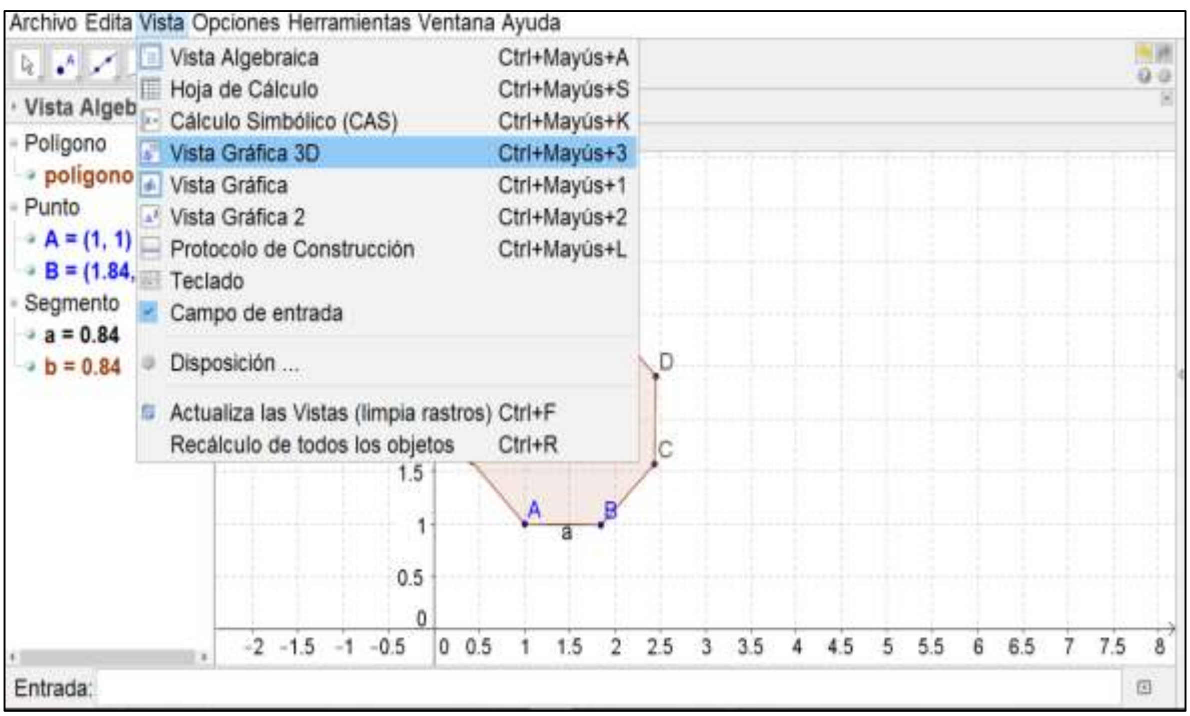


Ahora para hacer el polígono regular nos auxiliaremos del comando **Polígono regular**, lo seleccionamos y tecleamos en el punto A del segmento trazado y después en el punto B, una vez que se hace, aparecerá un cuadro de diálogo, en el cual se pondrá el número de vértices, en este caso 8, tecleamos en **OK** y aparecerá ya el polígono regular graficado.

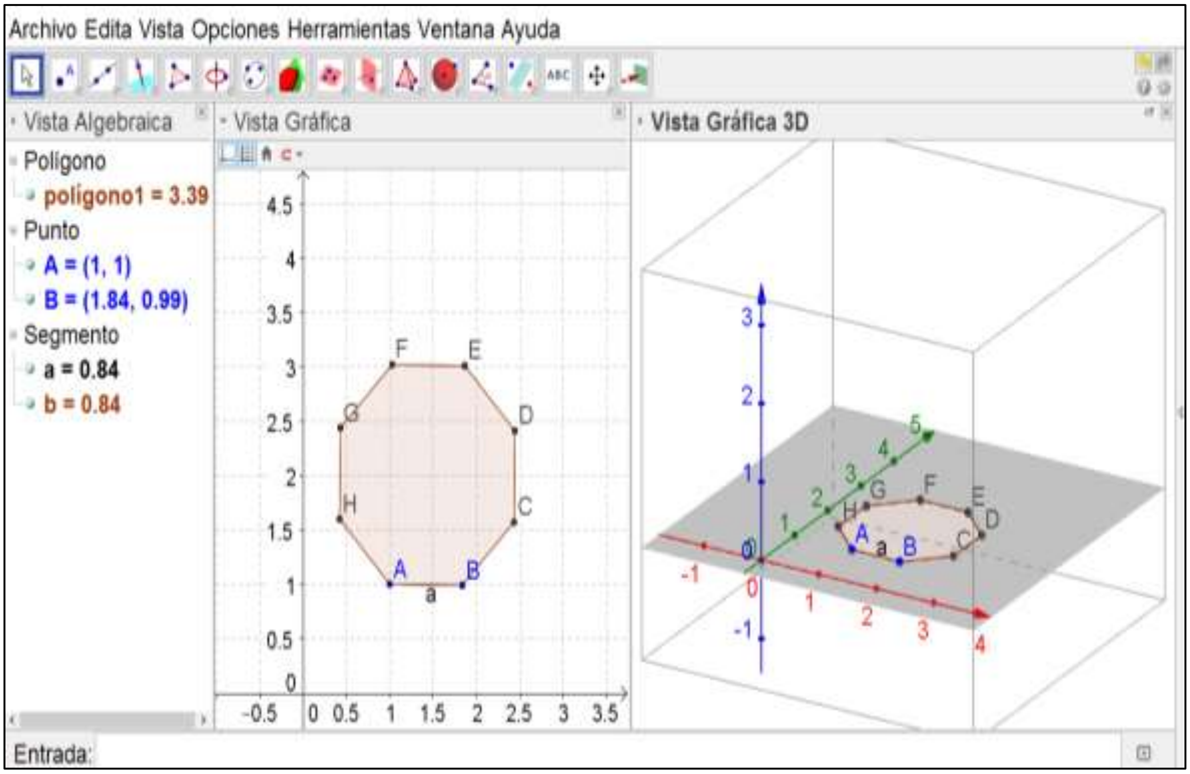




Una vez graficado el polígono regular octogonal, nos ubicamos en la parte superior izquierda del programa y elegimos **Vista,** abierta las opciones que presenta, seleccionamos la opción **Vista Gráfica 3D.**



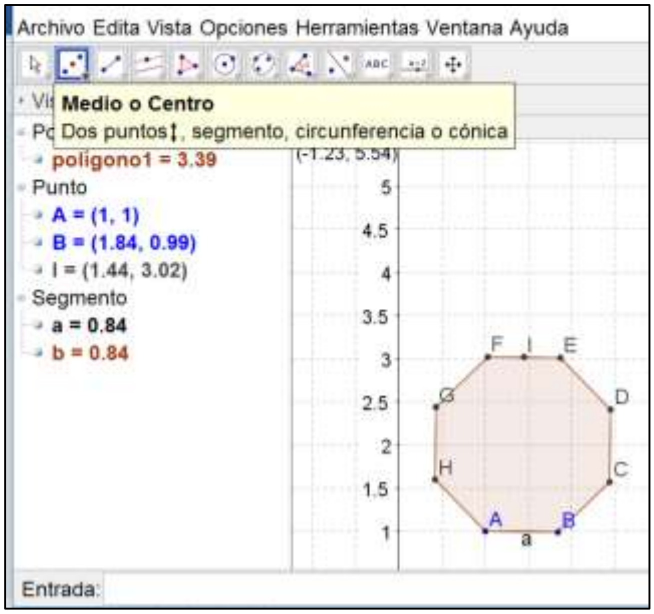
Al seleccionarlo nos aparecerá lo siguiente:



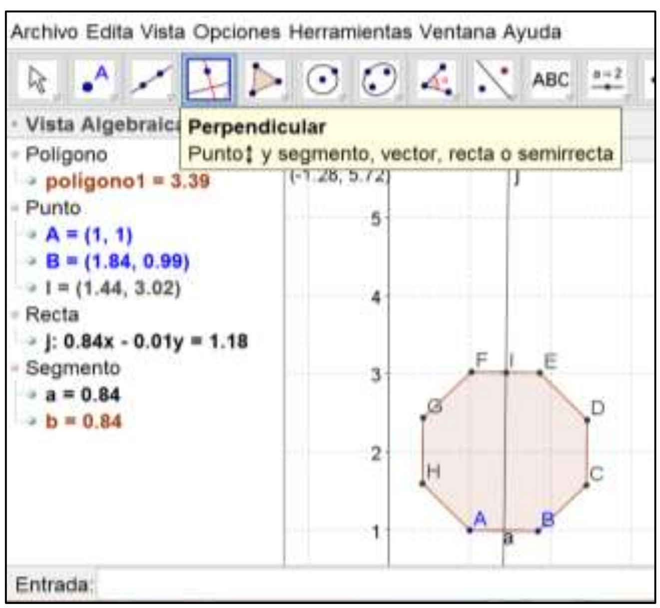
Como no tenemos altura de la pirámide así que nada más trabajaremos con el dato proporcionado por el problema que es la medida de la arista lateral correspondiendo a 1.94 m, y a como dijimos al momento de concebir el plan, si es necesario se expresará la pirámide en 3D.

Por otra parte, para trazar dicha arista lateral, en el programa lo trabajaremos en la **Vista Gráfica 2D** en donde trazaremos un punto medio a una de las aristas del polígono y para realizarla nos auxiliaremos del comando **Medio o Centro**, después trazamos una recta que pase por ese punto trazado y que sea perpendicular a dicho punto y al segmento que contiene al punto medio.

Seleccionado el comando **Medio o Centro** nos ubicamos en un extremo de la arista y después en el otro extremo, y así queda expresado el punto medio.

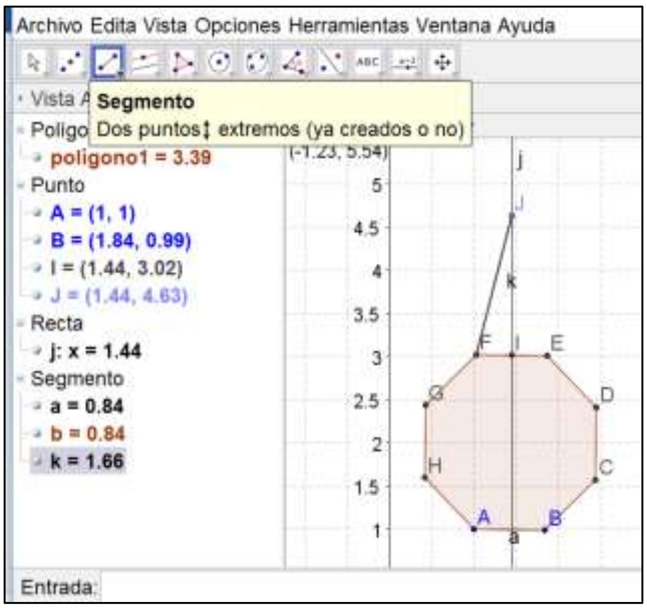


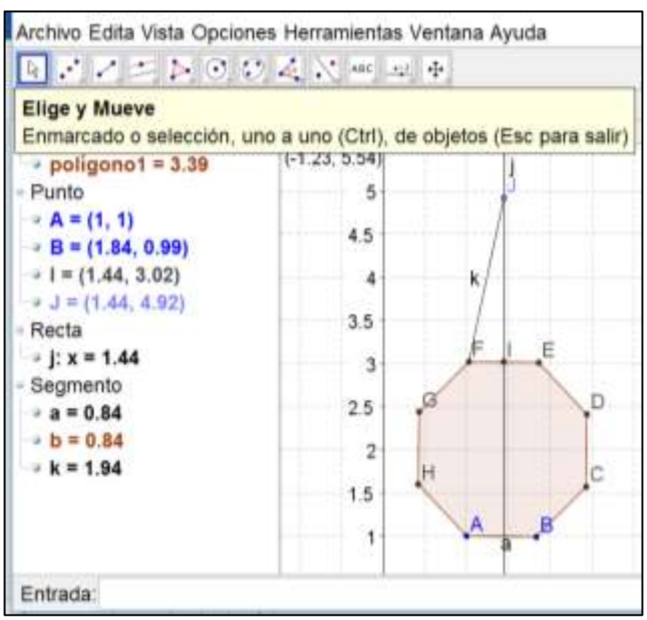
Seguidamente trazamos la recta perpendicular, para eso seleccionamos el comando **Perpendicular** y tecleamos el punto medio y el segmento que contiene a dicho punto medio, en este caso el segmento $\overline{FE}$.



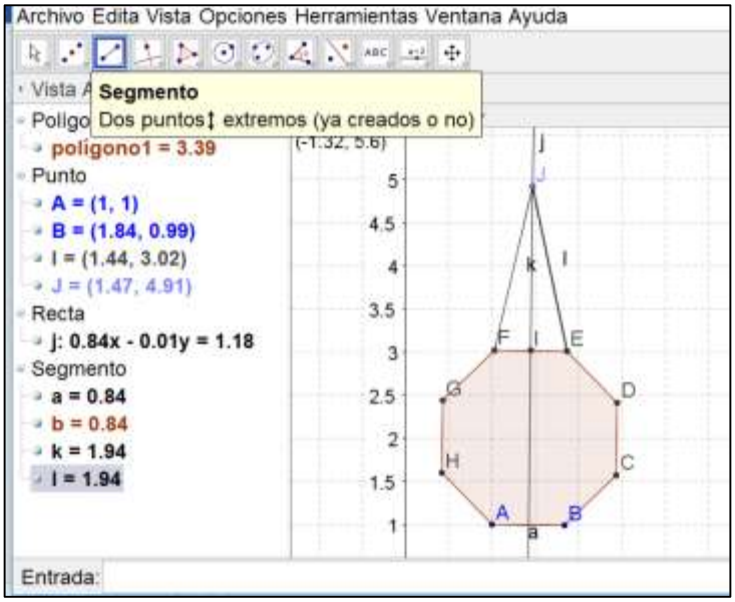
Ahora trazaremos desde cualquier extremo de la arista en donde se ubica el punto medio un segmento que mida 1.94, en donde éste (segmento a trazarse) tenga su otro extremo sobre la recta perpendicular graficada, y otra cosa importante que es notable, es de que dicha recta sirve para definir la apotema de la pirámide o la altura de una de las caras laterales pues está trazada perpendicular a la arista basal $\overline{FE}$, aunque este aspecto no lo utilizaremos.

Para poder detallar con certeza la longitud de la arista lateral de 1.94 debe hacerse moviendo un punto extremo del segmento, o sea, el que se unió a la recta perpendicular, dicho movimiento se realizará con la opción del comando **Elige y Mueve** y dicha longitud del segmento se verá reflejada en la **Vista Algebraica** para asegurar la exactitud de su medida.

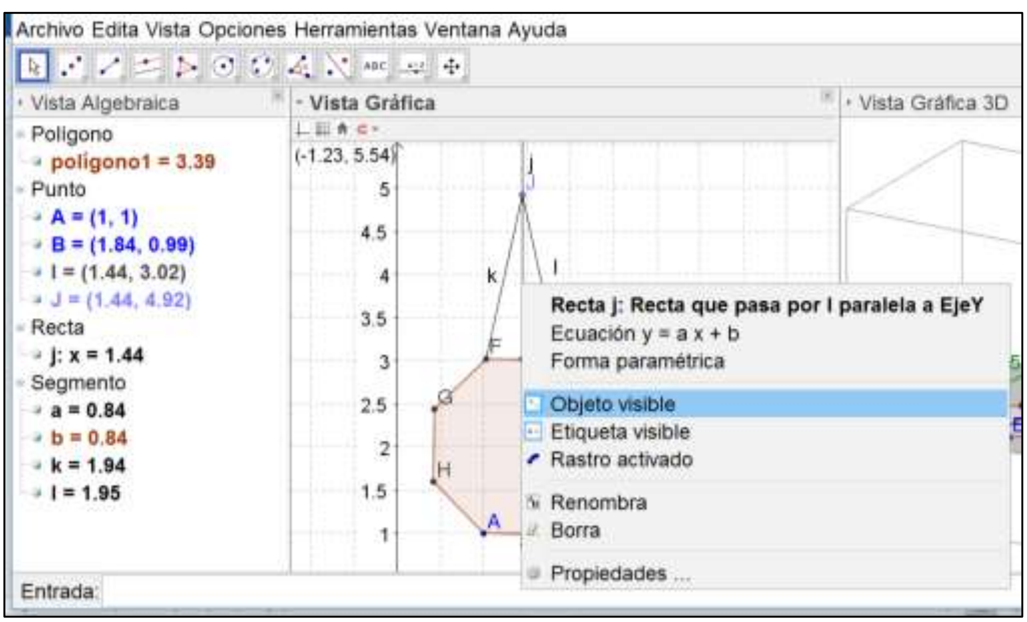




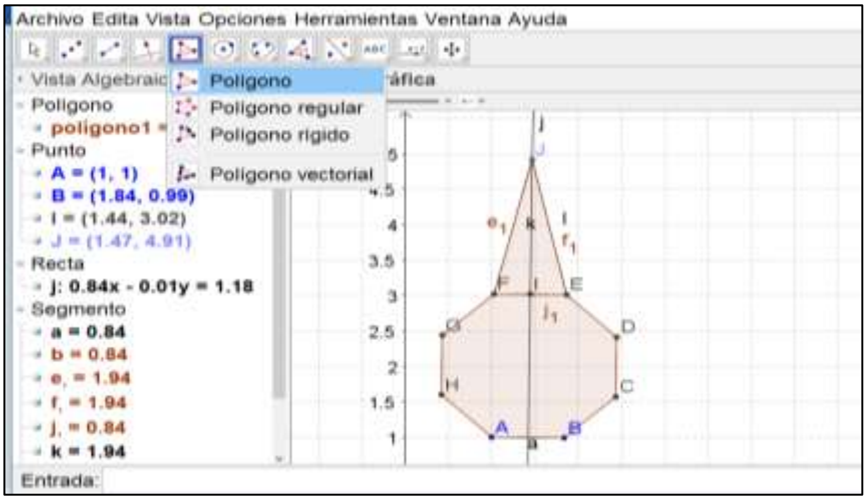
Ahora trazamos otro segmento partiendo del punto E al punto J, y así formamos un triángulo que corresponde a una de las caras laterales de la pirámide, lo realizaremos con el comando **Segmento**.



Si se desea ocultar la recta trazada se debe usar la opción **Objeto visible**, el cual se hace dando clic derecho sobre la recta, pero en este caso omitiremos esa parte, pero si le mostraremos ilustremente dicho proceso.



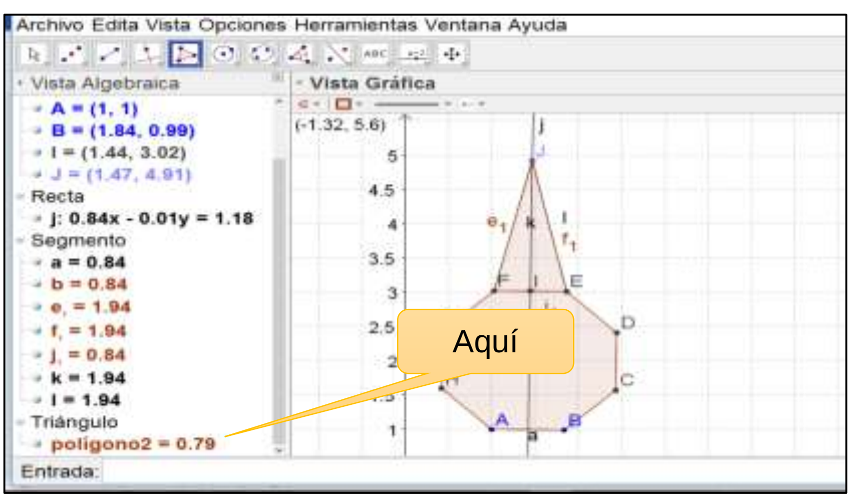
La cara lateral formada es un triángulo, pero dicha cara no está definida como un triángulo en el programa, así que con el comando **Polígono** tecleamos por los tres puntos que conforman el triángulo y automáticamente tendremos definida el triángulo con muchas propiedades.



Algo muy interesante, el programa de Geogebra nos proporciona una valiosa información acerca del triángulo hecho.

Estudiante: ¿Qué es profesor?

Maestro: En la **Vista Algebraica** sale reflejada el área de dicho triángulo expresada en metros, observen:



Estudiante: Que bien, y para que nos servirá esa información profesor.

Maestro: Ya sabrán, les pregunto: ¿qué desea el problema que encontremos?

Estudiante: La cantidad de tela en metros cuadrados para fabricar una sombrilla.

Maestro: Eso es lo que encontraremos, pues dijimos que lo que nos interesaba es la parte lateral de la sombrilla pues base no tiene, ya que es hueca.

Estudiante: Así es profesor.

Maestro: Recordemos: ¿qué características presentan las caras laterales en una pirámide de base regular?

Estudiante: Profesor que todas las caras laterales corresponden a triángulos congruentes.

Maestro: Es decir, si son congruentes todas las caras, entonces también sus áreas son congruentes.

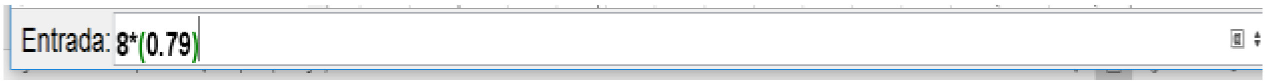
Estudiante: Tiene razón profesor, entonces, como solo nos interesa saber el área lateral de dicha sombrilla, el cual es para saber cuánta tela se ocupará, así que se puede multiplicar esa área encontrada por 8 pues se forman ocho triángulos congruentes.

Maestro: Así es, mis queridos estudiantes.

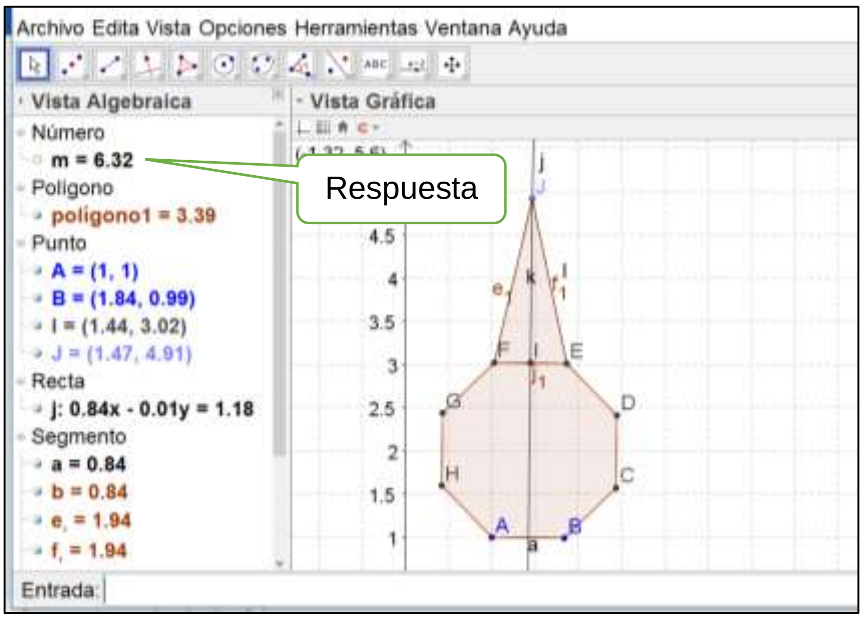
Estudiante: Entonces hagámoslo y así ya encontramos la respuesta, pues es eso lo que se nos pide.

Maestro: Esta bien.

En la barra de entrada de Geogebra escribimos la multiplicación de la siguiente manera: 8 shift +* (0.79), después damos **Enter** y ahí tenemos la solución.



Respuesta al problema se refleja en la **Vista Algebraica**.



Estudiante: Entonces $6.32\ m^2$ es el área lateral de dicha pirámide.

Maestro: Así es, pregunto: fue necesario representar la pirámide en 3D.

Estudiante: No profesor.

Maestro: Y por qué no se podía representar la pirámide en 3D.

Estudiante: Porque Geogebra admite graficar pirámide utilizando la altura y en este caso no se tenía, y bueno no fue necesario expresarla en tres dimensiones.

Maestro: Como valoran la utilización de Geogebra para resolver problemas de Geometría de Sólidos.

Estudiante: Muy bonito profesor y más rápido, pues con papel y lápiz fuésemos hecho otros procedimientos más complicaditos, y utilizando esta herramienta sentí al realizar este problema que aprendí mucho, por ejemplo: trazar punto medio, graficar rectas perpendiculares, acomodar segmentos con una longitud decimal, graficar polígonos y muchos otros.

Maestro: Claro, Geogebra es una herramienta Matemática muy poderosa.

Paso 4: Examinar la solución obtenida

Estudiante: Profesor para finalizar, entonces la respuesta es $6.32\ m^2$.

Maestro: Seguro que esa es la respuesta que pide el problema.

Estudiante: Eso es profe, porque el problema nada más nos pedía calcular la cantidad de tela en metros cuadrados para construir la sombrilla.

Maestro: Correcto, entonces como podemos enunciar la respuesta.

Estudiante: Se necesita aproximadamente $6.32\ m^2$ de tela para fabricar al sombrilla.

Maestro: Están de acuerdo todos de esa respuesta.

Estudiante: Si profe.

Maestro: Y como harán para calcular el área lateral si se les presenta un problema muy similar a éste que se ha resuelto.

Estudiante: Aplicamos todos los pasos que usted nos acaba de enseñar a través de Geogebra, que me ha gustado mucho y del cual se aprende bastante.

Maestro: Excelente, muy bien.

PROBLEMA 8: AMONTONANDO PIEDRAS

Amontonando piedras en forma de pirámide rectangular, los lados de la base miden 4,50 metros y 3,30 metros y la altura del montón 7 metros. ¿Cuántas carretadas se llevarán si en cada una cabe 0.750 m^3?

Paso 1. Comprender el problema

Maestro: ¿Comprende usted lo que dice el enunciado?

Estudiante: Un poco, solo que no recuerdo las características de una pirámide rectangular.

Maestro: La pirámide rectangular es aquella que tiene en su base un rectángulo. Puede describirme el problema dado con sus propias palabras.

Estudiante: Si claro, en este problema se necesita calcular el número de carretadas que se utilizarían para construir la pirámide.

Maestro: Está bien, se construirá una pirámide de piedra.

Estudiante: Que raro verdad profe, pero bueno.

Maestro: ¿Cuáles son los datos que ofrece el problema?

Estudiante: Nos dan los lados de la base y la altura.

Maestro: Y sabes a qué quieres llegar.

Estudiante: Quizás se deba calcular el volumen.

Maestro: Así es. Y para resolver este problema utilizaremos el programa Geogebra.

Estudiante: Que bueno profesor, me gusta usar ese programa.

Maestro: Que bien. Díganme los datos numéricos que nos proporciona el problema.

Estudiante: Como información se tiene que los lados de la base miden 4,50 metros y 3.30 metros, la altura de la pirámide es de 7 metros y que en una carreta alcanzan 0.750 m^3 de piedra.

Maestro: Se necesita más información o es suficiente para dar la solución al problema.

Estudiante: Para mi profesor, con esos datos podemos encontrar lo que se desea.

Paso 2: Concebir un plan

Maestro: Claro y alguna vez han resuelto problemas parecido al que se les presenta.

Estudiante: Me acuerdo que el tema anterior nos pedía calcular área lateral, área de la base y volumen de los prismas.

Maestro: Eso es bueno. ¿Cuál estrategia nos puede ayudar?

Estudiante: Si vamos a utilizar Geogebra, lo primero es estructurar en 3D una pirámide de base rectangular, después calculamos el volumen utilizando todas las propiedades del programa y como nos dan la cantidad de piedra que alcanza en una carreta, entonces nada más dividimos el volumen de la pirámide con el volumen de piedra que alcanza en la carreta y así obtenemos el total de carretadas que nos pide el problema.

Maestro: Que buena idea, muy bien pensado y será eso lo que haremos, les pregunto: ¿por qué se debe dividir el volumen de la pirámide con el volumen de piedra que alcanza en la carreta?

Estudiante: Bueno profesor, una vez que se sepa el volumen de la pirámide, lo que deseamos es saber cuántas veces esta contenido el volumen que alcanza en la carreta con respecto al volumen de la pirámide y así averiguamos cuántas carretadas fueron necesarios para hacer la pirámide de piedra.

Maestro: Excelente análisis.

Estudiante: Entonces manos a la obra profesor.

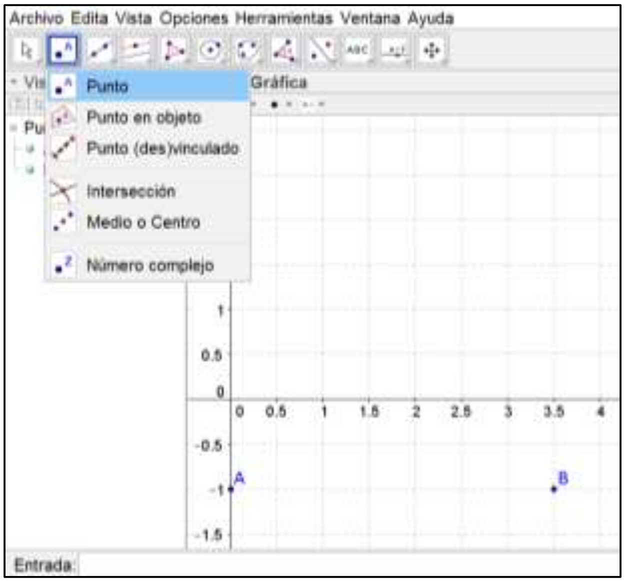
Paso 3: Ejecutar el plan

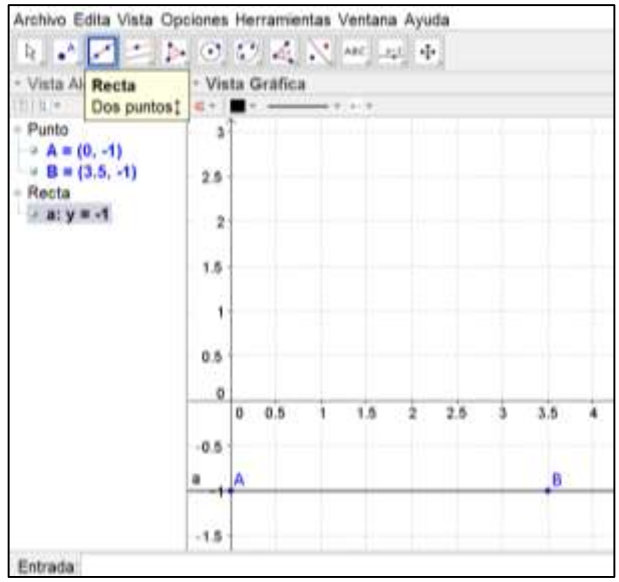
Maestro: En este apartado, yo iré explicando paso a paso los procedimientos a realizarse en el programa, en donde ustedes también lo irán haciendo en sus respectivos dispositivos en donde lo tengan instalado.

Estudiante: Esta bien profesor.

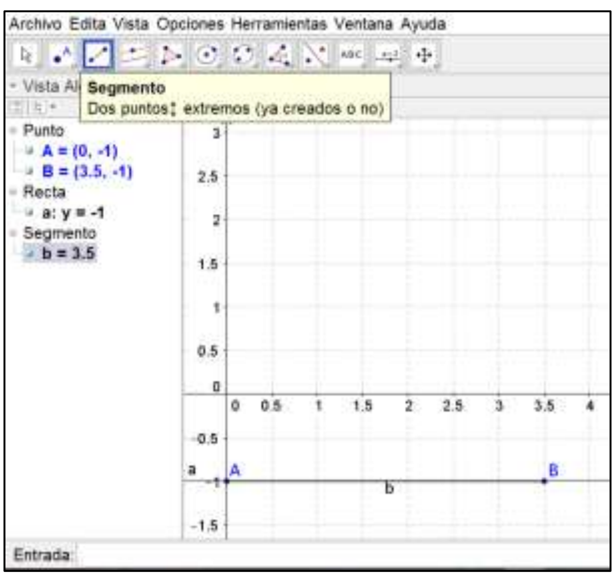
Maestro: Abran una ventana en el programa, para comenzar realizaremos un polígono rectangular con dimensiones 4.50 y 3.30, pero como la alternativa de construir polígonos irregulares con dimensiones decimales no se encuentra en el programa como un comando único, entonces hay que hacer varios procedimientos para obtener el rectángulo con las medidas indicadas y el cual será la base de dicha pirámide que se graficará en el plano tridimensional.

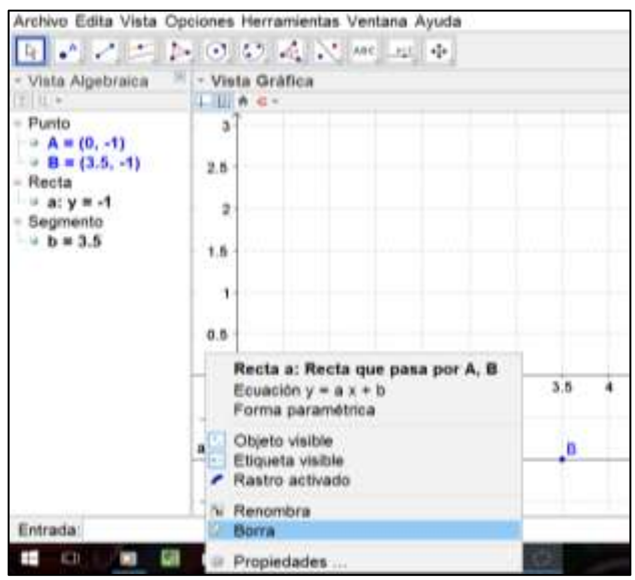
Grafiquemos dos puntos en línea horizontal, en donde uno de los puntos se ubique en el eje (y), posteriormente, por esos puntos trazaremos una recta con el comando **Recta.**



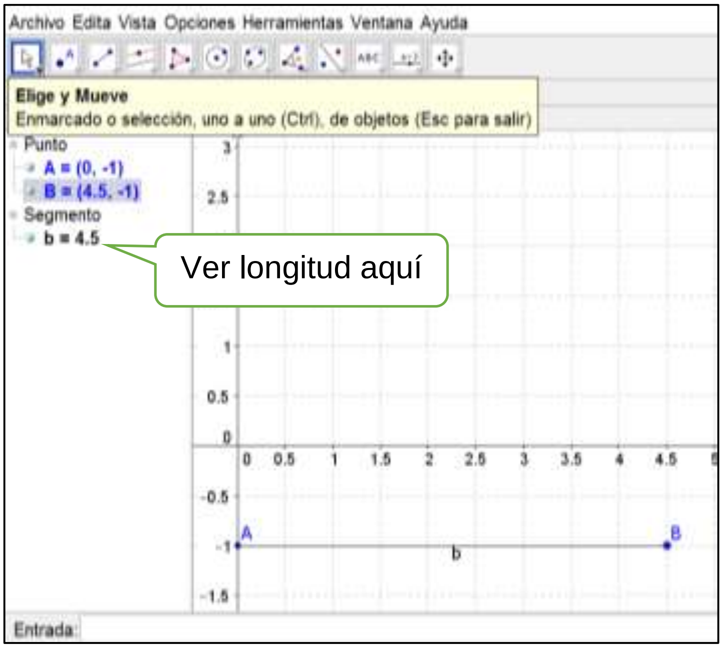


Dibujamos un segmento partiendo del punto (A) al punto (B), seguidamente borramos la recta con la opción **Borra**, el cual se obtiene dando clic derecho sobre la recta que no contenga al segmento trazado.

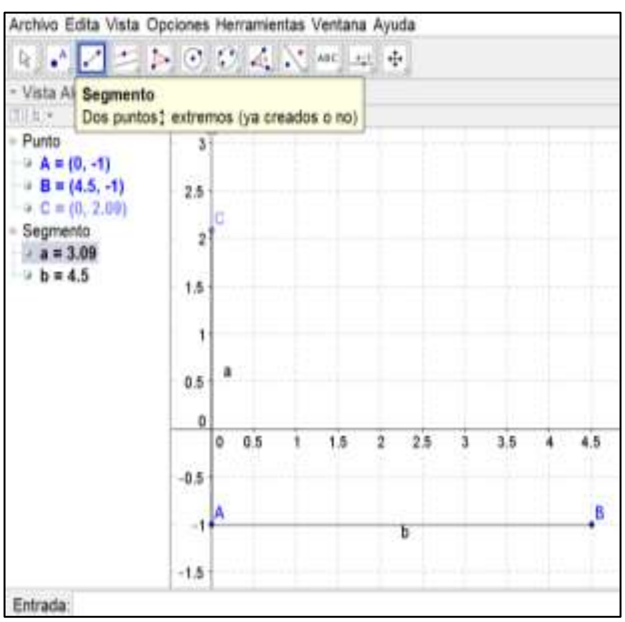


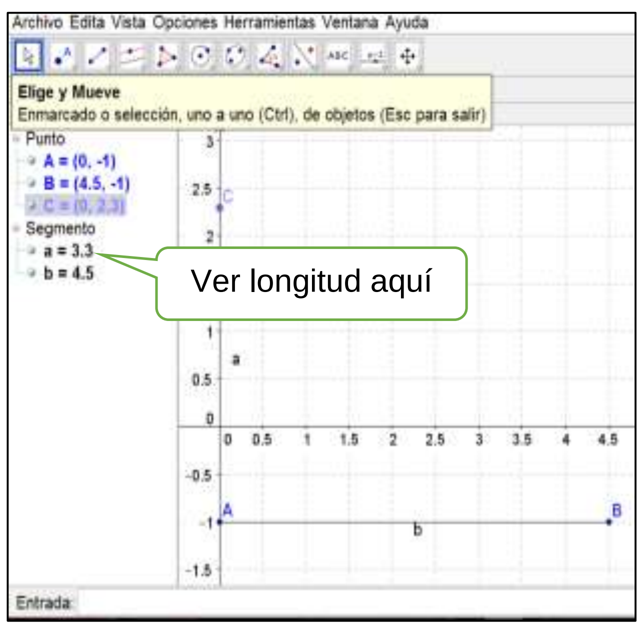


Ahora el segmento $\overline{AB}$ debe medir 4.5 el cual para obtener dicha medida en el segmento, debemos activar el comando **Elige y Mueve** y después ubicarnos en el punto B y desplazarlo hasta obtener la medida correspondiente, y para cerciorarnos que la medida es la adecuada, en la **Vista Algebraica** se representa la longitud de dicho segmento.

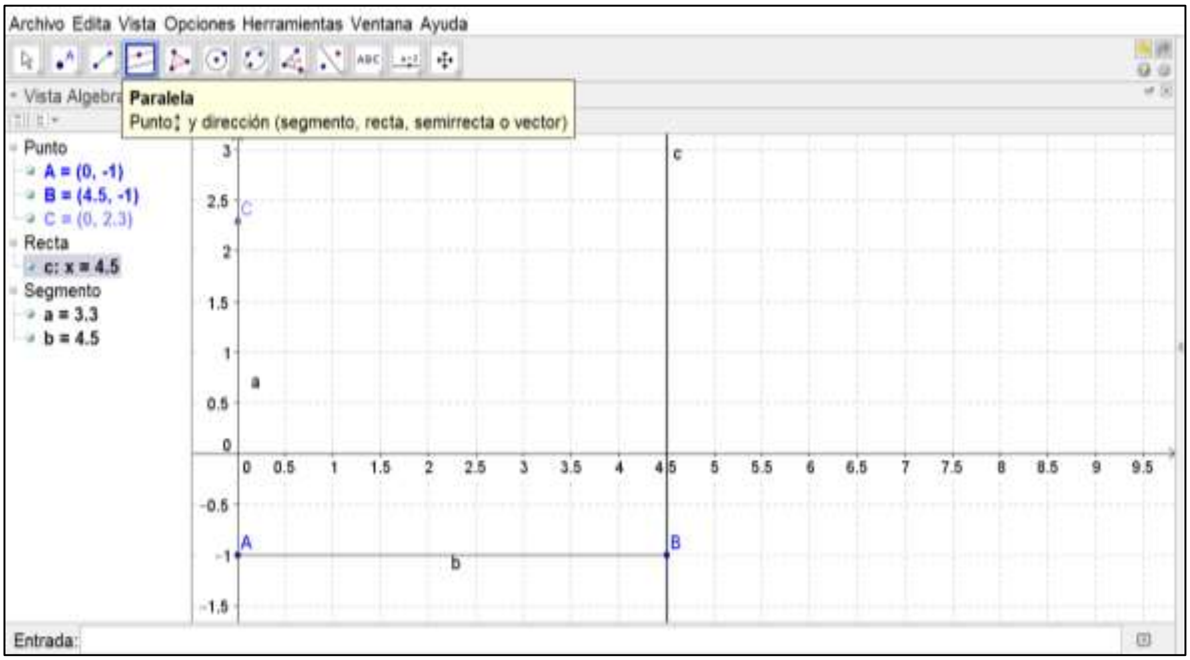


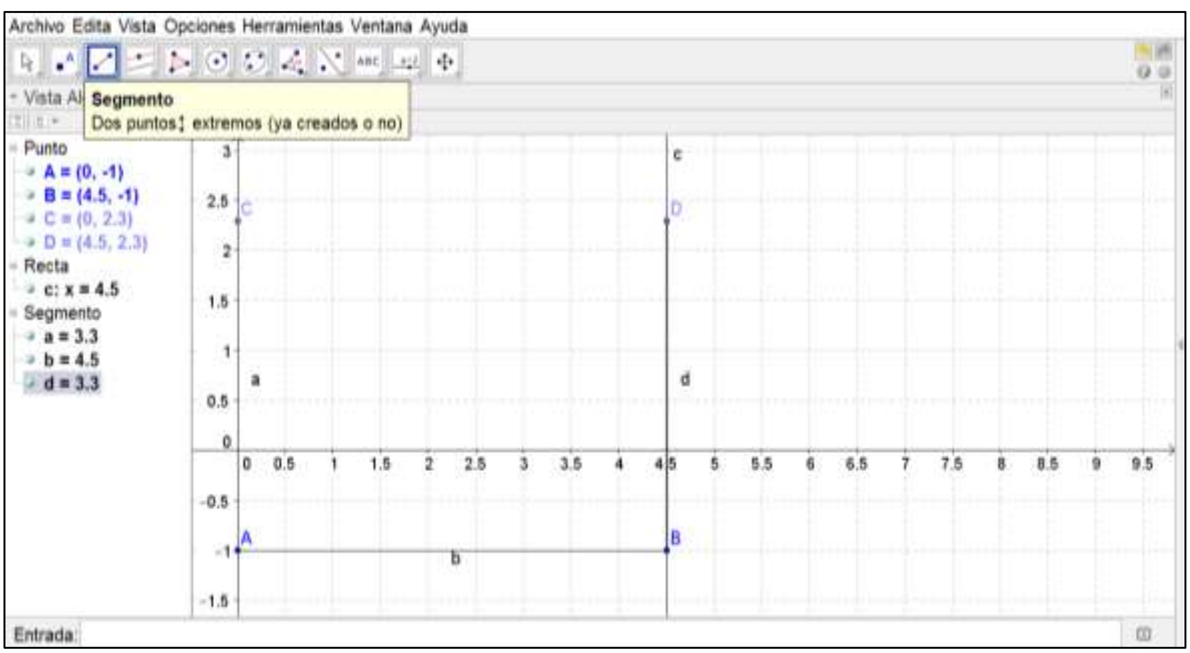
Ahora trazaremos el otro lado del rectángulo, el cual debe ir sobre el eje (y) y debe partir del punto A hacia cualquier punto sobre el eje, y lo haremos con el comando **Segmento** y luego ajustarlo a una medida de 3.30 de la misma manera que se hizo con el segmento de 4.5.

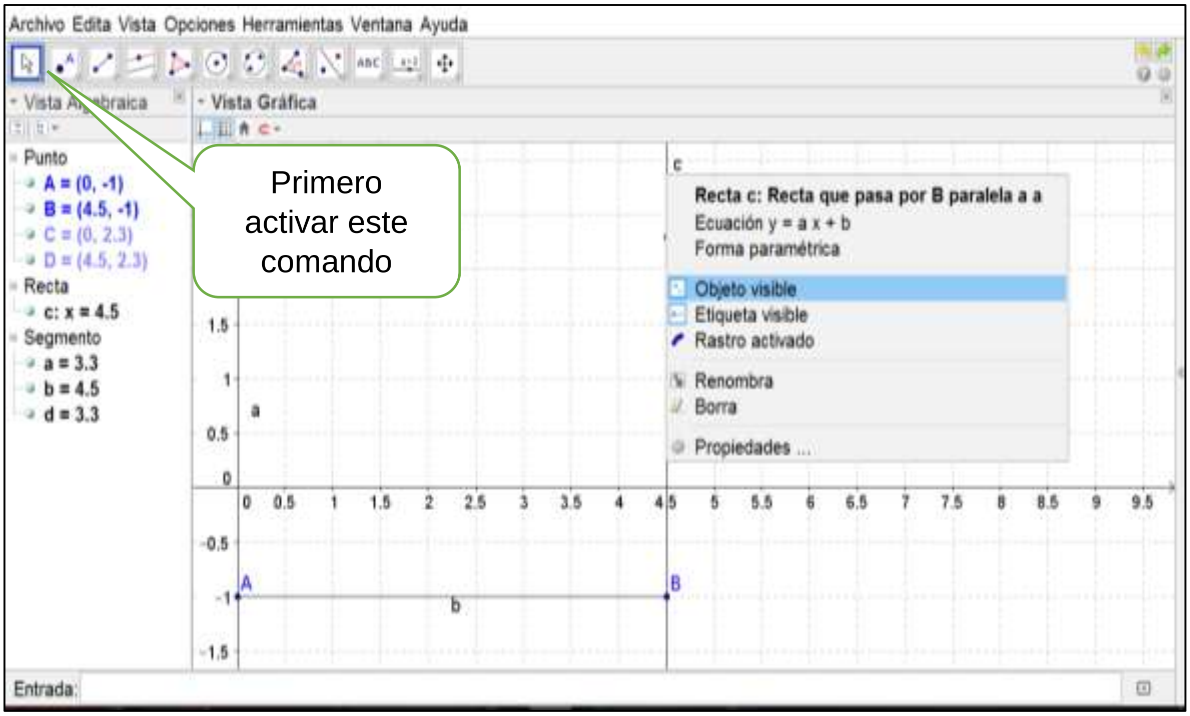


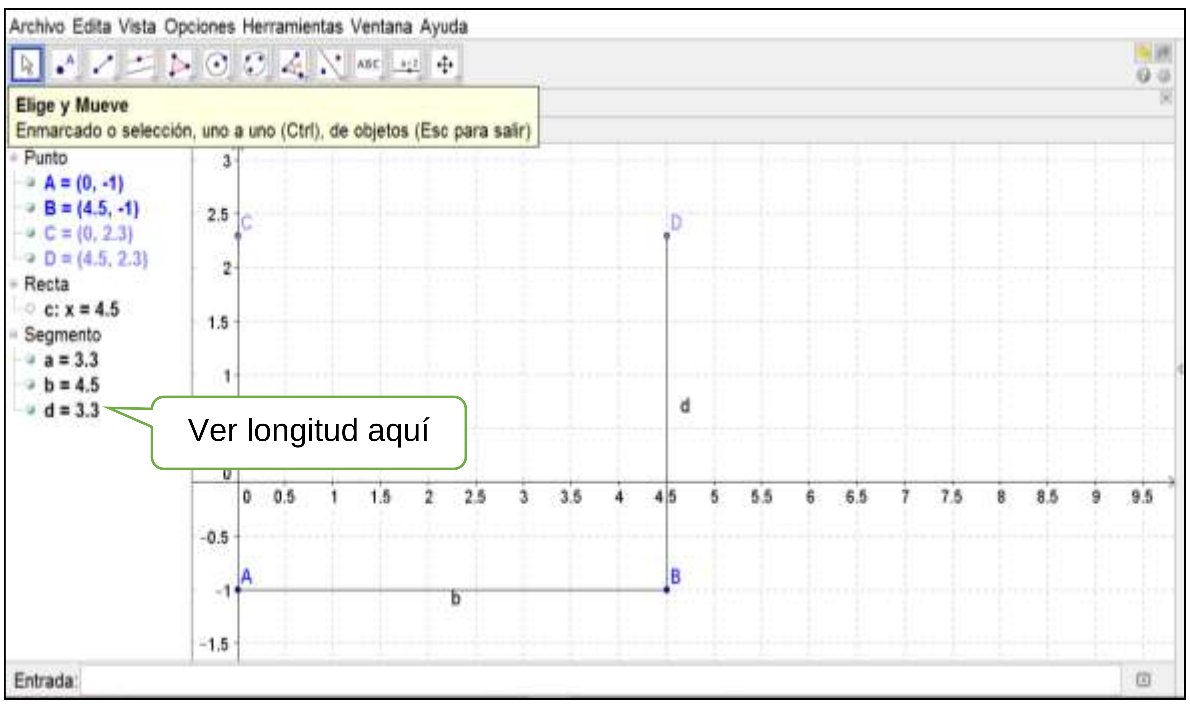


Ahora trazamos una recta paralela al eje (y) y que pase por el punto B utilizando el comando **Paralela**, seguidamente sobre la recta graficamos un segmento con el comando **Segmento**, que parta del punto B a cualquier punto sobre la recta paralela graficada, después ocultamos la recta con la opción **Objeto visible** y posteriormente ajustamos el segmento a la longitud de su lado opuesto que es de 3.3.

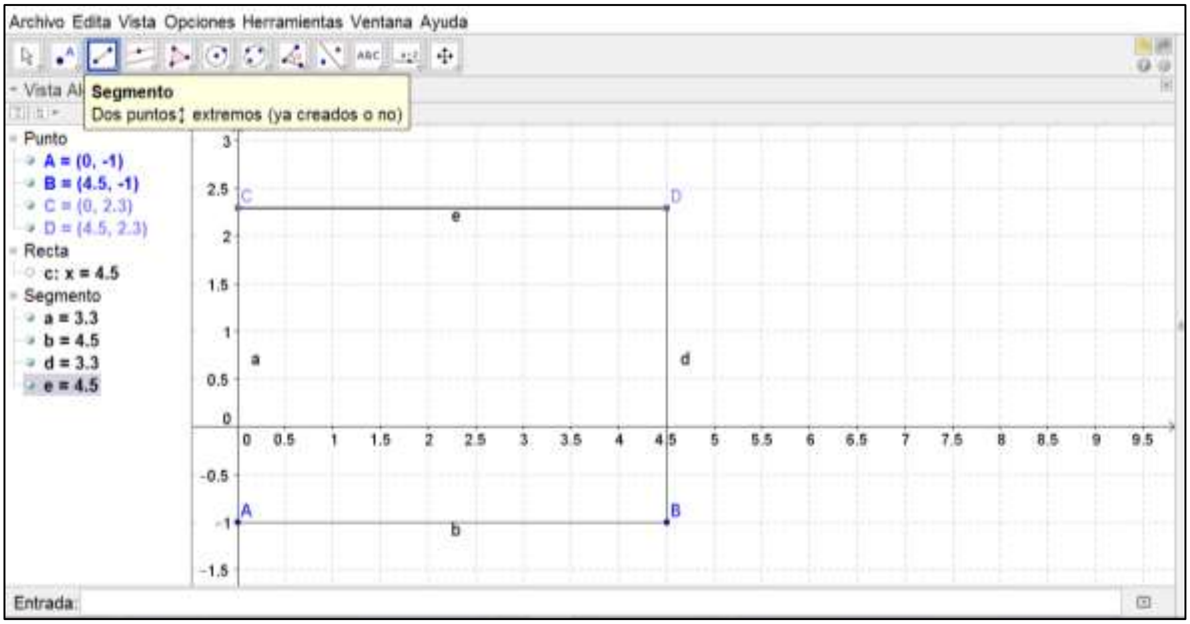




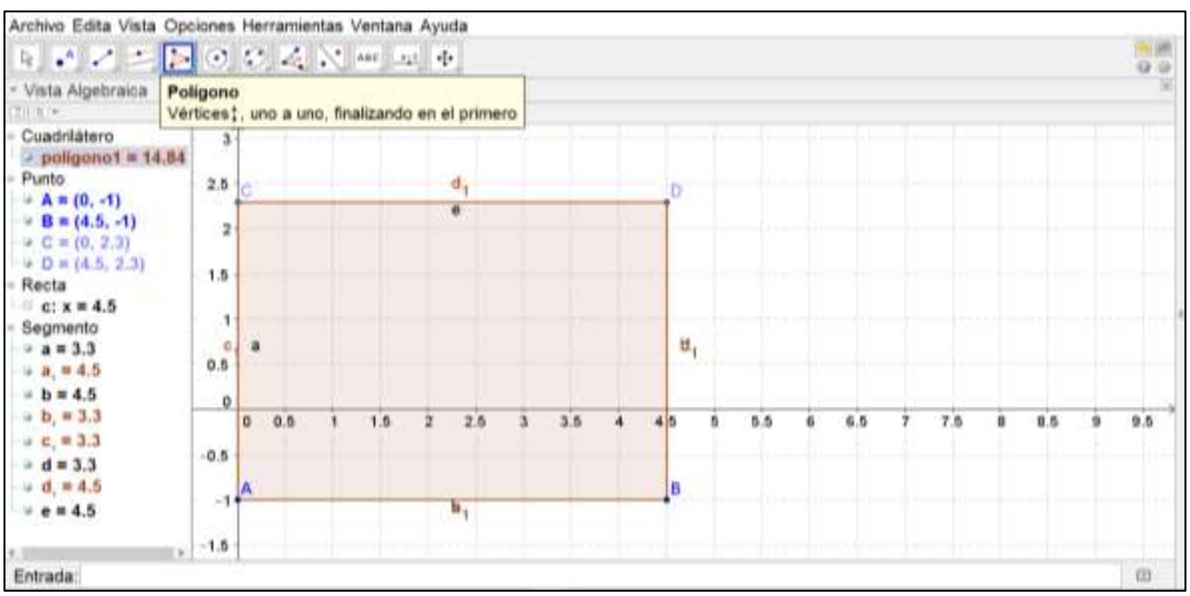




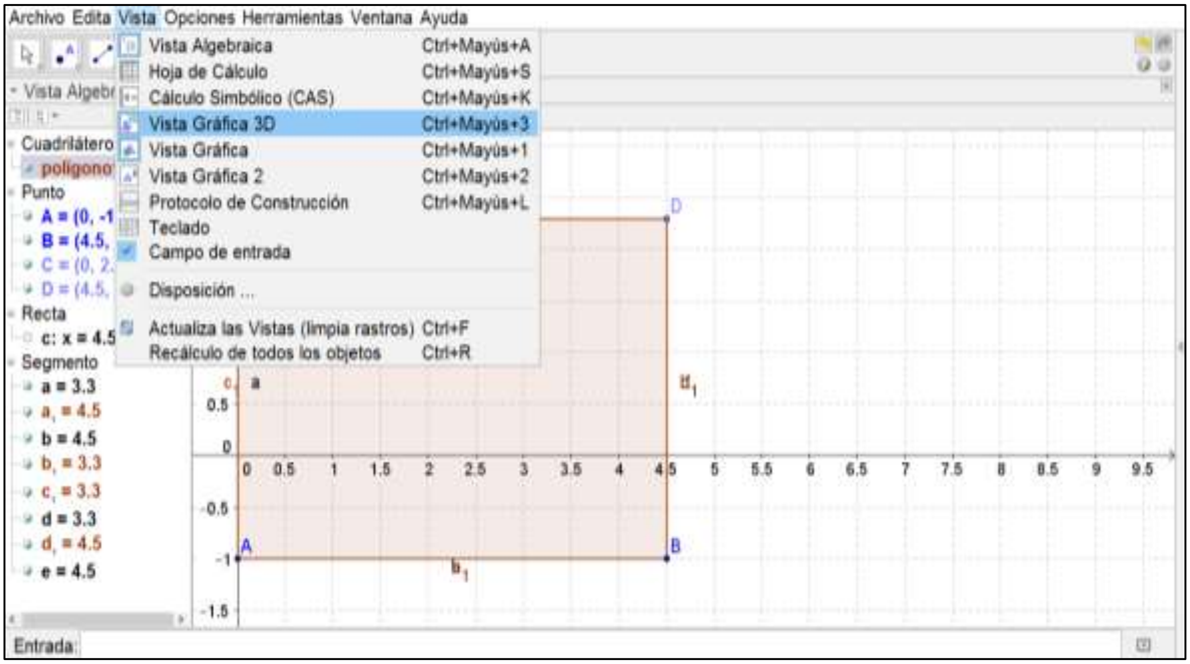
Con la opción del comando **Segmento** unimos los puntos A y B, obteniendo así el rectángulo con las medidas pertinentes a través de segmentos.

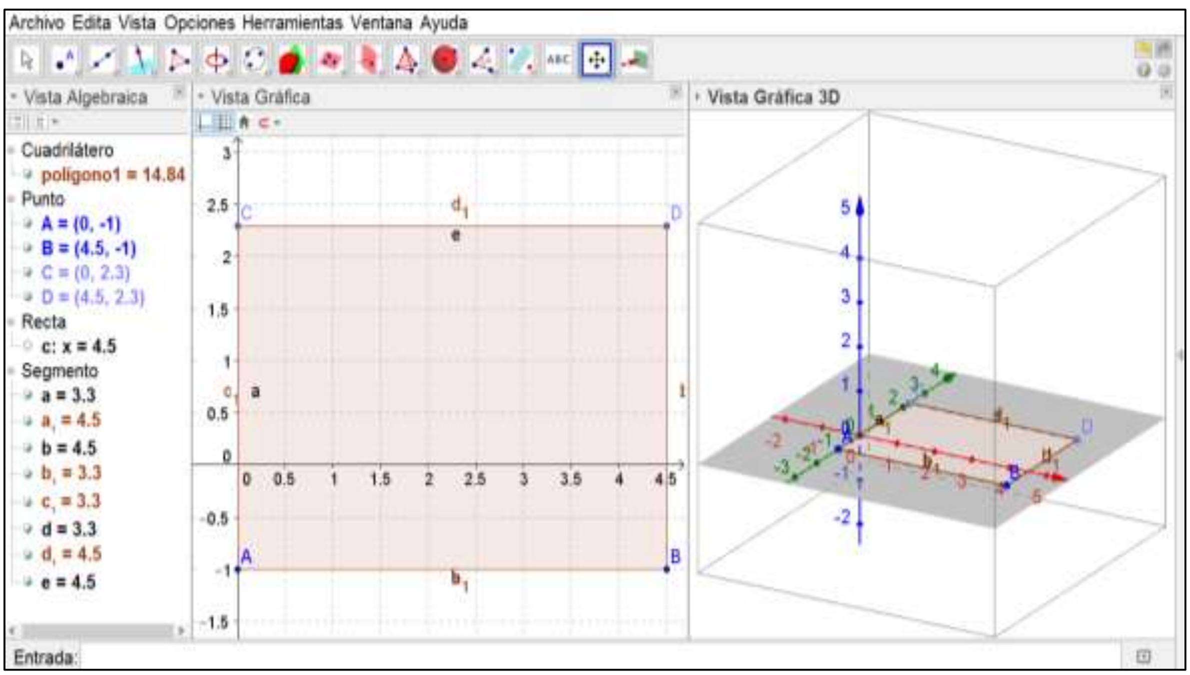


Pero para que el programa reconozca lo que hemos hecho como un polígono, nos auxiliaremos del comando **Polígono** y tecleamos sobre los cuatro puntos y así queda definido el polígono.

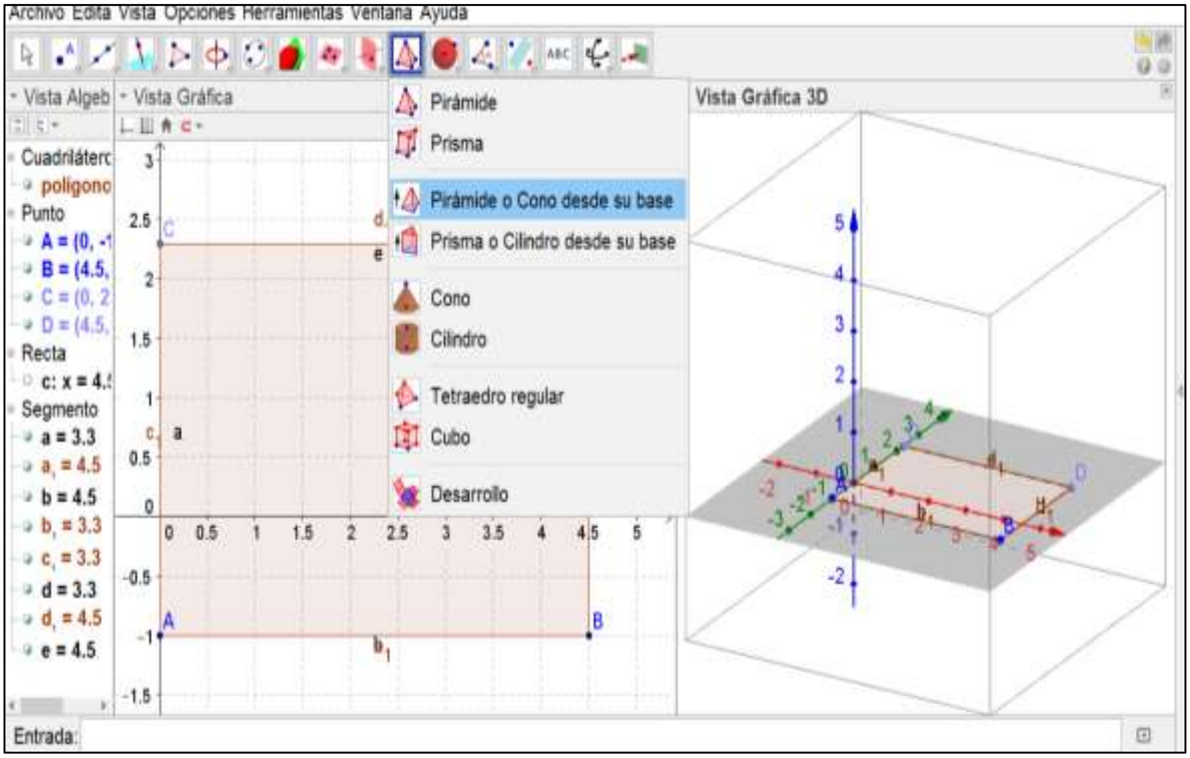


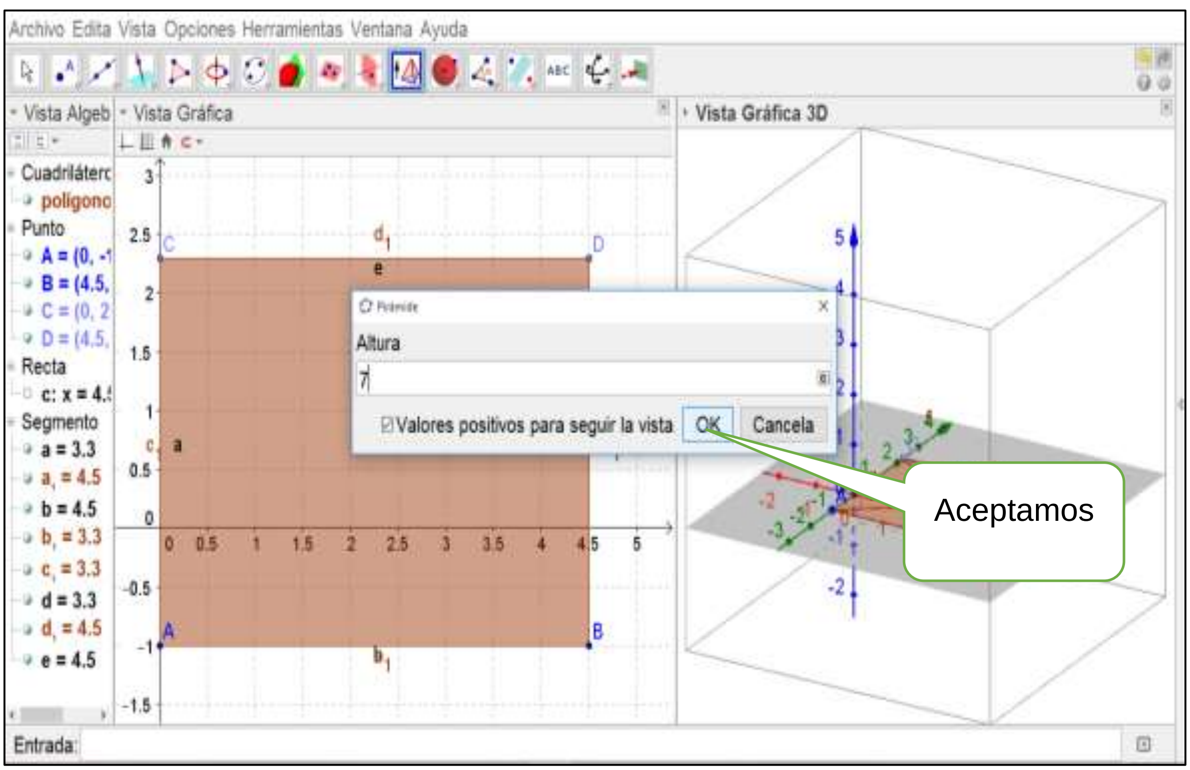
Seguidamente expresaremos dicho polígono en 3D para poder construir la pirámide con una altura de 7 metros. Para eso nos ubicamos en el ícono con el nombre de **Vista** y seleccionamos la opción **Vista Gráfica 3D.**

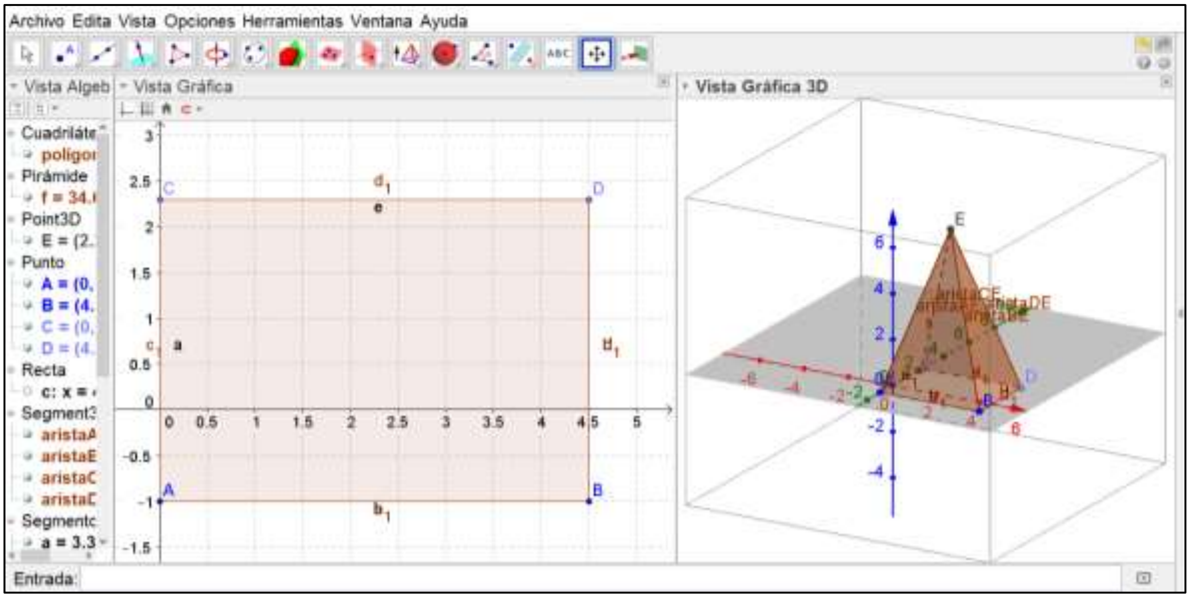




Para expresar la pirámide nos auxiliaremos del comando que posee la **Vista Gráfica 3D** que se enuncia **Pirámide o Cono desde su base**, la seleccionamos, luego tecleamos sobre el polígono mostrado en 3D y se nos aparecerá un cuadro de diálogo en el cual pondremos la altura de la pirámide que en este caso será 7.


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Vista Algeb
Vista Gráfica
Vista Gráfica 3D
Pirámide
Prisma
Pirámide o Cono desde su base
Prisma o Cilindro desde su base
Cono
Cilindro
Tetraedro regular
Cubo
Desarrollo
Cuadriláterc
polígono
Punto
Recta
Segmento
a = 3.3
b = 4.5
d = 3.3
e = 4.5
Entrada:

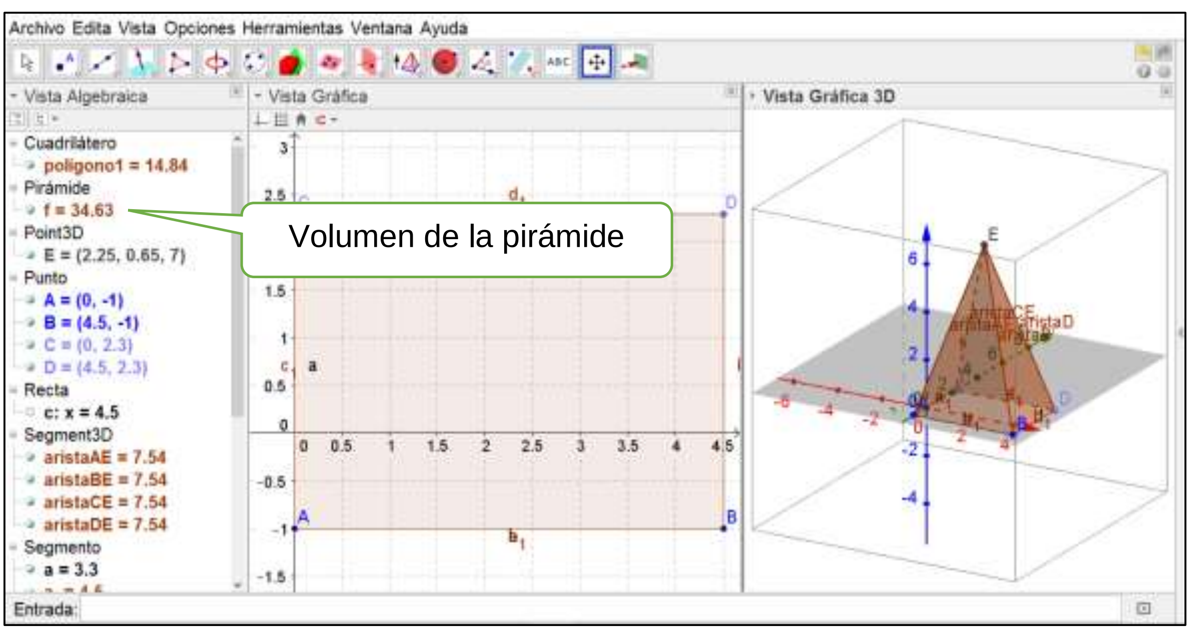

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Vista Algeb
Vista Gráfica
Vista Gráfica 3D
Altura
7
Valores positivos para seguir la vista
OK
Cancela
Aceptamos
Cuadriláterc
polígono
Punto
Recta
Segmento
a = 3.3
b = 4.5
d = 3.3
e = 4.5
Entrada:



Recalcaré que el programa Geogebra nos da como información el volumen de la pirámide que acabamos de crear.

Estudiante: Que bueno profesor, pero en donde se encuentra ese valor que usted nos dice que es el volumen que estamos buscando.

Maestro: Está expresada en la **Vista Algebraica**.



Estudiante: Que programa éste profesor, muy bueno. Así nos ahorramos de hacer otros procedimientos.

Maestro: Así es, mis preciados estudiantes.

Paso 4: Examinar la solución obtenida

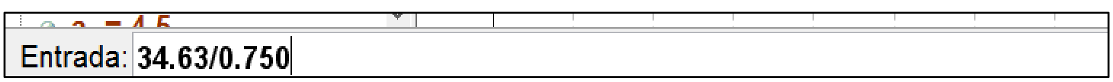
Estudiante: Ya encontramos la respuesta final del problema, profesor.

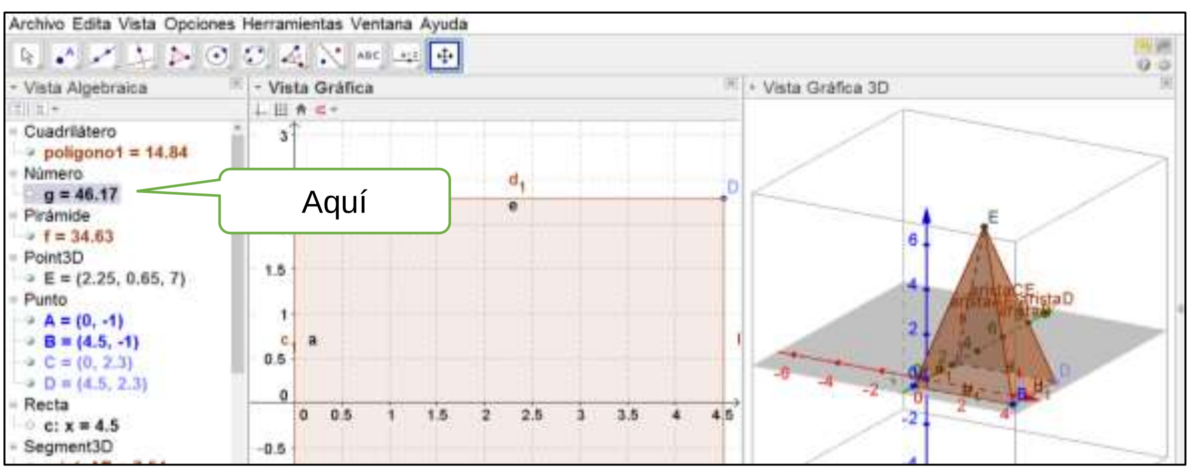
Maestro: Están seguros, no nos faltan un procedimiento final.

Estudiante: Es cierto profe, nos piden calcular la cantidad de carretadas de piedra, el cual en cada carreta cabe 0.750 m^3, entonces tenemos que dividir el resultado que nos dio al calcular el volumen de la pirámide entre 0.750 m^3.

Maestro: Claro que sí, hagamos entonces la operación aritmética en el programa de la siguiente manera.

Escribimos en la barra de entrada del programa lo que indico: 34.63/0.750 después damos **Enter** y en la vista algebraica sale expresada cuántas carretadas se necesitaron.





Estudiante: Entonces se necesitan 46,17 carretadas de piedra.

Maestro: Aproximadamente 46.17, esta proximidad da una idea clara de cuántas carretas de piedra se necesita, ¿están de acuerdo?

Estudiante: Si profe.

Maestro: Entonces ¿qué van hacer cuando se le pida el volumen de la pirámide?

Estudiante: Manipular el software Geogebra, porque mucha cosa proporciona y además porque nos va enseñando algo nuevo cada vez que lo manipulamos.

Maestro: Muy bien, excelente.

CONCLUSIONES

Debido al proceso de facilitación de herramientas didácticas eficaces para mejorar la calidad educativa en cuanto a la resolución de problemas Matemáticos sobre Área y Volumen de la Pirámide, la cual se desarrolla a través de la aplicación del Método de Polya, se puede concluir de la siguiente manera:

Resolver problemas sobre Área y Volumen de la Pirámide a través de los pasos del Método de Polya se logra mejor aprendizaje satisfactorio, capacidad de análisis a situaciones Matemáticas y reflexión sobre conocimientos esperados en el proceso de formación estudiantil.

Para resolver problemas en décimo grado sobre Área y Volumen de la Pirámide relacionado a la vida diaria, se debe hacer uso de material didáctico para explicar claramente conceptos y propiedades que tiene el estudio de la temática.

A través de los avances tecnológicos, es necesario fomentar a los estudiantes en la manipulación de programas Matemáticos necesarios para resolver problemas de Área y Volumen de la Pirámide, así como el software Geogebra, en donde su uso puede desarrollarse a través de los pasos del Método de Polya al momento de solucionar un problema Matemático.

RECOMENDACIONES

Es necesario adaptarse a la forma de resolución de problemas utilizando el Método de Polya, ya que garantiza en el estudiantado mejor desarrollo cognitivo, curiosidad y proceso de reflexión en el análisis de situaciones relacionadas al campo de la Matemática.

La aplicación del Método de Polya en el aula de clase mediante la apropiación de programas educativos, así como Geogebra y otras que pueden ser utilizadas desde el celular exclusivamente, son idóneas en esta era tecnológica; además, que las actividades programadas sean capaces de despertar el interés en los aprendices para que sus conocimientos adquiridos sean duraderos.

Al utilizar el Método de Polya con actividades creativas y que se desarrollen a través de una interacción entre docente – estudiante, permite la adquisición de nuevos conocimientos de una forma ordenada y a la vez crea un ambiente de aprendizaje constructivo.

VI. CONCLUSIONES

Al finalizar esta investigación se hace mención de las conclusiones, las cuales se derivan de todo el proceso realizado.

1) Con respecto a las características de los problemas sobre Área y Volumen de la Pirámide que presentó el docente, se detallan que tenían una solución lógica, poseían varias formas de resolverse, contenían datos que permitían una solución veraz y en dichos problemas se mencionaba lo que se debía encontrar como incógnita; además los problemas presentados hacen referencia a investigación Matemática y a ejercicios ajustados a problemas.

2) La manera de resolver los problemas de Área y Volumen de la Pirámide por parte del docente es a través de la aplicación del Método de Polya, en donde se observó la participación activa de algunos estudiantes en base a las preguntas que asignaba el maestro sobre conceptos y fórmulas, y al resolver problemas fue notorio el respaldo de material audio visual, gráficos y material concreto.

3) El maestro al utilizar el Método de Polya no lo realiza de la mejor forma, ya que la interacción entre alumnos y docentes no fue muy evidente y al hacer uso de diapositivas a través de la proyección del data show, el docente llevaba plasmado la reacción de los alumnos sin antes haber interactuado.

4) La acción de los alumnos al momento de aplicar el Método de Polya para encontrar la respuesta a un problema, se encontraba en desfase ya que había poco dominio de cómo aplicar los pasos del Método.

5) Los problemas que se propusieron van en base a las dificultades encontradas, en donde se toma en cuenta el proceso adecuado para aplicar el Método de Polya en la resolución de problemas sobre Área y Volumen de la Pirámide relacionados a la vida cotidiana.

VII. BIBLIOGRAFÍA

Apolinar, E. S. (20 de 07 de 2015). *DICM. Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos.* Recuperado el 09 de 05 de 2017, de Aprende Matemáticas: http://www.aprendematematicas.org.mx/obras/DICM.pdf

Baldor, A. A. (2001). *Geometría plana y del espacio y trigonometría.* México,D.F.: Publicaciones Cultural, S.A. de C.V.

Blanco, J. L. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *SUMA 21, Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, 11-20.

Caballero, R. J., & Caballero, Y. C. (10 de 02 de 2005). *Documento_completo. El Alumnado de Secundaria ante los problemas Matemáticos.* Recuperado el 05 de 10 de 2017, de SEDICI-Repositorio de la Universidad Nacional de La Plata: http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/24662/Documento_completo.pdf ?sequence=1

Castillo, A. Q., & Johnson, J. (2012). *Resolución de problemas con operaciones básicas, para solucionar acontecimientos de la vida cotidiana, sexto grado del nivel primario, Matemática.* Guatemala: Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa, Ministerio de Educación.

Cruz, E. d., & Flores, M. H. (2013). *Modelos de resolución de problemas de ecuaciones lineales con una variable, octavo grado, turno matutino, Instituto Nacional de la Dalia, Matagalpa, segundo semestre 2013.* Matagalpa.

Domínguez, J. H., & Robayna, M. M. (1994). Modelo de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas. *SUMA*, 82-90.

García, J. J. (1998). La creatividad y la resolución de problemas como base de un modelo didáctico alternativo. *Revista educación y pedagogía*, 145-174.

Instituto Tecnológico y Estudios Superiores de Monterrey. (2005). *Resolucion efectiva de problemas.* Monterrey: Mexico.

Martín, J. E. (1999). *Resolución de problemas Matemáticos.* Recuperado el 10 de 05 de 2017, de intef: http://platea.pntic.mec.es/jescuder/BLOG-1/Resolucion%20de%20problemas%20matematicos.pdf

Martínez, S. B. (Enero de 2015). *MÉTODO PÓLYA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.* Recuperado el 5 de abril de 2017, de Index of: http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesisjcem/2015/05/86/Escalante-Silvia.pdf

MINED. (2011). Programa de estudio, educación secundaria. *10° y 11° grado de Matemática*. Nicaragua.

Morales, M. J. (2009). *Fundamentos Generales de la Enseñanza de la Matemática y su Epistemología. Módulo II.* Managua, Nicaragua: MINED - PASEM BM.

Nieto, L. B. (1993). *Una clasificacIón de problemas Matemáticos.* Recuperado el 13 de 05 de 2017, de Dpto. de Didáctica de las C. Experimentales y de las Matemáticas: http://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/blanco93.pdf

Osamiz, M. d. (1995). *Para Pensar Mejor* (Segunda ed.). Madrid: EDICIONES PIRÁMIDE, S.A.

Peña, K. R. (Noviembre de 2008). *Método de Polya en el diseño de estrategias para facilitar la resolución de problemas relacionados con áreas de figuras planas.* Recuperado el 1 de abril de 2017, de Biblioteca digital - ULA: http://bdigital.ula.ve/pdf/pdfpregrado/26/TDE-2010-05-26T11:19:28Z-1160/Publico/penakarelys.pdf

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas* (primera ed.). Mexico: Trilla , S.A, de. CV.

Rimarachín, J. C. (2014). *Aplicacion del Método de George Polya, para mejorar el talento en la resolucion de problemas Matemáticos,en los estudiantes del primer grado de educacion secundaria de la institución educativa "Victor Berrios Contreras"-Cullanmayo-Cutervo 2014.* Recuperado el 25 de Abril de 2017, de Scribd: https://es.scribd.com/doc/310814167/Tesis-Polya-y-la-resolucion-de-problemas-pdf

Rivera, G. P. (2015). *Matemática, educación secundaria, Décimo grado.* Managua.

Siles, R. J., & Siles, J. B. (2016). *Modelos de resolución de problemas aplicados durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los números enteros en estudiantes de séptimo grado F y G, turno vespertino, Instituto Nacional Eliseo Picado,departamento de Matagalpa,primer semestre 2016.* Matagalpa.

ANEXO 1: OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

Variable	Subvariable	Definición conceptual	Indicador	Pregunta	Escala de valores	Instrumento	Fuente
Resolución de Problemas de Área y Volumen de la Pirámide		Para Caballero y Caballero (2005), la resolución de problema lo define como “el proceso de ataque de ese problema: aceptar el desafío, formular preguntas, clarificar el objetivo, definir y ejecutar el plan de acción y evaluar la solución” (p.5).	Concepto de ejercicio Matemático	¿Qué es para usted un ejercicio Matemático?	Operación que no amerita análisis. Herramienta utilizada para asimilar fórmulas o un paso conocido. Proceso que requiere orden de ejecución	Encuesta	Estudiante
			Concepto de problema Matemático	¿Qué entiende por problema Matemático?	-	Entrevista	Docente
				¿Cómo hace para encontrar la solución a un problema Matemático?	Lee varias veces el problema para comprenderlo mejor. Hace pausas para analizar cuando se presenta: coma, punto y coma, punto y seguido. Da realce a los datos que posee el problema.	Observación	Proceso de enseñanza aprendizaje

Variable	Subvariable	Definición conceptual	Indicador	Pregunta	Escala de valores	Instrumento	Fuente
Resolución de Problemas de Área y Volumen de la Pirámide		Para Caballero y Caballero (2005), la resolución de problema lo define como “el proceso de ataque de ese problema: aceptar el desafío, formular preguntas, clarificar el objetivo, definir y ejecutar el plan de acción y evaluar la solución” (p.5).	Concepto de problema Matemático		Hace un esquema o gráfico del problema. Busca en conjunto con los estudiantes un camino de resolución. Aplica detalladamente lo planificado para su solución. Valora la veracidad del resultado obtenido con lo estipulado en el problema.		
				¿Cómo hace para encontrar la solución a un problema Matemático?	Encuentro la respuesta de manera directa. Utilizo cualquier fórmula. Leo el problema e identifico datos, incógnitas y hago un plan de ejecución.	Encuesta	Estudiante

Variable	Subvariable	Definición conceptual	Indicador	Pregunta	Escala de valores	Instrumento	Fuente
Resolución de Problemas de Área y Volumen de la Pirámide		Para Caballero y Caballero (2005), la resolución de problema lo define como “el proceso de ataque de ese problema: aceptar el desafío, formular preguntas, clarificar el objetivo, definir y ejecutar el plan de acción y evaluar la solución” (p.5).	Diferencia entre ejercicio y problema	Podría usted establecer la diferencia entre ejercicio y problema en Matemática.	-	Entrevista	Docente
					Los datos son dudosos para obtener la solución. Se necesita de la ejecución de un plan. La resolución se puede hacer a través de un paso conocido o por aplicación de fórmulas.	Encuesta	Estudiante
				Aborda la clase de Matemática mediante el desarrollo de ejercicios y problemas.	Sí No	Observación	Proceso de enseñanza aprendizaje
				Usted ¿en qué resolución enfoca más tiempo?	Ejercicios. Problemas. Ejercicios y problemas	Encuesta	Estudiante
			Concepto de resolución de problemas en Matemática	Usted ¿Qué entiende por resolución de problemas Matemáticos?	-	Entrevista	Docente
					Proceso de ataque al problema mediante la ejecución de un plan. Aplicación de un paso conocido.	Encuesta	Estudiante

<table>
<tr><th>Variable</th><th>Subvariable</th><th>Definición conceptual</th><th>Indicador</th><th>Pregunta</th><th>Escala de valores</th><th>Instrumento</th><th>Fuente</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Resolución de Problemas de Área y Volumen de la Pirámide</td><td rowspan="6"></td><td rowspan="6">Para Caballero y Caballero (2005), la resolución de problema lo define como “el proceso de ataque de ese problema: aceptar el desafío, formular preguntas, clarificar el objetivo, definir y ejecutar el plan de acción y evaluar la solución” (p.5).</td><td rowspan="4">Concepto de resolución de problemas en Matemática</td><td></td><td>Es encontrar una solución por medio de pasos o fórmulas dadas.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Enfatiza la clase en la resolución de problemas</td><td>Sí
No</td><td>Observación</td><td>Proceso de enseñanza aprendizaje</td></tr>
<tr><td>¿Le gusta resolver problemas de Matemática?</td><td>Sí
No</td><td>Encuesta</td><td>Estudiante</td></tr>
<tr><td>¿Cuántas veces lee el problema antes de proceder a resolver?</td><td>1 – 2
3 – 4
5 – A más</td><td>Encuesta</td><td>Estudiante</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Clasificación de los problemas Matemáticos</td><td rowspan="2">¿Qué tipos de problemas presenta a los estudiantes?</td><td>-</td><td>Entrevista</td><td>Docente</td></tr>
<tr><td>Problemas de traducción simple o compleja.
Problemas de proceso.
Problemas de situaciones reales.</td><td>Observación</td><td>Proceso de enseñanza y aprendizaje</td></tr>
</table>

Variable	Subvariable	Definición conceptual	Indicador	Pregunta	Escala de valores	Instrumento	Fuente
Resolución de Problemas de Área y Volumen de la Pirámide		Para Caballero y Caballero (2005), la resolución de problema lo define como “el proceso de ataque de ese problema: aceptar el desafío, formular preguntas, clarificar el objetivo, definir y ejecutar el plan de acción y evaluar la solución” (p.5).	Clasificación de los problemas Matemáticos		Problemas de investigación Matemática. Problemas de Puzles. Historias Matemáticas.		
				¿Cuándo considera que un problema es de la vida diaria?	Estructura una actividad de varias opciones. Tiene una descripción sencilla. Se relaciona con un aspecto de tu quehacer diario.	Encuesta	Estudiante
			Características de los problemas Matemáticos	¿En un problema Matemático, sino menciona lo que se debe buscar, se puede considerar un problema?	Sí No	Encuesta	Estudiante
				¿Cuántas formas de resolver considera que tiene un problema Matemático?	Una Varias Ninguna	Encuesta	Estudiante

Variable	Subvariable	Definición conceptual	Indicador	Pregunta	Escala de valores	Instrumento	Fuente
Resolución de Problemas de Área y Volumen de la Pirámide		Para Caballero y Caballero (2005), la resolución de problema lo define como “el proceso de ataque de ese problema: aceptar el desafío, formular preguntas, clarificar el objetivo, definir y ejecutar el plan de acción y evaluar la solución” (p.5).	Algunos modelos Matemáticos que contribuyen a la resolución de problemas.	¿Conoce algunos modelos para resolver problemas? Puede mencionarlos.	-	Entrevista	Docente
				¿Qué similitud encuentra entre los modelos Matemáticos de resolución que conoce?	-	Entrevista	Docente
			Importancia de resolver problemas Matemáticos.	¿Considera que es importante resolver problemas?	Sí No	Encuesta	Estudiante
				¿Qué beneficios se obtiene de resolver problema en Matemática?	-	Entrevista	Docente
Método de Polya		Rimarachín (2014), da a conocer que el Método de Polya “son estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizadas para	Concepto del Método de Polya	¿Qué entiende por Método de Polya?	-	Entrevista	Docente
				¿Ha escuchado hablar del Método de Polya?	Sí No	Encuesta	Estudiante

Variable	Subvariable	Definición conceptual	Indicador	Pregunta	Escala de valores	Instrumento	Fuente
Método de Polya		la solución de problemas basada en la experiencia previa con problemas similares, provocando un aprendizaje significativo" (p.61).	Propósito del Método de Polya	¿Cuál puede ser el propósito que tiene el Método de Polya al momento de resolver problemas Matemáticos?	-	Entrevista	Docente
			Pasos del Método de Pólya	Usted ¿ha resuelto un problema utilizando los pasos del Método de Polya?	Sí No	Encuesta	Estudiante
				Podría usted manifestar ¿qué pasos corresponden al Método de Polya para la resolución de problemas?	-	Entrevista	Docente
					Comprender el problema. Concebir un plan. Esclarecer cada paso realizado. Ejecutar el plan. Sintetizar la información. Examinar la solución obtenida.	Encuesta	Estudiante
				Hace énfasis el docente en utilizar el Método de	Sí No	Observación	Proceso de enseñanza aprendizaje

Variable	Subvariable	Definición conceptual	Indicador	Pregunta	Escala de valores	Instrumento	Fuente
Método de Polya		Rimarachín (2014), da a conocer que el Método de Polya “son estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizadas para la solución de problemas basada en la experiencia previa con problemas similares, provocando un aprendizaje significativo” (p.61).	Pasos del Método de Polya	Polya en la resolución de problemas.			
				¿Qué pasos del Método de Polya está utilizando el docente al momento de resolver problemas?	Comprender el problema. Concebir un plan. Ejecutar el plan. Examinar la solución obtenida.	Observación	Proceso de enseñanza aprendizaje
				De qué manera se están implementando los pasos del Método de Polya al resolverse un problema.	Excelente Muy bien Regular No se implementa	Observación	Proceso de enseñanza aprendizaje
			Importancia de la aplicación del Método de Polya en la resolución de problemas**.**	El Método de Polya facilita el intercambio de ideas entre docente y estudiantes.	Sí No	Observación	Proceso de enseñanza aprendizaje
			Resolución de problema aplicando el Método de Polya.	En la comarca de Susulí se sabe que el techo de la capilla debe ser remodelada, si			

Variable	Subvariable	Definición conceptual	Indicador	Pregunta	Escala de valores	Instrumento	Fuente
Método de Polya		Rimarachín (2014), da a conocer que el Método de Polya "son estrategias generales de resolución y reglas de decisión utilizadas para la solución de problemas basada en la experiencia previa con problemas similares, provocando un aprendizaje significativo" (p.61).	Resolución de problema aplicando el Método de Polya.	el techo tiene forma de pirámide cuadrangular**.** Calcular el costo total de la remodelación si se tiene conocimiento que por $1m^2$ se cobra C$ 200 y además los lados de la base miden 7 m y la altura 6,5 m.	Respuesta: C$ 20,670.72	Encuesta	Estudiante

ANEXO 2: ENCUESTA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA

UNAN - MANAGUA

ENCUESTA A ESTUDIANTES DE DÉCIMO GRADO, CENTRO ESCOLAR PÚBLICO RUBÉN DARÍO.

Estimados estudiantes, estamos efectuando una investigación con el objetivo de analizar la resolución de problema en Área y Volumen de Pirámide aplicando Método de Polya en décimo grado A y B, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, Susulí, Matagalpa, la cual es de gran importancia ya que su aplicación es muy fundamental en el sistema educativo.

Marque con una "X" en el espacio en blanco, según corresponda a su criterio:

1. ¿Qué es para usted un ejercicio Matemático?
   1.1. Operación que no amerita análisis____
   1.2. Herramienta utilizada para asimilar fórmulas o un paso conocido___
   1.3. Proceso que requiere orden de ejecución____
2. ¿Cómo hace para encontrar la solución a un problema Matemático?
   2.1. Encuentro la respuesta de manera directa____
   2.2. Utilizo cualquier fórmula____
   2.3. Leo el problema e identifico datos, incógnitas y hago un plan de solución____
3. ¿Podría usted establecer la diferencia entre ejercicio y problema en Matemática?
   3.1. El problema es claro y conciso, en cambio en un ejercicio se presenta dificultad en la resolución___
   3.2. En un problema no se sabe con anticipación su planteamiento, lo cual es lo contrario a un ejercicio____
   3.3. La resolución de ejercicios se apoya de un plan de resolución, lo cual es contrario en la resolución de problemas ____
4. Usted ¿en qué resolución enfoca más tiempo?
   Ejercicios___ Problemas___
   Ejercicios y problemas___
5. Usted: ¿qué entiende por resolución de problemas Matemáticos?
   5.1. Proceso de ataque al problema mediante la ejecución de un plan. _____
   5.2. Aplicación de un paso conocido _____
   5.3. Es encontrar una solución por medio de pasos o fórmulas dadas. _____
6. ¿Le gusta resolver problemas de Matemática?
   Sí_____ No____
7. ¿Cuántas veces lee el problema antes de proceder a resolver?
   1 – 2 _____ 3 – 4 _____ 5 – A más _____
8. ¿Cuándo considera que un problema es de la vida diaria?
   8.1. Estructura una actividad de varias opciones. ____
   8.2. Tiene una descripción sencilla____
   8.3. Se relaciona con un aspecto de tu quehacer diario____
9. En un problema, sino menciona lo que se debe buscar, se puede considerar un problema.
   Sí ____ No ____
10. ¿Cuántas formas de resolver considera que tiene un problema Matemático?
    Una ___ Varias____ Ninguna ____
11. ¿Considera que es importante resolver problemas?
    Sí ____ No ____
12. ¿Ha escuchado hablar del Método de Polya?
    Sí ____ No ___
13. Usted ¿ha resuelto un problema utilizando los pasos del Método de Polya?
    Sí ___ No ___
14. Podría usted manifestar ¿qué pasos corresponden al Método de Polya para la resolución de problemas?
    14.1. Comprender el problema ____
    14.2. Concebir un plan ____
    14.3. Esclarecer cada paso realizado ____
    14.4. Ejecutar el plan ____
    14.5. Sintetizar la información ____
    14.6. Examinar la solución obtenida ____
15. Trate de encontrar la solución al siguiente problema: **En la comarca de Susulí se sabe que el techo de la capilla debe ser remodelada, si el techo tiene forma de pirámide cuadrangular. Calcular el costo total de la remodelación si se tiene conocimiento que por $1m^2$ se cobra C$ 200 y además los lados de la base miden 7 m y la altura 6,5 m.**

    Proceso de resolución: _______________________
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____

ANEXO 3: GUÍA DE OBSERVACIÓN

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN - MANAGUA

GUÍA DE OBSERVACIÓN A CLASE EN EL CENTRO ESCOLAR PÚBLICO RUBÉN DARÍO.

Objetivo: Visualizar la resolución de problemas en Área y Volumen de la Pirámide aplicando Método de Polya con los estudiantes de décimo grado, Centro Escolar Público Rubén Darío.

DATOS GENERALES:
Nombre del profesor visitado: ____
N° de estudiantes: _________ Fecha: ______________ Disciplina que imparte ____________________________
Hora en que inicia la clase: __________________________ Hora en que finaliza la clase: _____________________
Tema que imparte: ____ N° de estudiantes presentes: ____

a) RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.
1.1. Aborda la clase mediante el desarrollo de ejercicios y problemas. Sí ____ No ____
Observación:____
____

1.2. ¿Enfatiza la clase en la resolución de problemas? Sí ____ No ____
Observación:____
____

1.3. ¿Cómo hace para encontrar la solución a un problema Matemático?
A) Lee varias veces el problema para comprenderlo mejor. Sí ____ No ____
B) Hace pausas para analizar cuando se presenta: coma, punto y coma, punto y seguido. Sí ____ No ____
C) Da realce a los datos que posee el problema. Sí ____ No ____
D) Hace un esquema o gráfico del problema. Sí ____ No ____
E) Busca en conjunto con los estudiantes un camino de resolución Sí ____ No ____
F) Aplica detalladamente lo planificado para su solución. Sí ____ No ____
G) Valora la veracidad del resultado obtenido con lo estipulado en el problema. Sí ____ No ____
Observación:____
____

1.4. ¿Qué tipos de problemas presenta a los estudiantes?
Problemas de traducción simple o compleja. Sí __ No __
Problemas de proceso. Sí __ No __
Problemas de situaciones reales. Sí __ No __
Problemas de investigación Matemática. Sí __ No __
Problemas de Puzles. Sí __ No __
Historias Matemáticas. Sí __ No __

Observación:____
____

b) MÉTODO DE POLYA
2.1. Hace énfasis el docente en utilizar el Método de Polya en la resolución de problemas. Sí __ No __
Observación:____
____

2.2. ¿Qué pasos del Método de Polya está utilizando el docente al momento de resolver problemas?
A) Comprender el problema ___
B) Concebir un plan _____
C) Ejecutar el plan ____
D) Examinar la solución obtenida ____

Observación:____
____

2.3. De qué manera se están implementando los pasos del Método de Polya al resolverse un problema.
Excelente ____ Muy bien ____ Regular ___ No se implementa ____
Observación:____
____

2.4. El Método de Polya facilita el intercambio de ideas entre docente y estudiantes. Sí ___ No ___
Observación:____
____

Observaciones generales: ____
____

ANEXO 4: ENTREVISTA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN - MANAGUA

ENTREVISTA A DOCENTE DE MATEMÁTICA,
DÉCIMO GRADO, CENTRO ESCOLAR PÚBLICO RUBÉN DARÍO,
SUSULÍ, MATAGALPA.

Los estudiantes de quinto año de la carrera de Matemática estamos realizando una investigación sobre la resolución de problema en Área y Volumen de la Pirámide aplicando el Método de Polya, en donde esperamos su valioso aporte, ya que ésta investigación fortalecerá las bases geométricas a nivel de secundaria.

I. DATOS GENERALES.

Nombre del profesor: ____

Años de experiencia como docente de Matemática: _______

N° de estudiantes: ________________

Fecha: ________________

II. CUESTIONARIO.

1) ¿Qué entiende por problema Matemático?
2) Podría usted establecer la diferencia entre ejercicio y problema en Matemática.
3) Usted ¿Qué entiende por resolución de problemas Matemáticos?
4) ¿Qué tipos de problemas presenta a los estudiantes?
5) ¿Conoce algunos modelos para resolver problemas? Puede mencionarlos.
6) ¿Qué similitud encuentra entre los modelos Matemáticos de resolución que conoce?
7) ¿Qué beneficios se obtiene de resolver problema en Matemática?
8) ¿Qué entiende por Método de Pólya?
9) ¿Cuál puede ser el propósito que tiene el Método de Pólya al momento de resolver problemas Matemáticos?
10) Podría usted manifestar ¿qué pasos corresponden al Método de Polya para la resolución de problemas?

ANEXO 5: PARRILLA DE RESULTADOS

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14A	P14B	P14C	P14D	P14E	P14F	P15
3	3	1	3	3	1	2	3	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2
3	3	2	3	3	1	3	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2
3	3	2	3	1	1	2	3	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2
3	3	3	3	3	1	2	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	2	1	2
2	3	1	3	3	1	2	3	1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2
	1	1	3	3	2	1	3	1	2	1	1	2	2	1	2	1	2	1	2
		1	3	3	1	3	3		2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2
2	3	1	2	3	1	2	1	2	2	1	1	1	2	1	2	1	2	1	2
3	3	2	3	3	1	2	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	2	2	2
3	3	2	1	3	2	1	3	2	2	1	1	2	2	2	1	1	2	1	2
	3	1	3	3	1	3	3	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2
2	3	1	1	3	2	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
	3		3	3	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2
3	3	1		1		3	1	1	2	1	1	1	2	2	2	1	2	1	2
2	3	1	3	3	1	3	3	2	2	1	1	1	2	2	2	1	2	2	2
2	3	3	3	3	1	2	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
2	2	1	3	3	1	2	3	2	2	1	1	1	2	2	2	1	2	2	2
2	3	3	2	3	1	2	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2
3	3	2	3	3		2	3	1	2	1	1	1	2	2	1	1	2	1	
3	3	2	3	3	1	3	3	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	
3	3	1	3	3	1	2		1	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	3	2	3	3	1	2		2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	
3	3	3	3	1		1	3	1	2	1	1	1	2	1	2	1	2	1	
3	3	2	1	3	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	
3	3	2	3	3	2	1	3		2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
2	3	1	3	3	1	1	3	2		1	1		1	1	1	1	1	1	
2	3	2	3	3	1	2	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	
2	3	2	3	3	1	2	3	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	
3	3	2	3	3	2	2	3	2	2	1	1	2	1	1	2	1	2	1	
2	3	2	2	3	1	2	3	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	2
2	3	2	3	3	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	
3	3	2	3	3	2		1	2	2	1	1	1	2	2	2	2	2	1	
2	3	2		3	1	3	3	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	
2	3	2	3	3	1	3	3	1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	
2	3	3	2	3	1	2	3	2	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	
3	3	3	3	1	1	2	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	2
3	3	2	3		1	2		2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	
3		2	3		1	2		2	2	1	1	1	2	2	2	1	2	1	

ANEXO 6: RESULTADOS DE LA OBSERVACIÓN

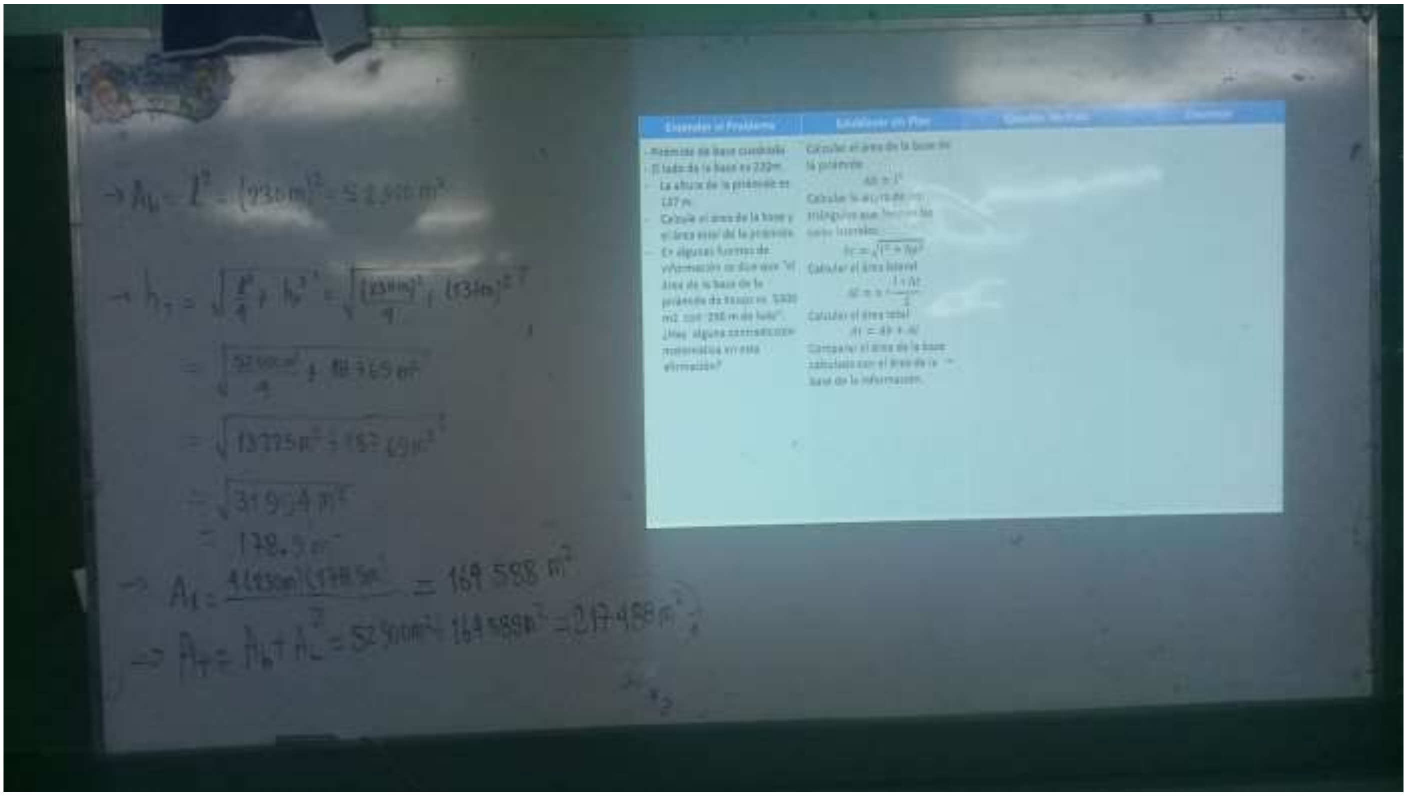
	CRITERIOS	RESPUESTA A LOS CRITERIOS OBSERVADOS	OBSERVACIÓN CON RESPECTO AL CRITERIO
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	Aborda la clase mediante el desarrollo de ejercicios y problemas.	Sí	Se enfocó más a problemas modelado a ejercicio
	¿Enfatiza la clase en la resolución de problemas?	Sí	Dio a conocer varios problemas, en donde la mayoría tenían estructura de ejercicio.
	¿Cómo hace para encontrar la solución a un problema Matemático?	a) Hace pausas para analizar cuando se presenta: coma, punto y coma, punto y seguido. b) Da realce a los datos que posee el problema. c) Hace un esquema o gráfico del problema. d) Busca en conjunto con los estudiantes un camino de resolución. e) Aplica detalladamente lo planificado para su solución. f) Valora la veracidad del resultado obtenido con lo estipulado en el problema.	
	¿Qué tipos de problemas presenta a los estudiantes?	Problemas de investigación Matemática	No mostró evidencia de ir acorde a lo plasmado en el indicador de logro de dicha unidad
MÉTODO DE POLYA	Hace énfasis el docente en utilizar el Método de Polya en la resolución de problemas.	Sí	
	¿Qué pasos del Método de Polya está utilizando el docente al momento de resolver problemas?	a) Comprender el problema b) Concebir un plan c) Ejecutar el plan d) Examinar la solución obtenida	El docente no es generador de preguntas claves (pistas) para que el estudiante argumente acerca de cómo resolver el problema, es decir se visualizó poca interacción entre docente – estudiante.
	De qué manera se están implementando los pasos del Método de Polya al resolverse un problema.	Regular	El docente mantuvo limitado la opinión de los estudiantes durante la resolución de problemas a través del Método de Polya. Los estudiantes no están acostumbrado a la aplicación del Método de Polya al resolver problemas.
	El Método de Polya facilita el intercambio de ideas entre docente y estudiantes.	Sí	Se observó que hay intercambio entre lo nuevo y lo conocido.
	Observaciones generales:	❖ Al resolver problemas, el docente recuerda los pasos del Método de Polya. ❖ El docente al momento de utilizar diapositivas a través de la proyección del data show, la información de los dos pasos primeros del Método de Polya ya se encontraba plasmada, en donde lo contrario es irla completando con los estudiantes.	

ANEXO 7: RESULTADOS DE LA ENTREVISTA

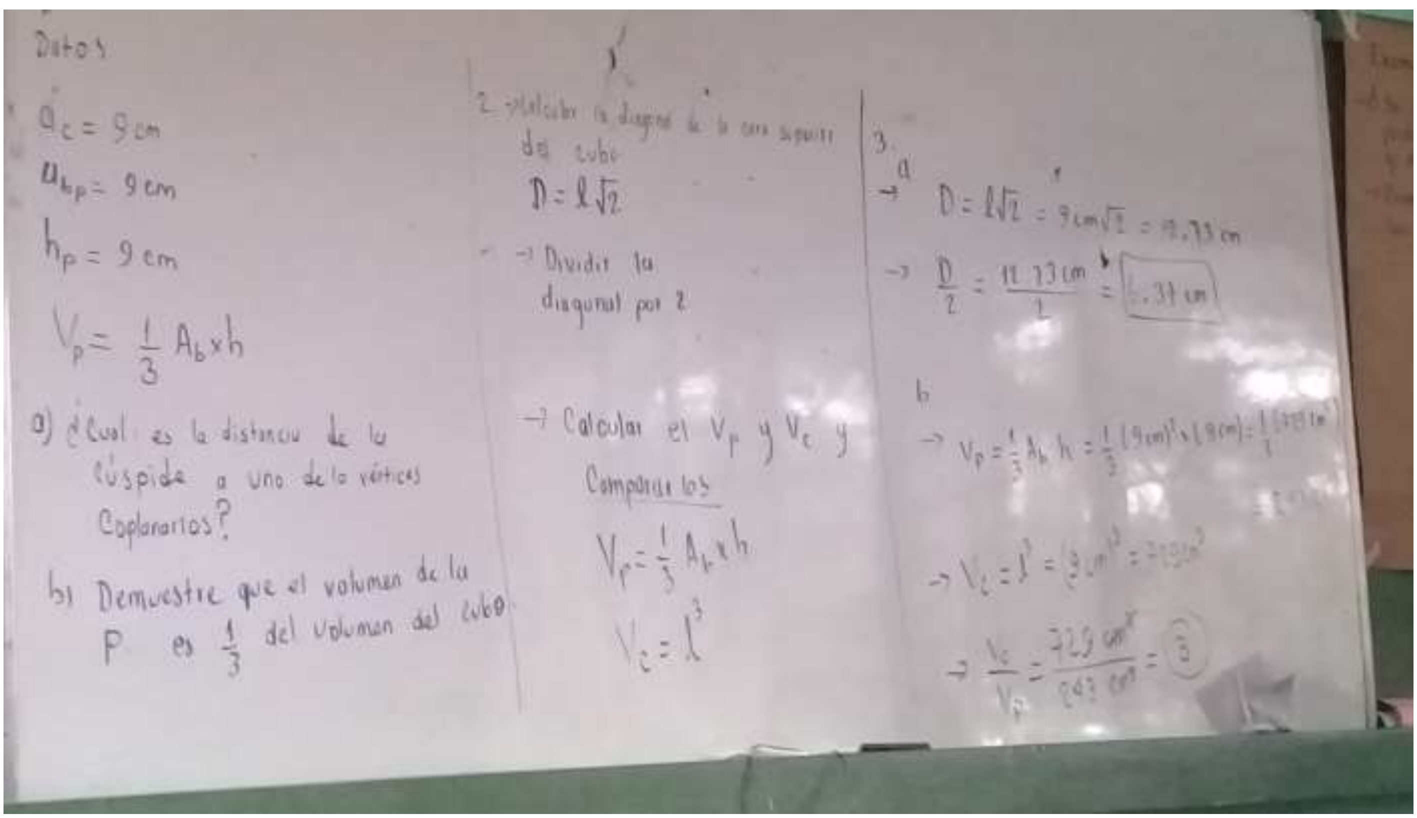
PREGUNTA	RESPUESTA DADA
1) ¿Qué entiende por problema Matemático?	Es una situación en donde se necesita hacer uso de herramientas Matemáticas para solucionarla y dar respuesta.
2) Podría usted establecer la diferencia entre ejercicio y problema en Matemática.	Cuando se resuelve un problema, este brinda una solución general que se puede aplicar a la solución de ejercicios y resolver un ejercicio consiste en encontrar soluciones especifica que son útiles sólo para esa situación que satisface su respuesta, es decir, en los problemas Matemáticos se establecen modelos como fórmulas y en los ejercicios solo se aplica las fórmulas.
3) Usted ¿Qué entiende por resolución de problemas Matemáticos?	Es brindar respuesta a una interrogante.
4) ¿Qué tipos de problemas presenta a los estudiantes?	Problemas en las cuales las soluciones que se encuentran son fórmulas y problemas que sirven de modelo para resolver otro parecido.
5) ¿Conoce algunos modelos para resolver problemas? Puede mencionarlos.	Desconozco los nombres de los modelos Matemáticos para resolver problemas, aparte del modelo conocido como es el Método de Polya.
6) ¿Qué similitud encuentra entre los modelos Matemáticos de resolución que conoce?	Es que parten dela comprensión del problema, y otra similitud es que siempre al finalizar hay que comprobar si la respuesta satisface la interrogante.
7) ¿Qué beneficios se obtiene de resolver problema en Matemática?	Logra la capacidad de análisis, se desarrolla un pensamiento crítico y la persona se vuelve más independiente.
8) ¿Qué entiende por Método de Pólya?	Es un modelo que establece una guía para resolver problema, no solo en Matemática, sino en cualquier índole.
9) ¿Cuál puede ser el propósito que tiene el Método de Pólya al momento de resolver problemas Matemáticos?	El propósito del Método de Polya, es guiar al individuo y establecer un proceso para resolver el problema.

PREGUNTA	RESPUESTA DADA
10) Podría usted manifestar ¿qué pasos corresponden al Método de Polya para la resolución de problemas?	Comprender el problema: se refiere al análisis del problema, estar claro de cuáles son las variables, que datos nos proporciona el problema, qué condiciones se establece entre lo conocido y lo desconocido; elaborar un plan: se pregunta si conoce problemas similares, se establece la ruta que va a seguir para resolver el problema, establecer fórmulas y conceptos; ejecutar el plan: hacer todo lo que dijiste que ibas a hacer en el segundo paso, aplicar las fórmulas; examinar o comprobación de resultados: si satisface las condiciones iniciales, saber si ese problema se puede aplicar a otra situación.

ANEXO 8: SECCIÓN DE FOTOS

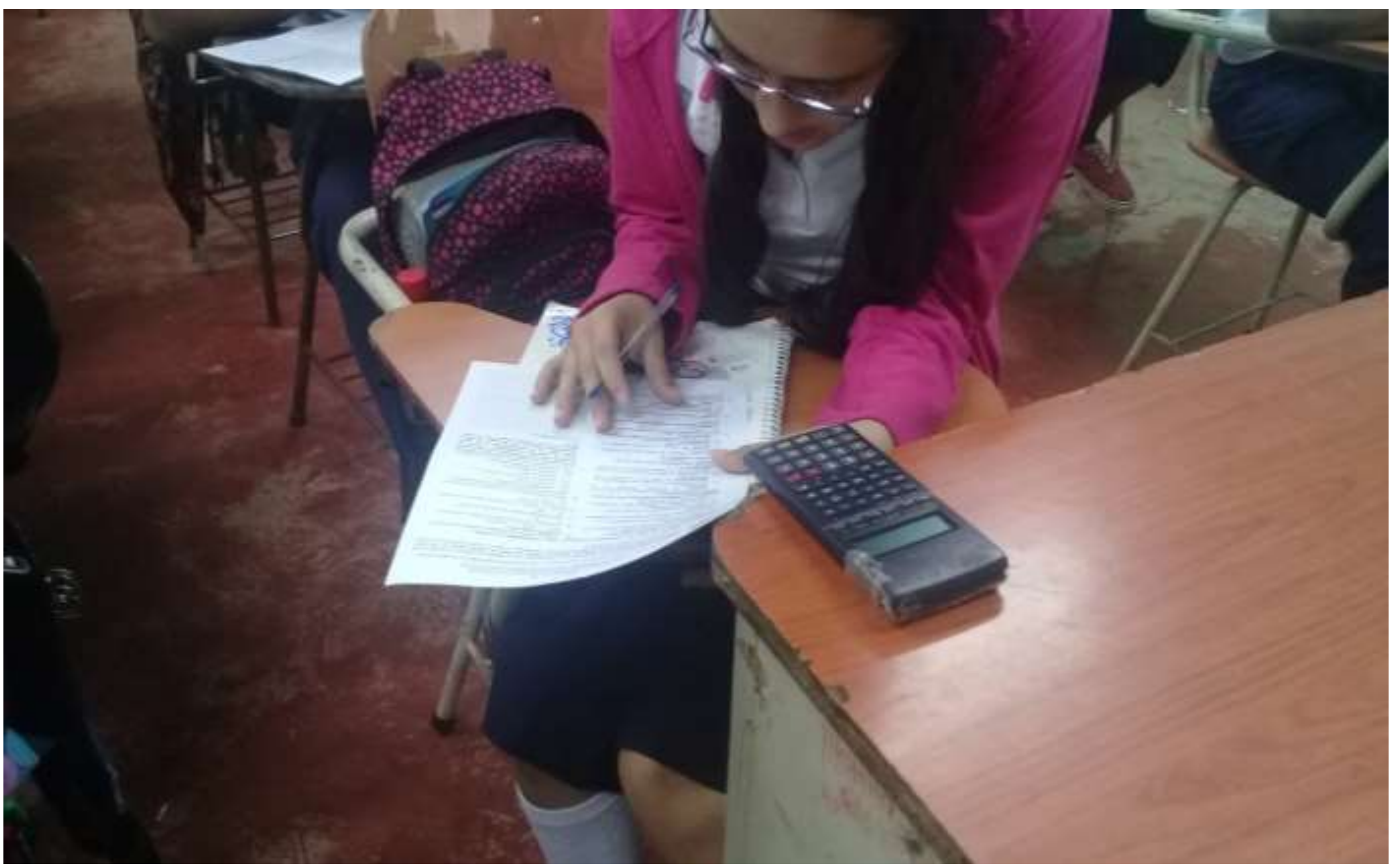


Fuente: Observación al proceso de enseñanza aprendizaje



Fuente: Observación al proceso de enseñanza aprendizaje

Fuente: Aplicación de encuesta



Fuente: Aplicación de encuesta