



**UNIVERSIDAD
NACIONAL
AUTÓNOMA DE
NICARAGUA,
MANAGUA**

UNAN - MANAGUA

**FACULTAD REGIONAL MULTIDISCIPLINARIA DE CHONTALES
FAREM-CHONTALES**

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICA APLICADA

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Matemática Aplicada

LA INTEGRAL DEFINIDA

Análisis de la incidencia de la Unidad Didáctica sobre la integral definida, en la conceptualización que tienen los estudiantes de segundo año de la Carrera de Contaduría Pública y Finanzas de la Universidad Politécnica de Nicaragua (UPOLI), en la asignatura de Matemática I, durante el primer semestre del año 2017

Autor: M.Sc.: Neyling Gricelda Potosme Mercado

Director de Tesis: M.Sc.-Ph.D.: Antonio Parajón Guevara

Diciembre, 2017

Índice general

CARTA AVAL	I
DEDICATORIA	II
AGRADECIMIENTOS	III
TRAYECTORIA ACADÉMICA DEL DOCENTE INVESTIGADOR	IV
RESUMEN	VI
ABSTRACT	VII
1. DIAGNÓSTICO DE LA INVESTIGACIÓN	1
1.1. Introducción	1
1.2. Justificación	4
1.3. Propósitos	6
1.3.1. General	6
1.3.2. Específicos	6
1.4. PERSPECTIVA TEÓRICA	7
1.4.1. Taxonomía SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) . .	7
1.4.2. Teoría de los campos conceptuales	10
1.4.3. Proceso de Enseñanza - Aprendizaje	13
1.4.4. Planeamiento Didáctico	17
1.4.5. Aprendizaje Significativo	18
1.5. DISEÑO METODOLÓGICO	19
1.5.1. Perspectiva de Investigación	19
1.5.2. Escenario	20

1.5.2.1.	Escenario General	20
1.5.2.2.	Aula de Clases	22
1.5.3.	Selección de los Informantes	22
1.5.3.1.	Selección de los Docentes	22
1.5.3.2.	Selección de los Estudiantes	23
1.5.4.	Estrategias para Recopilar la Información	23
1.5.4.1.	Análisis Documental	24
1.5.4.2.	Grupos Focales	25
1.5.4.3.	Entrevista a Profundidad	26
1.5.4.4.	Encuesta Cualitativa	27
1.6.	INSTRUMENTOS	28
1.7.	TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN	28
1.8.	ANÁLISIS INTENSIVO DE LA INFORMACIÓN	47
1.9.	PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN	50
1.10.	CONCLUSIONES	51
2.	UNIDAD DIDÁCTICA	58
2.1.	Introducción	58
2.2.	Justificación	59
2.3.	Propósitos	61
2.4.	Perspectiva Teórica	61
2.4.1.	Unidad Didáctica	61
2.4.2.	Criterios Orientados para el Diseño de la U.D	62
2.4.3.	Aprendizaje Cooperativo	65
2.4.4.	Uso de la Tecnología de la Información y Comunicación (TIC)	67
2.4.5.	Notas Históricas del Cálculo Integral	68
2.5.	Escenario	71
2.6.	Metodología	71
2.7.	Plantilla de Planificación de la Unidad Didáctica	71
2.7.1.	Ficha de Presentación de la Unidad Didáctica	72
2.7.2.	Desarrollo de la Unidad Didáctica por Sesión	73
2.7.2.1.	Sesión 1	73
2.7.2.2.	Sesiones: 2, 3 y 4	75

2.7.2.3.	Sesión 5	78
2.7.2.4.	Sesiones: 6 a 10	80
2.7.2.5.	Sesión 11	85
2.7.2.6.	Presentación de los Materiales de la Unidad Didáctica	86
2.8.	Relato de Implementación (Diario de Experimentación)	98
2.8.1.	Sesión 1	99
2.8.2.	Sesión 2	99
2.8.3.	Sesión 3	100
2.8.4.	Sesión 4	101
2.8.5.	Sesión 5	102
2.8.6.	Sesión 6	102
2.8.7.	Sesión 7	103
2.8.8.	Sesión 8	103
2.8.9.	Sesión 9	104
2.8.10.	Sesión 10	104
2.8.11.	Sesión 11	105
2.8.12.	Valoración del Proceso de Implementación de la Unidad Didáctica	105
3.	CONCEPTUALIZACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA	110
3.1.	INTRODUCCIÓN	110
3.1.1.	Justificación	111
3.1.2.	Propósitos de la Investigación	112
3.2.	ESTADO DEL ARTE	112
3.3.	ESCENARIO	116
3.4.	SELECCIÓN DE LOS INFORMANTES	117
3.5.	INSTRUMENTOS	118
3.6.	TÉCNICAS DE ANÁLISIS	122
3.6.1.	Red sistémica	122
3.7.	ANÁLISIS INTENSIVO DE LA INFORMACIÓN	125
3.7.1.	Análisis Descriptivo	125
3.7.1.1.	Antes de la Implementación de la U.D	125
3.7.1.2.	Después de la Implementación de la Unidad Didáctica	128
3.7.2.	Análisis Interpretativo	139

3.8. CONCLUSIONES	162
3.9. PERSPECTIVA DE FUTURO	165

ANTONIO PARAJÓN GUEVARA, profesor titular del Departamento de Matemática de la Facultad de Educación e Idiomas de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, UNAN-Managua.

CERTIFICA que la presente memoria de investigación:

Análisis de la incidencia de la Unidad Didáctica sobre la integral definida, en la conceptualización que tienen los estudiantes de segundo año de la Carrera de Contaduría Pública y Finanzas de la Universidad Politécnica de Nicaragua (UPOLI), en la asignatura de Matemática I, durante el primer semestre del año 2017

Ha sido realizada bajo su dirección en el *PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICA APLICADA* por el Máster Neyling Gricelda Potosme Mercado, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Matemática Aplicada.

Y para que así conste, en cumplimiento con la normativa vigente de posgrado, autoriza su presentación ante la Facultad Regional Multidisciplinaria De Chontales (FAREM-Chontales) para que pueda ser tramitada su lectura y Defensa pública.

Managua, Nicaragua, 23 de Noviembre de 2017.

EI DIRECTOR DE LA TESIS

Antonio Parajón Guevara, MS.c - Ph.D

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a Dios, quien iluminó y dio sabiduría para la conclusión de este estudio. A mis padres quienes me dieron la vida, educación, consejos y siempre confiaron en mí. A mi hijo y amigos, quienes sin su ayuda y comprensión nunca hubieran podido hacer esta tesis.

AGRADECIMIENTOS

La culminación de esta tesis, le agradezco en primer lugar, y sobre todas las cosas, a Dios. En especial a mi familia y amigos por su comprensión, ánimos y consejos en cada momento de este camino.

Quiero agradecer a la Universidad Politécnica de Nicaragua, Universidad Marta Abreu de las Villas y a la dirección de Doctorado de la FAREM-Chontales, por haberme concedido la oportunidad de formar parte del primer doctorado de Matemática Aplicada de Nicaragua, por depositar en mí la confianza para la realización de este trabajo de investigación, y por los esfuerzos que realiza día a día por la profesionalización de los docentes de Matemática de nuestra nación.

Agradezco a mi tutor Dr. Ramón Antonio Parajón Guevara no sólo por haber sido facilitador de conocimiento, sino por su calidad y calidez humana. Finalmente a mis colegas doctorantes por sus aportes, sugerencias, fuerza y perseverancia que animan a seguir adelante; y al profesor Emilio, por su juiciosa manera de motivarnos y dirigirnos.

TRAYECTORIA ACADÉMICA DEL DOCENTE INVESTIGADOR

La realización del estudio respecto al Análisis de la incidencia de la Unidad Didáctica sobre la integral definida, en la conceptualización que tienen los estudiantes de segundo año de la Carrera de Contaduría Pública y Finanzas de la Universidad Politécnica de Nicaragua (UPOLI), en la asignatura de Matemática I, durante el primer semestre del año 2017, estuvo a cargo de la investigadora Neyling Gricelda Potosme Mercado, quien es graduada en Ciencias de la Educación y Humanidades con mención especial en Matemática en la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN), egresada del programa de Maestría en Matemática de la Facultad de Ciencias e Ingenierías Unan- Managua y Master en Didácticas Específicas de la Matemática por la Universidad de Barcelona y UNAN- Carazo.

He desempeñado el cargo de docente horario de Matemática en la UNAN- Managua y actualmente trabajo en la UPOLI como docente fija. En el transcurso del quehacer educativo también me he desempeñado como maestra de módulos de Postgrado en Matemática de Educación Primaria (Fundación UNO y UNI), docente de la Academia Jóvenes talentos de Nicaragua, maestra de didáctica de la Matemática en la Escuela Normal Central Alesio Blandón Juárez, y docente de matemática en el Colegio Pureza de María.

En relación con el foco de la investigación y el paradigma seleccionado, se cuenta con un poco de experiencia, al trabajar en tesis de maestría en Didácticas específicas de la Matemática, el tema: Análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes sobre la desviación típica en estudiantes de secundaria. Además la experiencia en la construcción de conceptos en la escuela Normal Alesio Blandón en conjunción con la Agencia de Cooperación Internacional de Japón (JICA).

La experiencia previa se basa en los niveles de educación primaria y secundaria por lo que trabajar en un proyecto universitario con un contenido complejo resulta un reto y a la vez una gran satisfacción, el incursionar en una alternativa para investigar fenómenos educativos desde la realidad de los sujetos que viven dentro de ese contexto y más aún, un aspecto tan esencial en el proceso educativo como es la conceptualización de los sujetos cuando son sometidos a procesos de enseñanza aprendizaje con actividades innovadoras.

En cuanto al rol que jugó la investigadora en el proceso de investigación, fue fundamental y participativa en cada una de las fases del estudio, porque estuvo a cargo de la elaboración y ejecución de la investigación propuesta, lo que implicó la elaboración y administración de las técnicas y los instrumentos para recolectar la información, establecimiento de una relación y contacto directo con los informantes responsables del análisis intensivo de la información recabada y elaboración del informe final de la investigación.

RESUMEN

En este estudio, se analizó la incidencia de la Unidad didáctica sobre integral definida en la conceptualización de los estudiantes de segundo año de la carrera de Contaduría Pública de la Universidad Politécnica de Nicaragua. El trabajo se realizó en el primer semestre del año 2017, partiendo de un diagnóstico del proceso de enseñanza - aprendizaje de este contenido y como consecuencia de este, se diseñó e implementó una propuesta innovadora de Unidad Didáctica, bajo los criterios orientadores de Couso et al. Finalmente, la recolección de los datos se hizo a través de cuestionarios abiertos y entrevistas. Estos datos se analizaron utilizando el modelo taxonómico SOLO y la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. El análisis permitió identificar los niveles de razonamiento sobre la conceptualización de la integral definida de dos grupos de estudiantes, después de recibir metodologías de enseñanza diferentes. El análisis de los resultados indica que las conceptualizaciones de los estudiantes que recibieron la innovación didáctica fueron superiores.

Palabras Claves: Integral definida, conceptualizaciones, unidad didáctica, taxonomía SOLO.

ABSTRACT

In this study, the incidence of the didactic unit on integral defined in the conceptualization of second-year students of the Public Accounting career of the Polytechnic University of Nicaragua was analyzed. The work was carried out in the first semester of 2017, starting from a diagnosis of the teaching - learning process of this content and as a consequence of this, an innovative proposal of the Teaching Unit was designed and implemented, under the guiding criteria of Couso et al. Finally, the data collection was done through open questionnaires and interviews. These data were analyzed using the SOLO taxonomy model and the Vergnaud conceptual field theory. The analysis allowed to identify the levels of reasoning on the conceptualization of the definite integral of two groups of students, after receiving different teaching methodologies. The analysis of the results indicates that the conceptualizations of the students who received the didactic innovation were superior.

Keywords: definite integral, conceptualizations, didactic unit, taxonomy ONLY.

Índice de figuras

2.1. Grupo de Facebook, para retroalimentación de las clases.	68
2.2. Aula I-13	71
3.1. Edificio I, de la UPOLI	116
3.2. Aula I-12	116
3.3. Diario del maestro	118
3.4. Diario del maestro	119
3.5. Diario del maestro	120
3.6. Cuestionario cero	120
3.7. Cuestionario cero	121
3.8. Cuestionario uno	121
3.9. Cuestionario uno	122
3.10. Red sistémica general	123
3.11. Red sistémica general	124
3.12. Red sistémica general	125
3.13. Red sistémica, para el ejercicio 3, antes de U.D	126
3.14. Tabla1. Resultados del análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes	128
3.15. Red sistémica, para el ejercicio 1, después de U.D	129
3.16. Tabla2. Resultados del análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes	130
3.17. Red sistémica, para el ejercicio 2, después de U.D	131
3.18. Tabla 3. Resultados del análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes	131
3.19. Red sistémica, para ejercicio 2 para GAU y GNU	134
3.20. Red sistémica, para ejercicio 2 para GAU y GNU (continuación)	135
3.21. Tabla 4. Resultados del análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes GAU y GNU.	136
3.22. Red sistémica, para ejercicio 2 para GAU y GNU.	137
3.23. Tabla 5. Resultados del análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes.	138

Capítulo 1

DIAGNÓSTICO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

Los seres humanos han estado tratando de entender cómo funciona el mundo desde tiempos antiguos, casi del inicio mismo de la humanidad. Su curiosidad inagotable, lo ha llevado a desvelar cosas tan importantes desde el descubrimiento del juego, la invención de la rueda hasta teléfonos inteligentes e internet.

Por ejemplo, los griegos de la antigüedad eran grandes productores de conocimientos, haciendo preguntas y observaciones, trataban de responder a grandes cuestiones de su entorno, y de esta manera generaron conocimiento que heredamos y utilizamos actualmente. Entre ellos podemos mencionar a Pitágoras, considerado el primer matemático puro dedicado a la investigación (matemática helénica, geometría y aritmética) y a Hipócrates, el primer científico en crear una hipótesis acerca del origen natural de las enfermedades y cómo el cerebro controla al cuerpo.

Es evidente que la investigación permite al ser humano obtener nuevos conocimientos sobre la realidad y como resolver problemas. Permitiéndole discriminar los límites de la ignorancia y aumentar la capacidad para resolver problemas en los diferentes ámbitos de la sociedad.

Coincidimos con Ugarra (2012) al expresar que: la investigación es un proceso creador mediante el cual la inteligencia humana busca nuevos valores. Su fin es de enriquecer los distintos conocimientos del hombre, provocando acontecimientos que le hablan del porqué de las cosas, penetrando en el fondo de ellas con mentalidad exploradora de nuevos conocimientos.

También, Shulman (1989) sostiene que “investigamos en determinado campo para entenderlo, para informarnos mejor sobre él y quizá para aprender a actuar con precisión”. Ahora bien, cuando el objeto de estudio es el ser humano, cultura y sociedad, es cuando hablamos de Ciencias Sociales y dentro de estas tenemos a la Ciencia de la Educación.

Según Travers (1979) la investigación educativa: “Consiste en una actividad encaminada hacia la creación de un cuerpo organizado de conocimientos científicos sobre todo aquello que resulta de interés para los educadores”. Así, investigar en educación, cualquiera que sea el ámbito del complejo mundo educativo, implica no solamente explicar los problemas que le afectan sino entenderlos, mejorarlos y más aún, comprenderlos.

Actualmente la investigación educativa tiene un gran compromiso con nuestra sociedad, ya que al poner en marcha sus proyectos de investigación, pone de manifiesto la necesidad de que investigadores educativos respondan a las necesidades de la comunidad hacia donde van a tener un impacto los resultados de dichas investigaciones.

Una parte esencial en la investigación educativa es la Educación Matemática, o Didáctica Específica de la Matemática para dar respuesta a los grandes desafíos y problemas que implica el proceso de enseñanza aprendizaje de esta ciencia desde la primaria hasta la universidad. Enseñar Matemática es un proceso complejo en el que intervienen muchos factores como el dominio científico docente, medios materiales, actitud del alumno, currículo, contexto social, económico, etc.

Cabe señalar que el problema de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática es internacional y dado que, esta ciencia constituye una forma de aproximación a la realidad; brinda elementos de importancia para el desarrollo de la capacidad de argumentación racional, la abstracción reflexiva y el aumento de las habilidades necesarias para resolver problemas no sólo del ámbito escolar, sino de amplia aplicación y transferencia a otros campos del saber. Estos aspectos constituyen argumentos valederos y estímulo de iniciativas de investigación en este campo.

Producto de lo anterior, se han realizado numerosas investigaciones desde diferentes perspectivas para evaluar los efectos de dicho desempeño en el aprendizaje significativo. De estos estudios se ha podido identificar dificultades en el aprendizaje en: Álgebra, Geometría, Probabilidades y Cálculo infinitesimal.

Para afrontar estos problemas la didáctica de la Matemática, ha formado diversos institutos de investigación internacionales como: El Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav) en México, en Alemania el Internationales Deutsche Mathematiker (IDM), el instituto Freudenthal en Holanda, publicaciones en revistas periódicas de investigaciones internacionales como, *Psychology of Mathematic Education (PME)*, *Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*, Reunión Latinoamericana de Matemática Educa-

tiva(RELME), etc, (Goñi, 2011).

En Nicaragua las dificultades de aprendizaje de la Matemática se ven evidenciadas cada año cuando nuestros estudiantes no logran aprobar el examen de admisión de Matemática en las universidades públicas. Esta problemática ha llevado al actual gobierno ha establecer una articulación efectiva, a partir del año 2007 entre el Ministerio de Educación (MINED), el Tecnológico Nacional (INATEC) y el Consejo Nacional de Universidades (CNU).

En las universidades esta dificultad continúa y esta se refleja en altos porcentajes de deserción y reprobación en los programas relacionadas con esta ciencia tales como: Matemática básica, Matemática I y II, Cálculo diferencial e integral, Álgebra lineal, etc. Esta situación es preocupante dado que las universidades son las encargadas de formar profesionales calificados para servir eficientemente a la comunidad, y la Matemática dota al estudiante de herramientas necesarias para poder desempeñar su perfil profesional exitosamente.

La Universidad Politécnica de Nicaragua (UPOLI), no está excepta de esta problemática. En la Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales (ECEE) que administra la carrera de Contaduría Pública y Finanzas este fenómeno se hace más notorio en las asignaturas de su plan de estudio, tales como: Razonamiento Matemático, Matemática I y II, estas últimas son precedente para el Cálculo Infinitesimal.

Con base a lo anterior la comunidad educativa de la UPOLI ha hecho esfuerzos por superar estas dificultades, se puede citar a Artiles y Potosme (2016), quienes realizaron un estudio sobre los factores que inciden en el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura de Razonamiento Matemático. Con respecto al Cálculo Infinitesimal no encontramos registros.

Por lo tanto, consideramos oportuno realizar un estudio sobre el proceso de enseñanza aprendizaje del Cálculo Infinitesimal, específicamente en la unidad de integral definida en la asignatura de Matemática Aplicada. De esta manera podemos decir que nuestro propósito es diagnosticar la incidencia del proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida del programa de asignatura de Matemática Aplicada, en los estudiantes de la Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales de la UPOLI.

Pero ¿qué es el diagnóstico? El diagnóstico alude, en general, al análisis que se realiza para determinar cualquier situación, y cuáles son las tendencias. Esta determinación se realiza sobre la base de datos y hechos recogidos y ordenados sistemáticamente, que permiten juzgar mejor qué es lo que está pasando.

La etimología de este término es: “dia”, a través de y “gnosco” del verbo gignosko del latín gnoscerere significa aprender a conocer. De acuerdo a esto, el diagnóstico es el proceso a través del cual conocemos el estado o situación en que se encuentra algo o alguien, con la finalidad de intervenir si es necesario para aproximar a lo ideal.

Para la realización de este diagnóstico, se considera el paradigma naturalista de alcance descriptivo, porque se pretende caracterizar al estudiantado de acuerdo a las conceptualizaciones en los niveles de aprendizaje de la integral definida, y es de corte transversal, sólo se estudia en el primer semestre del año 2017. La población bajo análisis son los estudiantes de tercer año de la carrera de Contaduría Pública de la UPOLI. Se utilizará un muestreo no probabilístico. Para la recolección de datos utilizamos las siguientes técnicas:

1. Análisis documental respecto al plan de estudio, silabo, planes de clases y programa de asignatura de Matemática Aplicada de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas.
2. Grupo focal con tres docentes que imparten la asignatura de Matemática Aplicada, y seis estudiantes de tercer año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas.
3. Cuestionario abierto a seis estudiantes de Contaduría que habían cursado la asignatura.

Tanto coordinadora, docentes y estudiantes fueron nuestros informantes claves. Los cuales poseen la característica de muestra no probabilística conocida como intencional. Este tipo de muestra (16) fue el empleado en la metodología para nuestro estudio.

Por otro lado, al momento de llevar a cabo una lectura detallada del documento, encontrará las siguientes estructuras: justificación para efectuar el diagnóstico, propósitos diseñados para este trabajo, la perspectiva teórica que sustenta el estudio, la metodología empleada para efectuar cada una de las etapas que contempla la realización de un informe investiga, las técnicas de análisis de la información, análisis intensivo, planteamiento del problema, conclusiones, y finalmente la bibliografía.

1.2. Justificación

En los últimos tiempos se le ha dado mucha importancia al diagnóstico en los proceso de investigación, pues sin él sería prácticamente imposible de llevar a buen término y con resultados positivos, un estudio relacionado con mejoras de cualquier situación.

En la comunidad de educación matemática, últimamente se ha dado mucha relevancia a los diagnósticos, prueba de esto son los siguientes estudios:

- **Cerda (2014)** trabaja en una Propuesta didáctica con enfoque constructivista para mejorar el aprendizaje significativo de las Matemática en el contexto universitario. Esta investigación se centra en dos aspectos: impulsar estrategias de aprendizaje en el alumnado para abordar y resolver problemas matemáticos con más eficacia y facilitar un aprendizaje significativo, y por otra, a mejorar la actitud y el clima social de los estudiantes en las aulas universitarias.

Para el logro de estos aspectos, primero se realizó un diagnóstico para averiguar las estrategias de aprendizaje que utilizan los estudiantes que inician estudios universitarios y abordar los conocimientos matemáticos, la actitud general que presentan en la Matemática, y la influencia del clima social del aula en el aprendizaje matemático. Luego construyó y aplicó una Propuesta de Unidad didáctica, con enfoque constructivista para mejorar el aprendizaje significativo.

- **Hernández y Cuevas (2013)**, realizan un estudio diagnóstico sobre las competencias básicas por parte de estudiantes de nuevo ingreso sobre Cálculo diferencial en educación superior, en la ciudad de México. Analizaron las respuestas de los estudiantes y las clasificaron usando el modelo taxonómico SOLO y en base a estos niveles hicieron propuesta de mejora.
- Por otro lado, Calvo (1997) realizó un estudio diagnóstico con el fin de prepararlas bases para una propuesta didáctica que permitiese a los estudiantes de un primer curso de Cálculo la construcción de la imagen del concepto de Integral Definida (concept imagen, en el sentido de Vinner, 1991). Uno de los instrumentos que utilizó fue un cuestionario de 10 ítems, que aplicó a 56 estudiantes.

Por tanto, realizar un diagnóstico genera información valiosa respecto de qué saben, cómo lo saben, en qué medida saben y son capaces al enfrentarlos con problemas relacionados con la matemática u otro campo del saber. Pero en nuestro caso, ¿Por qué hacer un diagnóstico sobre la integral definida en la UPOLI? En primer lugar este tema es representativo en el estudio del Cálculo infinitesimal, no se concibe el estudio de este último sin las integrales, esta temática está presente en los planes de estudio de carreras afines a la Matemática en la UPOLI, dado que la integración se considera un eje fundamental para el planteamiento y desarrollo de conceptos que permiten entender y asimilar conocimientos de casi todas las áreas de la economía (modelar y comprender problemas), ingeniería y la tecnología aplicada, especialmente en la física, para finalmente abordar temáticas generales del saber específico en el campo profesional.

En el caso específico de la Carrera de Contaduría Pública de la UPOLI, en el programa de Matemática Aplicada se plantea, que el futuro Contador Público debe tener un nivel adecuado de comprensión de este contenido (integral definida) para tener éxito en las asignaturas consecuentes relacionadas con los cálculos contables, financieros y económicos (Economía empresarial, Estadística, Matemáticas Financieras, Contabilidad de Costos, Gerencia de Operaciones I y II).

Además, es considerada una valiosa herramienta que proporciona conceptos básicos y esenciales que contribuyen a desarrollar el perfil profesional con un espíritu emprendedor, pensamiento lógico, crítico, heurístico y algorítmico que le permitirá comprender fenómenos donde interviene el concepto de integralidad, además de modelar y resolver problemas referidos a fenómenos reales.

Dada la importancia de este tema en la formación del futuro profesional, consideramos necesario averiguar la incidencia del proceso de enseñanza aprendizaje del estudiante sobre la integral definida. Consideramos que solo estando clarificado lo anterior, hay gran posibilidad de formular propuesta de mejora acerca el proceso de enseñanza aprendizaje con sus principales involucrados, es decir docente y estudiantes.

En este sentido, el estudio beneficiará al docente que imparte esta asignatura porque con los resultados obtenidos podrá adoptar medidas de acción colegiadas para instrumentar actividades de intervención didáctica. Los estudiantes de Contaduría pública se beneficiarán al conocer sus debilidades y fortalezas en el aprendizaje de la integral definida.

También, coadyuvará a la institución al tomar líneas de acción para prevenir y reducir los índices de reprobación y por último pero no menos importante, mejorar el nivel de aprendizaje significativo del estudiante, dado que las habilidades adquiridas les ayudará a desempeñarse exitosamente en la vida universitaria y profesional.

Consideramos que el estudio es factible de realizar porque no requiere de una gran inversión económica, se cuenta con las fuentes principales de información, pero sobre todo se tiene cercanía con la población de estudio.

1.3. Propósitos

1.3.1. General

Diagnosticar el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida en la asignatura de Matemática Aplicada, con los estudiantes de Contaduría Pública y Finanzas de la Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Politécnica de Nicaragua, durante el primer semestre del año 2017

1.3.2. Específicos

1. Identificar la relación que existe entre el plan de estudio de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas, el programa de asignatura de Matemática Aplicada, silabo y planes de clases para el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida.
2. Describir las actividades, estrategias, metodología y los recursos didácticos empleados por el docente en el proceso de enseñanza de la integral definida.

3. Identificar las conceptualizaciones adquiridas por los estudiantes de III año de Contaduría pública y Finanzas sobre la integral definida al cursar la asignatura de Matemática Aplicada en el periodo 2016.

1.4. PERSPECTIVA TEÓRICA

Los constructos teóricos que sustenta el desarrollo de nuestro estudio se configuran en torno a: la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990, 1996, 2007b), y el modelo taxonómico SOLO (Structure of observed Learning Outcomes) desarrollado por Biggs & Collis (1982), además incorporamos algunos conceptos que consideramos importantes en este estudio. Detallamos estos elementos teóricos a continuación.

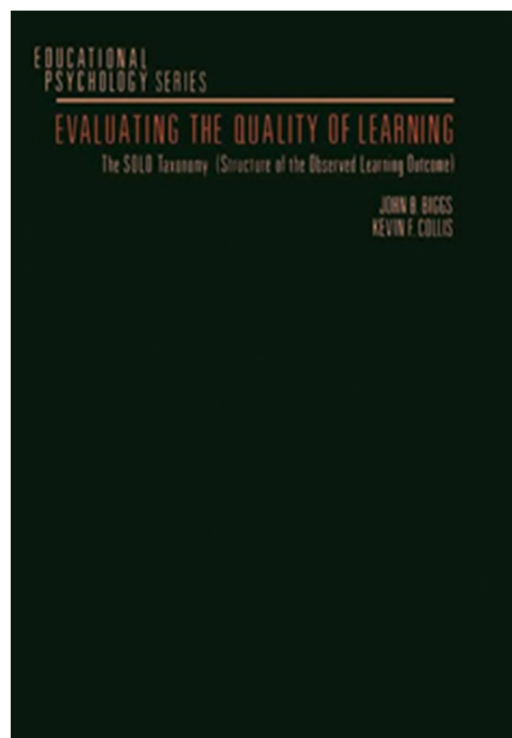
1.4.1. Taxonomía SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes)

Son muchas las interrogantes que los profesores formulan sobre su quehacer educativo. Muchas se relacionan con los métodos y procedimientos empleados para la enseñanza aprendizaje, especialmente las que permiten mostrar las ventajas y desventajas de cada uno con los contextos particulares de cada docente.

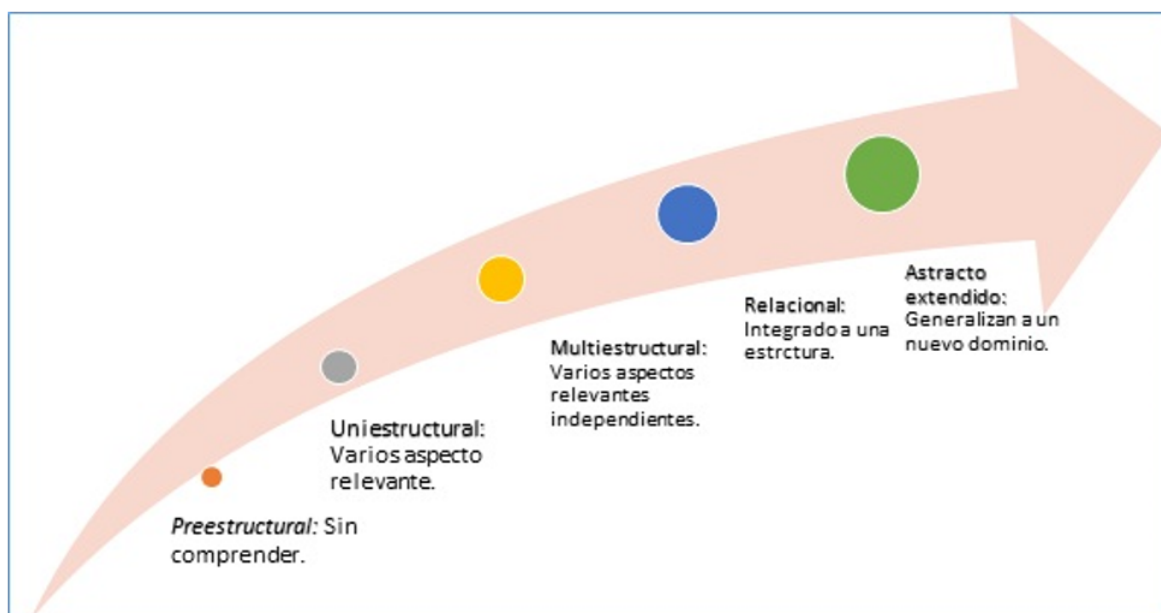
Sin embargo, el conocer los resultados de los aprendizajes quizás sea una de las tareas más difíciles de cuantificar, una nota fría al final del curso no necesariamente muestra que el estudiante obtuvo un aprendizaje significativo. Comprender el funcionamiento del cerebro para explicar cómo aprendemos y qué aprendemos no es tarea fácil.

Ahora bien, la tarea educativa que comienza en la planeación, debe visualizar el proceso educativo completo y consecuentemente los resultados deseados. Una de las formas de visualizar el proceso enseñanza aprendizaje acompañado de esos resultados es considerar los niveles de aprendizaje que obtiene los estudiantes al finalizar un proceso de enseñanza aprendizaje.

Uno de los modelos utilizados para esta tarea es el desarrollado por Biggs y Collis (1982), ellos notaron que “ en la progresión desde la incompetencia hasta la maestría, los estudiantes muestran una secuencia consistente de aprendizaje, que es generalizable a una gran variedad de tareas y en particular a las escolares”. Esta secuencia se refiere a un progreso jerárquico en la complejidad estructural de sus respuestas. Este sistema es lo que constituye la taxonomía SOLO, por sus siglas en inglés, que en español significa Estructuras de los Resultados del Aprendizaje Observado y, según los autores, puede usarse para evaluar la calidad del aprendizaje.



Las propiedades de esta taxonomía para evaluar de forma objetiva y sistemática la calidad de los resultados, son fácilmente comprensibles puesto que evaluamos el uso de un determinado conjunto de componentes conceptuales, pero de una forma integrada. El modelo consta de cinco categorías o niveles las cuales podemos apreciar en el siguiente diagrama.



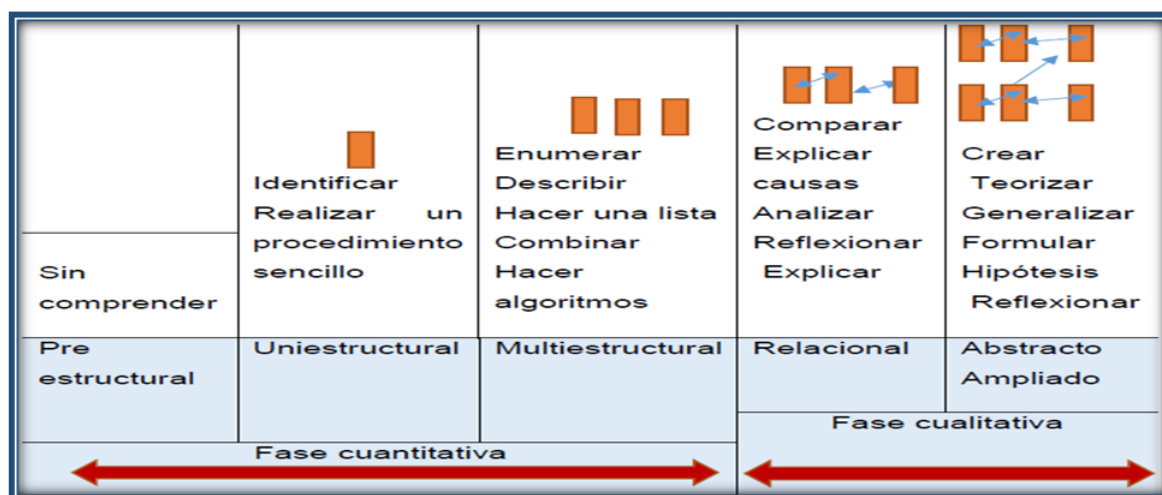
1. **Nivel Pre-Estructural:** El estudiante no tiene entendimiento, usa información irrelevante o está totalmente equivocado. Utiliza contestaciones evasivas o tautológicas del enunciado. No dan prueba de un aprendizaje relevante.

2. **Nivel Uni-Estructural:** Se enfoca en un aspecto relevante. Las respuestas contienen datos informativos obvios extraídos directamente de los enunciados. Sólo cumplen una parte de la tarea, no tienen una comprensión de los conceptos.
3. **Nivel Multi-Estructural:** Se enfoca en muchos aspectos pero los considera independientes. Obtiene mucha información directamente de los enunciados, la analiza de forma separada y no la relaciona con todos los conceptos.
4. **Nivel Relacional:** Enlaza o integra muchas partes en un todo coherente. Los detalles son enlazados a la conclusión y su significado es entendido. Los resultados se organizan formando una estructura. Hay comprensión, coherencia y cambio cualitativo en el aprendizaje.
5. **Nivel Abstracción expandida:** Generaliza la estructura más allá de la importancia que le es dada, produce nuevas hipótesis y teorías. Las respuestas manifiestan la utilización de un principio general y abstracto que puede ser inferido a partir de los datos del problema y que lo generaliza a otros contextos. Trasciende lo dado, campos más amplios, hay conocimiento nuevo.

Según Biggs y Collis (1982), a medida que los estudiantes aprenden los resultados de sus aprendizajes evolucionan en un orden creciente de complejidad. Conforme la respuesta de los estudiantes sean más detallada estos se modifican a un nivel cuantitativo (primeras tres categorías), mientras que las variaciones cualitativas (dos últimas) en el aprendizaje suceden en la medida que los conocimientos que van creando se integran en una estructura global.

Los tres primeros niveles caracterizan a los discentes que persiguen solo aprobar la asignatura sin importar los conocimientos adquiridos, se sienten obligados a cursar las clases por lo que la vida académica no tiene sentido y es posible que sea porque existen prioridades e intereses extracurriculares, según (Vásquez 2012, citado en Rodríguez, et al 1996). Otras razones pueden asociarse con sobrecargas de trabajo estudiantil, visiones escépticas de la educación matemática o presentan altos niveles de ansiedad.

En cambio los dos últimos niveles miden la comprensión de los estudiantes en una escala de competencia o maestría que puede darse por dos factores conjugados, uno donde los discentes manifiestan motivación e interés de abordar las tareas relacionadas con su aprendizaje de manera responsable y significativa junto con la necesidad de responder a interrogantes imprevista que sugieren un reto intelectual y realizan conexiones cognitivas complejas para dar solución al problema. Por otro lado para lograr estos niveles, el trabajo de planificación docente cobra mucha importancia. En la siguiente imagen se resume los elementos esenciales del modelo SOLO.



1.4.2. Teoría de los campos conceptuales

Gérard Vergnaud, director de investigación del Centro Nacional de Investigación Científica (CNRS) de Francia, discípulo de Piaget considera que el conocimiento es adaptación: asimilación y acomodación. Asimilación del nuevo conocimiento al antiguo, y acomodación a lo que no ha sido previsto antes, es decir, a la eventualidad. Si el conocimiento no genera acciones de acomodación que le permita a la persona actuar en acción, entonces no es conocimiento.



Las consecuencias que se desprenden de esta última afirmación, resulta de mucho interés para los que nos dedicamos a la docencia, específicamente a los que estamos interesados en la enseñanza de la construcción de conceptos y en general a los procesos que nos lleven aprendizaje significativos. Por lo tanto la teoría de campos conceptuales propuesto por Vergnaud proporciona un marco coherente para comprender el proceso de conceptualización, cuando los docentes han realizado el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida.

La teoría de campos conceptuales supone que el núcleo del desarrollo cognitivo es la **conceptualización**, considera a esta la piedra angular de la cognición y la construcción del conocimiento consiste en la construcción progresiva de representaciones mentales, implícitas o explícitas. El conocimiento está organizado en campos conceptuales, el cual es un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situa-

ciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones de pensamiento, conectados unos con otros, cuyo dominio ocurre a lo largo del tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje (Vergnaud 2007).

Sin embargo, el esquema aunque no es una conducta, tiene la función de generar actividad y la conducta en situación. Dado lo anterior es posible estudiar los componentes del esquema, esto es invariantes operatorios. A continuación, se describen algunas teorías consideradas importantes para el estudio.

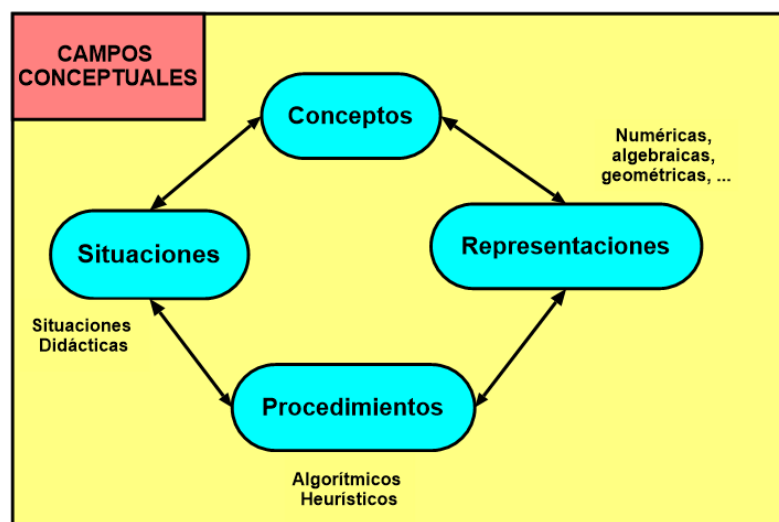
■ **Concepto**

Dado que se está interesado en el aprendizaje de conceptos relativos a la integral definida, se presenta la definición de concepto que brinda la teoría de campos conceptuales. Cabe destacar que es importante considerar que un concepto es primeramente una construcción pragmática. Como tal si se está interesado en la enseñanza aprendizaje, no se puede reducir el concepto a su definición, pues es a través de las situaciones que se pretende resolver como un concepto adquiere significado para el estudiante.

Vergnaud (1983, p. 393), define concepto como una tripleta $C = (S, I, R)$ donde:

- **S** es un conjunto de situaciones que dan sentido al concepto.
- **I** es un conjunto de invariantes (objetos, propiedades, teoremas, conceptos y relaciones) sobre las cuales reposa la operacionalidad del concepto, o un conjunto un conjunto de invariantes que pueden ser reconocidos y usados por los sujetos para analizar y dominar las situaciones del primer conjunto.
- **R** es un conjunto de representaciones simbólicas (lenguaje natural, gráficos y diagramas, sentencias formales, etc.) que pueden ser usadas para indicar y representar esos invariantes y, consecuentemente, representar las situaciones y los procedimientos para lidiar con ellas.

El primer conjunto; de situaciones es el referente del concepto, el segundo de invariantes operatorios; es el significado del concepto, en cuanto al tercero; es de representaciones simbólicas es el significante. En la siguiente imagen se observa la relación de los conjuntos mencionados.



■ Conceptualización

Según knowlegde master, (página en línea sobre gestión del conocimiento): La conceptualización es una perspectiva abstracta y simplificada del conocimiento que tenemos del “mundo”, y que por cualquier razón queremos representar. Esta representación es nuestro conocimiento del “mundo”, en el cual cada concepto es expresado en términos de relaciones verbales con otros conceptos y con sus ejemplos del mundo real (relaciones de atributo, etc., no necesariamente jerárquicas), y también con relaciones jerárquicas (la categorización, o asignación del objeto a una o más categorías).

Por otro lado la *conceptualización* puede definirse como la construcción, o la identificación directa o cuasi- directa de los objetos del mundo, de sus propiedades, relaciones y transformaciones (Vergnaud 2007b: 299).

■ Esquemas conceptuales

En las últimas tendencias en la investigación Matemática acerca del razonamiento, pensamiento y el desarrollo de niveles o jerarquías para describir el desarrollo cognitivo de los sujetos ha llegado a ser un objetivo importante de estudio. Dado que estas investigaciones cognitivas específicamente están interesadas en los procesos (abstraer, representar, conceptualizar, etc.) relacionados con los conceptos matemáticos, pues claro que los estudiantes ante una tarea activan o evocan sus esquemas conceptuales y no necesariamente la definición formal del objeto matemático (que puede ser encontrado en un libro).

Según Valdivé y Garbín (2010), hablar de esquema conceptual es referirse a:

1. Las ideas que asocia el sujeto al concepto.
2. Las representaciones asociadas que hacen emerger la noción y representaciones propias de esta.

3. Los procedimientos (algoritmo, aritmética, algebraicos, geométricos, manipulaciones simbólicas) que el sujeto activa ante la tarea cognitiva.
4. Las ideas más representativas asociada al objeto matemático.
5. El contexto (geométrico, analítico, algebraico, aritmético o físico, no técnico) que el sujeto asocia ante una situación.
6. Los ejemplos y contraejemplos que el sujeto implementa para explicitar sus ideas.

En la teoría de campos conceptuales, las definiciones que Vergnaud (2007) propone de esquema son los siguientes:

1. Una totalidad dinámica funcional.
2. Es una organización invariante de la actividad para una clase definida de situaciones.
3. Un esquema comprende necesariamente cuatro categorías de componentes:
 - Metas y anticipaciones (un esquema se dirige siempre a una clase de situaciones en las cuales el sujeto puede descubrir una posible finalidad de su actividad y, eventualmente, submetas; puede también esperar ciertos efectos o ciertos eventos);
 - Reglas de acción del tipo “si... entonces” que constituyen la parte verdaderamente generadora del esquema, aquella que permite la generación y la continuidad de secuencias de acciones del sujeto; son reglas de búsqueda de información y de control de los resultados de acción;
 - Invariantes operatorios (teoremas-en-acción y conceptos-en-acción) que dirigen el reconocimiento, por parte del individuo, de los elementos pertinentes de la situación; son los conocimientos contenidos en los esquemas; son aquellos que constituyen la base, implícita o explícita, que permite obtener la información pertinente y de ella inferir la meta a alcanzar y las reglas de acción adecuadas.
 - Posibilidades de inferencia (o razonamientos) que permiten “calcular”, “aquí y ahora”, las reglas y anticipaciones a partir de las informaciones e invariantes operatorios que dispone el sujeto, o sea, toda actividad implicada en los otros tres ingredientes requiere cálculos “aquí e inmediatamente” para esta situación.

1.4.3. Proceso de Enseñanza - Aprendizaje

La complejidad de la educación radica en el simple hecho de que los actores que en ella intervienen presentan por si mismos (por su naturaleza social y humana) características complejas y, además, se

desenvuelven en un contexto igualmente complejo compuesto de condiciones sociales, políticas, económicas, culturales etc.

El conocimiento y entendimiento de estas características resulta de gran importancia en el quehacer educativo, ya que el desempeño de los actores del proceso se ve afectado directamente por este sinfín de circunstancias que no pueden ser desapercibidas o ignoradas. Esta es precisamente la utilidad de la investigación en el ámbito del proceso enseñanza-aprendizaje. Conocer y comprender el contexto en el que cada alumno se desenvuelve, por ejemplo, permite al docente entender su actitud y desempeño en clase y le es posible, por ende, establecer estrategias o medidas que coadyuven en la disminución o erradicación de comportamientos negativos. Así, tanto el alumno como el docente mejoran su quehacer educativo.

Proceso de Enseñanza

Como proceso de enseñanza aprendizaje se define “el movimiento de la actividad cognoscitiva de los alumnos bajo la dirección del maestro, hacia el dominio de los conocimientos, las habilidades, los hábitos y la formación de una concepción científica del mundo”.

■ **Estrategias:**

Las técnicas y métodos de aprendizajes son todos los recursos personales y materiales de los cuales los docentes se auxilian para echar andar el proceso educativo, para (Montes de Oca Recio N., Machado Ramirez E. , 2011) “El término estrategia se emplea cada vez con mayor frecuencia en la literatura pedagógica, a pesar de sus múltiples acepciones e interpretaciones. Son indiscutibles las ventajas que su adecuada utilización puede ofrecer en los procesos educativos”.

Si tomamos en cuenta que el maestro ante todo debe estimular, orientar y dirigir con habilidad todo el proceso educativo, en el cual las estrategias son recursos de invaluable importancia esto sumado a (Ferrerio, 2012) quien “define las estrategias como las componentes esenciales del proceso de enseñanza - aprendizaje. Son el sistema de actividades (acciones y operaciones) que permiten con economía de esfuerzo y recursos la realización de una tarea con la calidad requerida debido a la flexibilidad y adaptabilidad a las condiciones existentes” En este sentido el docente deberá romper los esquemas tradicionalistas y actuará como elemento estimulante que controlará el aprendizaje de los alumnos el cual debe tener presente que el proceso educativo está centrado en el alumno y no el maestro.

■ Estrategias de Enseñanza

Las estrategias de enseñanza hacen referencia al proceso que el docente debe de realizar para que su labor sea efectiva (Montes de Oca Recio N., Machado Ramirez E. , 2011) las define como el proceso en el cual el docente debe hacer una planificación y realización de contenidos lo que coincide con (Ferrerio, 2012), quien las define como las operaciones realizadas por los docentes para hacer posible que los estudiantes aprendan, son también recursos que utilizan los maestros para la implementación de nuevas formas para lograr la calidad de la enseñanza. Estas acciones se verán reflejadas en la medida en que el alumno muestre una actitud, activa, emprendedora, participativa y entusiasta el uso de las adecuadas estrategias, permitirá además crear un ambiente armónico que traerá consigo que los alumnos se sientan bien, claro que para el estudiante es de vital importancia la recepción y la comunicación que el docente establece.

■ Estrategias Docentes

Para (Montes de Oca Recio N. y Machado Ramírez E., 2011, Pág. 9) los docentes deben de tener ciertas estrategias para que garantice una efectiva relación con los estudiantes en el aula, entre las que se mencionan tenemos:

1. El docente debe diseñar estrategias para resolver situaciones relacionadas a la practica educativa.
2. Las estrategias docentes se elaboran en función de los objetivos a conseguir, los medios didácticos, los métodos de enseñanza - aprendizaje y las actividades para conseguirlos.
3. Los recursos didácticos a elaborar deben ser parte de las estrategia docentes de tal forma que puedan guiar los aprendizajes, deben brindar información y motiven al docente.
4. Las estrategias docentes no deben de ser generalizadas ya que estas son válidas en determinados momentos y contextos específicos.

Para (Da Ponte, Quaresma y Braco, 2007, p:57), el papel del docente en el aula de clases es sumamente importante, de igual manera para el estudiante por lo que el proceso Enseñanza-Aprendizaje se transforma en un proceso mutuo, donde la clave está en que el profesor aproveche al máximo los conocimientos que él tiene y conjugarlos con las características del grupo de clases.

Cabe señalar que para el éxito de estas estrategias resulta imperativo auxiliarse de las características individuales que cada alumno tiene, tales como: actitudes, inteligencia, voluntades y creencias de sus propias capacidades para aprender y la motivación del aprendizaje, en esta última el docente tiene un papel decisivo.

■ Estrategias Didácticas

“Estrategias didácticas son el sistema de acciones y operaciones, tanto físicas como mentales, que facilitan la confrontación(interactividad) del sujeto que aprende con el objeto de conocimiento, y la relación de ayuda y cooperación con los otros colegas durante el proceso de aprendizaje (interacción) para realizar una tarea con la calidad requerida. (Ferrerio, 2012).

Las estrategias didácticas constituyen herramientas de mediación entre el sujeto que aprende y el contenido de enseñanza que el docente emplea conscientemente para lograr determinados aprendizajes. Además de promover y motivar que el docente esté integrado al proceso de enseñanza aprendizaje, tomando su papel de forma responsable en todas y cada una de las tareas a realizar, por lo que el estudiante debe sentirse motivado, consciente e identificado con el proceso de enseñanza y de esta manera puede construir conocimiento de forma autónoma.

■ Didáctica de las Matemática

“La didáctica de la Matemática se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre la enseñanza y aprendizaje de esta, sostener los planes para la cualificación profesional de los educadores matemáticos y proporcionar fundamentación teórica y empírica.” (Rico, 2012) en esta misma línea (Godino J. D, Font V, Wilhelmi M. R., 2008, p: 2) aseguran que la didáctica de las matemáticas debe realizar y sistematizar los conocimientos importantes para el diseño, implementación y valoración de procesos de enseñanza de las matemáticas.

El docente de esta ciencia es realista sobre los problemas existentes en la enseñanza de las Matemáticas pero considera que son superables, que es cuestión de analizar los factores que han influido negativamente en el proceso por lo que igualmente existen soluciones que permiten mejorar y ayudar al docente y al estudiante a enseñar y aprender matemática respectivamente.

De ahí que se pueda afirmar que la Didáctica de la Matemática es la parte científica de la enseñanza de la Matemática que permite orientar de manera investigativa un enfoque en cuanto a los problemas que surgen en la educación matemática de manera que pueda proponer soluciones que faciliten el estudio de la misma.

■ Enseñanza Matemática

La enseñanza de la matemática pasa por que los docentes asuman el papel de transformar la forma en que está enseñando esta asignatura, debe ser reorientada, hacerla más atractiva, que estudiante sienta su importancia y su aplicación, que le sea útil para su formación y para la vida, de tal forma que éste sienta cierta motivación por la asignatura, al respecto (Arteaga y Batanero 2010, p: 6) nos dice que muchos educadores matemáticos han olvidado que la matemática es una ciencia divertida que promueve y en la que se caracteriza la creatividad (siempre se tenga

un dominio claro de la matemática), ya que al tornarse monótona la enseñanza de la matemática pierde el encanto, lo cual es una realidad en muchas aulas de clases donde el maestro al no tener conciencia de la importancia de ella y de sus principios elementales hace que el estudiante sea apático a la asignatura y lo relacionado con ella.

Debe ser obligación del educador orientar al estudiante en descubrir soluciones a problemas reales de su entorno, dejar que él mismo profundice en la realidad de la situación de manera que despierte la creatividad y se transforme en un buscador de conocimientos a través de la experiencia, (Jarero Kumul M., Landa E., Sosa Moguel L. , 2013, p:215) plantea que a pesar que las estrategias y métodos en el proceso de enseñanza han ido evolucionando existen todavía profesores de educación superior en el campo de las matemáticas que dan mayor importancia a la evaluación sumativa que a la formativa, hay que darle mayor importancia a aquella que permite considerar la formación del individuo como tal.

Para poder asumir los constantes retos que la enseñanza de la matemática se necesita que los docentes realicen reflexión sobre su propia práctica, de tal forma que produzcan cambios significativos en el proceso de enseñanza que está desarrollando en el aula.

Para enseñar matemática en los tiempos actuales requiere mayor compromiso y que el proceso sea más efectivo, el estudiante debe de ejercer mayor protagonismo, (Barragués Fuentes J. I., Adolfo Morais E., Manterola Zabala M. J.I, Guisasola Aranzabal J., 2013, p: 64). Mucho del conocimiento en el área de las matemáticas se desarrolla a través del aprender construyendo, es decir haciendo uso de la experiencia y el conocimiento; involucrando y haciendo partícipe al estudiante del proceso de enseñanza- aprendizaje, permitiéndole exponer sus ideas en base a un tema y que a través de ellas se desarrollen los conceptos que permitan construir soluciones a situaciones reales usando las matemáticas aplicadas en otras ciencias. Igualmente el apoyo con el uso de Software, que hace más dinámica la clase también ayudan en el aprendizaje de la misma, grupos de apoyo que faciliten el compartir conocimientos y buscar soluciones de manera que los estudiantes sean artífices claves en la búsqueda del conocimiento.

1.4.4. Planeamiento Didáctico

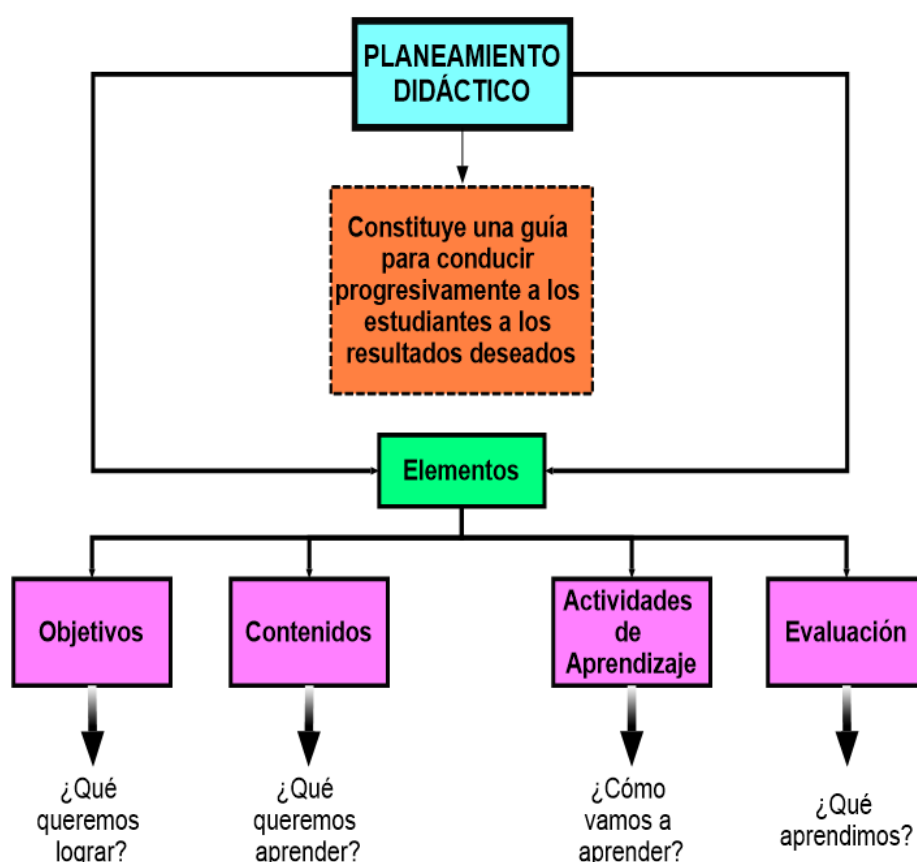
“Si usted no sabe a dónde quiere llegar, no importa que camino decida tomar”

Anónimo

En la tarea de enseñanza, no podemos darnos el lujo de no planificar nuestras sesiones de clases, por mucha experiencia y dominio científico del tema, es necesario seguir una guía orientadora de acuerdo al contexto en el que se desarrolle para lograr aprendizaje significativo.

Respecto al concepto de planeamiento didáctico coincidimos con Mattos (1974): “Es la previsión inteligente y bien calculada de todas las etapas de trabajo escolar y la programación racional de todas las actividades, de modo que la enseñanza resulte segura, económica y eficiente. Todo el planeamiento se concreta en un programa definido de acción que constituye una guía segura para conducir progresivamente a los alumnos(a) a los resultados deseados.”

Por tanto el planeamiento didáctico es un acto complejo y debe ser una preocupación constante para todo el que se dedica a la tarea de enseñar matemática universitarias, dado que nuestros estudiantes sin ser especialistas en didáctica detectan fácilmente si su maestro planifica tomando en cuenta los elementos del planeamiento o simplemente improvisa basado en su experiencia. El siguiente mapa conceptual muestra los elementos del planeamiento didáctico.



En el caso de la UPOLI, la Dirección Docente Metodológico ha elaborado una Guía de Planificación del proceso de enseñanza aprendizaje, aplicada desde el año 2013, guía que abarca las principales momentos que deben desarrollarse en una clase.

1.4.5. Aprendizaje Significativo

Existen muchas teorías respecto al aprendizaje significativo. Sin embargo, muchos autores concuerdan que “es el mecanismo humano, por experiencia, para adquirir y almacenar la inmensa cantidad de

ideas e informaciones representadas en cualquier campo de conocimiento” (Moreira, 2000).

Para Piaget, el aprendizaje significativo es un proceso que sólo tiene sentido ante situaciones de cambio y se enfoca más en un desarrollo cognitivo. Por eso, aprender es en parte saber adaptarse a novedades que se dan en las etapas de acomodación, asimilación, adaptación y equilibrio. La asimilación es la interacción del sujeto con el medio, cuando el sujeto no consigue asimilar bien, utiliza la acomodación la cual consiste en modificar información de manera que sea perceptible para el sujeto. El equilibrio entre la asimilación y la acomodación es la adaptación. La mente que es una estructura (cognitiva) tiende a funcionar en equilibrio, aumentando permanentemente, su organización interna y de adaptación al medio. Por tanto es posible interpretar la asimilación, la acomodación y el equilibrio de Piaget en términos del aprendizaje significativo (Rodríguez, 1999).

1.5. DISEÑO METODOLÓGICO

1.5.1. Perspectiva de Investigación

Este diagnóstico está enmarcado dentro del enfoque **naturalista** de investigación, este es un método para intentar comprender la naturaleza de un fenómeno en estudio, sin mediciones numéricas, tomando encuestas, entrevistas, descripciones, puntos de vistas de los investigadores, reconstrucción de los hechos y no tomando en general las hipótesis como algo necesario.

Tal como explica Hernández, R, Fernández, C, Baptista, P (2014), “la investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalle y experiencias únicas. También aporta un punto de vista fresco natural y completo de los fenómenos, así como flexibilidad”.

Por tanto consideramos que en nuestro caso, el enfoque cualitativo es el ideal y el que mejor se ajusta a los propósitos de nuestro estudio sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida. Además nos brinda la oportunidad de analizar el fenómeno en su naturaleza.

La investigación cualitativa del presente estudio es del **tipo fenomenológico**. Esta fue creada por Edmun Hurssel (1859-1938), estudia las estructuras de la conciencia que posibilitan su relación con los objetos. Es una corriente de pensamiento propio de la investigación interpretativa que aporta como base de conocimiento la experiencia subjetiva inmediata de los hechos tal y como se perciben. La fenomenología es volver a las experiencias vividas que junto con la interpretación perfilan objetivos y valores. En nuestro estudio nos interesa observar y describir lo que sucede en el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida, para la mejora del quehacer educativo.

Según el diseño es de corte transversal, nos centramos en describir y analizar la incidencia del proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida en los estudiantes, durante el primer semestre del año 2017. Periodo en el cual se aplicó entrevistas a la coordinadora de la asignatura de Matemática Aplicada, grupo focal a docentes y estudiantes sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida y revisión documental del plan de estudio, programa de asignatura, sílabo y estructura de planes de clases.

Finalmente concluimos que el **alcance es descriptivo**; busca especificar las propiedades, características y los perfiles de personas, grupos, comunidades. Procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. (Hernández, Fernández & Baptista, 2014, pág.98).

1.5.2. Escenario

En el desarrollo del diagnóstico, sobre la incidencia del proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida del programa de asignatura de Matemática Aplicada, en los estudiantes de la escuela de Administración Comercio y Finanzas de la UPOLI, durante el primer semestre 2017 , se tomaron en cuenta los siguientes escenarios que permitieron obtener información relevante.

1.5.2.1. Escenario General

La Universidad Politécnica de Nicaragua (UPOLI), recinto central se encuentra geográficamente ubicada en el costado sur de la colonia Rubén Darío en Managua. Esta universidad, fue fundada el 25 de noviembre de 1967, el Presidente de la República y el Ministro de Educación, por decreto ejecutivo autorizaron el funcionamiento del Instituto Politécnico de Nicaragua (POLI) y en 1977 fue elevado al rango de universidad.



Esta casa de estudios superiores cuenta con servicios de energía eléctrica, teléfono, internet, agua potable, aguas negras y acceso de transporte urbano a través de carreteras pavimentadas. Posee una atractiva arquitectura moderna, con 60 aulas, distribuidas en edificios de 3 plantas, seis edificios de dos plantas, y 7 edificios de una sola planta, una cancha deportiva multiusos, cinco laboratorio de computación, un departamento de asesoría psicológica para estudiantes, centro de idiomas, una biblioteca, parques con acceso a wifi libre y otras edificaciones.

Actualmente se divide en seis escuelas: Ciencias Económicas y Empresariales (ECEE), Ciencias Jurídicas y Políticas, Diseño, Enfermería, Ingeniería y Teología. Además del conservatorio de Música y centros e institutos (analizan la realidad social, económica y política).

La Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales está constituida por seis carreras: Administración de Empresas, Administración Turística y Hotelera, Banca y Finanzas, Contaduría Pública y Finanzas, Mercadotecnia y Economía Gerencial, que se ofertan en dos niveles: Técnico Superior y Licenciatura, y dos modalidades regular y por encuentro.

La ECEE, atiende a los estudiantes de todos los sectores del país con la finalidad de formar profesionales competentes para el mundo de los negocios, con calidad, calidez y servicio a la comunidad, en correspondencia con las necesidades de las empresas locales, regionales e internacionales.



El personal docente que labora en esta escuela está dividido en docentes horarios y fijos, el nivel académico de estos maestros varía entre licenciaturas, especializaciones, maestría y doctorados, la mayoría son horarios y licenciados con vasta experiencia en docencia universitaria. El clima de trabajo es aceptable, se percibe buenas relaciones humanas. Los maestros que imparten las asignaturas relacionadas con Matemática: Estadística I y II, Matemática I, Matemática Aplicada, Métodos cuantitativos y Matemática Financiera, en esta escuela son un total de 23. De estos, sólo 13 imparten Matemática Aplicada, de los cuales 38 % son ingenieros, 46 % licenciados en Matemática o Física Matemática y un 16 % máster.

1.5.2.2. Aula de Clases

La sección de clase de III año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas del turno matutino se ubica en el Pabellón I aula 14 (I-14), segunda planta, la consideramos el escenario principal, porque es el lugar donde se aplicó el cuestionario abierto.

Posee un área de 61.70 metros cuadrados, en su interior se encuentran distribuidas 51 sillas de madera y hierro con un espacio de 1.2 metros cuadrados que permite la movilidad entre docentes y estudiantes, aunque se utilizan solamente 29 correspondiente a la matrícula actual de ese grupo de clases, también posee un escritorio de madera para el uso del docente con su respectiva silla, en la parte frontal dos pizarras acrílicas, data show y dos abanicos, igual cantidad de estos en la parte trasera del salón. En los laterales de la sección posee ventanales que permiten la ventilación e iluminación.



1.5.3. Selección de los Informantes

En la investigación cualitativa, se define la muestra de forma intencionada, para seleccionar a los informantes ideales, que son los participantes que poseen conocimientos, habilidades, destrezas comunicativas y que están a la disposición de colaborar con el investigador.

Tal como lo plantea Rodríguez, et al (1996) “La investigación cualitativa se plantea, por un lado, qué observadores competentes y cualificados puedan informar con objetividad, claridad y precisión acerca de sus propias percepciones de la realidad social, así como de las experiencias de los demás”.

1.5.3.1. Selección de los Docentes

Para la selección de los docentes se hizo un muestreo comprensivo e intencionado, tomando como base la idea de que en la investigación cualitativa cada participante o situación, es examinada tomando en cuenta el interés de la misma, en ocasiones se centra en un caso que presenta interés intrínseco para

descubrir significado o reflejar realidades múltiples.

La primera muestra está conformada por la coordinadora de Matemática de la ECEE (quien atiende aspectos técnicos, administrativos y pedagógicos de la docencia) y tres docentes que imparte la asignatura Matemática Aplicada. Estos fueron seleccionados intencionalmente bajo los siguientes criterios: poseer vasto conocimiento científico con un mínimo de cinco años de experiencia docente.

La información brindada por la coordinadora, se obtuvo por medio de la técnica de **entrevista** y los docentes por medio de **grupo focal**. Todos ellos brindaron datos pertinentes, la que fue utilizada al momento de realizar la triangulación de la información.

1.5.3.2. Selección de los Estudiantes

La segunda muestra está constituida por seis de 29 estudiantes de tercer año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas del turno matutino, a estos informantes se les aplicaron las técnicas de **grupo focal** y **encuesta cualitativa** bajo los siguientes criterios de inclusión:

Criterio de Inclusión		Estudiantes -					
		C1	C2	B1	B2	A1	A2
1. Haber aprobado la asignatura de Matemática Aplicada en el segundo semestre del año 2016.		✓	✓	✓	✓	✓	✓
2. Participación activa en el desarrollo las clases de Matemática I.		✓	✓	✓	✓	✓	✓
3. Rendimiento académico en la asignatura de Matemática Aplicada.	Notable					✓	✓
	Bueno			✓	✓		
	Regular	✓	✓				
4. Resultados del cuestionarios cero.	Notable					✓	✓
	Bueno			✓	✓		
	Regular	✓	✓				

1.5.4. Estrategias para Recopilar la Información

La fase de recopilación de datos de esta investigación cualitativa, implicó primero una inmersión al campo donde se llevaría a cabo el estudio, con el propósito de identificar lugares adecuados para recoger los datos necesarios que daría soporte científico a todo el proceso y obtener las autorizaciones correspondientes de la coordinadora de asignatura de Matemática Aplicada de la Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales de la UPOLI.

De esta manera iniciamos la etapa de vagabundeo, a través de ella se pudo determinar el escenario (grupos de clases, secciones correspondientes y maestros a cargo) donde se llevaría a cabo las visitas, cuáles serían los lugares adecuados para recoger la información requerida, los personajes que intervendría, en esta fase también se dio la familiarización con los informantes, se logró conversar con ellos, observar cómo se relacionan con los estudiantes, todo este proceso sirvió para que la investigadora pudiera generar confianza en los personajes que serían objeto de estudio.

Según A. Gomes (2006), los datos pueden obtenerse de descripciones a partir de la observación que adoptan la forma de entrevista, narraciones, notas de campos, grabaciones transcripciones de audio y video casetes, registrar escritos de todos tipos fotografías o películas y artefactos. En este caso se utilizaron las siguientes estrategias o técnicas: Análisis documental, grupos focales, cuestionarios abiertos (exámenes escritos) y entrevistas a profundidad. Empezaremos con la descripción de cada uno de los instrumentos utilizados resaltado el propósito de cada uno.

1.5.4.1. Análisis Documental

La estrategia o técnica del análisis documental y de contenido está destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto, según define (Krippendorff, 1990).

Como técnica de investigación, esta proporciona conocimientos, nuevas intelecciones y una representación de los hechos, estos resultados deben ser reproducibles para que sea fiable.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE NICARAGUA "Servicio a la Comunidad"	
Escuela de Administración, Comercio y Finanzas	
CARRERA Contaduría Pública y Finanzas	
PROGRAMA DE LICENCIATURA MATEMÁTICA APLICADA	
Abril 2017	
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE NICARAGUA "Servicio a la Comunidad"	
MATEMÁTICA APLICADA	
I. INFORMACIÓN GENERAL	
1. CARRERA	Contaduría Pública y Finanzas
2. ESCUELA	Administración, Comercio y Finanzas
3. PLAN DE ESTUDIO	Troncal 387 2017
4. CÓDIGO	
5. NOMBRE DE HORAS	Tercero (2) Práctico (2)
6. PROYECTO	
7. SEMESTRE	
8. ELABORADO POR	Coordinador y Colección Docente
9. APROBADO POR	Msc. Miguel Ángel Cruz Director de la Escuela
10. REVISADO POR	Lic. Carlos Roberto Hernández Vicerrector de DGA
11. OFICIALIZADO POR	Dra. Yvonne Carrón Vice rectora académica
12. FECHA	Abril 2017

El método de investigación del Análisis Documental en su aplicación se realiza en dos etapas:

1. El Análisis formal del documento.
2. El Análisis de contenido de la información.

En la primera fase, se da descripción objetiva del documento. En la que se detalla: el tipo de documento, el nombre del autor, el título, la editorial, la fecha de publicación, el número de páginas, la edición, nombre del editor y el idioma original en que fue publicado etc.



Se trata de un análisis externo del documento que extrae aquellos datos que lo distinguen de otros documentos. La descripción documental es la operación por la cual se describe el documento.

La guía del análisis documental fue el instrumento para analizar la información con el propósito de identificar la relación que existe entre el plan de estudio de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas, programa de asignatura de Matemática Aplicada, sílabo y formato de planes de clases. Para este análisis construimos una matriz de doble entrada, en las columnas los nombres de los documentos y en las filas los propósitos de la investigación.

1.5.4.2. Grupos Focales

La técnica de grupos focales es un espacio de opinión para captar el sentir, pensar y vivir de los individuos, provocando auto explicaciones para obtener datos cualitativos. Kitzinger (1995), lo define como una forma de entrevista grupal que utiliza la comunicación entre investigador y participantes, con el propósito de obtener información. El rol del docente investigador es ser el moderador y crear una atmósfera de tranquilidad y confianza donde fluya la comunicación.



Según Hernández, et al (2014) el moderador también es el encargado de crear un ambiente relajado e informal, en donde las preguntas son respondidas por la interacción del grupo en una dinámica en que los participantes se sienten cómodos, libres de hablar y comentar sus opiniones.

En nuestro caso, la técnica fue usada, en dos momentos, uno con estudiantes y otro con docentes. En el caso de los estudiantes se eligió a seis, de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas de tercer año matutino y, para el grupo de los docentes se trabajó con tres que imparten la asignatura de Matemática Aplicada, todos ellos fueron seleccionados con un muestreo de tipo ideal; la actividad se realizó aproximadamente en 45 minutos, respe-

tando el tiempo de los involucrados, lo primordial era que los estudiantes o docentes tuvieran tiempo suficiente para brindar la mayor cantidad de información.



El **objetivo** de la técnica consistió en profundizar sobre el proceso de enseñanza aprendizaje, especialmente en las estrategias, metodología, materiales didácticos y actividades que utilizó el docente al impartir la clase de Matemática Aplicada. Se diseñó una guía de grupo focal, como **instrumento**, en la cual se definen las líneas de conversación para cada caso.

1.5.4.3. Entrevista a Profundidad

La entrevista es una técnica utilizada por los naturalistas en el trabajo de campo, se obtiene información de los informantes claves. Su objetivo es mantener a los participantes hablando de cosas de su interés y cubrir aspectos de importancia para la investigación en la manera que permita a los participantes usar sus propios conceptos y términos (Whyte, 1982).



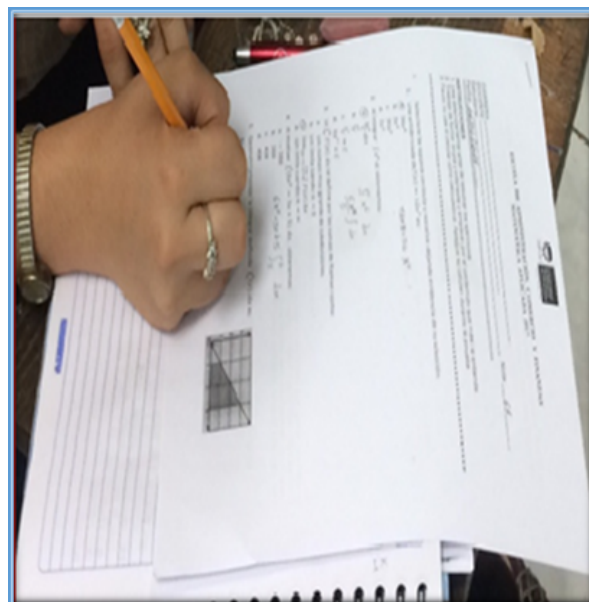
El papel del entrevistador empieza al generar un clima de confianza y desarrollar empatía con los entrevistados, se debe evitar elementos que obstruyan la conversación. Se tiene que ser espontáneo, cuidadoso y con cierto aire de curiosidad por parte del entrevistador, evitando hacer preguntas demasiadas

directas o que induzca a las respuestas. En las entrevistas, se registran de manera fiel toda la información proporcionada por la informante. Esta información se convierte en insumos, la que serán apoyo al momento de hacer el análisis. En relación al tiempo estará en dependencia del desarrollo de las líneas de conversación que se tiene previsto.

Para el desarrollo se utilizó una guía de entrevista como instrumento y grabadora del celular como un recurso para registrar de forma fidedigna toda la información proporcionada por la coordinadora de Matemática. El objetivo fue profundizar, sobre el proceso de enseñanza aprendizaje, especialmente en las estrategias, metodología, materiales didácticos y actividades que utiliza el docente al impartir la clase de Matemática Aplicada.

1.5.4.4. Encuesta Cualitativa

Generalmente, se considera que la encuesta, es exclusiva para la investigación cuantitativa, pero esto no es cierto, actualmente se utiliza en estudios naturalista. La encuesta estadística analiza frecuencias de las características de los miembros de una población, en cambio la encuesta cualitativa analiza la diversidad de las características de la población. Tal diversidad puede ser predefinida por medio de una codificación abierta. Esta no tiene en cuenta el número de personas con las mismas características sino que establece la variación significativa dentro de esa población. (Jansen, 2012).



Para esta estrategia utilizamos el cuestionario abierto como instrumento de recolección de datos y profundizamos en los siguientes párrafos.

CUESTIONARIO ABIERTO

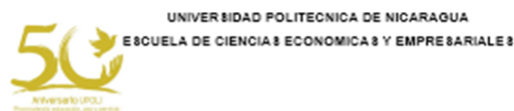
Según Mora (2006): “Un cuestionario es definido como una hoja de cuestiones o preguntas ordenadas y lógicas que sirven para obtener información objetiva de la población”.

Por otro lado Hernández, Fernández y Baptista (2006) expresa: “ el instrumento más utilizado para recolectar datos es el cuestionario”, particularmente cuando hablamos del paradigma cuantitativo, y probablemente muchos investigadores cualitativo no lo consideran una opción válida por la preferencia del paradigma positivista hacia este. Pero actualmente se usa en muchos estudios de corte naturalista y nosotros lo retomamos, dado que realizamos un estudio cognitivo, enfocado en la conceptualización de

los estudiantes sobre la integral definida, por tanto los cuestionarios fueron idóneos pues nos permitieron revisar en los escritos, todos los esquemas conceptuales avocados para la comprensión del concepto.

1.6. INSTRUMENTOS

Balestrini, (1997) plantea: que “Una vez definido y diseñado los instrumentos y procedimientos de recolección de datos, atendiendo al tipo de estudio de que se trate, antes de aplicarlos de manera definitiva en la muestra seleccionada, es conveniente someterlos a prueba, con el propósito de establecer la validez de éstos, en relación al problema investigado. En nuestro caso, los instrumentos utilizados en la investigación cualitativa fueron validados por tres docentes universitarios, el primero con maestría en Didáctica Específica de la Matemática por la Universidad Autónoma de Barcelona, el segundo y tercero con maestría en formación de formadores de docentes por la UNAN - Managua.



ENTREVISTA CUALITATIVA

Nombre del estudio: Diagnóstico del proceso de enseñanza aprendizaje de la Integral definida en la asignatura de Matemática Aplicada, con los estudiantes de Contaduría Pública y Finanzas de la escuela de Administración Comercio y Finanzas de la Universidad Politécnica de Nicaragua, durante el primer semestre del año 2017.

GUÍA DEL GRUPO FOCAL

Objetivo General

Diagnosticar el proceso de enseñanza aprendizaje de la Integral definida en la asignatura de Matemática Aplicada, con los estudiantes de Contaduría Pública y Finanzas de la escuela de Administración Comercio y Finanzas de la Universidad Politécnica de Nicaragua, durante el primer semestre del año 2017.

Objetivos Específicos

ESPECÍFICOS

1. Identificar la relación que existe entre el plan de estudio de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas, el programa de asignatura de Matemática Aplicada, sílabo y planes de clases para el proceso de enseñanza aprendizaje de la Integral definida.

Para este proceso se estructuraron cuatro instrumentos a saber, guía de análisis documental, guión de entrevista, guía de grupo focal para estudiantes y guía de grupo focal para docentes.

1.7. TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

La investigación cualitativa ha logrado revalorizar la capacidad auto reflexiva, para construir a través de la experiencia hermenéutica la racionalidad humana por medio de la interpretación y comprensión de la realidad histórica social.

Según Rodríguez, Gil y García (1996) “El análisis de la información puede definirse como la aplicación de técnicas de procesamiento automático del lenguaje natural, de clasificación automática, de representación gráfica del contenido cognitivo y factual de los datos bibliográficos (o textuales)”. Todo esto implica trabajar con los datos: recopilarlos, organizándolos en unidades manejables, buscar regularidades, descubrir qué es importante y qué va a ser útil para nuestros propósitos.

Coincidimos con la idea del autor al realizar el análisis e interpretación de la información proporcionada por nuestros informantes claves sobre la incidencia del proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida del programa de asignatura de Matemática Aplicada, en los estudiantes de la escuela de Ciencias Económicas y Empresariales.

Definición de Categorías y Subcategorías

El diseño de las categorías fue a priori, se elaboró una lista de ellas y se procedió a leer y releer las transcripciones para codificarlas, si aparecía una categoría no considerada, la agregábamos, en caso contrario la eliminábamos. Para obtener una mejor visualización de la información, se diseñaron matrices en donde se presentan las relaciones entre conceptos, ya que con ellos se estudiaron las relaciones existentes entre las categorías. Estas matrices las detallamos a continuación.

Propósitos específicos	Categoría	Sub categoría	Fuentes de información	Técnica recolección de la información
Identificar la relación que existe entre el plan de estudio de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas, programa de asignatura de Matemática Aplicada, sílabo y planes de clases para el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida.	Estrategias didácticas ED	De enseñanza E De aprendizaje A	Documentos curriculares	Análisis de documentos
	Materiales didácticos MD	Físicos F Audiovisuales A Tecnológicos T		

Propósitos específicos	Categoría	Sub categoría	Fuentes de información	Técnica recolección de la información
Describir las actividades, estrategias, y los recursos didácticos empleados por el docente en el proceso de enseñanza de la integral definida.	Actividades AC		Docentes Estudiantes	Grupo focal Entrevista
	Estrategias de enseñanza EE	Lecturas comprensiva LC Análisis de ejercicios. AEJ Conferencia docente CD		
	Recursos didácticos RD	Tecnológico T Impresos I Audiovisuales A		

Propósitos específicos	Categoría	Sub categoría	Fuentes de información	Técnica recolección de la información
Identificar las conceptualizaciones adquiridas por los estudiantes de III año de Contaduría pública y Finanzas sobre la integral definida al cursar la asignatura de Matemática Aplicada en el periodo 2016.	Niveles de aprendizaje SOLO	Preestructura P Uniestructural U Multiestructural M Relacional R Abstracto extendido A	Estudiantes	Cuestionarios abiertos(prueba escrita)

En las tablas siguientes de reducción de información, se refleja los grandes ejes de análisis que nos planteamos en la investigación, donde la información que proporcionó cada uno de los informantes claves se transcribió tratando de tomar aquellos aspectos más esenciales que apuntaron directamente al problema, esto facilitó la comprensión de los datos a la vez establecieron criterios valorativos sobre los diferentes puntos de vista.

ANÁLISIS DOCUMENTAL

Matriz de Reducción de la Información – Análisis Documental

EJES DE ANÁLISIS (LINEAS DE CONVERSACIÓN)	DOCUMENTOS			
	PLAN DE ESTUDIOS	PROGRAMA DE ASIGNATURA	SILABO DE ASINATURA	ESTRUCTURA DE PLAN DE CLASES
Descripción general de los documentos curriculares.	El plan de estudios de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas, consta de 54 asignaturas clasificadas en general, humanista, básicas y profesionalizantes, libres e Integración y terminal. La asignatura de Matemática Aplicada se imparte en el segundo semestre de primer año, tiene como requisito o antecedente la asignatura de Matemática I. No posee asignaturas consecuentes pero sirve como conocimientos previos para las asignaturas de métodos cuantitativos, macroeconomía y microeconomía.	Incorpora orientaciones metodológicas para el proceso enseñanza-aprendizaje, así como las evaluación y bibliografía a utilizar. Esta asignatura les permite a los estudiantes, la capacidad para obtener dominio en las técnicas de análisis de los modelos de fijación de precios, utilidades totales, productividad de una empresa y la optimización de modelos matemáticos aplicados al mundo de los negocios y economía.	El silabo de la asignatura de Matemática Aplicada se deriva del programa de asignatura y muestra datos generales, bibliografía, textos complementarios y luego en una tabla aparecen reflejados la distribución del tiempo por semana, unidades y contenidos para cada encuentro, resultados esperados(representan los objetivos procedimentales), Estrategias macro por unidad, especificado para cada encuentro y evaluación(se especifica lo que se va a evaluar, en grupo, individual o clase práctica y el valor numérico).	La dirección de desarrollo académico de la UPOLI, orienta en el manual de Introducción a la planificación didáctica relacionada con el programa y silabo lo siguiente. Datos generales, objetivos, contenidos, situaciones de aprendizaje o actividades, medios recursos, y evaluación y tarea.

DOCUMENTOS			
EJES DE ANÁLISIS (LÍNEAS DE CONVERSACIÓN)	PLAN DE ESTUDIOS	PROGRAMA DE ASIGNATURA	SILABO DE ASIGNATURA
Líneas de acción que se orienta en los documentos curriculares para hacer uso de las estrategias de enseñanza, actividades y recursos didácticos.		En el apartado de orientaciones metodológicas. Estas son generales, hacen referencia al modelo educativo de la UPOLI, la cual plantea que el proceso de enseñanza – aprendizaje debe estar definido por el modelo socio constructivista, por lo que sugiere estrategias activas y participativas. Propone las siguientes: conferencias dialogadas, grupos de trabajo, método de casos.	Las principales estrategias señaladas son las siguientes: Preguntas de control, exposición docente, revisión de tareas, conferencias participativas, lecturas comprensivas del texto, resolución de ejercicio del texto de apoyo, problemas y tareas en casa. Las actividades y recursos didácticos no aparecen explícitamente. El recurso más orientado según las estrategias macro es el material de apoyo elaborado por el colectivo de docentes para la asignatura.
			Orientaciones en términos generales: las actividades y recursos didácticos.

DOCUMENTOS				
EJES DE ANÁLISIS (LINEAS DE CONVERSACIÓN)	PLAN DE ESTUDIOS	PROGRAMA DE ASIGNATURA	SILABO DE ASINATURA	ESTRUCTURA DE PLAN DE CLASES
Aspectos que se deben incorporar para el uso de las estrategias de enseñanza – aprendizaje.		Se debe enriquecer el programa estableciendo estrategias variadas e incorporar actividades que involucren los ejes transversales, así como incorporar sugerencias sobre recursos didácticos, inclusive los tecnológicos.	Estas estrategias deben de ser más variadas y complementadas con recursos tecnológicos (App en celular, software como geogebra), de acuerdo a la realidad actual, así como estrategias que ayuden a la comprensión de conceptos (resúmenes, mapas conceptuales, formularios), motivacionales y trabajos cooperativos.	En general la estructura es adecuada para el proceso de enseñanza – aprendizaje, pero hace falta integrar actividades diagnóstica, no solo lluvia de ideas, consolidación de conceptos, ampliación de conceptos, transferencia a otra ciencia. También hace falta integrar los recursos o materiales didácticos a utilizar en el proceso enseñanza-aprendizaje.

GRUPO FOCAL- DOCENTES

Matriz de Reducción de la Información – Grupo focal docentes

EJES DE ANÁLISIS		Informantes Claves - Docente			
		1	2	3	4
¿Realiza planeamiento didáctico para impartir la Unidad de integral definida?		La mayoría dijo que si, tomando en cuenta las orientaciones solo del sílabo, dado que el programa de asignatura y el plan de estudio es un documento que lo no conocen o posean para la planificación.			
Actividades desarrolladas en clases		Iniciación: Explorando e indagando que conocimientos previos, promoviendo una participación activa de los estudiantes en la construcción de su propio aprendizaje y que serán la base para los posteriores. También revisamos tareas. Desarrollo de la clase : Primero trabajamos las Definición, teoremas, reglas(análisis de texto o exposición) y de segundo ejercicios prácticos en la pizarra o pasamos al estudiante a la pizarra a resolver en conjunto Cierre: Aclaración o conclusión y la tarea en casa. Posibles conclusiones y tareas, enfocadas a lo que se trabajó y que serán de base para el siguiente contenido a tratar.			

Estrategias de enseñanza usadas para el desarrollo de la clase.	Exposición, conferencia participativa, exposición de actividades sugeridas, lecturas comprensivas del material de apoyo de la asignatura, Resolución de ejercicios y problemas, Clases prácticas, trabajo autónomo y cooperativo.
Materiales didácticos usados para el desarrollo de las clases	1. Syllabus, unidades didácticas y guías de aprendizajes. 2. Dispositivos tecnológicos: Calculadora, ordenadores y celulares, páginas y grupos para el alojamiento de la información tratada o a desarrollar o para la ejemplificación de los mismos, y/o atender consultas. 3. Pizarra, borrador, paleógrafos y papel milimetrado. 4. Software matemático como el geogebra para ver la simulación de las gráficas y cálculos pertinentes. 5. Uso del data show, power point y videos. 6. Material de apoyo de la asignatura.
Aspectos que deben mejorarse en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje.	1. Proporcionar a los docentes programas de asignaturas y planes de estudios para poder elaborar silabo y planes de clases de acuerdo al perfil de la carrera del estudiante. 2. Continuar con intercambios pedagógicos organizados por la dirección de desarrollo docente de la UPOLI. 3. La UPOLI debe hacer capacitaciones sobre el uso de medios didácticos digitales, sobre el uso de TIC, por ejemplo. 4. Promover intercambios pedagógicos sobre uso de software libres y aplicaciones para sistemas Android o IOS en los celulares. 5. Dotar de mayor cantidad de computadoras a la dirección de medios audiovisuales, para cubrir la demanda de estas y data show en las aulas de clases. 6. Ampliar la cobertura de Wifi, existente para poder usar en las aulas de clases. 7. Incorporar en las laptops que proporciona medios audiovisuales en las aulas de clases, programas libres como geogebra, graph, etc que favorezcan las estrategias de enseñanza aprendizaje.

GRUPO FOCAL- ESTUDIANTES

Matriz de Reducción de la Información – Grupo focal estudiantes

EJES DE ANÁLISIS	Informantes Claves - Estudiantes			
	1	2	3	4
¿El docente de matemática aplicada realizaba planeamiento didáctico para impartir la Unidad de integral definida?	Nunca lo vimos con su cuaderno, siempre nos explicaba con el folleto de la signatura, pero entendíamos, tiene dominio del tema, era claro y el material de apoyo está bien orientado.			
Actividades desarrolladas en clases por el docente	Iniciación: También revisamos tareas algunas veces solo en el cuaderno y otras en la pizarra. Es mejor en la pizarra así todos aclaramos dudas. Aclaraba dudas si alguien preguntaba. Desarrollo de la clase: Luego explicaba el tema, pero también nos ponía analizar la teoría del material de apoyo. Después hacía más ejemplos y nos asignaba ejercicios o problemas para trabajar, casi siempre en forma individual y luego nos pasaba a la pizarra. Al final nos dejaba la tarea del texto o del material que usamos para la clase.			
Estrategias de enseñanza usadas para el desarrollo de la clase.	Exposición, conferencia participativa, Resolución de ejercicios y problemas y Clases prácticas.			
Materiales didácticos usados para el desarrollo de las clases.	Material de apoyo de la asignatura, pizarra y marcadores.			
Aspectos que deben mejorarse en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje.	Sería bueno que nos enseñen con las aplicaciones en el teléfono o la computadora. Los videos nos ayudan a recordar y las App a ver por ejemplo las gráficas que tanto nos cuesta. Variar un poco la metodología de enseñanza, es buena pero algunos compañeros les cuesta más las matemáticas.			

ENTREVISTA A PROFUNDIDAD- COORDINADORA DE ÁREA DE MATEMÁTICA DE ECEE

Matriz de Reducción de la Información – Entrevista a profundidad

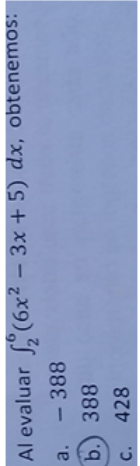
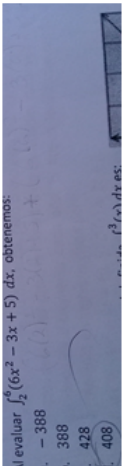
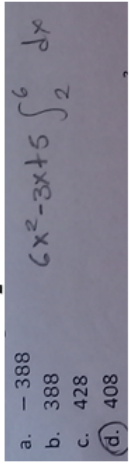
EJES E ANÁLISIS	Informantes Claves – Coordinadora de Matemática de ECEE
¿Realizan planeamiento didáctico los docentes que imparten la Unidad de integral definida?	Lo que he podido observar en los acompañamientos pedagógicos y rondines, es que la mayoría no planifica formalmente en un cuaderno o documento impreso y los más reacios son los docentes con mayor experiencia. Es algo que, a corto plazo se tiene que mejorar y ya se están tomando medidas. Aclaro que aunque no se hace formalmente por diferentes motivos, si se realiza una planificación enfocada en el sílabo y material de apoyo, pues ahí están plasmadas las actividades, evaluaciones y estrategias. Además los estudiantes lo poseen y ellos llevan control del desarrollo del programa
Actividades desarrolladas en clases	La mayoría son las que aparecen plasmadas en el sílabo unificado como: iniciación, desarrollo y cierre, es decir tomando los momentos de la clase.
Estrategias de enseñanza usadas para el desarrollo de la clase.	Las que aparecen en el sílabo unificado: Exposición, conferencia participativa, exposición de actividades sugeridas, Resolución de ejercicios y problemas. Algunos menciona en su sílabos otras. Como link para videos y otros me consta, que aunque no lo plasmen en el sílabo usan redes sociales como WhatsApp o Messenger y App en los celulares-
Materiales didácticos usados para el desarrollo de las clases	La mayoría: Sílabo., material de apoyo de la asignatura, Pizarra, borrador, paleógrafos, papel milimetrado, calculadora. Algunos: Software matemático como el geogebra, data show, power point y videos.
Aspectos que deben mejorarse en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje.	A futuro se tiene que incorporar estrategias con medios tecnológicos de acuerdo a la realidad, dado que los estudiantes los usan las redes sociales, teléfonos inteligentes y esto los motiva, además los nuevos cambios curriculares exigen los usos de variados recursos que ayuden al proceso de enseñanza aprendizaje. Promover el planeamiento didáctico incorporando estrategias variadas con medios que favorezcan el proceso de enseñanza aprendizaje como las aplicaciones en los celulares, redes sociales y softwares matemáticos libres que se puedan instalar en las laptops de la universidad.

En la siguiente matriz presentamos de forma general como se analizó las repuestas de cada estudiante respecto al cuestionario sobre ejercicio de reproducción (1) bajo ningún contexto de la vida cotidiana, por lo tanto en estos casos se omite la categoría Abstracto extendido de categoría SOLO (Preestructural P, Uniestructural U, Multiestructural M y Relacional R). Entonces en la columna 1 de izquierda a derecha, están los ítems del cuestionario a analizar, en la columna 2 las repuestas de cada estudiante y finalmente las categorías SOLO contextualizadas a cada ítem. Posteriormente se presenta otra tabla similar pero con las repuestas de los seis estudiantes y se indicará la ubicación según la categoría.

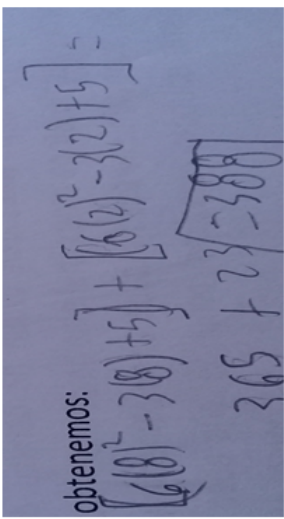
ITEMS DEL CUESTIONARIO	Repuesta del estudiante	CATEGORÍAS SOLO			
		P	U	M	R
2. Al evaluar $\int_2^6 (6x^2 - 3x + 5) dx$, obtenemos:		El estudiante no tiene claro de la tarea, no contesta o realiza cálculos inadecuados sobre la integración definida...	El estudiante se enfoca en un aspecto relevante: relacionan una parte de la teoría para evaluar la integral definida usando regla de Barrow, pero no la concluye	Se enfocan en muchos aspectos pero no los relacionan completamente, aplica la regla de Barrow realizando abuzo de notación.	Aplica correctamente la regla de Barrow para integrar la función dada, utilizando todos los elementos del conjunto de datos del ejercicio

En las siguientes matrices mostramos la información obtenida de cada estudiante, ubicándolo en la categoría SOLO correspondiente.

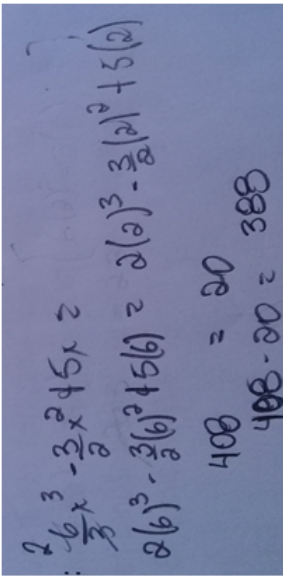
MATRIZ DE REDUCCIÓN DE LA INFORMACIÓN DEL CUESTIONARIO SOBRE EJERCICIOS 1 DE REPRODUCCIÓN

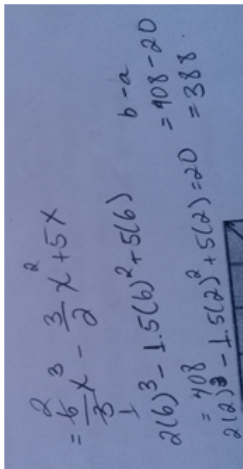
ITEMS DEL CUESTIONARIO	Repuesta del estudiante	ESTUDIANTE	CATEGORIA SOLO
			PREESTRUCTURAL
1. Al evaluar $\int_2^6 (6x^2 - 3x + 5) dx$, obtenemos:	308 	B2	El estudiante no tiene claro de la tarea, no contesta dejando evidencia solo señala el 308.(B2) C2 acierta en la tarea pero no deja evidencia y se logra ver borrones donde intenta aplicar la regla de Barrow pero realiza un producto. B1 no deja evidencia, se nota intentos inadecuados. Estos errores se deben a los procesos meramente de cálculos memorísticos, es necesario realizar construcciones de concepto para obtener aprendizaje significativo.
	408 	C2	
	408 $6x^2 - 3x + 5 \int_2^6 dx$ 	B1	

MATRIZ DE REDUCCIÓN DE LA INFORMACIÓN DEL CUESTIONARIO SOBRE EJERCICIOS 2 DE REPRODUCCIÓN

ITEMS DEL CUESTIONARIO	Respuesta del estudiante	ESTUDIANTE	CATEGORIA SOLO
			UNIESTRUCTURAL
2. Al evaluar $\int_0^6 (6x^2 - 3x + 5) dx,$ obtenemos:	308 $[6(8)^2 - 3(8) + 5] + [6(2)^2 - 3(2) + 5]$ $= 365 + 23$ $= 388$ 	C1	El estudiante se enfoca en un aspecto relevante: recuerda que al aplicar al regla de Barrow de evaluar los límites, pero olvida integral primero para obtener la función integral, además comete otro error al realizar suma en vez de hacer la diferencia al evaluar. Nuevamente el concepto y teorema fundamental no fueron integrado a los conocimientos es necesario hacer construcción de concepto y asegurar hacer actividades donde se fije el concepto.

MATRIZ DE REDUCCIÓN DE LA INFORMACIÓN DEL CUESTIONARIO SOBRE EJERCICIOS 2 DE REPRODUCCIÓN

ITEMS DEL CUESTIONARIO	Respuesta del estudiante	ESTUDIANTE	CATEGORIA SOLO
			MULTIESTRUCTURAL
2. Al evaluar $\int_2^6 (6x^2 - 3x + 5) dx$, obtenemos:	$\frac{6}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x =$ $2(6)^3 - \frac{3}{2}(6^2) + 5(6) = 2(2)^3 - \frac{3}{2}(2^2) + 5(2)$ $408 = 20$ $408 - 20 = 388$ 	A1	Muestra dominio de los conceptos y regla de Barrow, integra, simplifica y evalúa pero realiza abuso de notación. Respecto a la igualdad al evaluar los límites de integración. Estos errores debemos erradicarlos, en situaciones específicas de la vida real son inconcebibles, se violenta la primera ley de tricotomía de un número real, pues este sólo es igual a sí mismo.

ITEMS DEL CUESTIONARIO	Repuesta del estudiante	ESTUDIANTE	CATEGORIA SOLO
			RELACIONAL
2. Al evaluar $\int_1^6 (6x^2 - 3x + 5) dx$, obtenemos:	$\frac{6}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x =$ $2(6)^3 - 1.5(6^2) + 5(6) = 408$ $2(2)^3 - 1.5(2^2) + 5(2) = 20$ $b - a$ $408 - 20 = 388$ 	A2	Aplica correctamente la regla de Barrow para integrar la función dada, utilizando todos los elementos del conjunto de datos del ejercicio. Integra, evalúa por separado los límites y luego realiza la resta correctamente.

En la siguiente tabla se muestra un resumen de las conceptualizaciones, por nivel de aprendizaje, de los estudiantes sobre la integral definida, cuando trabajan problemas sencillos del tipo reproducción, no contextualizado a ninguna situación de la vida cotidiana. La viñeta indica la ubicación del estudiante según categorías SOLO.

Estudiantes	Categorías de las conceptualizaciones sobre la integral definida			
	Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
A1			✓	
A2				✓
B1	✓			
B2	✓			
C1		✓		
C2	✓			

Tabla1. Organización por niveles de razonamiento del ejercicio1.

Respecto al ejercicio a relacional (2), hablamos de un problema contextualizados al mundo de los negocios, es decir

estamos ante un tipo ejercicios de reflexión, por cuestiones de espacio en la tabla de reducción solo se indica el número del ejercicio y al pie de la matriz se muestra textualmente. Entonces en la columna 1 de izquierda a derecha, está en número de ítems del cuestionario a analizar, en la columna 2 las repuestas de cada estudiante y finalmente las categorías SOLO relacionada a cada ítems. Posteriormente se presenta otra tabla similar pero con las repuestas de los seis estudiantes y se indicará la ubicación según la categoría SOLO.

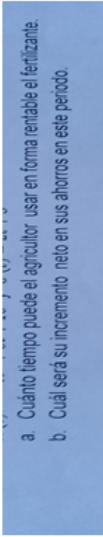
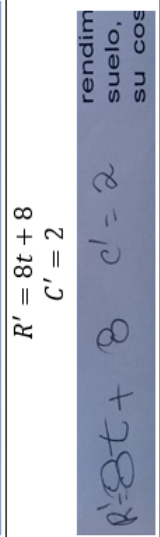
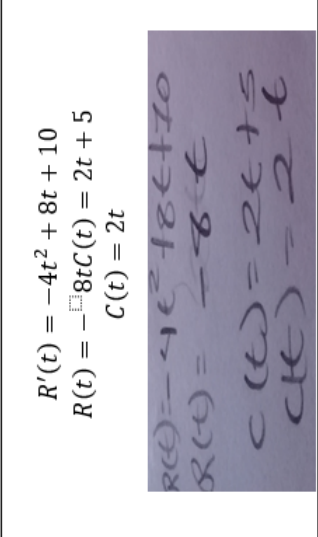
Ítems del cuestionario	Repuesta del estudiante	CATEGORÍAS SOLO			
		P	U	M	R
3		El estudiante no tiene clara la tarea, no contesta o realiza cálculos inadecuados para determinar el tiempo o utilidad neta.	El estudiante se enfoca en un aspecto relevante: calcular el tiempo incremento neto. Solo cumplen una parte del problema.	Se enfocan en muchos aspectos pero no los relacionan completamente Realiza el cálculo del tiempo adecuadamente pero no lo relaciona con el cálculo de la utilidad	Determina el tiempo igualando las ecuaciones dado que ahí ocurre el punto de equilibrio y lo utiliza para obtener el incremento neto en los ahorros,

2. Un agricultor ha estado usando un nuevo fertilizante que brinda un mejor rendimiento de su cosecha, pero como este fertilizante agota otros nutrientes del suelo, debe usar otros fertilizantes en cantidades cada vez mayores, por lo que su costo se incrementa cada año. El nuevo fertilizante produce una razón de incremento en ingresos dada por

$$R'(t) = -4t^2 + 8t + 10 \text{ y } C'(t) = 2t + 5$$

- Cuánto tiempo puede el agricultor usar en forma rentable el fertilizante.
- Cuál será su incremento neto en sus ahorros en este periodo.

MATRIZ DE REDUCCIÓN DE LA INFORMACIÓN DEL CUESTIONARIO SOBRE EJERCICIOS 3 DE CONEXIÓN Y REFLEXIÓN

ITEMS DEL CUESTIONARIO	Repuesta del estudiante	ESTUDIANTE	CATEGORIA SOLO	
			PREESTRUCTURAL	
2	No contesta	A1, A2, B2, C1	El estudiante no tiene clara la tarea, no contesta	
				
		C2,	C2 deriva la función de costo marginal y el ingreso marginal inadecuadamente, No comprende la tarea.	
		B1	Da repuestas inadecuadas, deriva costo marginal y el ingreso marginal inadecuadamente. La transferencia a otros contextos especialmente a los relacionados con el perfil del Contador Público y Finanzas se consolida con estas situaciones, es por eso que es necesario utilizar otras estrategias planificadas donde se resalte la importancia de la resolución de problemas.	

Ahora se muestra un resumen de las conceptualizaciones, por nivel de aprendizaje, de los estudiantes sobre la integral definida, cuando trabajan contextualizado de la vida cotidiana. La viñeta indica la ubicación del estudiante según categorías SOLO.

Estudiantes	Categorías de las conceptualizaciones sobre la integral definida			
	Preestructural	Uniestructural	Multiestructural	Relacional
A1	✓			
A2	✓			
B1	✓			
B2	✓			
C1	✓			
C2	✓			

Tabla1. Organización por niveles de razonamiento del ejercicio2

1.8. ANALISIS INTENSIVO DE LA INFORMACIÓN

Después de aplicar los instrumentos realizamos un proceso de transcripción fiel de la información suministrada por los informantes claves, se procedió al resumen de los datos usando matrices de reducción según los instrumentos elaborados y las líneas de conversación. Se determinaron relaciones y comparaciones entre las categorías según los propósitos del diagnóstico, a continuación se presentan los detalles.

Propósito 1: Identificar la relación que existe entre el programa de asignatura de Matemática Aplicada, silabo, planes de clases y material didáctico.

La misión de la UPOLI es educar a sus estudiantes para servir de acuerdo al modelo de Jesucristo; para ser líderes con espíritu emprendedor, creativo, investigativo y altamente competitivos en el contexto mundial, de ahí se deriva la misión de la Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales, que forma profesionales para desempeñarse en las diferentes áreas funcionales de la empresa: producción, marketing, administración y finanzas, recursos humanos, planificación estratégica, desarrollo organizacional y sistemas de información para la toma de decisiones, analizando los procesos de cambio de acuerdo al entorno económico, tecnológico, cultural, legal, educativo y político.

Lo anterior solamente se puede lograr articulando las componentes de docencia de calidad, resultados de investigaciones que resuelven problemas de la sociedad, o sea la extensión social, y la gestión de proyectos, esto implica contar con docentes con dominio científico de la materia y didácticas específicas incorporando actividades innovadoras, relacionadas con el plan de estudio y programa de asignatura, al vincularlo en el silabo y planes de clases, en el proceso de enseñanza aprendizaje. Estos últimos documentos deben tener una estrecha relación y sobre todo en los aspectos metodológicos y didácticos para el proceso de enseñanza aprendizaje.

En la revisión de documentos, se hace notar que la relación que existe no es la óptima hay una ruptura entre el programa de asignatura y sílabo. Las estrategias didácticas, recursos didácticos, objetivos y contenidos, son derivados del programa de asignatura (que obedece a las intenciones de un plan de estudio de la carrera), estos se reflejan en la programación semestral, es decir el sílabo y en los planes diarios elaborados por los docentes, distribuidos en el tiempo con base en la complejidad que presenta cada contenido, sin embargo, se han descuidado las estrategias y recursos didácticos, en el caso del programa de asignatura solo menciona textualmente las siguientes: conferencias dialogadas, grupos de trabajo, método de casos.

Estas son pocas y atienden a enseñanza pasiva y no socio constructivista como lo señala el modelo educativo de la UPOLI. Tampoco aparecen los recursos didácticos a utilizar en el desarrollo del programa de la asignatura. Sin embargo el sílabo, está mejor estructurado respecto a estrategias, existe sugerencias

por cada sesión de clases estas son las siguientes: Preguntas de control, exposición docente, revisión de tareas, conferencia participativa, lecturas comprensivas del texto, resolución de ejercicios del texto de apoyo y problemas y tareas en casa.

Es necesario que el programa y sílabo estén relacionados, dado que de ahí se planifica las sesiones de clases y es necesario incorporar estrategias y recursos como páginas web, app matemáticos libres como geogebra de acuerdo a la realidad actual, así como estrategias que ayuden al trabajo cooperativo, que los motive, a la comprensión y aplicación de conceptos.

Propósito 2: Describir las actividades, estrategias, y los recursos didácticos empleados por el docente en el proceso de enseñanza de la integral definida.

Los docentes universitarios tienen la responsabilidad de dar cumplimiento a los objetivos de educación superior nicaragüense que es la formación plena e integral del individuo al contribuir a la formación científica, técnica, cultural y patriótica del estudiante, dotándolo de capacidad crítica y autocrítica, cultivando en él la disciplina, la creatividad, el espíritu de cooperación y la eficiencia.

Para el logro de lo anterior el maestro debe de realizar el proceso de enseñanza aprendizaje con una adecuada planificación con variedad de actividades acompañadas de estrategias y recursos didácticos variados que contribuyan al aprendizaje significativo del estudiante.

Según Medina (2009), citado en Peralta (2013), “la actividad conducida por el docente es llevada a cabo mediante la aplicación de las diferentes estrategias que le garantizan la concreción de objetivos propuestos”. En el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida podemos señalar en base a la triangulación de la información que las actividades que se realizan son las siguientes: iniciación (revisión de tareas, aclaración de dudas del tema anterior), desarrollo (explicación participativa o lecturas comprensivas luego ejercicios a resolver) y cierre (ejercicios y tareas). En cuanto a las estrategias podemos indicar las siguientes: Exposición, conferencia participativa, revisión de tareas, resolución de ejercicios y problemas y Clases prácticas. En cuanto a los recursos didácticos tenemos: Material de apoyo de la asignatura, pizarra y marcadores. Muy pocos maestros usan softwares matemáticos o materiales tecnológicos.

Es necesario realizar planeamiento didáctico más dinámico, incorporando más actividades de iniciación, que favorezcan la exploración a los nuevos contenidos y enlaces con los anteriores, no es suficiente la revisión de tarea. Diseñar actividades de consenso y justificación del concepto, es decir construcción de conceptos, si el estudiante construye el concepto difícilmente lo olvidará y podrá incorporar a sus actividades académicas y vida profesional. También es necesario plantear actividades de síntesis, evaluación y ampliación de concepto donde puedan consolidar la parte teórica y puedan relacionar con otras ciencias o contextos de acuerdo a su perfil profesional.

Para la ejecución de estas actividades es necesario incorporar estrategias de trabajo cooperativo, motivacionales basadas en contexto y resolución de problemas. También es necesario incorporar medios tecnológicos como data show, laptops, vídeos, softwares matemáticos libres. Para ellos la universidad debe dotar de mayor cantidad de equipos a la dirección medios audiovisuales y permitir instalar en las laptops de esta dirección softwares como el geogebra, para que todos los docentes incorporen estos medios, También debe seguir con los talleres de intercambio pedagógico y uso de nuevas tecnologías.

Propósito 3: Identificar las conceptualizaciones adquiridas por los estudiantes de III año de Contaduría pública y Finanzas sobre la integral definida al cursar la asignatura de Matemática Aplicada en el periodo 2016.

Al examinar los niveles de aprendizaje adquiridos por los estudiantes al finalizar el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida, mediante la taxonomía SOLO, se pudo observar que cuando se trata de ejercicios de reproducción o no contextualizados a situaciones de la vida cotidiana, estos se ubican en su mayoría en los niveles más bajos de la escala. El 50 % en el escala preestructural, 16.6 % en la uniestructural, 16.6 % multiestructural y 16.6 % en relacional.

Los estudiante que contestaron este ítems, se enfoca en un aspecto relevante, recuerdan que al aplicar la regla de Barrow deben evaluar los límites, pero olvida integrar primero para obtener la función integral, además comete otro error al realizar suma en vez de hacer la diferencia al evaluar, otros integran pero al evaluar multiplican los resultados. El concepto de integral definida y teorema fundamental no fueron integrado a los conocimientos es necesario hacer construcción de concepto y asegurar hacer actividades donde se fije el concepto.

Los niveles donde se ubica el 66.6 % de estos estudiantes, es decir uniestructural y preestructural, se caracteriza a los que persiguen solo aprobar la asignatura sin importar los conocimientos adquiridos, se sienten obligados a cursar las clases por lo que la vida académica no tiene sentido y es posible que sea porque existen prioridades e intereses extracurriculares, según (Vásquez 2012, citado en Rodríguez, et al 1997).

Otras razones pueden asociarse con sobrecargas de trabajo estudiantil, visiones escépticas de la educación matemática o presentan altos niveles de ansiedad y factores relacionados con el trabajo docente.

En cambio dos de los estudiantes se ubican en los niveles más altos de la escala, uno de ellos cometiendo error de abuso de notación y mal uso de la propiedad de tricotomía de los números reales, pero estos son fáciles de superar. Estos estudiantes muestran maestría en sus conocimientos que puede deberse a dos factores relacionados, docente e interés por parte del estudiante en su formación profesional.

En cuanto al ejercicio relacional y de conexión, respecto a la integral definida, los estudiantes se ubican en el nivel más bajo de la taxonomía la mayoría no contesta, los que sí lo hacen muestran no

comprender la tarea y derivan erróneamente. Este tipo de problema aparece en el material de apoyo de la asignatura por lo que no se puede considerar que la tarea era muy difícil o no se había trabajado antes.

Los estudiantes que realizaron el cuestionario, muestran un nivel bajo en sus razonamiento, las conceptualizaciones no son muy ricas después del proceso de instrucción, se requiere que integren diversos aspectos como un todo coherente con estructura y significado para formar un esquema conceptual adecuado que puedan evocar ante cualquier situación problemática. Por tanto en base a las categorías taxonómicas SOLO, podemos deducir que los estudiantes conceptualizan la integral definida, cuando se les plantea situaciones didácticas del tipo reproducción, de forma algorítmica, basada en la utilización de la regla de Barrow y están débilmente establecida entre los esquemas algebraico y aritmético, y los aspectos o las representaciones que dan riqueza y fortaleza a los esquemas conceptuales son las algebraicas, numérica y gráfica (Calvo, 1997).

En cuanto a situaciones de contexto, se infiere que el sistema de invariantes operacionales como definiciones o teoremas respecto a la función de ingreso, costo, utilidad, punto de equilibrio e integral definida no fueron evocados para resolver el problema y no mostraron la utilización de ningún tipo de representación simbólica, por lo tanto no se puede decir que los estudiantes poseen una contextualización de la integral definida adecuada.

1.9. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Según plantean Guba y Lincoln, así como, Colás y Buendía citados por Albert (2007), dos de los principios inspiradores de la investigación cualitativa son la concepción múltiple de la realidad y la comprensión de los fenómenos. Por tal razón, en busca de entender mejor cómo, y hasta qué nivel, asimila el educando el concepto de integral definida; nos hemos dado a la tarea de formular la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo incide la implementación de la Unidad Didáctica en las conceptualizaciones de la integral definida de los estudiantes de II año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas de la Universidad politécnica de Nicaragua, recinto central Managua, durante el primer semestre del año 2017 ?

Esta pregunta, surge, una vez concluidos el análisis del diagnóstico y encontrar dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje en el contenido de integral definida. Consideramos relevante el estudio de la pregunta de investigación, por el aporte al estudiante en las competencias involucradas. Pues, según plantea Callejo y Goñi. coords, (2010), la Matemática es omnipresente en nuestra vida cotidiana y debemos sacar partido a nuestros recursos más elementales; y agrega que, aunque son la base de la cultura del hombre del siglo XXI, lastimosamente, podríamos afirmar que vivimos en una época de “presionar

botones”.

1.10. CONCLUSIONES

Luego de haber realizado el análisis de la información recabada durante el proceso de aplicación de los instrumentos, se ha llegado a las siguientes conclusiones sobre el las cuales se exponen en el orden de los propósitos establecidos:

En cuanto al objetivo general: Diagnosticar la incidencia del proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida del programa de asignatura de Matemática Aplicada, en los estudiantes de la escuela de Administración Comercio y Finanzas de la UPOLI.

En base a los resultados consideramos que el proceso de enseñanza aprendizaje respecto a la integral definida en los estudiantes, ocurre parcialmente dado que los conocimientos esperados no se logran, pues los estudiantes se ubican en los niveles más bajos, según la taxonomía SOLO. Esto quiere decir que las actividades, estrategias, recursos didácticos y en general la metodología implementada no es totalmente exitosa.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

En relación al propósito específico 1. Identificar la relación que existe entre el plan de estudio de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas, programa de asignatura de Matemática Aplicada, sílabo y planes de clases para el proceso de enseñanza aprendizaje.

Los cuatro documentos pedagógicos están relacionados en lo que se refiere a las intenciones del perfil profesional del contador Público. El programa de asignatura, sílabo y planes de clases están relacionados en cuanto a los contenidos y objetivos generales así como el tiempo sugerido pero no presentan coherencia en relación con las orientaciones metodológicas del programa, ya que en este último son muy escasas las estrategias y no aparecen sugerencias sobre los recursos didácticos. El sílabo presenta mayor variedad de estrategias y son usadas en los planes de clases pero estas atienden a enseñanza pasiva y no socio constructivista como lo señala el modelo educativo de la UPOLI. Finalmente concluimos que se debe enriquecer las orientaciones metodológicas del programa de asignatura Matemática Aplicada.

En relación al propósito específico 2. Describir las actividades, estrategias, y los recursos didácticos empleados por el docente en el proceso de enseñanza de la integral definida.

Las actividades, estrategias y materiales didácticos no son muy variadas no favorecen sustancialmente al proceso de enseñanza aprendizaje. La mayoría de los docentes no planifica formalmente, solo se apoya del sílabo y material de la asignatura.

- Las actividades incorporadas en el desarrollo de las clases son de iniciación (revisión de tareas

en su mayoría), desarrollo (lecturas comprensivas del material, explicación del docente en forma conjunta y resolución de ejercicios) y las de cierre (más ejercicios y tareas).

- Las estrategias: Exposición, conferencia participativa, revisión de tareas, resolución de ejercicios y problemas y Clases prácticas. Todas estas basadas en la programación semestral plasmadas en el sílabo.
- Los recursos didácticos son: Material de apoyo de la asignatura, pizarra y marcadores. Pocos maestros integran redes sociales y celulares.
- Existen algunos medios didácticos, que la universidad pone a disposición a los docentes para impartir la clase y no se está aprovechando al máximo tales como la data show y laptops. Aunque estos en realidad no cubren la demanda si la mayoría de docentes desea utilizarlos.
- Tampoco se está aprovechando los software libres de matemática para incorporar en los procesos de enseñanza aprendizaje, ni el uso de redes sociales, aula virtual de la UPOLI ni aplicaciones matemáticas en los celulares.
- Se debe mejorar la actitud de docentes y asumir la planificación con responsabilidad e integrar todos los elementos y recursos didácticos.
- La UPOLI debe poner a disposición de docentes y estudiantes los equipos, recursos físicos y humanos para lograr insertar recursos tecnológicos novedosos en los procesos de enseñanza aprendizaje de la Matemática. Hay que hacer un diagnóstico para saber el tipo de software matemático a utilizar, capacidad de internet, plataformas virtuales, que capacitación debe dársele a los docentes y específicamente como planificar según el modelo socioconstructivista y diseño de materiales didácticos usando tecnología.

En relación al propósito específico 3. Identificar las conceptualizaciones adquiridas por los estudiantes de III año de Contaduría Pública y Finanzas sobre la integral definida al cursar la asignatura de Matemática Aplicada en el periodo 2016.

Del análisis realizado utilizando las categorías SOLO, se ha podido observar que:

- Cuando los estudiantes trabajan con ejercicios sencillos del tipo reproducción, logran en su mayoría identificar con eficiencia la información suministrada en el problema y han desarrollado habilidad para la evaluación de la integral definida al identificar las condiciones necesarias para aplicar la regla de Barrow y evocar los registros de representación algebraicos y aritméticos.
- Sin embargo, trabajando en contextos relacionado con el mundo de los negocios, presentan serias dificultades en la interpretación de todos los objetos matemáticos involucrados, tales como

función de costo, ingreso, utilidad, punto de equilibrio e integral definida. No lograron responder este tipo de problema.

- La conceptualización de la integral definida es algebraica, basada en una forma simplista del Cálculo al tomar posturas algorítmicas fáciles en apariencias de aplicar.
- El conocimiento que tienen sobre la regla de Barrow es memorística.
- Los errores cometidos por los estudiantes son obstáculos epistemológicos y didácticos, estos tiene su origen en la enseñanza: metodológicos y conceptuales.

Bibliografía

- [1] Albert, M. (2007). *“Investigación Educativa: Claves Teóricas.* España: McGraw-Hill/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S.A.U.
- [2] Agudelo, A. y Flores H (2000). *“El Proyecto Pedagógico de Aula Un Camino Para Mejorar la Calidad de los Aprendizajes.* Candidus. Año 2. No. 15, 55-57. Valencia, Venezuela.
- [3] Arteaga, P y Batanero, C. (2010). *“Evaluación de los errores en la construcción de gráficos estadísticos.* Investigación Matemática XIV (pp. 211-2221) Lleida, España: Sociedad española de investigación en Educación Matemática.
- [4] Artiles, R y Potosme, N. (2015). *“Factores que inciden en el rendimiento académico de la asignatura de Razonamiento Matemático en los estudiantes de los curso regulares en la UPOLI, en el primer semestre 2015- Sede central.* Managua: Universidad Politécnica de Nicaragua.
- [5] Ayra J. y Lander, R. (2009). *“Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía.* 5ta Ed, Edit. Pearson Educación, México.
- [6] Balestrini, M. (1997). *“Cómo se elabora el proyecto de investigación.* Caracas. B.L. Consultores.
- [7] Barragués, J., Morais A., Manterola, M.y Guisasola J. (2013). *“Una Propuesta de uso de un Classroom Response System (CRS) para Promover Clases Interactivas de Cálculo en la universidad.* Educación Matemática, 63-110.
- [8] Biggs, J. (2006). *“Calidad del aprendizaje universitario.* Editorial NARCEA, S. A. Ediciones. Madrid, España.
- [9] Biggs, J., Collins, K. F. (1982). *“Evaluating the quality of learning: the Solo Taxonomy.* Nueva York: Academic Press.
- [10] Calvo, C. (1997). *“Bases para una propuesta didáctica sobre integrales.* Tesis de Maestría. Programa de Doctorat del Departament de Didáctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.

- [11] Cerda, J. (2014). “*Propuesta didáctica con enfoque constructivista para mejorar el aprendizaje significativo de las Matemática*.” Revista Iberoamericana de educación Matemática Volumen 38, pàg.33-49.
- [12] Conceptualización. (2017, Enero 07). “*Knowledge Master*.” <http://conceptmaps.it/KM-Conceptualization-esp.htm>
- [13] Da Ponte J. P., Quaresma M., Branco N. (2007). “*Práticas Profissionais dos professores de Matemática*.” Avances de Investigación en Educación Matemática, 57-86.
- [14] Fererio, R. (2012). “*Cómo ser Mejor Maestro: “El Método de Eli”*.” Mexico: Trillas.
- [15] Godino J. D, Font V, Wilhelmi M. R. (2008). “*Análisis Didáctico del Proceso de Estudio Matemático Basado en el Enfoque Ontosemiótico*.” IV Congreso Internacional de Ensino da Matemática, 25-49.
- [16] Gómez, M. (2006). “*Investigación Educativa, Claves teóricas*.” McGraw-Hill. 2da. edición.
- [17] Goñi, J. (2011). “*Didáctica de las Matemáticas*.” Barcelona. Editorial GRAÓ.
- [18] Hernández R, Fernández C., Baptista M. (2014). “*Metodología de la Investigación*.” Mexico: McGraw Hill.
- [19] Hernández, A y Cuevas, J. (2013). “*Reflexión sobre el nivel de competencia en básicas por parte del estudiante de Calculo Diferencial en Educación Superior*.” Revista Iberoamericana para la investigación y desarrollo educativo. ISSN: 2007-2619.
- [20] Husserl E. (1859). “*Ideas relativas a una fenomenología Pura*.” México. Editorial Trillas.
- [21] Husserl, E. (1998). “*Invitación a la fenomenología*.” Barcelona: Paidós.
- [22] Jansen, H. (2012). “*La lógica de la investigación por encuesta cualitativa y su posición en el campo de los métodos de investigación social*.” Paradigmas, 4, 39-72.
- [23] Jarero, M., Landa E., Sosa, L. (2013). “*Pruebas Escritas como Estrategia de evaluación de aprendizajes matemáticos. Un estudio de caso a nivel superior*.” Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 213-243.
- [24] Kitzinger J. (2000). “*Research: introducing focus group*.” BMJ 1995;311:299-302.
- [25] Krippendorff, K. (1990). “*Metodología del análisis de contenido. Teoría y práctica*.” Barcelona, Paidós.

- [26] Mattos, L (1974). *“Compendio de Didáctica General. Editorial Kapelusz. 11a. Edición. Buenos Aires, Argentina.*
- [27] Montes de Oca, N., Machado, E. (2011). *“Estrategias Docentes y Métodos-Aprendizaje en la Educación Superior. Humanidades Médicas, 479-488.*
- [28] Moreira, M. (2000). *“Aprendizaje significativo un concepto subyacente. Madrid.* http://www.arnaldomartinez.net/docencia_universitaria/ausubel03.pdf
- [29] Peralta, S. (2012.). *“Análisis de la incidencia de los talleres de evaluación, programación y capacitación educativa (TEPCE), en el desarrollo de los proceso de enseñanza aprendizaje. Esteli Nicaragua. (Consulta: 5 de febrero 2017)*.Disponible en: <http://studylib.es/doc/3126183/>.*
- [30] Rico, L. (2012). *“Aproximación a la Investigación de Didáctica de la Matemática. AIEM Acances en investigación en educación matemática, 39-63.*
- [31] Rodríguez, W. (1999). *“El legado de Vygostki y Piaget a la Educación. En revista latinoamericana de psicología. Vol. 31, núm.*
- [32] Rodríguez G., & Gil J. y. (1996). *“Metodología de la Investigación Cualitativa. Málaga, España: Aljibe.*
- [33] Sánchez P. (2005). *“El Proceso de Enseñanza y Aprendizaje. Madrid: Universidad Complutense.*
- [34] Shulman, L. (1989). *“La investigación en la enseñanza (I). Madrid, Paidós/MEC.*
- [35] Travers, R. (1979). *“Introducción a la investigación educacional. Paidós. Buenos Aires.*
- [36] Ugarra, J. (2012). *“La investigación científica y tecnológica. Primera edición. Editorial: Díaz de Santos. Madrid.*
- [37] Universidad Politécnica de Nicaragua. *“Aprobación de Reformas al Modelo Educativo y Académico de la UPOLI. Acuerdo de rectoría 29 A-2012, Managua, Nicaragua, (2012).*
- [38] Universidad Politécnica de Nicaragua. *“Reglamento del Trabajo Académico de la UPOLI, Acuerdo de rectoría 67-2014, Managua, Nicaragua, (2014).*
- [39] Valdivie, C. y Garbin, S. (2010). *“Estudio de la evolución de los esquemas conceptuales previos asociados al infinitesimal: caso del alumno (2), Educare, 14 (3), 3 – 31.*
- [40] Vergnaud, G (2007b): *“¿En qué sentido la Teoría de los Campos Conceptuales puede ayudarnos para facilitar Aprendizaje Significativo? (In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning?). Investigações em Ensino de Ciências. V12 (2), pp.285-302*

-
- [41] Vergnaud, G. (1983a). "*Quelques problèmes théoriques de la didactique a propos d'un exemple: les structures additives*. Atelier International d'Été: Recherche en Didactique de la Physique. La Londe les Maures, Francia, 26 de junio a 13 de julio.
- [42] Vergnaud, g. (1996c). "*Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica*. *Perspectivas*, 26(10): 195-207.
- [43] Vergnaud, G. et al. (1990). "*Epistemology and psychology of mathematics education*. In Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.) *Mathematics and cognition: A research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [44] Vinner, S. (1991). "*The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London. Pp. 65-80.
- [45] Whyte, R. (1982). "*Métodos de investigación*. Ed. Morata, Madrid.
- [46] Zabalza, A. (2009). "*Competencia docente del profesor universitario, calidad y desarrollo profesional*. Madrid: NARCEA.

Capítulo 2

UNIDAD DIDÁCTICA

2.1. Introducción

El presente capítulo es continuación del Diagnóstico del proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida en la asignatura de Matemática Aplicada, con los estudiantes de Contaduría Pública y Finanzas de la Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Politécnica de Nicaragua, durante el primer semestre del año 2017, desarrollado en el capítulo uno de este estudio. Los hallazgos muestran dificultades, al determinar que los docentes no desarrollan totalmente el acto complejo de planificación didáctica y las estrategias de enseñanza usadas son pasivas además de no usar variedad de recursos didácticos de acuerdo a las exigencias del presente siglo. Otra problemática detectada fue cierta inconsistencia en los documentos curriculares específicamente en el programa de asignatura, al referirse a las estrategias metodológicas y recursos didácticos, aparecen muy superficialmente y no se corresponden con el modelo educativo de la UPOLI, el cual es socio constructivista.

También, encontramos dificultades en el aprendizaje de los estudiantes, al ubicarse en los niveles más bajos según la taxonomía SOLO, respecto a la integral definida, ellos contextualizan la integral definida de forma algebraica u operatoria, pues ante una situación problemática, realizan la integración pero fallan en la evaluación de la antiderivada, al aplicar la regla de Barrow. Lo que evidencia errores de manipulación aritmética. Esta situación se agrava cuando se trata de problemas contextualizados al mundo de los negocios y economía. Lo que demuestra que el proceso de enseñanza aprendizaje no está bien articulado ni es el ideal.

Ante esta inconsistencia, proponemos contribuir a la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida, con actividades innovadoras bien planificadas con recursos didácticos variados y estrategias que faciliten el aprendizaje significativo, todo esto concretadas en una Unidad Didáctica (U.D). Cabe destacar que este término muchas veces es utilizado equivocadamente como unidades

programáticas, las cuales difieren totalmente como lo veremos en el avance de este capítulo.

Este documento ha sido estructurado en las siguientes partes, una breve introducción, justificación, propósitos del estudio, perspectiva teórica, escenario, metodología de la Unidad Didáctica, programación de la Unidad, relato de la implementación sesión por sesión, valoración de la aplicación de la unidad, conclusión y finalizamos con la bibliografía.

2.2. Justificación

Este proyecto investigativo, surge como una necesidad en la mejora del quehacer educativo en las clases de Matemática Aplicada, específicamente en el concepto de integral definida, apoyado con nuevas corrientes metodológicas y rigurosas herramientas que nos ha proporcionado este Doctorado en matemática aplicada.

Como se explicitó en el capítulo anterior el contenido de integral definida es de mucha importancia en el desarrollo académico y futuro profesional del estudiantado de la carrera de Contaduría Pública de la UPOLI. Además el diagnóstico nos permitió determinar dificultades en los esquemas conceptuales de los estudiantes, por lo que consideramos necesario realizar ciertas intervenciones didácticas que permitan mejorar esta problemática.

Pensamos que mediante el diseño detallado y la implementación de una Unidad Didáctica(U.D) sobre el contenido de integral definida, los estudiantes noveles de segundo año de la carrera de Contaduría Pública, podrán fortalecer las conceptualizaciones de los contenidos, al realizar un proceso de enseñanza aprendizaje que permitirá crear aprendizaje significativo y por tanto formar, en el estudiando esquemas conceptuales, donde demuestren habilidades, al utilizar diversas conexiones de conocimientos; organizados lógicamente y cognitivamente para aplicarlos en situaciones didácticas o vida cotidiana.

La estructura de la Unidad Didáctica que aquí proponemos no solo se basa en los criterios orientadores para el diseño propuestos por autores como Couso, Badillo, Perafán y Auduriz (2005), Perafán y Auduriz (2005), sino en aprendizaje constructivista donde cada actividad en ella, está constituida cooperativamente. Teniendo presente en todo momento que el aprendizaje cooperativo -denominado entre iguales o aprendizaje entre colegas (el mejor maestro de un niño es otro niño) por algunos autores (Freire, 2012) - no consiste en un simple ordenamiento de asientos y decirles a los alumnos que se ayuden entre sí.

Pues, como sugiere Johnson, D., Johnson, R. y Johnson, E. (1999), se requiere de ciertos componentes esenciales que hacen que los esfuerzos cooperativos sean más productivos que los competitivos y los individualistas: la interdependencia positiva, la interacción promotora cara a cara, la responsabilidad

personal e individual, las habilidades interpersonales y de grupos pequeños, y el procesamiento grupal.

Consideramos que el diseño de la unidad didáctica es factible de realizar, porque no requiere de una gran inversión económica, se cuenta con los principales autores del proceso de enseñanza aprendizaje.

A nivel nacional e internacional se implementa este tipo de metodología constructivas de enseñanza, entre tantas podemos mencionar, las que considero a mí criterios son las más cercanas al trabajo propuesto:

- Mendoza (2013) experimenta una Unidad Didáctica, diseñada siguiendo los criterios de Couso et al (2005), para realizar un análisis de los errores de los estudiantes de secundaria del Colegio Rigoberto López Pérez de la ciudad de Managua, en la deducción de las propiedades de la desviación típica, bajo un enfoque de investigación acción. Concluye que la mayoría de errores son de carácter aritméticos y algunos son del tipo didáctico, para superar estas dificultades realiza otra propuesta de Unidad didáctica fortalecida con la experiencia de la implementación de la U.D.
- Siguiendo la misma línea, Potosme (2013) realiza una Unidad Didáctica bajo los criterios de Couso et al (2005) para realizar un análisis de las Conceptualizaciones de los estudiantes sobre la desviación típica en el Colegio Rigoberto López Pérez de la ciudad de Managua, bajo un enfoque de investigación acción. Concluye que la unidad didáctica implementada favorece positivamente la evolución de los cambios conceptuales respecto al concepto de desviación típica.
- Por otro lado Flores (2010), realizar una Unidad didáctica, bajo la teoría de Antúnez (1992) y Escamilla (1993), esta propuesta Metodológica para la Enseñanza de la Integral Definida, utiliza entornos informáticos con estudiantes de la carrera de Administración de Empresas en la Universidad de Regiones Autónoma de la Costa Caribe nicaragüense.

Este es un estudio del tipo descriptivo sobre las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida, para ello observa el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes y aplica algunos instrumentos escritos para realizar su análisis y propuesta. Donde sobresale el obstáculo para resolver problemas respecto a temas contextualizados a la economía y la razón que encuentra, es la carencia de conocimientos previos sobre funciones de ingreso, costo, utilidad, costo marginal, etc. Advierte sobre las dificultades en los cálculos respecto a integrales definidas al no tener conocimientos sólidos de álgebra.

Al finalizar propone una unidad didáctica, sustentada en actividades que se resuelven con la ayuda del programa *MAPLE* (Mathemathic Pleasure), el cual fue diseñado por Canadienses y está orientado a la resolución de problemas Matemáticos, capaz de realizar cálculos simbólicos, algebraicos y de álgebra computacional.

- A nivel internacional tenemos a Linares (2013), realiza una propuesta de Unidad didáctica con 10 sesiones para su desarrollo, su propuesta se basa en enseñanza constructivistas, utilizando ampliamente el trabajo cooperativo para desarrollar competencias. Realiza su diseño después de analizar exámenes finales, pruebas diagnósticas y dos encuestas a los estudiantes de segundo año de bachillerato en la ciudad de Almería España.

2.3. Propósitos

1. Diseñar una Unidad Didáctica para el proceso de enseñanza aprendizaje del contenido de integral definida en la asignatura de Matemática Aplicada, con los estudiantes de segundo año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas, turno matutino de la UPOLI, en el primer semestre del año 2017.
2. Implementar el diseño de Unidad Didáctica para el proceso de enseñanza aprendizaje del contenido de integral definida en la asignatura de Matemática Aplicada, con los estudiantes de segundo año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas, turno matutino de la UPOLI, en el primer semestre del año 2017.

2.4. Perspectiva Teórica

Una vez expuesto los motivos y justificación de este trabajo, expondremos la teoría de Unidades Didácticas empezando sobre con el concepto de esta, luego los criterios orientadores para el diseño, el trabajo cooperativo para la organización de la clase, uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y finalizamos con notas históricas del cálculo integral.

2.4.1. Unidad Didáctica

Desde las diferentes corrientes filosóficas, en las que se sitúa la Didáctica de la Matemática, destacamos la importancia de la Unidad Didáctica o elaboración de secuencias de enseñanzas aprendizajes en el proceso educativo, por constituir la concreción de qué y cómo se va a enseñar (Couso et al., 2005).

Según Godino, Batanero y Font (2004), el diseño de unidades didácticas implica la toma de decisiones en distintos ámbitos de concreción, hasta culminar en un documento en el que el profesor concreta los objetivos, contenidos, actividades, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y selección de estrategias metodológicas. Este documento será un instrumento de planificación y gestión del trabajo en clase con los alumnos, en un período corto de tiempo y se centra en un contenido matemático que

tiene una cierta unidad temática, y que organiza el tratamiento de un cierto tipo de problemas en el nivel educativo correspondiente.

Por otro lado Áreas (1993) expresa que: la elaboración de las unidades didácticas, constituye un proceso de investigación de los profesores sobre su propia práctica, específicamente investigación acción.

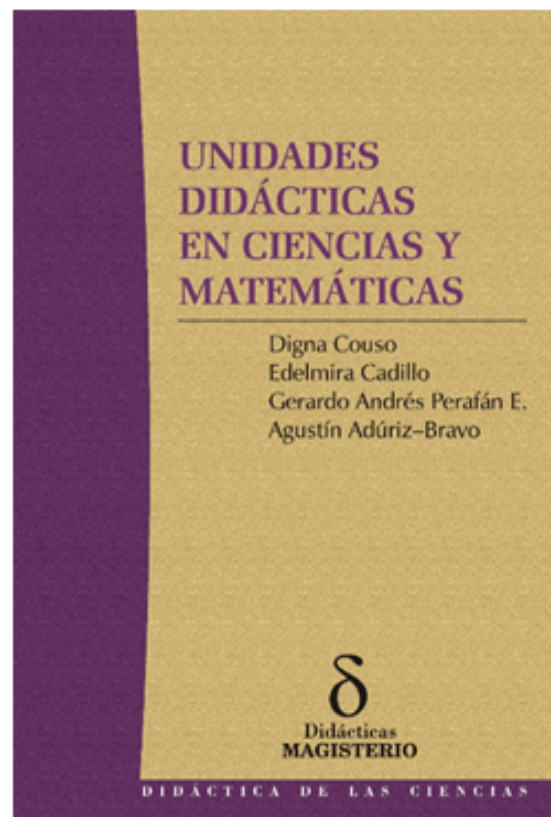
Las unidades didácticas cobran gran importancia práctica, al dar respuesta a las nuevas propuestas curriculares basadas en puntos de vistas constructivistas, del aprendizaje y de la enseñanza, donde el estudiante es el constructor de su conocimiento y el maestro el promotor de esto. Además se le pide al profesorado tener amplia autonomía para tomar decisiones curriculares, ello no excluye la utilidad de materiales didácticos y libros de texto ya diseñados, pero cualquier material deberá ser readaptado y completado para poder dar respuesta a las necesidades detectadas en cada aula.

Evidentemente tenemos que dejar claro que la puesta en práctica de elaboración de unidades, exige cambios en las condiciones materiales de trabajo del profesorado (mayor tiempo disponible para estas tareas, un mayor esfuerzo de coordinación, seguimiento y realización del trabajo de diseño, desarrollo y evaluación de las unidades, mayor discusión sobre los informes finales, etc.). Pero también es cierto, que requiere un cambio en los valores, metas y actitudes profesionales de muchos profesores.

2.4.2. Criterios Orientados para el Diseño de la U.D

Para planificar y diseñar nuestra unidad didáctica sobre el contenido de integral definida, seguiremos los criterios orientadores para la toma de decisiones según plantean Couso et al. (2005).

1. **Criterios para la definición de los objetivos.** Tenemos claro que lo más importante no es la redacción correcta y técnica de las finalidades, sino tomar conciencia y reflexionar sobre las intenciones que perseguimos en el desarrollo de la enseñanza-aprendizaje de la integral definida mediante la Unidad Didáctica.



Primero reflexionamos sobre qué aprenderán los alumnos, cuáles debían ser los objetivos más relevantes, cuáles eran imposibles de desarrollar, y a la vez los comparamos con los propuestos en el programa de asignatura. Posteriormente los contenidos y objetivos los reelaboramos desde el punto de vista del estudiante.

2. **Criterios para la selección de contenidos.** Nuevamente, mediante una especie de torbellino de ideas, expusimos qué contenidos consideramos deben ser desarrollados en esta unidad didáctica sobre integral definida. De tal discusión surgió una primera lista de ellos que luego clasificamos como conceptuales, procedimentales o actitudinales. Cotejamos este listado con los propuestos en el programa de asignatura y sílabo, posteriormente los reelaboramos en función de su significatividad científica y social.
3. **Criterios para la selección y secuenciación de las actividades.** Si bien es cierto que se enseña y se aprende a través de actividades, para nosotros lo relevante en este punto no es ofrecer un listado de tareas a desarrollar sin ningún tipo de organización interna, sino el proceso diseñado.
4. **Criterios para la selección y secuenciación de las actividades.** Si bien es cierto que se enseña y se aprende a través de actividades, para nosotros lo relevante en este punto no es ofrecer un listado de tareas a desarrollar sin ningún tipo de organización interna, sino el proceso diseñado.

Por las razones antes expuestas, prestamos especial atención al modelo organizativo que subyace a la secuenciación, tipos de tareas y actividades identificadas. De este modo advertimos y destacamos los siguientes rasgos respecto a la jerarquía de estas:

- Actividad Inicial. A través de ella elaboramos una primera representación de los objetivos de nuestro trabajo e identificamos los diversos puntos de partidas, todos dignos de ser tomados en cuenta.
- Actividades para promover la evolución de los modelos iniciales, de introducción de nuevas variables, de identificación de otras formas de observar y de explicar, de reformulación de los problemas.
- Actividades de síntesis, de elaboración de conclusiones, de estructuración del conocimiento. Aquí planteamos tareas en las que debe reconocer los conceptos estudiado y elaborar esquemas, mapas conceptuales y resúmenes para compartirlo mediante exposiciones con el resto de la clase u otros auditorios.
- Actividades de transferencia a otros contextos, de generalización. Para lograr que los estudiantes transfirieran los aprendizajes adquiridos (con las tareas de iniciación, con las de evolución de los

modelos iniciales y con las de síntesis) a otros núcleos de experiencias, incorporamos situaciones sobre economía, a saber, Coeficientes de desigualdad para la distribución del ingreso en una población; maximización de la utilidad con respecto al tiempo; superávit del consumidor, del productor y Curvas de aprendizaje.

5. **Criterios para la selección y secuenciación de las actividades de evaluación.** Primeramente nos planteamos las preguntas: cuándo se va evaluar a los estudiantes (si durante el desarrollo de la unidad o bien hasta el final), qué aspectos se van a valorar (la memorización de datos, la comprensión, la aplicación del conocimiento, las habilidades y destrezas, las actitudes, relaciones sociales) y cómo se va a realizar la comprobación de los aprendizajes (qué pruebas o instrumentos usaremos).

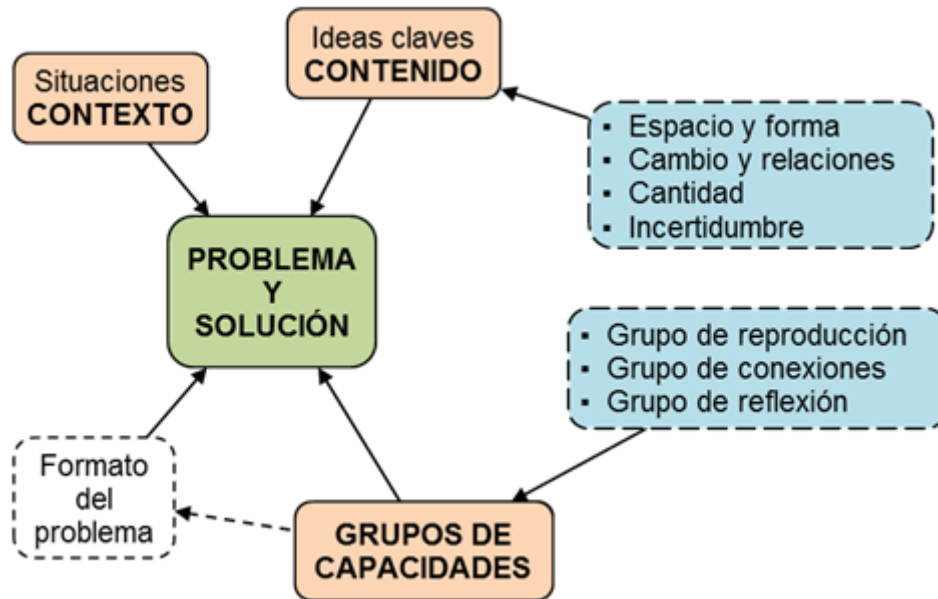
Para dar respuestas a estas cuestiones se realizó una evaluación inicial con la actividad de iniciación para que nuestros alumnos reconozcan sus propios puntos de partida, y para que nosotros logremos entender la “lógica” del estudiante. También haremos una valoración durante el proceso a través del diario del docente, para que los educandos reconozcan las causas de sus dificultades, reflexionen respecto a estas y puedan superarlas. Por último, aplicaremos un examen final, pero antes serán consensuados los aspectos a evaluar, para ello deberán responder a un cuestionario anónimo.

6. **Criterios para la organización y gestión del aula.** Ahora llegamos a una tarea importante, la que justifica la existencia misma de nosotros los docentes, y la cuestión fundamental de mejora: el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula. Después de todo, nuestros esfuerzos están orientados a incrementar la calidad de la docencia en la clase.

Dado que consideramos haber incorporado actividades “ricas” en nuestra unidad, debemos velar que una buena gestión en el aula permita que éstas no cambien. Por el contrario, una pésima gestión en la clase puede llevarnos a trabajar con tareas que bien podemos llamar “pobres”, así como en ocasiones una excelente gestión puede hacer muy provechosas aquellas que inicial mente no lucían como tal.

También, tomamos en cuenta las particularidades que tienen cada grupo de clase, la readaptación que en estos casos debemos hacer al diseño (que no es más que una propuesta, una hipótesis de trabajo que será confirmada o rechazada según lo que suceda en el aula) y los diferentes ritmos de aprendizaje.

Finalmente, se tiene una estructura de unidad didáctica cimentada no solo en los criterios orientadores para la toma de decisiones del diseño, propuestos por Couso et al. (2005), sino que se ha construido en base a la organización del área de evaluación según OCDE (2006):



2.4.3. Aprendizaje Cooperativo

Según Morales (2007), “saber trabajar en equipo es una competencia profesional que no se va a aprender si no se ejercita y evalúa durante el proceso de enseñanza-aprendizaje”. Desde esta perspectiva el aprendizaje cooperativo cobra gran importancia y demanda que los docentes dediquen tiempo a trabajar y supervisar estos aspectos.

El Aprendizaje Cooperativo es un término genérico usado para referirse a un grupo de procedimientos de enseñanza, que parten de la organización de la clase en pequeños grupos mixtos y heterogéneos donde los alumnos trabajan conjuntamente de forma coordinada entre sí para resolver tareas académicas y profundizar en su propio aprendizaje, esta forma de trabajo hace que el alumno se responsabilice del conocimiento de los demás y no compiten entre ellos, sino que se ayudan unos a los otros. Pero como bien expone Peña (2010), no hay que entender el aprendizaje cooperativo como una forma que permite a los docentes tener menos trabajo, pues el profesor renuncia a exponer ciertos contenidos, para que los propios estudiantes los aprendan, pero la tarea de preparación, guía de la sesión, evaluación de los resultados, las competencias básicas y el desarrollo de la propia sesión, son elementos que debe regular.

Uno de los precursores de este nuevo modelo educativo fue el pedagogo norteamericano John Dewey, quien promovía la importancia de construir conocimientos dentro del aula a partir de la interacción y la ayuda entre pares en forma sistemática. Por otro lado dos autores de referencia, los hermanos David y Roger Jonhson, ambos psicólogos sociales, también promovieron este tipo de aprendizaje y lo han definido como aquella situación de aprendizaje en las que los objetivos de los participantes se hallan estrechamente vinculados, de tal manera que cada uno de ellos “sólo puede alcanzar sus objetivos si y

sólo si los demás consiguen alcanzar los suyos”.

Para lograr aprendizaje cooperativo es necesario articular los siguientes elementos básicos propuestos por Johnson, Johnson y Holubec (1994):

- La interdependencia positiva: puede definirse como el sentimiento de necesidad hacia el trabajo de los demás. Cuando los miembros del grupo perciben que están vinculados entre sí para realizar una tarea y que no pueden tener éxito a menos que cada uno de ellos lo logre. Si todos consiguen sus objetivos, se logrará el objetivo final de la tarea.
- La interacción “cara a cara” o simultánea: los estudiantes tienen que trabajar juntos, “aprender con otros” (Prieto, 2007: 49), favoreciendo, de esta manera, que compartan conocimientos, recursos, ayuda o apoyo.
- La responsabilidad individual: cada miembro, individualmente, tiene que asumir la responsabilidad de conseguir las metas que se le han asignado. Por tanto, realmente, cada persona es, y debe sentirse, responsable del resultado final del grupo. Prieto (2007: 45) señala que la responsabilidad individual “implica, por un lado, que cada uno sea responsable de contribuir de algún modo al aprendizaje y al éxito del grupo. Por otro se requiere que el estudiante individual sea capaz de demostrar públicamente su competencia”.
- Las habilidades sociales: necesarias para el buen funcionamiento y armonía del grupo, en lo referente al aprendizaje y también vinculadas a las relaciones entre los miembros. Los roles que cada persona vaya ejerciendo en el equipo (líder, organizador, animador, el “pasota”(el freso o lechuga), etc.), su aceptación o no por parte del resto de compañeros, la gestión que hagan de los posibles conflictos que surjan, el ambiente general que existe en el mismo, son temas que los estudiantes tienen que aprender a manejar.

Las actividades diseñadas en la U.D sobre la integral definida, tienen en cuenta los cuatro factores propuestos por Johnson, Johnson & Holubec (1994):

- Tener una planificación previa: objetivos previstos, composición de los grupos, asignación de roles, distribución en el aula, etc.
- Explicar al alumnado en qué consiste la actividad académica.
- Coordinar y supervisar la conducta de los alumnos, interviniendo cuando sea necesario.
- Preparar actividades posteriores y evaluar.

2.4.4. Uso de la Tecnología de la Información y Comunicación (TIC)

En un mundo en continuos y acelerados cambios, donde las nuevas tecnologías ocupan un lugar privilegiado, se hace necesario estar actualizados y propiciar el manejo de recursos tecnológicos en las aulas universitarias.

Dialogar sobre las TIC es aludir a los medios electrónicos, a la televisión por satélite y cable, a la telefonía celular, a las computadoras y los programas informáticos que facilitan el acceso a las redes, esencialmente porque los avances tecnológicos, han dado al computador un protagonismo como recurso pedagógico, generando un rotundo cambio, al permitir desarrollar actividades en donde se pueda tener acceso a diferentes fuentes de información. En particular en Matemática las posibilidades de enseñanza y aprendizaje son superiores ya que se puede acceder a diferentes programas de aplicaciones, que permiten visualizar la representación geométrica, por ejemplo de objetos abstractos, reducir tiempo en la ejecución de grandes problemas de cálculo, además de motivar al estudiantado.

No obstante, es necesario que el docente tenga dominio de estas herramientas y que planifique de manera responsable y eficiente los contenidos, respecto a esto Lupiáñez y Codina (2004) expresan que: “Ordenadores, internet, calculadora y otro tipo de recurso tecnológico poseen un gran potencial para la educación, y para la educación matemática en particular. Pero no debe usarse ese potencial para llevar al aula de matemática todo aquello que sorprende por su versatilidad; es necesario planificar con detalle qué uso queremos darle”.

Un aporte del uso de las TIC, es que el docente deja de ser fuente de todo conocimiento y pasa a tomar un papel de guía-orientador, proporcionándole al alumnado las herramientas que necesitan para explorar y elaborar nuevos conocimientos y destrezas (Salinas 1998).

Por otro lado consideramos que “las TIC otorgan múltiples oportunidades y beneficios: favorecen las relaciones sociales, el aprendizaje cooperativo, el desarrollo de nuevas habilidades, nuevas formas de construcción del conocimiento y el desarrollo de las capacidades de creatividad, comunicación y razonamiento” (Moya, 2009, p.8).

El contenido sobre integrales definidas suele ser difícil de explicar si sólo se utiliza la pizarra tradicional, por eso en las actividades de la U.D, se integrará el uso de las TIC por medio de la computadora, red social Facebook, celular y calculadora. Además se utilizará programas informáticos para la visualización y resolución de integrales como el programa de Geogebra, symbolab y Malmath estos programas son de licencia comercial gratis, que no requieren conexión a internet.

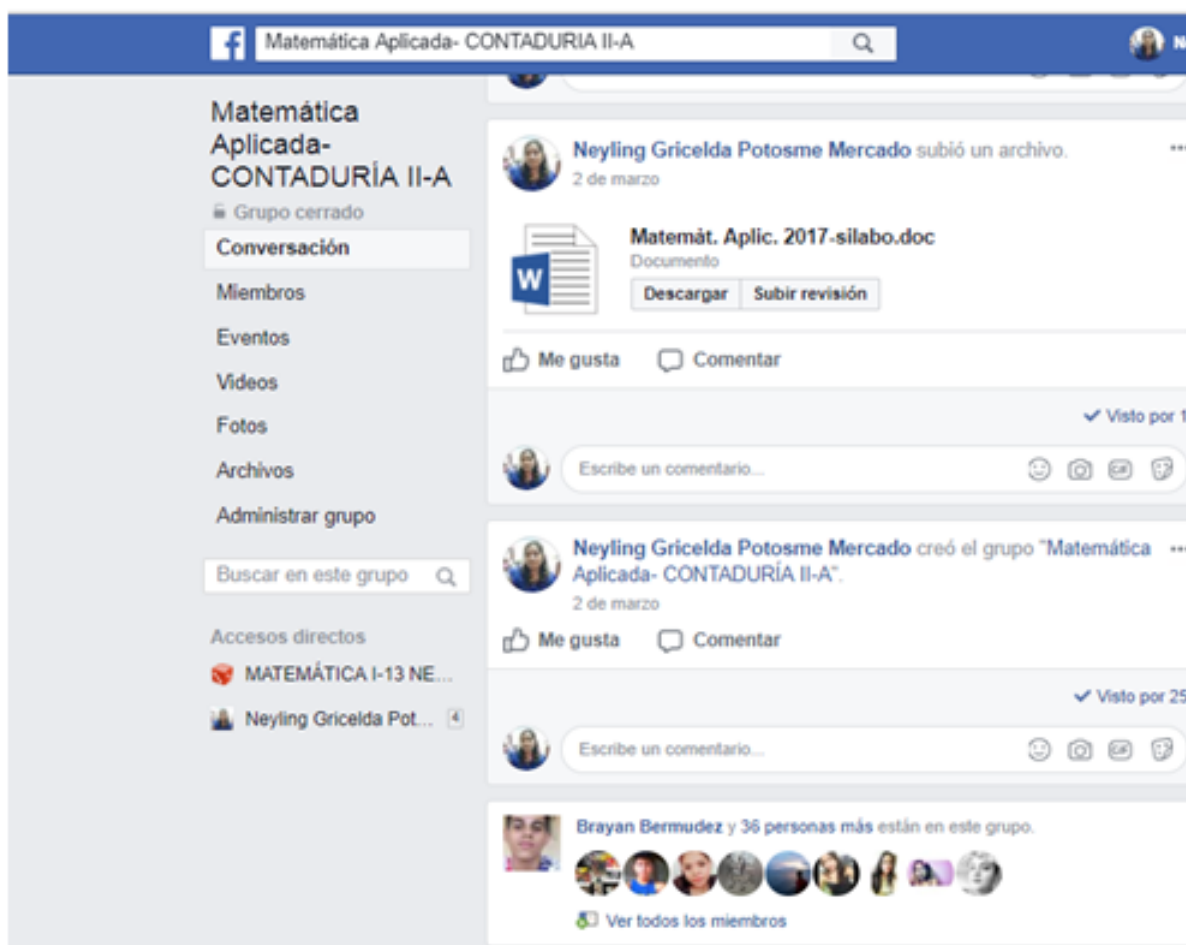


Figura 2.1: Grupo de Facebook, para retroalimentación de las clases.

2.4.5. Notas Históricas del Cálculo Integral

El origen del Cálculo integral, está ligado al concepto de área, en la antigua Grecia, los grandes matemáticos idearon un proceso mediante el cual podían hallar el área de cualquier figura, siempre y cuando ésta pudiese ser dividida en otras figuras geométricas más elementales (como triángulos), esta técnica se llamó método de Exhaución de Eudoxo (370 a.C); esta es la primera técnica sistemática documentada capaz de determinar integrales.

Este método fue usado y mejorado por Arquímedes (287-212 a. C), obtuvo resultados importantes como el área encerrada por un segmento parabólico. Método semejante fueron desarrollados en China alrededor del siglo III por Liu Hui, que los uso para encontrar el área del círculo. Más tarde Zu Chongzhi, determinó el volumen de la esfera. En el Siddhanta Shiromani, un libro de astronomía del siglo XII del matemático indio Bhaskara II, se encuentran algunas ideas de cálculo Integral.

En el siglo XVI, resurgieron los problemas del cálculo de áreas, Johann Kepler calcula el volumen de determinadas vasijas obtenidas a partir de la revolución de segmentos de cónicas. Un círculo está

formado por una infinidad de triángulos con vértice común en el centro. Luego aparecen los trabajos de Bonaventura Cavalieri (Milán, 1598- Bolonia, 1647) con su principio; si dos cuerpos tienen la misma altura y además tienen igual área en sus secciones planas realizadas a una misma altura, poseen entonces igual volumen, argumentando este principio con su método de los indivisibles; el cual estudia las magnitudes geométricas como compuestas de un número infinito de elementos, o indivisibles, que son los últimos términos de la descomposición que se puede hacer. La medida de las longitudes, de las superficies y de los volúmenes se convierte en efectuar la suma de la infinidad de indivisibles: es el principio del cálculo de una integral definida.

Siguiendo esta idea en 1644 Evangelista Toricelli demostró en su obra *De sólido hiperbólico acuto*; que la rotación de curvas de longitud infinita puede producir sólidos de volumen finito. El resultado llegó a nuestros días con el nombre de Trompeta o Cuerno de Gabriel, el cual es finito e igual al volumen de un cilindro de altura a y radio $\frac{1}{a}$. En nuestro lenguaje actual lo expresaríamos así:

$$\pi \int_a^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \frac{1}{a}$$

Se trata del primer caso en que aparece una integral impropia. Esta misma obra incluye otro trabajo titulado *De infinitis hyperbolis*, donde se encuentra el primer teorema general del cálculo, bien que en términos geométricos, y que hoy expresamos por la fórmula:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Por otro lado, Pierre de Fermat (1601-1665) estudió las curvas geométricas de la forma ¿cómo se puede obtener la cuadratura de diferentes familias de curvas?, que es lo mismo, cómo se calcula el área bajo la curva. Así, calculó el área bajo la curva $y = x^n$ en el intervalo $[0, a]$ empleando un procedimiento de troceado del intervalo en forma de progresión geométrica y trabaja en los métodos diseñados para determinar los máximos y mínimos, acercándose casi al descubrimiento del Cálculo Diferencial.

En 1670 el matemático Isaac Barrow (1630-1677) descubre un método general para calcular tangentes; puso en conexión los conceptos de derivada e integral, el segundo anterior al primero, al darse cuenta de que la derivada de la función que proporciona el área bajo una curva es la función misma que representa dicha curva, aunque parece que no fue consciente de su descubrimiento.

En torno a estos problemas, en el siglo XVII, surgió un grupo de Matemáticos de tanto talento y tanta producción que hizo llamar al diecisiete, el siglo de los Genios. Fue en este tiempo de forma independiente que el inglés Isaac Newton (1642 - 1727) y el alemán Gottfried Leibniz (1646-1716) descubrieron el Cálculo integral y resolvieron el problema de área que había inquietado a las más exuberantes mentes

de matemáticos por más de 2 500 años.

Newton concibió el llamado Método de las fluxiones, considerando a la curva como la trayectoria de un punto que fluye; denomina “momentum” de la cantidad de fluente al arco mucho muy corto, recorrido en un tiempo excesivamente pequeño, llamando la “razón del momentum” al tiempo correspondiente es decir, la velocidad. Bajo la asesoría de Isaac Barrow mostró la relación inversa entre el cálculo de áreas y el cálculo de las tangentes. Otro de los resultados es la reciprocidad que existe entre las operaciones de derivación e integración de funciones como herramientas que permite analizar y que se puede generalizar al estudio de funciones suaves.

Leibniz llega a los mismos resultados al estudiar sucesiones de sumas y diferencias de números de la forma ¿cómo se puede calcular el valor de una suma infinita?. Al contemplar la sucesión infinita de valores de una variable, por ejemplo la variable x , la diferencia entre dos valores sucesivos era precisamente el dx , que era infinitesimal o despreciable comparado con los valores de x . Al tomar la suma de tales diferencias, denotada por $dx \int$ (el símbolo $\int$ es una ‘s’ larga y lo extrajo de la palabra latina suma), obtiene la variable completa. Con estas ideas desarrolló un procedimiento algorítmico para calcular la longitud de una curva, la superficie de revolución, etc.

El aporte de Leibniz, fue de proveer a las Matemática de conceptos más claros, notación y terminología formal que permitió una lectura factible, para el tratamiento del problema de las derivaciones e integración permitiendo, así el nacimiento del análisis infinitesimal.

En el siglo XVIII, Leonar Euler (1707-1783) fundó la ciencia de los infinitésimos sobre una teoría formal de funciones, en especial las exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. De alguna manera esto significó la ruptura entre un cálculo de variables (físicas o geométricas), como inicialmente empezó, y un cálculo de funciones numéricas. De esa forma Cauchy (1789-1857) construyó una teoría de integración para funciones continuas y acotadas (noción de límite de Cauchy), quedando asentado de forma rigurosa el Cálculo integral. Pero la integral de Cauchy solo era válida para funciones continuas en intervalos cerrados y acotados.

Esto deja fuera muchas funciones, así que fue Bernhard Riemann (1826-1866) definió la integral que lleva su nombre, ampliando la clase de funciones integrables a las funciones continuas salvo en un número de discontinuidades, pero la relación entre derivación e integración deja de ser válida en los puntos de discontinuidad. De esta forma se llega a un punto en que se estudia el significado del objeto integral y no sobre los resultados que el proceso de integrar proporciona.

Finalmente para el siglo XX, Lebesgue (1875-1941) definió la integral que lleva su nombre generalizando la noción de la integral de Riemann y extendiendo el concepto de área de una curva para incluir funciones discontinuas. Éste es uno de los logros del análisis moderno que expande el alcance

del análisis de Fourier.

2.5. Escenario

El escenario para la implementación de la Unidad Didáctica sobre la integral definida se efectuó en la sección *I – 13* con los estudiantes de segundo año, turno matutino de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas de la UPOLI, durante el primer semestre del año 2017.



Figura 2.2: Aula I-13

2.6. Metodología

La metodología empleada a lo largo de las siguientes once sesiones está basada en un aprendizaje cooperativo e individual, donde se mezclaran estos dos tipos de aprendizajes de acuerdo a lo propuesto. Uno de los objetivos es que el alumno sea el principal autor de la construcción de su propio aprendizaje. Para ello, tomamos los conocimientos intuitivos que el alumno posee para aproximar a los conceptos, luego se formaliza y se socializa. También usaremos las clases con monitores (previamente seleccionados) los días viernes como herramienta de refuerzo y aprendizaje entre iguales. El diseño de la U.D para la enseñanza de la integral definida, parte del cálculo del área de figuras geométricas en el dominio de la geometría euclidiana, y después se aborda el cálculo del área bajo una curva utilizando la geometría analítica. Tras definir la integral como un límite y desvincularla del área, se aborda el teorema fundamental del cálculo. Posteriormente se aclara el caso, cuando la integral definida representa área y se continua estudian las aplicaciones. Como apoyo a la resolución de las tareas, se diseñaron algunos applets en GeoGebra.

2.7. Plantilla de Planificación de la Unidad Didáctica

Al continuar la lectura de este apartado encontrará la ficha de programación de la unidad didáctica, la cual contiene información general del grupo y docente, introducción, objetivos, contenidos y evaluación. Posteriormente aparece el desarrollo de la unidad sesión por sesión y por último presentación de la Unidad Didáctica.

2.7.1. Ficha de Presentación de la Unidad Didáctica

TÍTULO UNIDAD: INTEGRAL DEFINIDA

AUTOR/ES: Neyling Potosme Mercado

CLASE Y EDAD: Matemática Aplicada, 17-19 años

TIPO DE CURSO: Regular-mixto

No. DE SESIONES: 11

DURACIÓN DE LAS SESIONES: 90 minutos

INTRODUCCIÓN A LA UNIDAD

En esta unidad didáctica se construye el concepto de integral definida apoyado con el aprendizaje cooperativo. A lo largo de la secuenciación de las once sesiones, nos centramos en abordar los contenidos enfatizando en el uso en contexto, es decir saber el concepto de integral definida para utilizarlo puntualmente a problemas relacionados con el mundo de los negocios y economía. Evidentemente el matemático siempre estuvo presente y en la primera sesión se utilizó el contexto deportivo para motivar el inicio del proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida.

Comenzamos el proceso educativo con la actividad de iniciación, la cual se realiza en una sesión de 90 minutos, en esta se establecen los puntos de partida de los estudiantes sobre la integral definida y se revisan los conocimientos previos. También se establece la forma de trabajo y los objetivos. Después se ejecuta la actividad de consenso y justificación del concepto, aquí se toma tres sesiones de clases (2,3 y 4) para lograr la culminación de tal actividad.

Luego se realiza la actividad de síntesis del concepto, en una sesión (clase 5) de 90 minutos. En esta se confirma el dominio pleno del contenido abordado, a través de la elaboración de guía de ejercicios, mapas conceptuales, y resúmenes que luego serán compartidos con el resto del grupo mediante exposiciones (técnica de trabajo cooperativo: aprendiendo juntos). Posterior a esta se trabaja la actividad de ampliación y transferencia a otros contextos, realizadas en cuatro sesiones (6 a la 10). Finalizamos con la actividad de evaluación en una sesión de clase (11).

OBJETIVOS

Al finalizar la unidad los estudiantes tendrían que haber desarrollado la capacidad de:

1. Comprender el concepto de integral definida como el área bajo una curva y entre dos curvas en el cálculo de integrales definidas y problemas de economía y administración relacionados con esta temática.
2. Aplicar el concepto de la integral definida en la solución de problemas relacionados con el mundo de la administración y economía.

3. Participar en actividades donde desarrolle habilidades y pensamientos creativos, mostrando actitudes al trabajo científico, tales como visión crítica, necesidad de verificación, interés por el trabajo cooperativo, valoración de la exactitud y los distintos tipos de razonamiento para la apertura de nuevas ideas que contribuya al alcance de logros personales y al fortalecimiento de la autoestima en el ámbito familiar, universitario y comunitario.

CONTENIDOS

Integral definida, teorema fundamental del cálculo, área como integral definida y aplicaciones de la integral definida (maximización de la utilidad con respecto al tiempo, superávit del consumidor y productor, coeficiente de la desigualdad para la distribución de ingresos y curva del aprendizaje).

EVALUACIÓN

Desde el principio nos propusimos realizar una evaluación inicial, otra durante el proceso mismo y la prueba final; esta última, por la naturaleza de nuestra unidad didáctica debe ser un híbrido entre autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación. Ambicioso, pero así lo hemos pensado. Y queremos consensuarlo, bajo el contrato didáctico, con el estudiante.

Criterios de evaluación final

1. Analizar la capacidad de modelar, resolver problemas de la administración y economía.
2. Utilizar el registro de representación algebraica y geométrica para determinación el área bajo la curva.
3. Comparar resultado del área geométricamente y el valor de la integral (algebraicamente).

Las tareas o instrumentos de evaluación con valor formador fueron las siguientes: Prueba inicial, formativa y final, cuestionario de opinión (anónimo).

2.7.2. Desarrollo de la Unidad Didáctica por Sesión

En este apartado se describe, cada sesión y sus finalidades, según la actividad a trabajar. También, especificamos los objetivos, tareas, formas de trabajo, tiempo y recursos didácticos.

2.7.2.1. Sesión 1

A través de esta sesión, dedicada a la actividad de iniciación, elaboramos una primera representación de los objetivos de nuestro trabajo. Aquí, facilitamos al alumno definir el problema mismo a estudiar bajo ciertos contextos. Pretendemos identificar los diversos puntos de partida, todos válidos, reuniendo

la información suficiente sobre los conocimientos previos del tema y los sentimientos hacia su aprendizaje, a través de actividades motivadoras que promuevan inferir o conjeturar problemas de investigación significativos.

Objetivos:

1. Determinar el área de una región del plano, usando fórmulas conocidas previamente.
2. Describir fórmulas o métodos que permiten calcular exactamente o aproximadamente el área de la figura.
3. Conocer el método de exahución.

Tareas	Interacción	Tiempo aproximado
1. Observan y comentan el grafico sobre resultado del club Barcelona.	En grupo de cuatro alumnos	05 minutos
2. Determina que representa el área sombrada de las dos primeras jornadas.		10 minutos
3. Calculan los puntos acumulados de las diez jornadas.		15 minutos
4. Analiza y determina que representan las barras sobre las ventas de un producto.		10 minutos
5. Calcula el total del producto por cajas vendidas durante los seis meses.		10 minutos
6. Reconocen y determinan el área adecuada para la figura o expresan método alternativo.		10 minutos
7. Comentan el método de exahución.		5 minutos
8. Socializan repuestas en la pizarra.		15 minutos
Total		90 minutos

RECURSOS.

- Pizarra y marcadores acrílicos.
- Data show.
- Laptop.
- Calculadora científica.
- Documento físico de la Unidad didáctica (Actividad de iniciación).

2.7.2.2. Sesiones: 2, 3 y 4

Estas sesiones se dedican a la solución de tareas que permitirán a los estudiantes reflexionar en forma cooperativa respecto a la consistencia de sus hipótesis y formas de razonamientos iniciales sobre el cálculo de áreas; enriquecer la visión misma del problema y reestructurar la forma de pensar, concebir y hablar del tema en cuestión. Prácticamente se construye el concepto de integral definida a partir de la idea de pasar al límite una suma cuando el número de sumandos tiende al infinito y simultáneamente cada uno de los sumandos tiende a cero. (Actividad II: **Consenso y justificación del concepto**).

Objetivos:

1. Construir el concepto de integral definida como límite.
2. Saber utilizar la regla de Barrow para calcular integrales definidas
3. Calcular integrales definidas de funciones continuas, usando regla de Barrow.

Determinar el área de una región del plano, usando fórmulas conocidas previamente.

Sesión 2

Tareas	Interacción	Tiempo aproximado
1. Analiza como calcular el área de la figura no regular del edificio a pintar.	En grupos de tres Alumnos	10 minutos
2. Construyen cuatro rectángulos inscritos de igual base en el área a pintar.		5 minutos
3. Completa la tabla sobre altura de los cuatro primeros rectángulos inscritos.		10 minutos
4. Completa la tabla sobre el área de los cuatro primeros rectángulos inscritos.		15 minutos
5. Aproxima el área a pintar usando la suma izquierda de Riemann.		15 minutos
6. Reflexiona sobre los resultados.		5 minutos
7. Determina el área a pintar, al aumentar el número de rectángulos de igual tamaño con ayuda del programa Geogebra (proyectado en la pizarra con ayuda de laptop).		15 minutos
8. Comunican a otros grupos los hallazgos.		15 minutos
Total		90 minutos

RECURSOS.

- Pizarra y marcadores acrílicos
- Data show
- Laptop
- Software de GeoGebra
- Calculadora científica.
- Documento físico de la Unidad didáctica(Actividad II: Consenso y justificación del concepto)

Sesión 3

Tareas	Interacción	Tiempo aproximado
1. Analiza otro método para calcular el área de la figura no regular del edificio a pintar.	En grupos de cuatro Alumnos	10 minutos
2. Construyen rectángulos circunscritos de igual base en el área a pintar.		5 minutos
3. Completa la tabla sobre altura de los cuatro primeros rectángulos circunscritos.		10 minutos
4. Completa la tabla sobre el área de los cuatro primeros rectángulos inscritos.		15 minutos
5. Aproxima el área a pintar usando la suma derecha de Riemann.		15 minutos
6. Reflexiona sobre los resultados.		5 minutos
7. Determina el área a pintar, al aumentar el número de rectángulos de igual tamaño con ayuda del programa Geogebra (proyectado en la pizarra con ayuda de laptop).		15
8. Compara y reflexiona sobre estos resultados y los encontrados por suma por defecto.		5
9. Comunican a otros grupos los hallazgos.		10
Total		90 minutos

RECURSOS.

- Pizarra y marcadores acrílicos
- Data show
- Laptop
- Software de GeoGebra
- Calculadora científica.
- Documento físico de la Unidad didáctica(Actividad II: Consenso y justificación del concepto)

Sesión 4

Tareas	Interacción	Tiempo aproximado
1. Comenta sobre los dos procedimientos para encontrar el área del problema principal, cuando n aumenta.	En grupos de cuatro Alumnos	10 minutos
2. Define la integral definida.		10 minutos
3. Plantea el teorema fundamental del Cálculo(Regla de Barrow)		10 minutos
4. Determina el área a pintar aplicando la regla de Barrow.		5 minutos
5. Analiza sobre las condiciones para usar la regla de Barrow.		5 minutos
6. Compara este resultado con los resultados de las sumas de Riemann por exceso y defecto del problema planteado inicialmente.		15 minutos
7. Reflexiona sobre los resultados.		5 minutos
8. Evalúa integrales propuestas aplicando la regla de Barrow.		20 minutos
9. Comunican a otros grupos los hallazgos en la pizarra.		10 minutos
Total		90 minutos

RECURSOS.

- Pizarra y marcadores acrílicos
- Data show
- Laptop
- Software de GeoGebra
- Calculadora científica.
- Documento físico de la Unidad didáctica(Actividad II: Consenso y justificación del concepto)

2.7.2.3. Sesión 5

En esta sesión trabajamos con las actividades de síntesis, orientadas a comprobar que el estudiante ya tiene la capacidad de extraer conclusiones e identificar las características del modelo reelaborado, y permitirle la esquematización y estructuración coherente de las distintas formas de resolución. Cabe mencionar que los plenarios realizados en la construcción del concepto harán más fácil esta tarea.

Objetivos:

1. Organizar la parte conceptual, vinculando los diferentes conceptos involucrados con la integral definida.
2. Diferenciar integral definida, indefinida y área como integral definida.
3. Entender cuando aplicar la regla de Barrow.

Tareas	Interacción	Tiempo aproximado
1. Reconocer los principales conceptos en el tema estudiado para identificar el de integral definida.	En grupos de cuatro Alumnos	10 minutos
2. Establece la diferencia entre la integral indefinida y definida en las situaciones didácticas propuestas.		10 minutos
3. Determina las condiciones en las que la integral definida representa área.		10 minutos
4. Evalúa integrales definidas aplicando la regla de Barrow.		25 minutos
5. Elabora un esquema o un resumen de sus aprendizajes respecto a la integral definida, para exponerlo en la clase.		15
6. Procesamiento y afinación grupal de los trabajos realizados en la pizarra.		20
Total		90 minutos

RECURSOS.

- Pizarra y marcadores acrílicos
- Data show
- Laptop
- Software de GeoGebra y Malmath.
- Calculadora científica.
- Documento físico de la Unidad didáctica (Actividad III: Síntesis del concepto).

2.7.2.4. Sesiones: 6 a 10

Esta sesión se dedica a la Actividad IV (**Aplicación y transferencia a otros contextos**). Aquí decidimos trabajar con las aplicaciones de la integral definida, tomando relevancia los problemas aplicados a la economía, así como su representación gráfica. Las situaciones propuestas posibilitan iniciar un nuevo proceso de aprendizaje y planteamiento de preguntas más complejas que las iniciales, a través de la exploración y reconocimiento de nuevas variables.

Objetivos:

1. Calcular áreas como aplicación de la integral definida.
2. Realizar un esbozo gráfico del recinto que delimita el área que se pretende calcular.
3. Aplicar el concepto de integral definida en problemas de economía y administración.
4. Reconocer la importancia histórica del concepto de integral definida en el desarrollo de la matemática y la humanidad.

Sesión 6

Tareas	Interacción	Tiempo aproximado
1. Resuelven problemas más complejos que el inicial, al realizar esbozo del gráfico del recinto que delimita el área que se pretende calcular.	En grupos de cuatro Alumnos	40 minutos
2. Determina áreas bajo una curva como aplicación de la integral definida. Plantee por lo menos dos formas alternativas para encontrar el área, en el caso que sea posible. Grafica primero, luego sombrea el área y plantea la o las integrales definidas involucradas		45 minutos
3. Revisan en el material de apoyo de la asignatura los casos del área situada entre la curva de una función que representa una función y el eje de las x.		5 minutos
4. Compara los resultados, al calcular áreas bajo una curva y la evaluación de la misma integral definida cuando no representa área.		20 minutos
5. Procesamiento grupal de las soluciones a los problemas planteados.		20 minutos
Total		90 minutos

RECURSOS.

- Pizarra y marcadores acrílicos
- Data show
- Laptop
- Software de GeoGebra y Malmath.
- Calculadora científica.
- Papel milimetrado y regla graduada.
- Documento físico de la Unidad didáctica (Actividad IV: Aplicación y transferencia a otros contextos).
- Material de apoyo de la signatura Matemática Aplicada.

Sesión 7

Tareas	Interacción	Tiempo aproximado
1. Resuelven problemas más complejos que el inicial, al realizar esbozo del gráfico del recinto que delimita el área que se pretende calcular.	En grupos de cuatro Alumnos	30 minutos
2. Determinan áreas entre curvas como aplicación de la integral definida.		30 minutos
3. Procesamiento grupal de las soluciones a los problemas planteados.		20 minutos
Total		90 minutos

RECURSOS.

- Pizarra y marcadores acrílicos
- Data show
- Laptop
- Software de GeoGebra y Malmath.

- Calculadora científica.
- Papel milimetrado y regla graduada.
- Lápiz de color.
- Documento físico de la Unidad didáctica (Actividad IV: Aplicación y transferencia a otros contextos).
- Material de apoyo de la signatura Matemática Aplicada.

Sesión 8

Tareas	Interacción	Tiempo aproximado
1. Resuelve problemas más complejos al determinar el costo total usando la integral definida.	En grupos de cuatro Alumnos	20 minutos
2. Grafica la función de costo total y señala el área que representa el incremento en el costo total, cuando el nivel de producción se incrementa.		10 minutos
3. Representa gráficamente el área entre curvas que representa la utilidad máxima, y la calcula como una aplicación de la integral definida.		45 minutos
4. Procesamiento grupal de las soluciones a los problemas planteados en la pizarra.		15 minutos
Total		90 minutos

RECURSOS.

- Pizarra y marcadores acrílicos
- Data show
- Laptop
- Software de GeoGebra y Malmath.
- Calculadora científica.
- Papel milimetrado y regla graduada.

- Lápiz de color.
- Documento físico de la Unidad didáctica (Actividad IV: Aplicación y transferencia a otros contextos).
- Material de apoyo de la signatura Matemática Aplicada.

Sesión 9

Tareas	Interacción	Tiempo aproximado
1. Resuelve problemas más complejos que el inicial, determina algebraicamente el punto de equilibrio de la oferta y demanda.	En grupos de cuatro Alumnos	20 minutos
2. Construye la gráfica de la función demanda y de oferta, ubicando el punto de equilibrio.		30 minutos
3. Identifica y sombrea el área del recinto que representa el superávit del consumidor y productor.		15
4. Calcula el área entre curvas que representa el ahorro de los productores y consumidores.		15
5. Procesamiento grupal de las soluciones a los problemas planteados.		10 minutos
Total		90 minutos

RECURSOS.

- Pizarra y marcadores acrílicos
- Data show
- Laptop
- Software de GeoGebra y Malmath.
- Calculadora científica.
- Papel milimetrado y regla graduada.
- Lápiz de color.

- Documento físico de la Unidad didáctica (Actividad IV: Aplicación y transferencia a otros contextos).
- Material de apoyo de la signatura Matemática Aplicada.

Sesión 10

Tareas	Interacción	Tiempo aproximado
1. Resuelve problemas más complejos que el inicial, al utilizar la curva de aprendizaje para calcular las horas hombre (integral definida) que nos llevará para producir un producto. 2. Representa gráficamente el incremento total en horas-hombre requerido para incrementar la producción de a a b.	En grupos de cuatro Alumnos	25 minutos
3. Determina el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorentz. Representar gráficamente.		25 minutos
4. Resuelve problemas aplicados a la economía al determinar la utilidad máxima.		20 minutos
5. Determina el área que representa la utilidad máxima.		5 minutos
6. Procesamiento grupal de las soluciones a los problemas planteados.		15 minutos
Total		90 minutos

RECURSOS.

- Pizarra y marcadores acrílicos
- Data show
- Laptop
- Software de GeoGebra y Malmath.
- Calculadora científica.
- Papel milimetrado y regla graduada.
- Lápiz de color.

- Documento físico de la Unidad didáctica (Actividad IV: Aplicación y transferencia a otros contextos).
- Material de apoyo de la signatura Matemática Aplicada.

2.7.2.5. Sesión 11

1. Dedicamos esta sesión a la evaluación. Tal y como se dijo en la sesión 1 (en la iniciación), aquí no solo queremos indagar sobre los puntos de partidas, sino que los propios estudiantes deben reconocerlos a través de la valoración de esta actividad, como una prueba inicial a fin de conocer la lógica del educando. Asimismo, mediante el diario de clases (del profesor mediante el relato abierto en un cuaderno y en formato de plantilla o ficha estándar) pretendemos obtener información sobre los obstáculos que los alumnos encuentran en su proceso de aprendizaje y que ellos mismos estén conscientes de cuáles son las causas de sus dificultades y cómo superarlas. Al mismo tiempo lo observado nos permitirá regular el proceso de enseñanza aprendizaje.
2. Por último, para realizar una evaluación final, como complemento del diario del profesor vamos a consensuar con el educando a través de un cuestionario de opinión de los alumnos: qué le ha parecido la clase, qué entendió muy bien, qué no le quedó claro y qué le gustaría se le evaluara en la prueba final.

Objetivo: Evaluar los conocimientos adquiridos sobre la integral definida.

Tareas	Interacción	Tiempo aproximado
1. Aclaración conjunta, en la pizarra, de dudas sobre tareas asignadas.	Individual	20 minutos
2. Contestar el cuestionario anónimo sobre la opinión de su aprendizaje.		10
3. Resolver la prueba de evaluación final.		60 minutos
Total		90 minutos

RECURSOS.

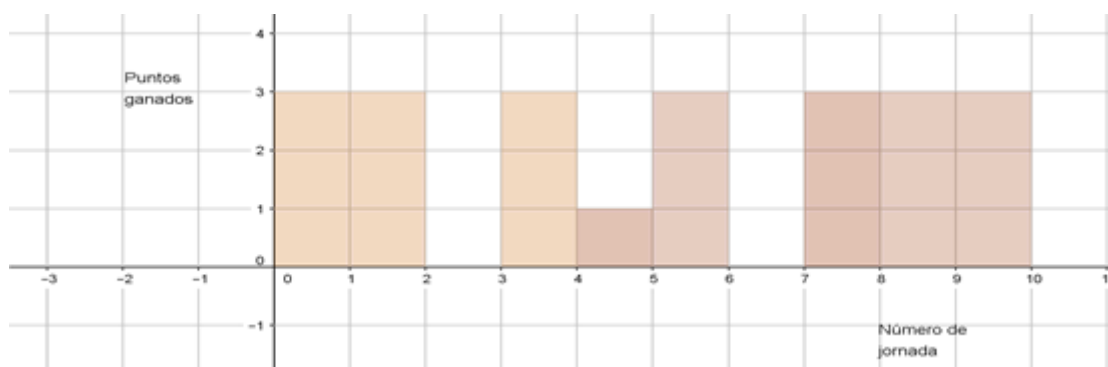
- Pizarra y marcadores acrílicos
- Hoja de prueba escrita
- Hoja de cuestionario anónimo.
- Calculadora científica.

- Papel milimetrado y regla graduada.
- Lápiz de color.

2.7.2.6. Presentación de los Materiales de la Unidad Didáctica

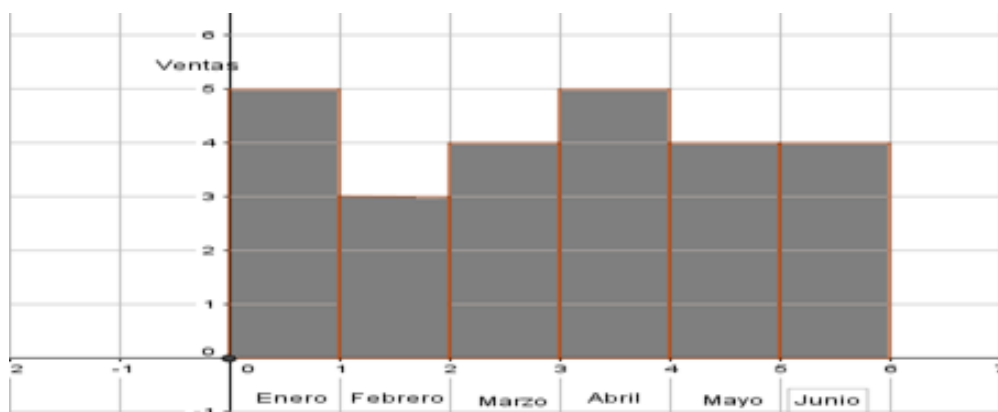
Actividad I (Iniciación, Sesión 1)

I. La siguiente gráfica muestra los resultados del club Barcelona a lo largo de las diez primeras jornadas de la liga 2016_2017.



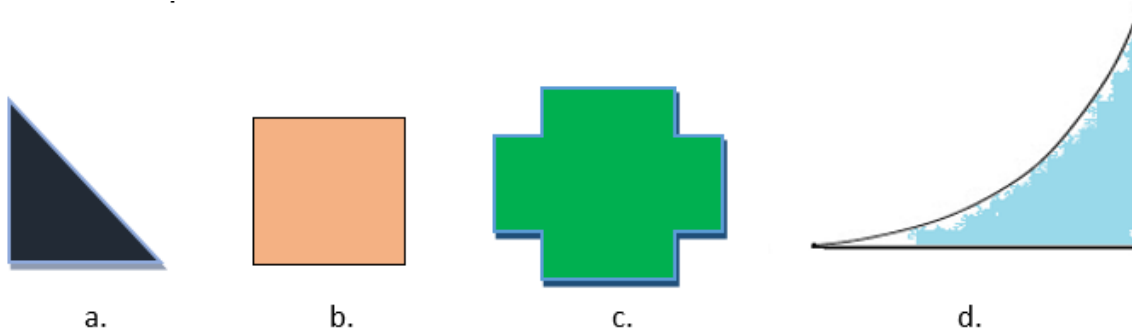
1. Observa y coméntala con tus compañeros.
2. ¿Qué representa el área sombreada de las dos primeras jornadas?
3. ¿Cuántos son los puntos acumulados a lo largo de las diez primeras jornadas?

II. La siguiente gráfica representa las ventas en miles de cajas de un producto durante los primeros seis meses del año.



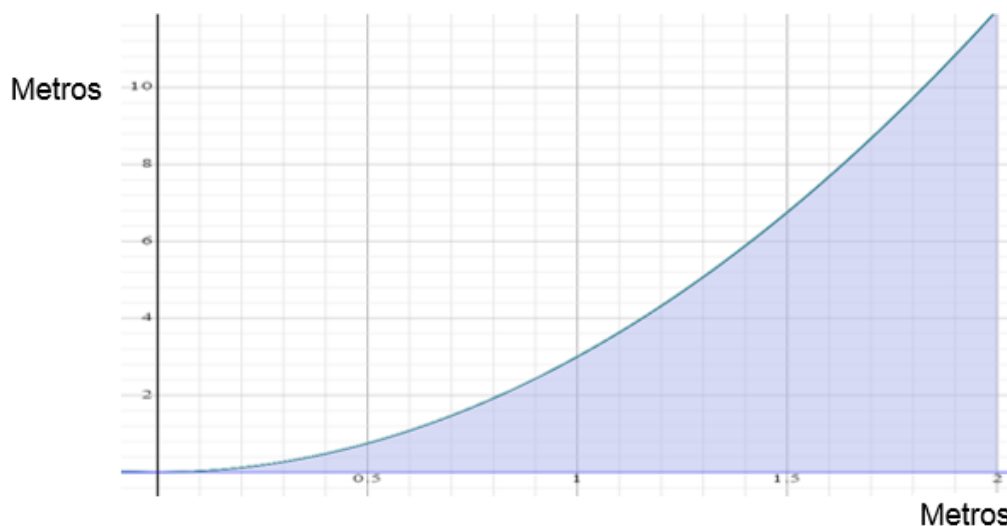
1. ¿Qué representa cada una de las barras?
2. ¿Qué representa el área sombreada de las dos primeras jornadas?
3. ¿Cuántas cajas en total del producto se vendió durante esos meses?

III. Escriba la fórmula para determinar el área de cada figura o exprese al menos el método para determinar.



Nota1: El método usado por los griegos para obtener áreas como la del ejemplo d, se le atribuye a Arquímedes (281_212 A.C). A este método se le llama **exhaución**.

Actividad II (Consenso y justificación del concepto, Sesión 2-4)



1. ¿Cómo podríamos calcular el área total, si esta figura no es regular?
2. ¿Podríamos hacer algunas aproximaciones? ¿cómo?

Con el desarrollo de esta actividad podremos dar respuesta al siguiente problema:

¿Cuánta área del edificio se va a pintar?

3. Probemos para cuatro rectángulos inscritos, de igual base. Señale en el en el plano anterior, los rectángulos que le quedaron.
4. Calculemos primero las alturas de los rectángulos.

Altura del primer rectángulo	$f(0) = 3(0)^2$	0
Altura del segundo rectángulo		
Altura del tercer rectángulo		
Altura del cuarto rectángulo		

5. Calculemos el área de los 4 rectángulos

Área del rectángulo	$\Delta x f(x)$	=
Área del primer rectángulo		
Área del segundo rectángulo		
Área del tercer rectángulo		
Área del cuarto rectángulo		
Sumatoria de todas las áreas		

Una manera sencilla de estudiar el área a pintar, es encontrando una aproximación por defecto de las áreas de los rectángulos inscritos a la curva. Observa que queda espacio que no es cubierto por los rectángulos. A la suma resultante se le llama sumas de Riemann. En este caso particular se llama suma izquierda de Riemann de la función

$$f(x) = 3x^2; \text{ en } [a, b] \text{ con } n = 4$$

y

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = 0.5$$

tomando a

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.5, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.5$$

donde la suma de Riemann es:

$$\begin{aligned} & f(0) \Delta x + f(0.5) \Delta x + f(1) \Delta x + f(1.5) \Delta x \\ &= 0(0.5) + 0.75(0.5) + 3(0.5) + 6.75(0.5) \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos 5.25 área aproximadamente.

6. ¿Cómo se podría mejorar la aproximación antes calculada? Explique.
7. Observa la gráfica del data show en la pizarra, al aumentar n para las sumas inferiores. Completa la tabla:

Divisiones del intervalo (n)	Área aproximada
5	
20	
50	

Responde:

- a. ¿Qué pasa con la aproximación del área?
 - b. ¿A qué número se aproxima?
 - c. ¿Qué podemos concluir, respecto a este comportamiento de la aproximación del área buscada, cuando n , aumenta?
8. Ahora probemos calcular el área por exceso, con cuatro rectángulos circunscritos, de igual base. Señale en el dibujo los rectángulos que le quedaron.
 9. Calculemos primero las alturas de los rectángulos.

Altura del primer rectángulo	$f(0.5) = 3(0.5)^2$	0.75
Altura del segundo rectángulo		
Altura del tercer rectángulo		
Altura del cuarto rectángulo		

10. Calculemos el área de los 4 rectángulos

Área del rectángulo	$\Delta x f(x)$	=
Área del primer rectángulo		
Área del segundo rectángulo		
Área del tercer rectángulo		
Área del cuarto rectángulo		
Sumatoria de todas las áreas		11.25

La suma resultante de Reman. En este caso particular se llama suma derecha de Reman de la función

$$f(x) = 3x^2; \text{ en } [a, b] \text{ con } n = 4$$

y

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = 0.5$$

tomando a

$$x_0 = 0.5, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1.5, \quad x_3 = 2$$

donde la suma de Riemann es:

$$\begin{aligned}
 & f(0.5) \Delta x + f(1) \Delta x + f(1.5) \Delta x + f(2) \Delta x \\
 = & 0.75(0.5) + 3(0.5) + 6.75(0.5) + 12(0.5) \\
 = & 11.25
 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos 11.25 metros cuadrados de área aproximadamente.

¿Qué podemos decir de este resultado en comparación, con la aproximación anterior?

Observa que la suma resultante de Raman, es mayor y no queda espacio vacío por lo que supera la cantidad de área que deseamos encontrar exactamente.

11. ¿Cómo se podría mejorar la aproximación antes calculada? Explique.
12. Observa la gráfica del data show en la pizarra, al aumentar n para las sumas superiores. Completa la tabla:

Divisiones del intervalo (n)	Área aproximada
5	
20	
50	

- a. ¿Qué pasa con la aproximación del área?
- b. ¿A qué número se aproxima?
- c. Compara con la aproximación por defecto
- d. ¿Qué podemos concluir, respecto a este comportamiento de la aproximación del área buscada, cuando n , aumenta?

Te habrás dado cuenta que a medida que hacemos más divisiones en el intervalo de cero a dos, es decir n toma valores grandes, el área buscada se va aproximando a un número.

El proceso anterior lo podemos formalizar afirmando que, cuando existe el límite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = A$$

Es decir, el área A bajo la curva es el límite de las sumas de las áreas de los n a medida que el número de rectángulos se acerca a infinito y el ancho se aproxima a cero. Tenemos un término general para este límite y definimos a continuación.

Definición de Integral definida

Si f es una función acotada en el intervalo $[a, b]$, definimos la integral definida de f en los siguientes términos:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

Siempre que el límite exista.

Nota2. Cuando la función $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a, b]$, (como sucedía en nuestro ejemplo) la integral coincide con el área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje de las abscisas, y las rectas $x = a$ y $x = b$. Si $f(x)$ no es positiva lo anterior no es cierto.

Existe una forma alternativa para la evaluación de las integrales definidas, y es uno de los grandes aportes a la humanidad de Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz.

Teorema fundamental del cálculo, parte 2 (Regla de Barrow)

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, y $F(x)$ es una primitiva o antiderivada de f , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Para calcular la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ sin tener que usar ninguna suma de Riemann todo lo que tenemos que hacer es buscar una antiderivada de la función f , evaluarla a $x = b$ y $x = a$, y restar.

De acuerdo a este teorema nuestro problema inicial, tomó la forma de

$$\int_0^2 (3x^2) dx$$

Puede evaluarse de la siguiente manera:

a) Determinando la integral indefinida

$$\int (3x^2) dx = x^3 + C$$

b) Luego, evaluamos en la primitiva encontrada en el paso anterior, los valores extremos de nuestro intervalo,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(2) - F(0) \\ &= [(2)^3 + C] - [(0)^3 + C] = 8 \end{aligned}$$

Por tanto, la respuesta de nuestro problema sobre el área a pintar es exactamente es 8 metros cuadrados.

13. Evalúa las siguientes integrales definidas aplicando la regla de Barrow.

1. $\int_0^4 x dx$ $R = 8$
2. $\int_0^4 -x dx$ $R = -8$
3. $\int_2^3 (x^3 + 8) dx$ $R = 24.25$
4. $\int_{-3}^{-2} (x^3 + 8) dx$ $R = -8.25$

Actividad III. (Síntesis del concepto) una sesión de 90 minutos

1. En las siguientes proposiciones, solo una es verdadera. Encuéntrala señalando con check.

La integral definida es:

- a) Una suma de Riemann.
- b) Un número que no se puede calcular exactamente.
- c) Infinita.
- d) El límite de las sumas de Riemann cuando el número de subdivisiones $n \rightarrow \infty$.
- e) El límite de las sumas de Riemann cuando el número de subdivisiones $n \rightarrow 0$.

2. En las siguientes integrales, resuelva lo que se le pide y reflexione sobre los resultados, estableciendo las principales diferencias.

- a) Encuentre la integral indefinida $\int (x^2 - 5) dx$.
- b) Evalúe la siguiente integral definida aplicando la regla de Barrow.

$$\int_{-3}^3 (x^2 - 5) dx$$

3. Dado el siguiente teorema y la definición de integral

Si $f(x)$ es una función continua y $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje y $x = a$ y $x = b$ está dada por:

$$Area = \int_a^b f(x) dx$$

Establezca el valor de verdad de las siguientes afirmaciones, en el caso que sean falsos justifique.

- La integral definida en algunos casos representa área.
- La integral definida siempre representa área.

- La integral definida es un número real, siempre y cuando el límite exista.
- La integral definida es el límite de las sumas de Riemann cuando el número de subdivisiones se vuelve más y más grande ($n \rightarrow \infty$).

4. Evalúe las siguientes integrales definidas, aplicando el teorema fundamental del cálculo.

Verifique las repuestas con la aplicación MalMathen su celular o en su calculadora.

1. $\int_{-1}^1 5x dx$ $R = 0$
2. $\int_{-1}^3 (6x^2 - 4x + 3) dx$ $R = 52$
3. $\int_0^1 (x^3 - 1) dx$ $R = -\frac{3}{4}$
4. $\int_{-1}^2 \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) dx$ $R = 0.458$

5. Realiza un resumen o mapa conceptual de la definición, teoremas y propiedades sobre la integral definida, que se encuentran en esta unidad didáctica y el material de apoyo del curso.

Actividad IV (Aplicación y transferencia a otros contextos)

Aplicaciones de la integral definida: área bajo la curva y entre curvas

1. Utilizando la integral definida, calcule el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, el eje de las x y las líneas $x = a$ y $x = b$. Grafique y sombree el área, antes de calcular. (En los casos que se pueda, plantee por lo menos dos formas diferente para determinar el área).
 - a. $y = \frac{3}{4}x + 1$, $x = 0$ y $x = 16$
 - b. $y = x^3$, $x = -1$ y $x = 1$
 - c. $y = x^2 - 3x + 2$, $x = 0$ y $x = 3$
 - d. $y = -x^2 - x + 6$, $x = -4$ y $x = 3$
2. En los ejercicios anteriores, evalúe la integral con la regla de Barrow y compare los resultados con el área encontrada.

Nota: Revisan en el material de apoyo de la asignatura los casos del área situada entre la curva de una función que representa una función y el eje de las x .

Recuerda. Las reglas para integrales definidas. Sean f y g funciones continuas en $a \leq x \leq b$. Entonces,

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \text{ Regla aditiva de la integral definida}$$

$$4. \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \text{ Regla de la suma.}$$

$$5. \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx. \text{ Regla de la diferencia.}$$

$$6. \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \text{ para } k \text{ constante. Regla del factor constante.}$$

3. Determine el área entre las funciones. Grafique y sombree el área. ¿Cómo calculamos esta área?

a. $y = x^3 + 1$, $y = 3x - 2$, $x = 0$, $x = 2$

b. $y = 3 - x^2$, $y = x^2 - 5$

4. La función de costo marginal de una empresa a un nivel de producción x es

$$C'(x) = 23.5 - 0.01x$$

Calcule el incremento en el costo total cuando el nivel de producción se incrementa de 1000 a 1500 unidades. Grafique.

Algunas veces el área entre dos curvas se puede emplear como una forma de medir la cantidad de una magnitud que se ha acumulado durante un procedimiento particular. Como lo veremos a continuación.

5. Cuando tiene x años, una maquinaria industrial genera ingresos a razón de $R'(x) = 5000 - 20x^2$ dólares por año, los costos de operación y de mantenimiento se acumulan a razón de $C'(x) = 2000 + 10x^2$ dólares por año.

- ¿Durante cuántos años es rentable el uso de la maquinaria?
- ¿Cuáles son las ganancias netas generadas por la maquinaria en ese periodo de tiempo?
- Represente geométricamente, las ganancias netas calculadas y de una interpretación.

6. Un fabricante de neumáticos estima que los mayoristas comprarán (demandarán) $q(\text{miles})$ de neumáticos radiales cuando el precio sea $D(q) = -0.1q^2 + 90$ dólares por neumático, y el mismo número de neumáticos se ofertará cuando el precio sea $p = S(q) = -0.2 + q + 50$ dólares por neumáticos.
- Determine el precio de equilibrio (oferta igual a la demanda), así como la cantidad ofertada y demanda.
 - Determine el excedente de los consumidores y el de los productores al precio de equilibrio.
7. La oferta y la demanda de un producto vienen dada por las siguientes funciones:
- $$D : p = 120 - x^2$$
- $$S : p = 32 - 3x.$$
- Determine el punto de equilibrio analíticamente y gráficamente.
 - Grafique y sombree el área que representa el excedente del consumidor y productor.
 - Calcule el excedente del consumidor y productor.
8. La distribución del ingreso de cierto país está dada por la curva de Lorentz $y = \frac{19}{20}x^2 + \frac{1}{20}x$, en donde x es la proporción de captadores de ingresos y y es la proporción del ingreso total percibido.
- Grafique la curva de Lorentz y la función de equidad perfecta.
 - Determine el coeficiente de desigualdad la curva de Lorentz.
 - ¿Qué proporción, del ingreso total recibe el 20 % de la gente más pobre?
9. Después de pintar los 40 automóviles, un establecimiento de pitado de automóviles estima que la curva de aprendizaje es de la forma

$$y = \frac{19}{20}x^2 + \frac{1}{20}x$$

Encuentre el número de horas hombres que se requerirían a fin de pintar 60 automóviles más.

10. Tarea en casa. En la página 54 y 55 del material de apoyo de la asignatura Matemática aplicada, realiza lo indicado en los siguientes ejercicios: 2, 4, 5, 7 y del 10 inciso a) y e).

Actividad V (Evaluación)

A. Cuestionario anónimo de los alumnos

Por favor marca con una X la respuesta con la que mejor identificas tu aprendizaje. Si no estás seguro, señala la más próxima a lo que tú piensas:

1. ¿Cuánto te ha gustado la clase?

Mucho ___ Algo ___ Nada ___

2. ¿Cuánto crees que has aprendido?

Mucho ___ Algo ___ Nada ___

3. ¿Te han ayudado otros?

Mucho ___ Poco ___ Nada ___

4. ¿Te han interrumpido otros el trabajo?

Mucho ___ A veces ___ Nada ___

5. ¿Te ayudó el profesor?

Bastante ___ Poco ___ Nada ___

6. ¿Cuánto ha durado la clase?

Mucho ___ Lo justo ___ Poco ___

7. ¿Quién te ha ayudado?

El profesor ___ El grupo ___ Otro ___

8. El trabajo ha sido...

Difícil ___ Normal ___ Fácil ___

9. Grado de satisfacción tuya con la marcha de la asignatura

Alto ___ Regular ___ Bajo ___

10. Valoración de las actividades realizadas en clase

Alto ___ Regular ___ Bajo ___

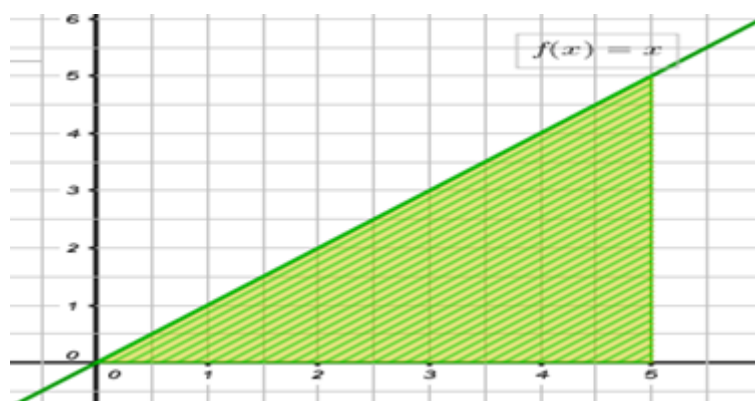
11. Escribe algo que te haya resultado difícil de aprender.

12. Escribe algo que te haya gustado especialmente de la clase.

13. Menciona tres cosas que te gustaría que te evalúen en la prueba final

I. Calcula el área de las siguientes integrales definidas

1. ¿Cuánto es el área bajo la curva, en la siguiente gráfica?



2. Sea R , la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 8$, el eje de las x , y las rectas $x = -4$ y $x = 3$.

- Grafique y sombree el área.
- Encuentre el área limitada por las curvas.
- Evaluar $\int_{-4}^3 (x^2 + 2x - 8) dx$.

- ¿Son iguales los resultados del inciso b y c ? Justifique.

II. Aplicaciones de la integral definida a la economía

- En cierta fábrica, el costo marginal es de $24q + 48$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. ¿En cuánto se incrementa el costo total de manufactura si el nivel de producción se aumenta de 6 a 10 unidades?.
- Un agricultor ha estado usando un nuevo fertilizante que brinda un mejor rendimiento de su cosecha, pero como este fertilizante agota otros nutrientes del suelo, debe usar otros fertilizantes en cantidades cada vez mayores, por lo que su costo se incrementa cada año. El nuevo fertilizante produce una razón de incremento en ingresos(en cientos de dólares) dada por

$$R'(x) = t^2 + 4t + 8 \text{ y } C'(x) = t^2 + 2$$

- a) ¿Cuánto tiempo puede el agricultor usar en forma rentable el fertilizante?.
- b) ¿Cuál será su incremento neto en sus ahorros en este periodo?.

2.8. Relato de Implementación (Diario de Experimentación)

Esta unidad didáctica fue implementada en los meses de mayo a junio del año 2017 en la UPOLI, en la ciudad de Managua. Fue aplicada en la asignatura de Matemática Aplicada a jóvenes estudiantes de segundo año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas del turno matutino, cuya edad está comprendida entre los 17 a 19 años. El total de estos estudiantes era de 41, 20 mujeres y 21 varones. Esta asignatura tiene un total de 64 horas presenciales para desarrollarse en dos encuentros semanales de 90 minutos cada uno, los días martes y jueves. La unidad III: Integral definida tiene asignado un total de 28 horas.

Cabe mencionar que la profesora a cargo o titular de este grupo que es la investigadora, ha dado clases a este grupo en las asignaturas de Matemática I y Razonamiento Matemático, esto permitió formar los grupos de trabajo, desarrollar las condiciones y momentos esenciales como: crear un ambiente agradable, dar a conocer las orientaciones necesarias, realizar las actividades, recapitular las clases, procesar la información y evaluar. Todo lo anterior planeando de antemano, en fin, podría decir que la enseñanza se dio libre de improvisación — denominado *Método ELI por algunos autores (Ferreiro, 2012)* — .

Para entrar en detalles sobre la implementación, solo resta mencionar que la unidad didáctica consta de cinco actividades que se aplicaron en once sesiones de clases, cuyo relato se da a continuación.

2.8.1. Sesión 1

Comenzó el 09 de mayo 2017 de 7:00 a 8:30 am, con la presentación de los propósitos de la intervención didáctica, planteamiento de las actividades y formación de los grupos de trabajo. Al asignar los miembros de cada grupo, hubo un poco de resistencia, dado que estaban acostumbrados a trabajar con sus compañeros a fines. Luego, se procedió a facilitar la primera actividad en físico, proyectada en la pizarra con ayuda del data show. Ésta, contiene una gráfica sobre una liga de fútbol del Barcelona.

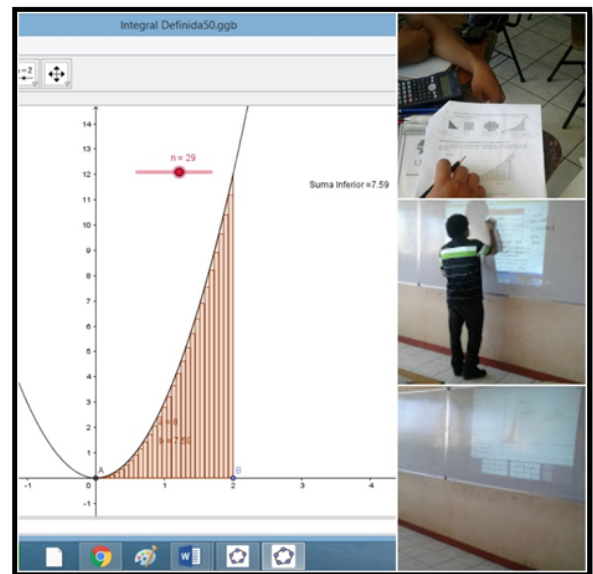


Eso les atrapó en las tareas asignadas y posteriores. Los problemas I y II, los resolvieron fácilmente, pero entraron en conflicto cognitivo al plantearlo como área, pues no lo intuían desde esa perspectiva. Comentaban que era la primera vez que calculaban área ubicada en el plano cartesiano, les resultó interesante.

El problema III, les causó mayor entusiasmo, dado que discutían, planteaban y defendían sus métodos entre los grupos y en plenario en la pizarra, principalmente en las formas de trabajar en los incisos c y d.

2.8.2. Sesión 2

Desarrollada el 11 mayo 2017 de 7:00 a 8:30 am, fue un poco más intensa. Aquí se les entregó el material de trabajo que corresponde a la primera parte de la Actividad II. Los estudiantes reaccionaron positivamente, ya habían quedado muy motivados con las tareas de la clase anterior, con el asunto de áreas no tradicionales. Cuando se les presentó el problema a resolver, de inmediato propusieron alternativas usando el método de exahución.

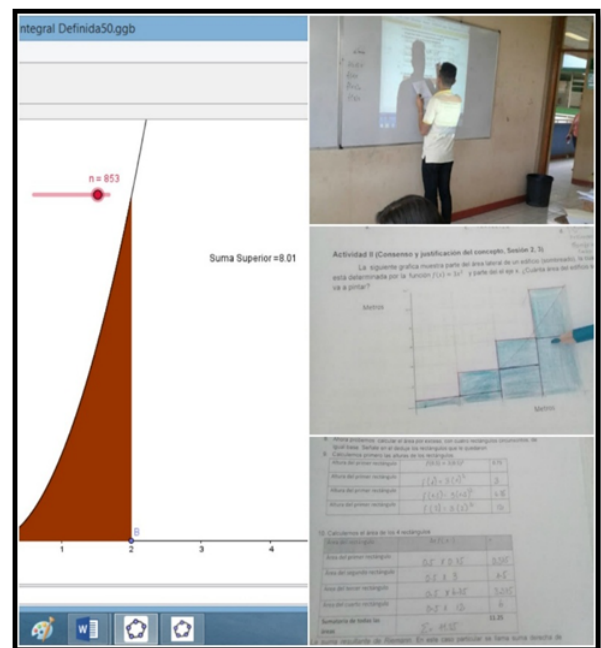


Se les propuso en el documento de trabajo que empezaran con rectángulos inscritos, para aproximar el área, la que para sorpresa de ellos no fue suficiente, al descubrir que quedaba área sin cubrir, por tanto la aproximación del área no era muy buena, luego sugirieron que si aumentaban el número de rectángulos, se cubriría más y mejoraría la repuesta, esto se trabajó con ayuda del programa GeoGebra, previamente la docente había elaborado el archivo en ggb para poder manipularlo en la sesión de clases, permitiendo dar una respuesta satisfactoria a la situación planteada, expresaron diferente emociones, desde un poco de asombro y emoción al observar de manera dinámica el comportamiento de la aproximación del área al aumentar el número de rectángulos.

Aunque en el material se les pedía que observaran y registraran cuando n era 50, el deslizador estaba programado hasta 100 apreciando mejor el comportamiento. Todas las operaciones las hicieron en el material que se les facilitó y registrandolo en su cuaderno. La sesión terminó con el tiempo justo y la tarea fue pensar en otra forma de resolver el problema.

2.8.3. Sesión 3

Fue desarrollada el 16 mayo 2017 de 7:00 a 8:30 am, continuando con la segunda parte de la actividad II. Aquí se empezó con una lluvia de ideas sobre la tarea y se planteó la forma a trabajar, empezando por trazar cuatro rectángulos circunscritos de igual base. Sospechaban que el área iba a superar los 8 metros cuadrados. Empezaron con entusiasmo por descubrir lo que seguía, llenando y discutiendo lo que se les pedía en las tablas del material proporcionado.

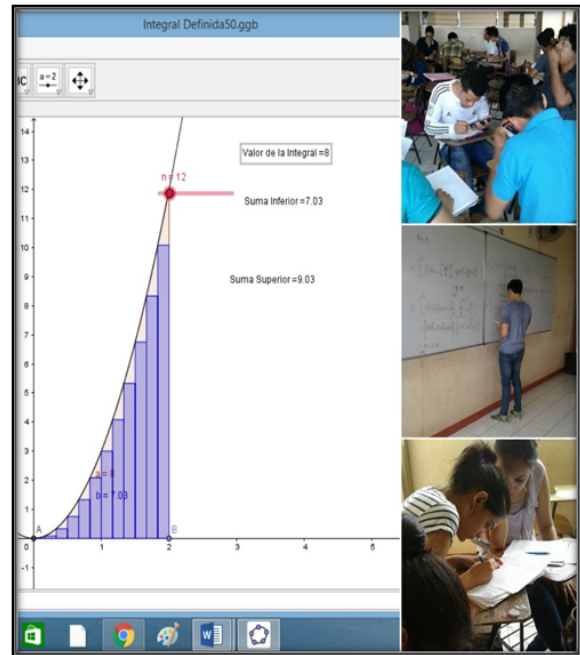


En base a la actividad anterior, plantearon nuevamente que debían aumentar el número de intervalo. Aquí fue interesante, porque muchos decían que aunque aumentaran los rectángulos, no podían aproximarse a 8, otros decían que daría a 8. Nuevamente el trabajo con el GeoGebra en la pizarra ayudó a despejar las dudas. El tiempo transcurrió rápidamente y fuimos sorprendidos por el docente de la segunda hora de clases, que nos anunciaba que el tiempo se había terminado. La tarea fue reflexionar sobre las actividades de las dos clases desarrolladas.

2.8.4. Sesión 4

Se efectuó el 18 de mayo 2017 de 7:00 a 8:30 am, continuando con la tercera y última parte de la actividad II. Empezamos comentando las actividades anteriores y concluyendo que área a pintar era 8 metros cuadrados. Luego, se planteó formalmente la definición de integral definida, y se aclaró que no siempre la integral representa área.

También, se planteó el teorema fundamental del cálculo o regla de Barrow (sin demostración matemática, pues ese no es el objetivo en esta asignatura), como mecanismo o método para calcular integral definida, asiendo reflexión en las condiciones del teorema.



Seguido se retomó nuestro problema principal planteando en conjunto con los estudiantes la integral definida y evaluándola con la regla de Barrow, nuevamente mostraron asombro al ver con la facilidad y exactitud que nos daba los famosos 8 metros cuadrados (se observó con el GeoGebra, el cálculo conjunto de la integral definida, la suma derecha e izquierda de Rimann). Aprovechamos para resaltar la importancia de las grandes mentes que hicieron posibles estos logros y el génesis que se tuvo que vivir para obtener estos resultados de importancia matemática y desarrollo de la humanidad.

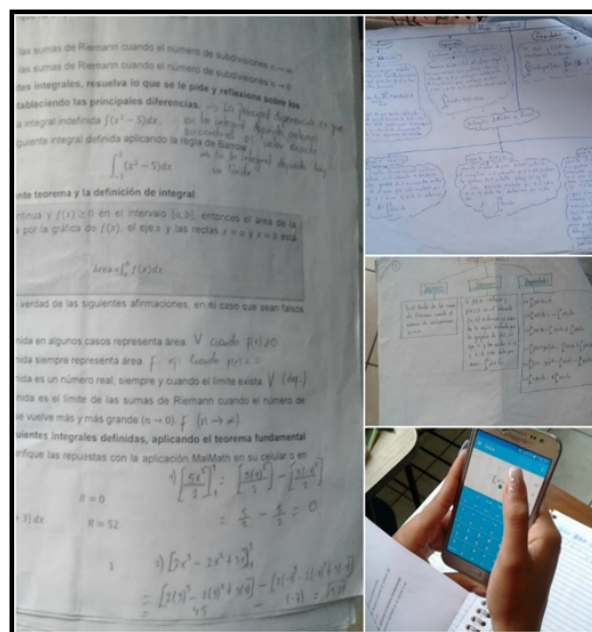
Algunos comentarios cito textualmente:

- “Tardaron más de 17 siglos, y nosotros lo hemos logrado en unas semanas”.
- “ Debimos empezar con la regla de Barrow se ve fácil”.
- “ Profe si ellos tardaron siglos no esperé que nosotros seamos expertos ”.
- “Lo bueno de este tipo de clases es que aprendimos haciendo”.

Luego, trabajaron en la evaluación de integrales definidas aplicando la regla de Barrow, la tarea fue terminar, estos últimos ejercicios.

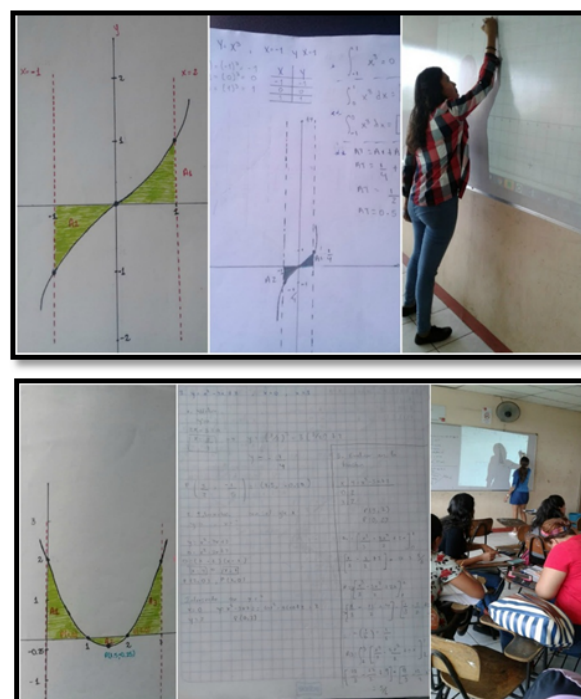
2.8.5. Sesión 5

Se desarrolló el 19 de mayo de 7:00 am hasta 8:30 am. En esta ocasión tuvimos que reponer clase el día viernes, dado que en la última semana de mayo tendríamos afectado el día martes, por celebración de la madre Nicaragüense. Esta la actividad se desarrolló de la manera más normal, aquí se presentó la oportunidad de aclarar las últimas dudas y procesar de manera grupal los nuevos conceptos. Esta tarea la desarrollaron con mucha facilidad, no obstante se les tuvo que explicar en el proceso de la misma, qué es un mapa conceptual y cómo se debe elaborar.



2.8.6. Sesión 6

Se trabajó en horario de 7: 00 a 8:30 am, el 23 de mayo del año 2017. Se orientó el trabajo grupal, iniciando la construcción de gráficas en el plano cartesiano reflejado en la pizarra con ayuda del GeoGebra, paralelamente se trabaja en el cuaderno. Una vez esbozadas las funciones involucradas y el eje x , se procede a identificar el área bajo la curva, esto causó incertidumbre, pues no se sentían seguros de identificar el área, una vez consensuada la situación se reflejó en la pizarra la gráfica con el GeoGebra. Posteriormente, se les pidió que plantearan la integral definida involucrada y determinaran el área con métodos diferentes, en los casos que se pudiese.



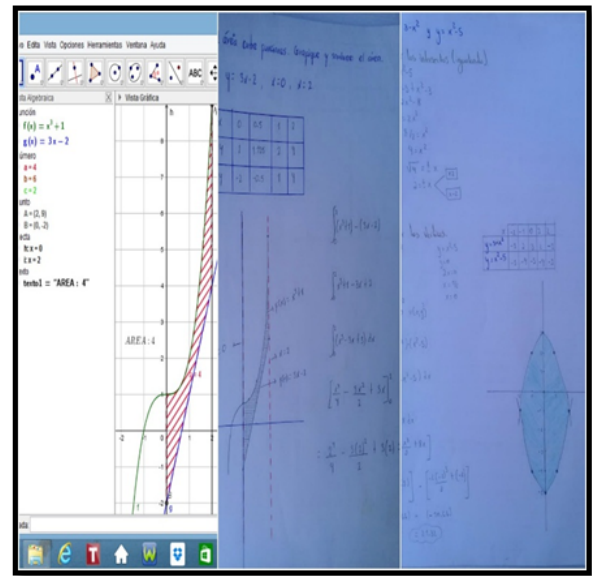
En el primer ejercicio el área también se calculó con la fórmula del trapecio y se verificó con el programa GeoGebra. También, se revisaron los diferentes casos que pueden surgir al trabajar área bajo la curva. En el segundo ejercicios, les agradó por causar asombró al evaluar la integral en el intervalo

planteado y dar como resultado cero, entonces comprendieron que era imposible, por el gráfico y dedujeron que había que trabajar diferente, separando los intervalos de integración y cambiando de signo la integral definida que representaba el área bajo el eje x . Los otros ejercicios los plantearon y resolvieron más fácilmente dada esta experiencia.

2.8.7. Sesión 7

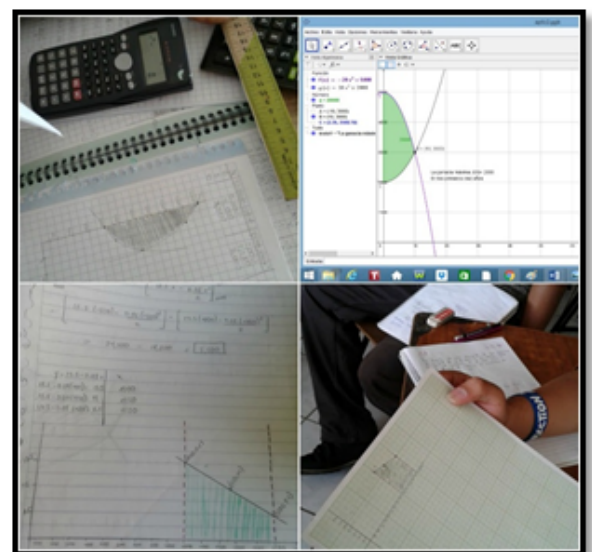
Se realizó de 7:00 a 8:30 am el 25 de mayo del año 2017. Nuevamente ponemos en marcha nuestra metodología y planteamos una situación sobre área entre curvas, se les pide que grafiquen, coloreen el área, observen si hay o no corte de las dos funciones, propongan planteamiento de las integrales y calculen. Graficar y sombrear el área les resultó sencillo, pero realizar el planteamiento y cálculo del área fue más interesante. Al final se deduce que el área, resulta de la diferencia entre el área de la región comprendida entre el gráfico de la función f y el eje x para todo x entre $a \leq x \leq b$ y el área del gráfico de la función g y el eje x para todo x entre $a \leq x \leq b$. Siempre que la función f sea mayor

que la g en todo el intervalo. El siguiente ejercicio se trabajó más fácilmente.



2.8.8. Sesión 8

Esta clase se desarrolla el 01 de junio de 7:00 a 8:30 am, empezamos la jornada con el planteamiento de una situación problemática sobre costo total y otra sobre utilidad máxima, no hubo grandes inconvenientes, solo lo consideraron tedioso, dado que debían manejar varios conceptos y fórmulas como costo variable, fijo, gráficas de funciones, punto de equilibrio, ingreso marginal, utilidad marginal, etc. Se valoró la utilidad de la integral definida al mundo de los negocios y economía.

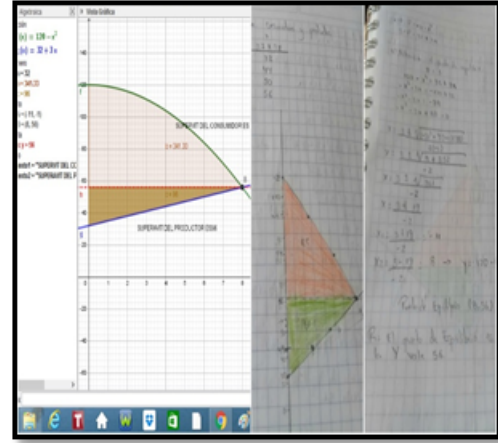


2.8.9. Sesión 9

Esta sesión se realizó el 02 de junio de 8:00 a 9:30 am, adelantando el encuentro correspondiente al 08 de junio, porque ese día no podía darles clase, dado que era la defensa de protocolo de investigación del Doctorado en Chontales.

Días previo a este encuentro el responsable de la unidad de medios me comunicó que no podría instalar los medios audiovisuales acordados, por una actividad grande en el gimnasio y auditorio Hilda y Armando Guido, los equipos estaban solo disponibles para esa actividad. En este caso tuve

que acudir a otras instancias de la UPOLI a prestar equipos y poder desarrollar la clase planificada.

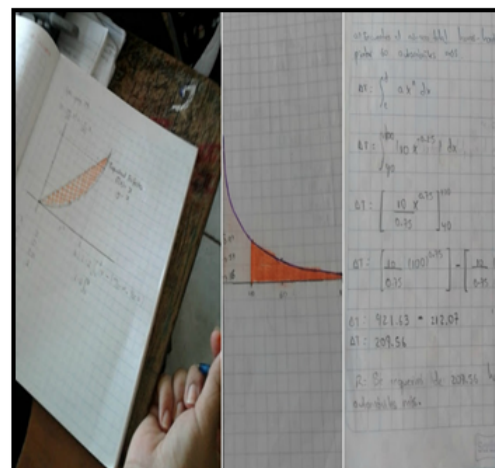


Aquí fue necesario explicar un poco la teoría de del superávit del consumidor y el productor, ayudado con una lámina en power point, luego se analizó y se concluyó que el procedimiento a seguir es la de determinar área entre curvas, determinando previamente el punto de equilibrio, posterior a esto se planteó un problema sobre este tema y fue trabajado sin mayor dificultad, apoyados siempre de sus compañeros y mi trabajo fue de dirigir y velar para que se realizara bien el trabajo.

2.8.10. Sesión 10

Se efectúa el 06 de junio de 7: 00 a 8:30 am. Iniciamos revisando conocimientos previos sobre la curva de aprendizaje en su vida y formalizamos estableciendo que la integral definida la utilizaremos para calcular el incremento en horas hombres requerido para incrementar la producción en un intervalo de producción Ese número de horas hombres (δT) queda determinada por el área bajo la curva del aprendizaje en un determinado intervalo de producción. De igual manera se estableció la importancia y uso del coeficiente de la desigualdad para la distribución de ingreso, quedando determi-

nado, como una aplicación de la integral definida, área entre la curva de equidad perfecta y la de Lorenz.



Posteriormente se plantearon problemas para trabajar en los grupos cooperativos, el proceso fue bueno y los estudiantes manifestaron que estas aplicaciones estaban fáciles.

2.8.11. Sesión 11

Finalmente, se presentó la oportunidad de implementar las tareas de evaluación, Actividad V, el 13 de junio en horario de 7:00 a 8:30 am. Esto se desarrolló en dos partes. Primero se les pidió contestar un cuestionario anónimo sobre el trabajo hecho hasta entonces, y luego, aclarar dudas sobre tarea y la prueba con cuatro ejercicios. Los estudiantes trabajaron arduamente en esta fase, los resultados fueron satisfactorios, pero esto lo detallaremos en el siguiente capítulo.



A lo largo de las sesiones el punto de vista de los alumnos se logró obtener y registrar mediante la observación directa, pequeñas entrevistas informales, cuestionario de opinión y sugerencias, y el diario del maestro en formato de ficha. También se tomaron fotografías en todo momento de clase.

2.8.12. Valoración del Proceso de Implementación de la Unidad Didáctica

La valoración del proceso de implementación de la unidad didáctica fue construida tomando en cuenta los puntos de vistas de los actores implicados: los alumnos, y otros docentes colaboradores.

Los alumnos manifestaron que las actividades estaban muy bien diseñadas, con un lenguaje entendible, que eran muy novedosas e interesantes. Además, expresaron que serán de mucha utilidad para otras asignaturas y vida profesional.

Por otro lado, sugieren repetir estas actividades, con la misma dinámica, pero con otros temas. Ellos agregan que los “chicos” aprenden más cuando las clases son divertidas, se les evalúa lo que se les enseña y los maestros siempre le aclaran sus dudas.

Otros docentes, **colaboradores**, reconocen que son actividades, más que novedosas, interesantes y diferentes a las que proponen los libros y que los docentes acostumbramos realizar en las aulas. Consideran que se pueden aplicar con suma facilidad en sus propios deberes porque son sencillas de adaptar a otros contextos.

Por otro lado, señalan como positivo la coherencia de las actividades, y la claridad de las preguntas,

el hilo conductor en las tareas, la mezcla de trabajo dirigido e independiente, pero que lo más importante era la forma en que se construye el contexto.

En resumen, alumnos y docentes valoran muy positivamente la implementación de la unidad didáctica.

Bibliografía

- [1] Área, A. (1993). Unidades Didácticas e Investigación en el Aula. Gran Canarias: Librería Nogal Ediciones.
- [2] Antúnez, S. (1992). Del Proyecto Educativo a la Programación de Aula. El qué, el cuándo y el cómo de los instrumentos de la planificación didáctica. Barcelona: Graó.
- [3] Boyer, C. (1986). Historia de la Matemática. Madrid: Alianza Editorial. ISBN 84-206-8094.
- [4] Couso, D., Badillo, E., Perafán, G. y Auduriz, A. (2005). Colección Didáctica, Unidades Didácticas en Ciencias y Matemáticas. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- [5] Ernest F. Haeusslerjr/Richard S. Paul, “Matemáticas para administración, Economía, Ciencias Sociales y de la vida” Prentice - Hall. 8va Edición. 1990.
- [6] Ferreiro, R. (2009). Nuevas Alternativas de aprender y enseñar: Aprendizaje Cooperativo. México: Editorial Trillas.
- [7] Escamilla, A. (1992). Unidades didácticas, una propuesta de trabajo en el aula. Colección Aula Reforma. Zaragoza: Luis Vives.
- [8] Ferreiro, R. (2012). Cómo ser mejor maestro: El método ELI. México: Editorial Trillas.
- [9] Flores, W. (2010). Propuesta Metodológica en la Enseñanza de la Integral Definida utilizando entornos informáticos para la carrera de Administración de Empresas. (Tesis de pregrado). Universidad de las regiones autónomas de la costa caribe nicaragüense. Nueva Guinea.
- [10] Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2004). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Granada: ReproDigital.
- [11] Gutiérrez, R. (2000). Didáctica y pedagogía. Esfinge. Décima edición.
- [12] Hungerford, L. Brandley, G. y Rosen, K. “Matemáticas para Administración, Economía y ciencias sociales”. McGrawHill. 8va. Edición. 2006.

- [13] Hungerford. "Matemáticas para Administración y Economía". Prentice - Hall. 7ma. Edición. 2000.
- [14] Jagdish C Arya/ Robin W. Lardner. "Matemáticas Aplicadas a la administración y a la economía. Prentice Hall, 3ra. Edición, México, D.F 1989.
- [15] Johnson, D., Johnson, R. y Johnson, E. (1999). Los nuevos círculos del aprendizaje: La cooperación en el aula y la escuela. Argentina: Editorial Aique.
- [16] Johnson, D., Johnson, R. y Holubec, E. (1999). Los nuevos círculos del aprendizaje: La cooperación en el aula y la escuela. Argentina: Editorial Aique.
- [17] Johnson, D.W., Johnson R.T. & Holubec, E.J. (1994). Cooperative learning in the classroom. Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.
- [18] Linares, P. (2013). "*Unidad didáctica: Integral definida*". España [Consulta: 20 de diciembre de 2016]. Disponible en: <http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/2290/Trabajo.pdf?sequence=1>.
- [19] Lupiañez, J. y Codina, A. (2004). "*Calculadoras y sensores: La Matemática en movimiento*". España. [Consulta: 20 de febrero de 2017]. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/596/1/LupiannezJ04-2768.PDF>.
- [20] Mendoza, J. (2013). Análisis de los errores que cometen los estudiantes de secundaria en la deducción de las propiedades de la desviación típica. (Tesis de maestría). Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua- Managua.
- [21] Morales, P. (2007). Aprender a trabajar en equipo evaluando en proceso. En Prieto, L. (Coord.). La enseñanza universitaria centrada en el aprendizaje. Barcelona. Octaedro. Pags.133-151.
- [22] Moya Martínez, A. (2009). *Las nuevas tecnologías en la educación*. Revista digital: Innovación y Experiencias Educativas, 24, 1-9, [Consulta: 10 de mayo de 2017] Artículo 37. "http://www.csicsif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_24/ANTONIA_M_MOYA_1.p.
- [23] OCDE. (2006). PISA 2006. Marco de la evaluación, conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. España: Santillana.
- [24] Peña, J. (2010). El aprendizaje Cooperativo y las competencias. Revista d'Innovació Docent Universitària.V(2). Págs. 1-9
- [25] Potosme, N. (2013). Análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes sobre la desviación típica. (Tesis de maestría). Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua - Managua.

- [26] Prieto, L. (2007). El aprendizaje Cooperativo. Madrid: PPC.
- [27] Prieto, L.(Coord).(2007) La enseñanza universitaria centrada en el aprendizaje. Barcelona. Octaedro. Pags.117-132.
- [28] Salinas, J. (1998). “Redes y desarrollo profesional del docente: entre el dato serendipity y el foro de trabajo colaborativo”. Profesorado [artículo en línea] (vol. 2, n.º 1). Universidad de Granada.
- [29] Suarez, M. (2008). “*Orígenes del cálculo diferencial e integral*. Granada- España. [Consulta: 05 de abril de 2017]. Disponible en: http://www.ugr.es/~mmartins/material/historia_matematica_origenes_calculo.pdf
- [30] Swokowski, E. (1989). Cálculo con Geometría Analítica. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- [31] Thomas, G. (2010). Cálculo en una variable. México: Pearson.
- [32] Valencia, A. (2016). “*Historia del cálculo integral*. [Consulta: 03 de mayo de 2017]. Disponible en: <https://es.scribd.com/doc/314999097/Historia-Del-Calculo-Integral>
- [33] Zill, D. (2011). Cálculo: Trascendentes tempranas. México: McGraw-Hill.

Capítulo 3

CONCEPTUALIZACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

3.1. INTRODUCCIÓN

En este estudio hasta ahora hemos realizado dos etapas: un diagnóstico y fase de implementación de la unidad didáctica. La primera permitió identificar nuestro problema de investigación, al evidenciar que existe poco nivel de adquisición de conocimientos en los estudiantes de la carrera de Contaduría Pública, respecto al concepto de integral definida. Dada la importancia de este y la amplia gama de aplicaciones a la administración y economía, nació la idea de proponer cambios en la práctica docente, por lo que, esto nos condujo a actuar en consecuencia, realizando un plan de intervención metodológica, concebido en el diseño e implementación de una Unidad Didáctica y esto conformó una segunda etapa, ahora trabajaremos una más, analizando los protocolos escritos, fotografías y entrevistas de los estudiantes.

En este capítulo se exponen los resultados del análisis de la conceptualización de la integral definida en los estudiantes de segundo año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas de la Universidad Politécnica de Nicaragua. A través de la conceptualización (conexiones con otros conceptos, representaciones gráficas, algebraica, numérica, etc.) de los alumnos, podemos obtener conocimientos más profundos sobre el tema en cuestión y, esto permitirá realizar regulación del proceso de enseñanza aprendizaje, creando actividades innovadoras que fortalezcan las estructuras de futuras unidades didácticas y aprendizaje significativo.

Específicamente en este estudio se identifican las formas de razonamientos mostrados por los docentes antes y después de la implementación de la Unidad Didáctica, bajo el marco de la teoría SOLO, desarrollado por Biggs & Collis (1982) y la de los campos conceptuales de Vergnaud (1990, 1996,

2007b). Así mismo, se compararán las conceptualizaciones con otro grupo de alumnos que recibió proceso de enseñanza aprendizaje tradicional, para determinar si la innovación didáctica proporciona las herramientas necesarias para la apropiación y aplicación del nuevo concepto, en situaciones concretas relacionadas con su medio. El estudio está enmarcado dentro del paradigma de investigación naturalista o cualitativa, desde una perspectiva de exploración fenomenológica y de investigación acción.

3.1.1. Justificación

La comprensión de conceptos matemáticos en los estudiantes, es fundamental para la adquisición de aprendizaje significativo y el aumento de las habilidades necesarias para resolver problemas, no sólo del ámbito estudiantil, sino de amplia aplicación en su realidad y transferencia a otros campos del saber. Investigaciones actuales que intentan explicar los fenómenos ligados al aprendizaje de la matemática, han demostrado lo complejo que puede ser la adquisición de conocimientos en los estudiantes, en todos los niveles formales de aprendizaje.

Esta problemática sobre concepto ha provocado que se creen centros de investigaciones como el Research in Undergraduate Mathematic Education Community (RUMER), cuyo propósito es proponer un modelo cognitivo, que haga una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante podría elaborar con el fin de desarrollar su comprensión de un concepto (Garbín, 2015).

En este capítulo realizamos un estudio sobre la conceptualización de la integral definida como objeto matemático, de investigación didáctica la cual se justifica por los resultados del diagnóstico el cual da constancia sobre las dificultades en la comprensión de este concepto, relevancia del mismo dentro de las Matemáticas y sus aplicaciones en otras áreas de conocimiento. Consideramos que este estudio es oportuno y conveniente por las siguientes razones:

- **A nivel nacional.** En Nicaragua existen pocos estudios respecto a la didáctica de la Matemática universitaria, por lo que este proyecto servirá de referencia para otras investigaciones al respecto. Además nuestro estudio aporta a la didáctica de la Matemática, sobre el diseño de Unidades Didácticas para la construcción de conceptos.
- **A nivel institucional (UPOLI).** Nuestra investigación contribuirá a la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje en esta universidad, al comunicar logros y dificultades en la construcción de la integral definida, donde el profesorado de Matemática Aplicada se verá beneficiado con los datos obtenidos en el estudio y podrá adoptar medidas de acción colegiadas para instrumentar actividades de intervención didáctica de manera inmediata. También, los estudiantes estarán informados sobre las áreas en que su desempeño es el adecuado y en las que necesita mejorar.

3.1.2. Propósitos de la Investigación

Propósito general

Analizar la conceptualización de la integral definida en los estudiantes de segundo año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas de la Universidad Politécnica de Nicaragua.

Propósitos específicos

1. Identificar las conceptualizaciones que adquieren los estudiantes de Contaduría Pública respecto a la integral definida, antes y después de la implementación de la Unidad Didáctica.
2. Comparar las conceptualizaciones sobre la integral definida, en dos grupos de Contaduría Pública, a uno de los cuales se le aplicó la unidad didáctica.

3.2. ESTADO DEL ARTE

A continuación se presenta el estado del arte de las cosas, es decir la revisión bibliográfica de documentos referidos a nuestro estudio, destacándose los siguientes:

A nivel nacional, el estudio de conceptualizaciones sobre la integral definida en universidades nacionales, es casi nula, solamente encontramos el trabajo de Potosme (2013), en el cual realiza una unidad didáctica bajo los criterios de Couso et al (2005), para realizar un análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes sobre la desviación típica, este contenido de estadística del programa de noveno grado de educación secundaria, generaba dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje, por lo que fue necesario implementar un plan de acción para contribuir al aprendizaje significativo. Este estudio se realizó en el Colegio Rigoberto López Pérez de la ciudad de Managua, bajo un enfoque de investigación acción. Concluye que la unidad didáctica implementada favorece positivamente la evolución de los cambios conceptuales respecto al concepto de desviación típica y que los estudiantes conceptualizan este concepto como una fórmula.

En cambio a nivel internacional encontramos variedad de estudios sobre la integral definida, aunque no precisamente cómo hemos planteado nuestra interrogante, a continuación se presentarán trabajos relacionados con el concepto de integral definida.

■ Conceptualizaciones de la integral definida

El estudio de la comprensión de los conceptos matemáticos es un campo de gran interés para la Investigación en Educación Matemática, a nivel internacional existen numerosos trabajos vinculados al concepto de integral definida, se puede citar a Fuster y Gómez (1997), de la Universidad

Politécnica de Valencia en España, quienes luego de realizar un estudio de la significación conceptual y procedimental del cálculo de integrales, en estudiantes de escuelas medias, bajo un enfoque cualitativo (el estudio de integrales se desarrolla a partir del concepto de primitivas) proponen alterar el orden habitual de exposición.

Sugieren explicitar las imágenes de los conceptos como primer acercamiento de estudio. Concluyen los autores que la construcción de las sumas por defecto y por exceso sería el primer aspecto a tratar, utilizando de ser posible algún software para diseñar una construcción dinámica o una simulación. El aporte de estos autores fue tomado en la elaboración de la U.D, dado que consideramos de gran importancia el uso de representaciones gráficas y el uso del geogebra; como software.

Por otro lado, Azcárate, Casadevall, Casellas y Bosch (1996) citan las investigaciones realizadas por Orton (1980) acerca de las concepciones del concepto de integral. Donde manifiestan que los estudiantes realizan un nivel relativamente bueno en la manipulación de los algoritmos algebraicos que aparecen en los cálculos de primitivas de funciones, pero muestran importantes dificultades en todo lo que es conceptualización de los procesos de límite asociados al concepto de integral. Consideran importante evitar que los alumnos piensen en primer lugar a la integración como la «operación inversa» a la derivación. De esta forma, se pueda estudiar el Teorema Fundamental del Cálculo como una relación insospechada útil entre las operaciones de derivación e integración (aparentemente independientes).

Estudio más reciente sobre este mismo tema tenemos a Aldana (2012), quien realiza una investigación sobre la comprensión del Concepto de Integral Definida con estudiantes universitarios españoles de la carrera de Matemáticas, bajo el marco de la teoría “APOE” (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). El ámbito en el que se ubica el trabajo es en el de la línea de investigación en Didáctica del Análisis Matemático y en el campo del Pensamiento Matemático Avanzado. Para establecer la descomposición genética del concepto realizó en una primera etapa un estudio de libros de textos que permitió identificar los elementos que configuran el concepto.

Descompone el concepto en cinco categorías:

1. El área como aproximación, (ACA)
2. El área como límite de una suma (ALS)
3. La integral definida LID)
4. Las propiedades de la integral definida (PID)
5. Teorema fundamental y del valor medio (TFV)

Para la recogida de datos utilizó cuestionarios, entrevistas y un mapa conceptual. Luego los analizó a partir de las relaciones lógicas establecidas entre elementos matemáticos, caracterizando los **niveles de comprensión** de los estudiantes.

Aldana se propuso en esta investigación:

1. Analizar el grado de comprensión de los estudiantes sobre la integral definida, bajo la teoría APOE.
2. Describir las relaciones que establecen los estudiantes entre los objetos matemáticos estudiados.
3. Establecer las formas de representación de los estudiantes respecto a la integral definida.

Establece las siguientes categorías respecto a la comprensión del concepto:

- Nivel intra 1. Este subnivel de desarrollo del esquema se caracteriza porque los alumnos no son capaces de establecer ninguna relación lógica entre los elementos matemáticos, recuerdan los elementos matemáticos de memoria y se muestran incapaces de utilizarlos en la resolución de las tareas; utilizan elementos matemáticos solo en las formas de representación G y A, donde muestran algunas concepciones erróneas, y resuelven algunas tareas de forma incorrecta.
- Nivel intra. En este nivel, los alumnos suelen realizar algún intento de conjunción lógica entre elementos matemáticos, recordar elementos matemáticos inconexos de forma aislada y utilizarlos en la resolución de las tareas no tener sintetizados los modos de representación.
- Nivel ínter 1. En este subnivel de desarrollo del esquema del concepto de integral definida, es característico que el sujeto sea capaz de usar la conjunción lógica (y lógica) de forma correcta entre elementos matemáticos dados en el mismo sistema de representación.
- Nivel Inter. Los sujetos usan diferentes relaciones lógicas entre elementos matemáticos de forma correcta, salvo alguna excepción y recuerdan los elementos matemáticos, necesarios en la resolución de una tarea en varios sistemas de representación.
- Nivel Trans. El sujeto suele usar diferentes relaciones entre los elementos matemáticos de forma correcta; suele recordar los elementos matemáticos necesarios en la resolución de la tarea usando los significados implícitos para tomar decisiones, y muestra tener síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

Concluye en su trabajo que dentro de las relaciones lógicas la conjunción lógica es la más utilizada y se establece siempre entre dos o más elementos matemáticos que generalmente están coordinados de modo gráfico y algebraico. Esto corresponde a las primeras categorías de com-

comprensión del concepto de integral definida. En cuanto a los sistemas de representación, algunos alumnos tienen dificultades con la representación gráfica de algunas funciones.

- **Concepciones erróneas de los estudiantes en la integral definida** En esta sección se realiza un compendio de las ideas principales surgidas de las diferentes fuentes a los que he tenido acceso en la bibliografía, en relación a las concepciones erróneas típicas de los estudiantes con respecto a la integral definida.

Llorens (1997) identifica cuatro errores:

- En primera instancia argumentan que generalmente, los estudiantes identifican integral con primitiva. La integral, para ellos, no conlleva ningún proceso de convergencia ni ningún aspecto geométrico. Llevándolo a un terreno totalmente algebraico y reduccionista del Cálculo.
- En segundo plano tenemos que los estudiantes identifican las integrales definidas con la regla de Barrow, no toman en cuenta las condiciones necesarias para evaluar la integral con dicha regla. Uno de estos casos es: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -2$. Que es totalmente falso.
- En tercer lugar, tenemos que los estudiantes no asocian la integral definida con el análisis de convergencia. Cuando se estudia las integrales impropias, a la mayoría de discentes les parece sorprendente que la integral definida pueda ser divergente.
- No se integra el concepto de área con el de integral. Ciertamente, los estudiantes han oído que existe una relación entre las integrales (definidas) y el área, pero no se produce una adecuada unión entre ambas, de modo que persiste una interpretación puramente algebraica de la integral. El estudiante utiliza el contexto algebraico formal en vez del visual geométrico sencillamente porque no los ha integrado a su registro de representaciones en su esquema conceptual.

En otro estudio respecto a los errores tenemos a Muñoz (2000):

- Los estudiantes aprenden los procedimientos del cálculo en un nivel puramente algorítmico, que es construido sobre imágenes conceptuales escasas.
- Los estudiantes pueden calcular primitivas más bien que integrar; tal es el caso que cuando se les enfrenta con un problema típico de integración muy pocos lo reconocen como tal.

Por otro lado Orton (1983):

- La introducción de la integración puede ser oscurecida por las tediosas manipulaciones algebraicas.

- El mayor problema para los estudiantes es el entendimiento de la integración como el límite de una suma.

3.3. ESCENARIO

Para el desarrollo del análisis de la conceptualización de la integral definida en los estudiantes de segundo año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas de la Universidad Politécnica de Nicaragua. Se tomó en esta parte del estudio los siguientes sub-escenarios:

La sección de clase de II año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas del turno matutino, ubicada en el Pabellón o edificio I aula 12 (I-12), segunda planta, la consideramos importante, porque es el lugar donde se realizaron las observaciones e interacciones directas en la implementación de la Unidad Didáctica. El otro sub-escenario es la sección I-13 correspondiente a los estudiantes de segundo año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas del turno vespertino, a los cuales se les aplicó el cuestionario uno de evaluación, con el propósito de identificar las conceptualizaciones adquiridas después de un proceso de enseñanza aprendizaje sin la implementación de la U.D.

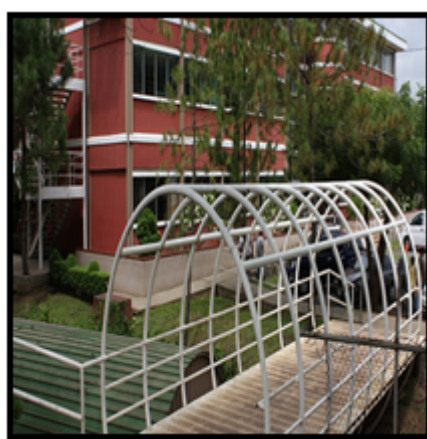


Figura 3.1: *Edificio I, de la UPOLI*



Figura 3.2: *Aula I-12*

Ambas poseen un área de 61.70 metros cuadrados, en su interior se encuentran distribuidas 51 sillas de madera y hierro con un espacio de 1.2 metros cuadrados que permite la movilidad entre docentes y estudiantes, aunque se utilizan menos de 43 correspondiente a la matrícula en la asignatura de Matemática Aplicada, también posee un escritorio de madera para el uso del docente con su respectiva silla, en la parte frontal dos pizarras acrílicas y dos abanicos, igual cantidad de estos en la parte trasera del salón.

En los laterales de la sección posee ventanales que permiten la ventilación e iluminación.

3.4. SELECCIÓN DE LOS INFORMANTES

En esta etapa de la investigación cualitativa, se define la muestra de forma intencionada, para seleccionar a los informantes ideales, que nos darán información sobre las conceptualizaciones sobre la integral definida.

Primero se tomó una muestra corresponde al grupo de informantes claves (grupo 1), al cual se le aplicó la Unidad Didáctica, en adelante nos referiremos a este como GAU. Cabe señalar que el grupo completo lo conformaban 41 estudiantes, se seleccionó esta muestra, tomando como referencia los resultados de un cuestionario cero y ciertos criterios de inclusión que especificamos a continuación.

Criterio de Inclusión		Estudiantes - grupo (GAU)					
		1	2	3	4	5	6
1. Asistencia a clases de Matemática Aplicada con un mínimo del 80%.		✓	✓	✓	✓	✓	✓
2. Llevar por primera vez el curso Matemática Aplicada.		✓	✓	✓	✓	✓	✓
3. Participación activa en el desarrollo de las clases de Matemática I.		✓	✓	✓	✓	✓	✓
4. Desempeño académico del primer parcial de la asignatura Matemática Aplicada.	Notable					✓	✓
	Bueno			✓	✓		
	Regular	✓	✓				
5. Resultados del cuestionario cero.	Notable					✓	✓
	Bueno			✓	✓		
	Regular	✓	✓				

Ahora bien, para realizar la comparación de las conceptualizaciones que tienen los estudiantes del grupo GAU, fue necesario seleccionar a un grupo diferente de informantes de la carrera de Contaduría Pública de II- año, y estos fueron los del turno vespertino, a los que no se le implementó la U.D, pero estuvieron sometidos paralelamente a un proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida. A este último grupo llamaremos en adelante grupo GNU. El criterio de selección fue intencional, en este caso el docente a cargo del grupo de clase, ayudó a la selección, quedando la matriz de criterios de inclusión de la siguiente manera:

Criterio de Inclusión		Estudiantes-grupo GNU					
		7	8	9	10	11	12
1. Asistencia a clases de Matemática Aplicada, con un mínimo del 80%.		✓	✓	✓	✓	✓	✓
2. Llevar por primera vez el curso Matemática Aplicada.		✓	✓	✓	✓	✓	✓
3. Participación activa en el desarrollo de las clases de Matemática I.		✓	✓	✓	✓	✓	✓
4. Desempeño académico del primer	Notable					✓	✓

Por tanto, los informantes claves en esta etapa del estudio son doce estudiantes de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas de la UPOLI.

3.5. INSTRUMENTOS

Para el análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes, respecto a la integral definida, se utilizaron las siguientes estrategias para recolectar datos: observación participante, encuestas cualitativa y entrevistas. Empezaremos con la descripción de cada uno de los instrumentos, resaltado el propósito de cada uno, además de la fecha y datos generales del grupo.

La observación participante se prolongó en todo el primer semestre del 2017. Los registros se registraron con los siguientes instrumentos:

1. El diario del maestro, usado con el estilo de relato abierto en un cuadernillo. El hecho de llevar esta bitácora hizo posible que pudiera registrar y describir, casi de manera instantánea, las incidencias que se presentaron en el aula, las conductas de los estudiantes, los fenómenos y los sentimientos de los alumnos. Pero lo primordial es que permitió valorar todas las experiencias en lo posible.

Formulario del Diario del maestro:

Profesora: _____ Sesión: _____ Fecha: _____

Asignatura: _____

Unidad Didáctica: _____

1. ¿Qué ha ocurrido hoy en clase?

2. ¿Qué aspectos de la sesión valoro como positivos y negativos?

3. ¿Qué recomiendo cambiar para futuras clases?

Figura 3.3: *Diario del maestro*

También, se utilizó el diario del maestro en formato de plantilla o ficha estándar para cada sesión. Su uso, facilitó la oportunidad de identificar y registrar ciertas cuestiones al finalizar dicha clase. Esta ficha permitió sintetizar de manera más puntual algunos aspectos del relato abierto.

2. El cuestionario de opinión del alumno. Éste, tuvo una doble utilidad, por un lado, permitió obtener una valoración particular de cada estudiante sobre el desarrollo de las actividades, qué tan alto fue su nivel de asimilación del contenido y cuál es su apreciación sobre la gestión del docente en el aula. Del mismo modo, facilitó consensuar con los educandos cómo se les podrían evaluar los conocimientos adquiridos, se aplicó durante la última sesión.

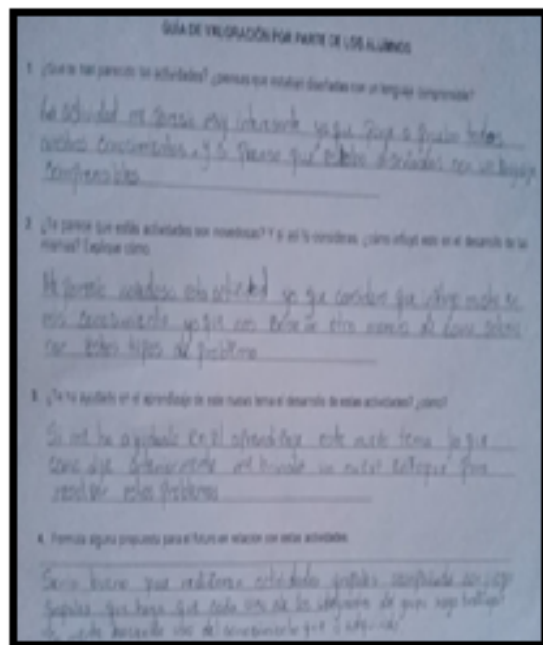


Figura 3.4: *Diario del maestro*

Descripción del grupo al que se aplicó la observación participante

Esta se implementó durante el primer semestre del año en curso a los estudiantes de II- año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas del turno matutino de la UPOLI, el aula de clase de este grupo estaba ubicado en el edificio I aula 13 (I-13) de la segunda planta. A este grupo de clases lo denotamos como grupo GAU, al cual se le aplicó la U.D. Este estaba constituido por 41 estudiantes, 21 mujeres y 20 varones.

Esta estrategia se aplicó con el propósito de recolectar información sobre las conceptualizaciones que realizan los estudiantes y ayudó en gran manera a orientar el proceso de construcción del concepto, al implementar la U.D, así como para dar seguimiento a los informantes claves. Cabe destacar que gracias a la observación participante, se logró reorientar las actividades propuestas para la evolución en la U.D, por ejemplo se detectó que los estudiantes se limitaban a contestar sólo lo que se les pedía sin justificar, por tanto a la luz de la situación junto con el tutor se procedió a cambiar la estructura de la evaluación, inicialmente era selección múltiple.

Para la técnica de entrevista en profundidad, se utilizó una guía de entrevista como instrumento.

La entrevista se aplicó a una muestra intencionada de seis estudiantes del grupo 1 de la carrera de Contaduría Pública del turno matutino, se realizó esta actividad el día 08 de mayo del año 2017, empezando a las 10:00 am. Cada informante clave fue entrevistado de manera individual sin tomar en cuenta el tiempo para la ejecución de la misma. Se aplicó con el propósito de profundizar en información sobre las conceptualizaciones iniciales de los estudiantes sobre integral definida antes de la implementación de la U.D, enriqueciendo la información obtenida del cuestionario cero, aplicado días previos.



Figura 3.5: *Diario del maestro*

En la encuesta cualitativa se utilizaron como instrumentos dos cuestionarios abiertos.

1. Cuestionario cero. Se aplicó con el propósito de recolectar información sobre las conceptualizaciones previas o puntos de partidas del estudiantado del grupo GAU, sobre la integral definida.



Figura 3.6: *Cuestionario cero*

Descripción del grupo al que se aplicó el cuestionario cero

2. El cuestionario cero, se aplicó a los estudiantes de II- año de la carrera de Contaduría Pública del turno matutino de la UPOLI, es decir, el grupo GAU. Se desarrolló el día 05 de mayo del año 2017, con un tiempo estimado para contestar de 60 minutos, empezando a las 10: 00 am. El número de estudiantes fue de 41, 21 mujeres y 20 varones.



Figura 3.7: *Cuestionario cero*

El problema número 3, del cuestionario que acabamos de mostrar fue seleccionado para analizar las conceptualizaciones previas sobre integral definida. Dado que los dos primeros solo nos dan información sobre los conocimientos previos, necesarios para empezar el nuevo contenido y el último lo descartamos por qué la mayoría no lo contesto, algunos sólo dijeron: está definida o tiene límite.

El Cuestionario uno. Se aplicó a los grupos GAU y al GNU de estudiantes de la carrera de Contaduría Públicas y Finanzas de segundo año, una vez concluido el proceso de enseñanza aprendizaje del contenido integral definida. Con el propósito de recolectar información sobre las conceptualizaciones de este contenido.

Descripción de los grupos a los que se aplicó el cuestionario uno

- El grupo GAU de la carrera de Contaduría Pública del turno matutino, los que experimentaron la innovación didáctica sobre integral definida, realizaron esta actividad de evaluación el día 13 de junio del año 2017, con un tiempo máximo de 60 minutos, empezando a las 7:30 am.



Figura 3.8: *Cuestionario uno*

- El grupo GNU del turno vespertino, a cual no se le aplicó la nueva metodología, realizó este cuestionario el último día de clase del semestre, el 27 de junio de tres de la tarde. La diferencia en la fecha se debe a varias razones, una fue porque este grupo aún no habían visto uno de las aplicaciones de la integral definida que se evaluaría en el cuestionario, esto de acuerdo al sílabo, por lo que nos pareció ético esperar para evaluar de forma justa los conocimientos adquiridos. El otro factor que manifestaba el docente a cargo, fue que en estas dos semanas de clases los estudiantes tenían programado dos pruebas, una de ella era el II-examen parcial del segundo semestre, por lo que se tuvo que ne-

gociar con los estudiantes el día idóneo para que colaboraran, sin perjudicar el proceso de enseñanza aprendizaje.

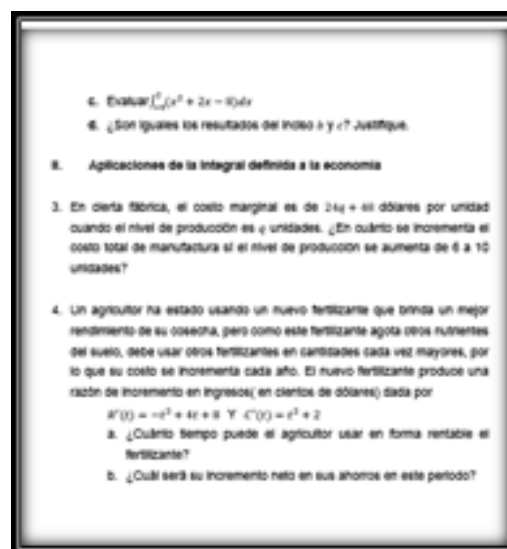


Figura 3.9: *Cuestionario uno*

3.6. TÉCNICAS DE ANÁLISIS

El análisis cualitativo es un proceso dinámico y creativo que se alimenta fundamentalmente de la experiencia directa del investigador en los escenarios. Según. Rojas (2000), “El análisis de la información consiste en separar los elementos básicos de la información y examinarlos con el propósito de responder a las distintas cuestiones planteadas en la investigación”. Las técnicas de análisis en este estudio fueron redes sistémicas para la organización e interpretación de los datos cualitativos obtenidos de los diferentes instrumentos es decir, la entrevista, cuestionarios cero y uno. Esta técnica la detallamos a continuación de manera general.

3.6.1. Red sistémica

En el capítulo uno sobre el diagnóstico, en el apartado de análisis no utilizamos esta técnica, dado que las repuestas de los estudiantes no fueron variadas, por lo que el volumen de datos fue más fácil de manejar sólo con matrices de categorías.

Ahora en este capítulo, las repuestas se volvieron datos abundantes y ricos para el análisis, pero esto implicó utilizar otra técnica que ayudara con esta nueva situación. Por lo que se decidió trabajar con redes

sistémicas, dado que estas ayudan a comprender la lógica del estudiante, identificando las relaciones entre las palabras y las ideas expresadas. Además facilitan la identificación de los posibles puntos de anclaje entre los conocimientos de sentido común y de experto lo que promueve la identificación de los errores desde un punto de vista más útil de la enseñanza y aprendizaje (Sanmartí 2012).

Entenderemos red sistémica como un medio de comunicación del resultado de una categorización aplicada a los datos recogidos, donde la categorización es entendida como la actividad resultante de colocar los datos que se poseen en una serie de casilleros que han sido etiquetados para este fin. En este sentido, se puede ver una red sistémica como un mapa de las categorías escogidas durante el análisis de ciertos datos donde resaltan las relaciones que vinculan estas categorías. (Bliss, Monk & Ogborn, 1983, citado por Calvo 1998).

En general, la estructura que tienen estos esquemas de análisis se puede apreciar en la figura 1

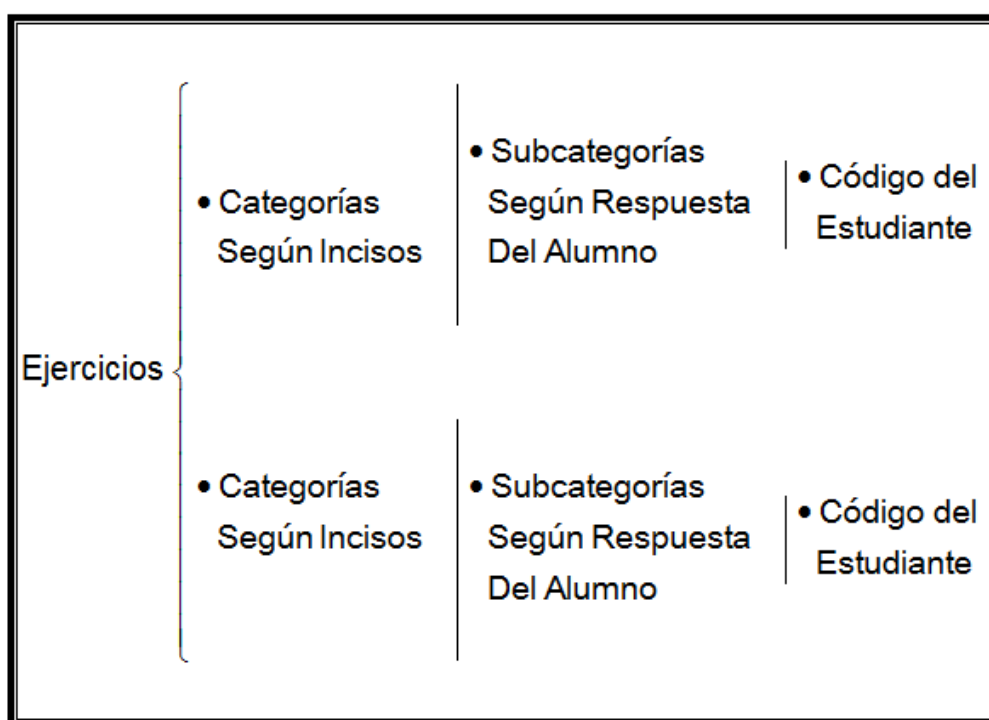


Figura 3.10: *Red sistémica general*

Para ser más preciso, la red sistémica que se construye en este trabajo, tiene como referencia las siguientes reglas, según por Bliss, Monk y Ogborn, citados por Mendoza. (2013):

- Se utiliza un paréntesis de llave ({}) para indicar que las categorías de la derecha son incluyentes entre sí.
- Se utiliza una línea recta (|) para indicar que las categorías de la derecha son excluyentes entre sí.

Figura 3.11: *Red sistémica general*

- **Preestructural:** Sin comprender lo que se le pide, la tarea respecto a la integral definida, no es abordada adecuadamente o está equivocada, desconocimiento de fórmulas, teoremas y conceptos. Usa información irrelevante y aislada sobre la integral definida.
- **Uniestructural:** Los estudiantes se enfocan en un aspecto relevante, realizan conexiones simples y obvias, pero no tienen una comprensión adecuada del concepto de integral definida. O Plantean adecuadamente el problema pero no pueden hacer mayores conexiones sobre la integral definida.
- **Multiestructural:** Los estudiantes realizan varias conexiones, utilizan más de una representación del concepto (gráfico, aritmético, algebraico y analítico) adecuados sobre la integral definida. Además pueden integrar aplicaciones de la integral definida y relacionarlos con problemas de su entorno, pero no pueden unificarlo como un todo para dar respuesta a la situación sobre integral definida.
- **Relacional:** Enlazan e integran muchos esquemas conceptuales y hacen uso de las representaciones del concepto para explicar claramente y dar sentido lógico al problema sobre integral definida.

3.7. ANÁLISIS INTENSIVO DE LA INFORMACIÓN

En esta sección se exhibe el análisis de los resultados combinando y armonizando dos puntos de vistas, descriptivo e interpretativo, referente a los propósitos planteados en el estudio. A continuación se muestran los detalles:

3.7.1. Análisis Descriptivo

1. Identificar las conceptualizaciones que adquieren los estudiantes de Contaduría Pública respecto a la integral definida, antes y después de la implementación de la Unidad Didáctica.

Este propósito hace alusión al grupo que experimentó la U.D y que hemos llamado **GAU**. Entonces iniciamos con la organización y análisis, mediante esquemas del protocolo escrito sobre las resoluciones de los alumnos a los cuestionarios uno y cero. Estos datos primarios suministran información sobre la conceptualización de la integral definida, por parte de los estudiantes, mediante la taxonomía SOLO.

3.7.1.1. Antes de la Implementación de la U.D

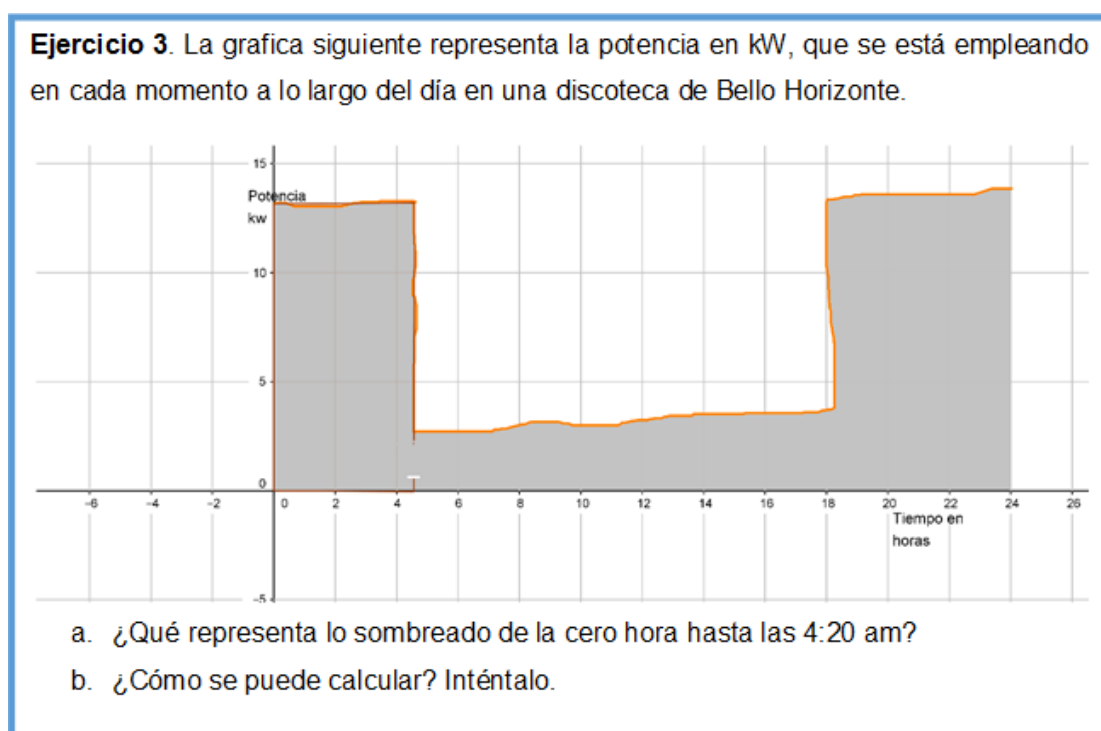


Figura 3.12: *Red sistémica general*

Este ejercicio tiene como propósito, identificar cómo los estudiantes del grupo GAU conceptualizan la integral definida, usando sus conocimientos previos, para dar solución a una situación problemática

de su entorno. Este análisis se realiza primero con una red sistémica y luego se complementa con el análisis de entrevista mediante una matriz que sintetiza la información.

Empezamos con los detalles de la red sistémica.

ANTES DE LA IMPLEMENTACIÓN DE U.D

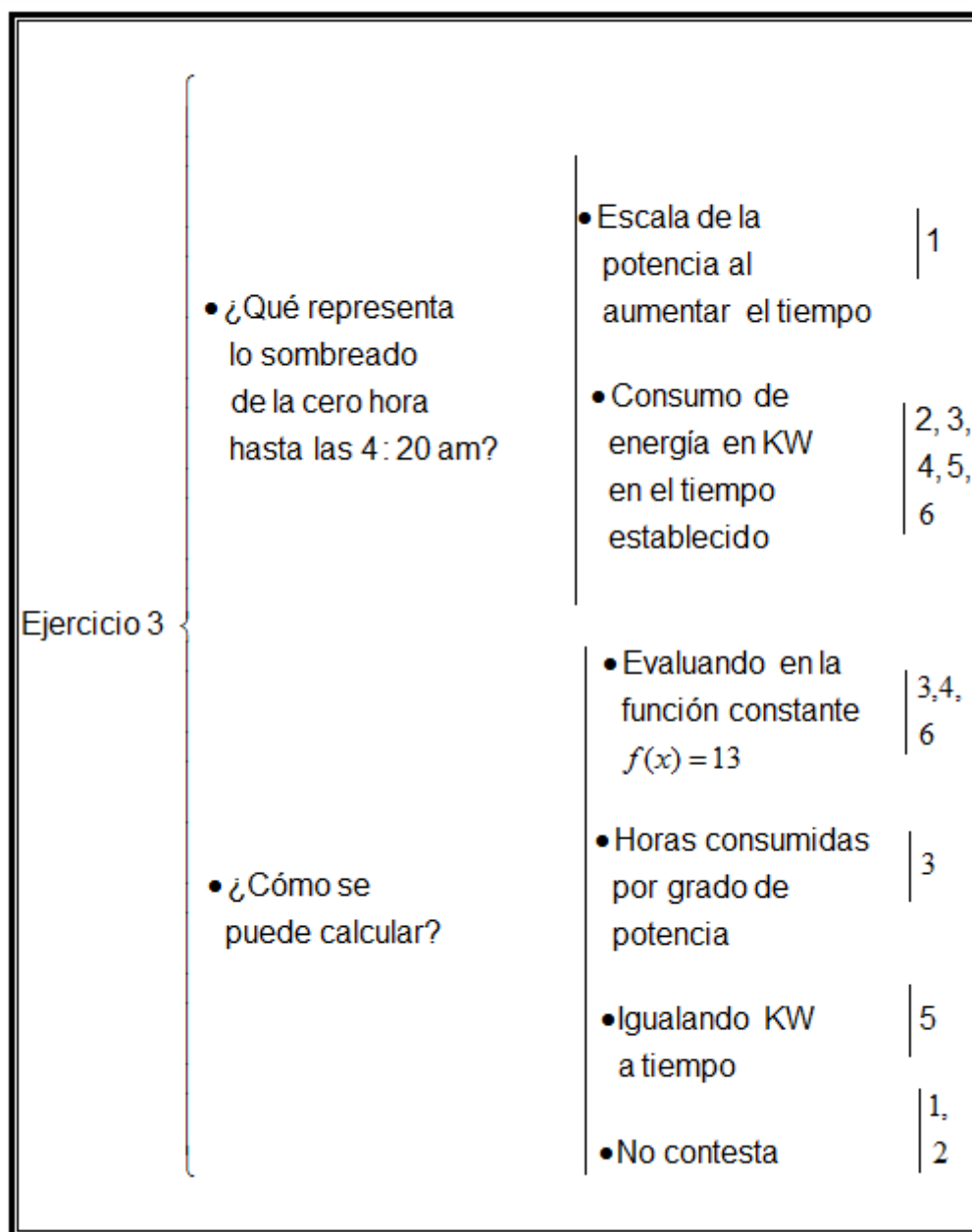


Figura 3.13: Red sistémica, para el ejercicio 3, antes de U.D

En la siguiente tabla se muestra un resumen de la entrevista, la cual se complementa con la red sistémica mostrada anteriormente para la clasificación según taxonomía SOLO:

EJES DE ANALISIS	Informantes Claves – Estudiantes del grupo GAU					
	1	2	3	4	5	6
Cálculo del consumo energético	Lo sombreado es el consumo de energía. Se calcula tal vez como una función lineal.	Lo sombreado es el consumo de energía, la variación. Si fuera velocidad sería distancia por tiempo.	Ese sombreado es consumidas por grado de potencia. ES una función constante, siempre consume 13kw por hora.	Lo sombreado es el consumo de la energía. Siempre es 13 al evaluar en la función.	Lo sombreado es lo que trabajó o consumió de la energía de la disco. Es como una función constante siempre da 12.5	Lo sombreado representa el consumo y de fluido de energía. Se calcula como una función constante, no variaba En la cuarta hora da 13 y en las otras.

Los resultados del análisis descriptivo los mostramos en la siguiente tabla, las que nos permiten tener información sobre los niveles de razonamiento de los estudiantes sobre la integral definida ante de la implementación de la Unidad Didáctica. En la primera columna se aprecia los códigos de los estudiantes 1, 2, 3, 4, 5, 6 y luego las categorías de conceptualización. Si los resultados se leen horizontalmente, nos da la diagnosis de cada estudiante (que se indica con una X); mientras que la lectura vertical nos da la submuestra.

Estudiante	Categorías de Conceptualizaciones de la integral definida			
	Pre estructural	Uni estructural	Multi estructural	Relacional
1	X			
2	X			
3		X		
4		X		
5		X		
6		X		
Total	2	4	0	0

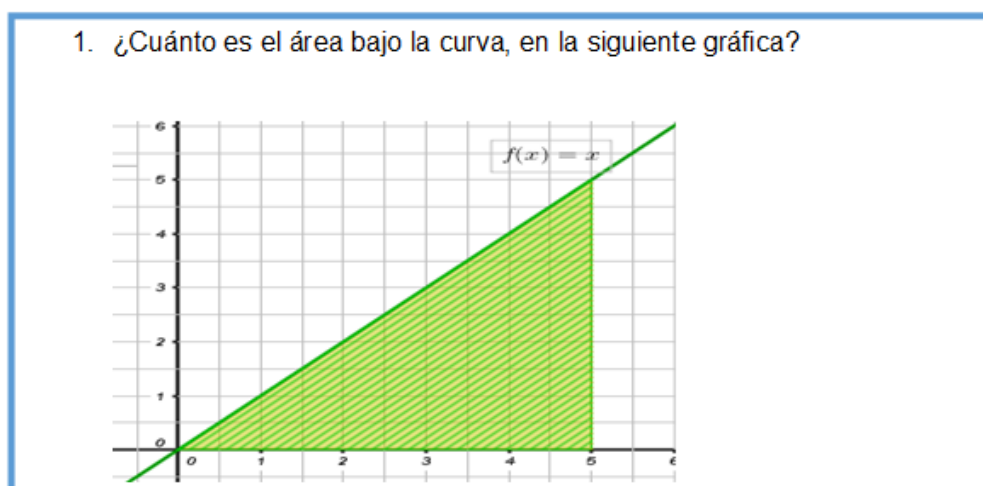
Figura 3.14: *Tabla 1. Resultados del análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes*

Se puede apreciar que la mayoría de los estudiantes se encuentran en los niveles más bajos de la categoría SOLO, es decir uniestructural y preestructural, por lo que se infiere que la tarea es muy difícil para los estudiantes.

3.7.1.2. Después de la Implementación de la Unidad Didáctica

Se analizan dos ejercicios del cuestionario uno, tomando uno bajo contexto matemático y otro bajo contexto de la economía. El análisis se realizó exclusivamente para el grupo GAU.

Ejercicio 1(bajo contexto matemático)



Este ejercicio tiene como propósito, investigar cómo los estudiantes del grupo GAU resuelve ejercicios sobre área, usando todos los esquemas conceptuales, para dar resolución a una situación bajo contexto matemático. Los datos se organizaron en una red sistémica que mostramos a continuación y luego se ubica una tabla2, donde se ubican a los estudiantes según sus niveles de razonamiento, a través del modelo SOLO.

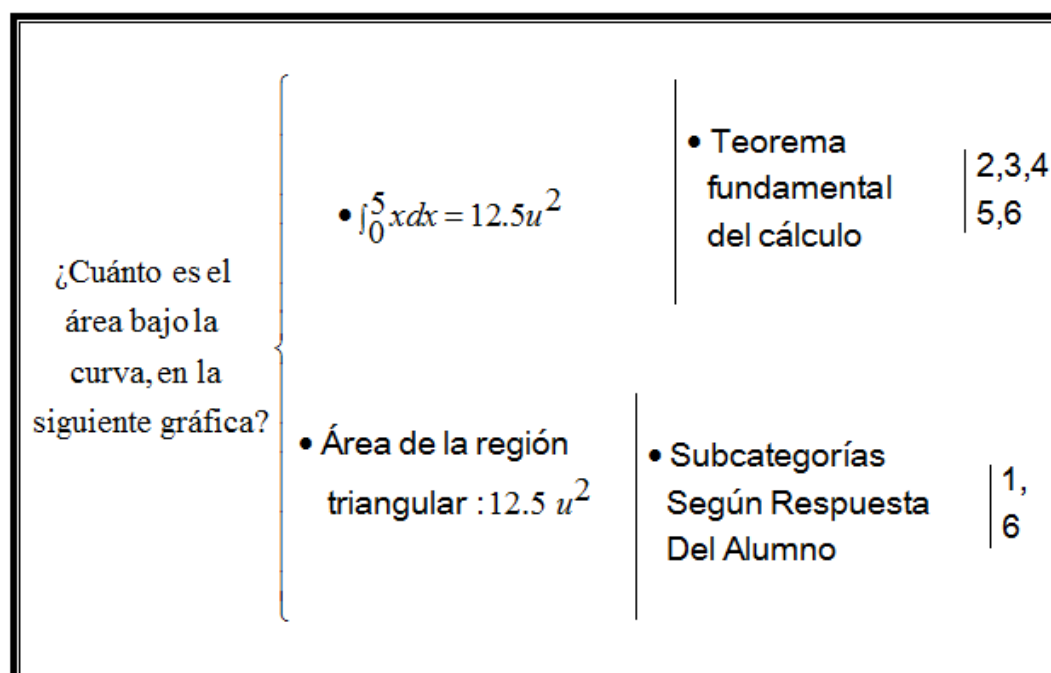


Figura 3.15: Red sistémica, para el ejercicio 1, después de U.D

Los resultados del análisis descriptivo después de la implementación de la U.D, los mostramos en la siguiente tabla.

Estudiante	Categorías de Conceptualización			
	Pre estructural	Uni estructural	Multi estructural	Relacional
1				X
2			X	
3			X	
4			X	
5				X
6				X
Total	0	0	3	3

Figura 3.16: *Tabla2. Resultados del análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes*

Puede evidenciarse ciertamente, la influencia de la innovación didáctica en el ejercicio1, este ejercicio es bastante semejante al propuesto en la el cuestionario cero, en el cual los estudiantes mostraban dificultades para plantear y resolver la situación planteada, pero ahora lo superan. De esta manera ocupan un 50 % en el nivel relacional y el otro 50 % en el multiestructural.

Respecto al contexto económico, los resultados los analizamos a continuación:

2. En cierta fábrica, el costo marginal es de $24q + 48$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. ¿En cuánto se incrementa el costo total de manufactura si el nivel de producción se aumenta de 6 a 10 unidades?

Este ejercicio tiene como propósito, investigar cómo los estudiantes del grupo GAU, integran diferentes conceptos matemáticos, financieros y económicos para resolver problemas. Los datos se organizaron en una red sistémica que mostramos a continuación y luego se presenta una tabla3, donde se ubican a los estudiantes según sus niveles de razonamiento, a través del modelo SOLO.

Ejercicio 2 • $\int_6^{10} (24q + 48) dq = 960$	1,2, 3,4, 5,6
---	---

Figura 3.17: Red sistémica, para el ejercicio 2, después de U.D

A continuación se presentan las correspondientes categorías de conceptualización para el este ejercicio:

Categorías de Conceptualización				
Estudiante	Pre estructural	Uni estructural	Multi estructural	Relacional
1			X	
2				X
3				X
4			X	
5				X
6				X
Total	0	0	2	4

Figura 3.18: Tabla 3. Resultados del análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes

Nuevamente la información obtenida la tabla 3 muestra el impacto positivo de la U.D, en las conceptualizaciones iniciales de los docentes sobre la integral definida. De esta manera el % se ubica en el nivel relacional y el otro 33 % en el multiestructural. Se observa que los estudiantes muestran mejor desempeños en problemas bajo contexto económico, propio de su perfil profesional.

Bajo este análisis descriptivo, hemos podido identificar que la conceptualización inicial de los estudiantes del grupo GAU, sobre la integral definida, mediante la taxonomía SOLO fueron las siguientes:

1. **Preestructural:** Los estudiantes no entienden los datos del problema, no son capaz de realizar ninguna relación lógica para plantear el problema.
2. **Uniestructural:** Los estudiantes se enfocan un aspecto relevante de función, pero no pueden unificar sus conocimientos previos para resolver la tarea.

Luego de la implementación de la U.D, identificamos las siguientes conceptualizaciones de los estudiantes sobre la integral definida, mediante la taxonomía SOLO fueron las siguientes:

1. **Multiestructural:** Los estudiantes realizan al menos dos conexiones entre conceptos o teoremas; ya sea de costos totales, marginales, variación de costo y la integral definida. Representando esta última por lo menos un registro de representación (aritmético, algebraico y analítico). Plantean integrales definidas en situaciones bajo algún contexto y las resuelven mediante la regla de Barrow y dan respuesta sin hacer enlaces completos o cometen errores aritméticos o de interpretación.
2. **Relacional:** Enlazan e integran muchos esquemas conceptuales muestra dominio de varios componentes tales como concepto de costo total, costo marginal, interpretan y plantea la integral definida evaluando con la resuelve regla de Barrow, además dan sentido lógico al problema al contestar adecuadamente a la pregunta, lo que deja en evidencia su competencia de saber comunicar.

Mostraremos en las siguientes tablas, los cambios conceptuales de los estudiantes, como resultado de la aplicación de la Unidad Didáctica.

Categorías	Evolución del nivel de conocimiento sobre el concepto integral definida en problemas bajo contexto Matemático. Grupo GAU.											
Nivel Relacional												
Nivel Multiestructural												
Nivel Uniestructural												
Nivel Preestructural												
	Antes	Después	Antes	Después	Antes	Después	Antes	Después	Antes	Después	Antes	Después
	1		2		3		4		5		6	

La tabla anterior, nos indica que los estudiantes mejoran sus conceptualizaciones iniciales respecto a la integral definida al recibir metodologías innovadoras, al pasar de los niveles más bajos a las superiores de la taxonomía al trabajar con problemas bajo contexto matemático.

Categorías	Evolución del nivel de conocimiento sobre el concepto integral definida en problemas bajo contexto Económico. Grupo GAU.											
Nivel Relacional												
Nivel Multiestructural												
Nivel Uniestructural												
Nivel Preestructural												
	Antes	Después	Antes	Después	Antes	Después	Antes	Después	Antes	Después	Antes	Después
	1		2		3		4		5		6	

Se identifica que los estudiantes pasan de los niveles más bajos de razonamiento sobre la conceptualización de la integral definida a los más altos, es decir, cambia la conceptualización simple de función, a una estructura más compleja que incluye la función integración, límites y diferencial, área, teorema de Barrow, conceptos económicos, etc. acompañado de más de algún registro de representación del concepto matemático y lo relacionan con aplicaciones económicas. Con todo lo antes expuesto podemos afirmar que las actividades que más, influyeron en la construcción del conocimiento de los alumnos sobre la integral definida, fueron aquellas donde los problemas estaban contextualizados al mundo de la administración y economía.

Ahora nos damos la tarea de analizar dos ejercicios del cuestionario uno, donde uno de ellos está bajo contexto matemático (con un nivel superior al analizado anteriormente) y otro en contexto económico, para comparar las conceptualizaciones de la integral definida de los grupos GAU y GNU y dar repuesta al **propósito 2: Comparar las conceptualizaciones sobre la integral definida, en dos grupos de Contaduría Pública a los cuales sólo a uno se le aplicó la unidad didáctica.**

Cabe señalar que la elección de estos dos ejercicios para comparar con el grupo, fue porque en ellos los estos estudiantes el grupo GNU contestaron con mayor frecuencia.

Ejercicio 2 del cuestionario uno (bajo contexto matemático)

2. Sea R, la región encerrada por el grafico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 8$, el eje de las x , y las rectas $x = -4$ y $x = 2$
 - a. Grafique y sombree el área.
 - b. Encuentre el área limitada por las curvas.
 - c. Evaluar $\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx$
 - d. ¿Son iguales los resultados del inciso b y c? Justifique.

Este ejercicio tiene como propósito comprobar si el estudiante comprende como calcular el área por medio de la integral definida, en regiones que se encuentran por debajo del eje OX. En las siguientes dos redes sistémicas se muestran los razonamientos o respuestas de los estudiantes del grupo GAU y GNU,

respecto a este ejercicio, posteriormente se muestra la tabla 4, donde se ubica a los estudiantes en los niveles de razonamiento bajo la taxonomía SOLO.

Nota: Los estudiantes del grupo GAU, están codificados del 1 al 6 y los estudiantes del grupo GNU aparecen del 7 al 12.

Ejercicio 2	• Grafica y sombrea el área	• Tabulando con el vértice y límites	1, 2, 4, 11, 12
		• Por intersección y vértice	6, 5
		• Tabulando con límites	3, 8, 7
		• No grafica	9, 10
		• No sombrea	7, 9, 10
	• Encuentre el área limitada por las curvas	• $36u^2$	1, 2, 5, 6
		• $-\int_2^4 (x^2 + 2x - 8)dx$	4, 3, 8
		• $-\int_{-4}^0 (x^2 + 2x - 8)dx + \int_{-4}^0 (x^2 + 2x - 8)dx = 36u^2$	11
		• $\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8)dx$	-16u ² 12
		• $\frac{52}{3}u^2$	7
		• No contesta	9, 1

Figura 3.19: Red sistémica, para ejercicio 2 para GAU y GNU

Ejercicio 2 {	• Evaluar $\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8)dx$	• $\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8)dx$	• -36 1, 2, 5, 6, 10 • $\neq -36$ 4
		• $-\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8)dx = 36$	11
		• No contesta	3, 7, 8, 9, 12
	• ¿Son iguales los resultados del inciso b y c? Justifica	• No, el área siempre es positiva	2, 4, 5, 6
		• No, las integrales nos pueden dar cualquier número racional	4
		• Son iguales	11, 12
		• No contesta	1, 3, 7, 8, 9, 10

Figura 3.20: Red sistémica, para ejercicio 2 para GAU y GNU (continuación)

A continuación se presentan las correspondientes categorías de conceptualización para el este ejercicio:

		Categorías de Conceptualización			
	Estudiante	Pre estructural	Uni estructural	Multi estructural	Relacional
GRUPO GAU	1			X	
	2				X
	3		X		
	4			X	
	5				X
	6				X
GRUPO GNU	7	X			
	8	X			
	9	X			
	10		X		
	11			X	
	12		X		
Total		3	3	3	3

Figura 3.21: *Tabla 4. Resultados del análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes GAU y GNU.*

Ante un problema bajo contexto Matemático el grupo GAU se ubica con 83 % en las escalas más altas del modelo, caso contrario con el grupo GNU. Mostrando tener mejor estructurado el concepto de integral definida, es decir una conceptualización rica en teoremas, definiciones, representaciones gráficas, aritméticas y algebraicas, además establecen que la integral definida puede ser un número racional, por tanto positivo, negativo o cero y bajo ciertas condiciones representa área. El grupo GNU, no hace conexiones claras del concepto no pudiendo argumentar la diferencia entre integral y área.

Veamos ahora el comportamiento de los grupos ante un problema bajo contexto económico. Aclaremos que estudiaremos nuevamente el problema 3 del cuestionario uno, originalmente se tenía pensado trabajar con el problema 4 de aplicaciones a la economía, que correspondía a utilidad máxima, pero no fue posible porque la mayoría de estudiantes del grupo GNU no lo trabajó, esto suponemos por ser el último del cuestionario.

Ejercicio 2. (Bajo contexto económico)

2. En cierta fábrica, el costo marginal es de $24q + 48$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. ¿En cuánto se incrementa el costo total de manufactura si el nivel de producción se aumenta de 6 a 10 unidades?

Este ejercicio tiene como propósito, investigar cómo los estudiantes del grupo integran diferentes conceptos matemáticos, financieros y económicos para resolver problemas.

Los datos se organizaron en una red sistémica que mostramos a continuación y luego se ubica una tabla5, donde se ubican a los estudiantes según sus niveles de razonamiento, a través del modelo SOLO.

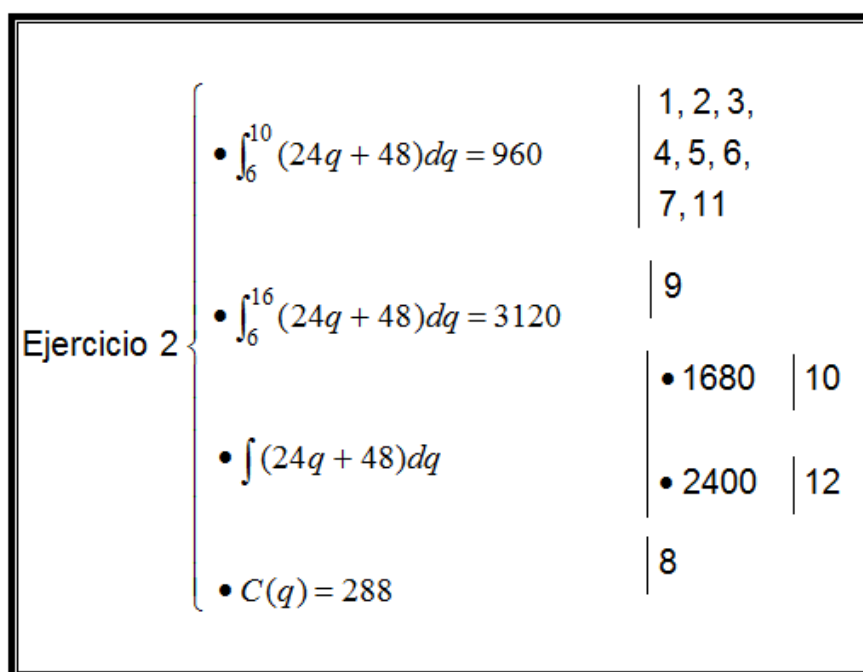


Figura 3.22: Red sistémica, para ejercicio 2 para GAU y GNU.

A continuación se presentan las correspondientes categorías de conceptualización para el este ejercicio de los grupos GAU y GNU:

		Categorías de Conceptualización			
	Estudiante	Pre estructural	Uni estructural	Multi estructural	Relacional
GRUPO GAU	1			X	
	2				X
	3				X
	4			X	
	5				X
	6				X
GRUPO GNU	7			X	
	8	X			
	9		X		
	10			X	
	11			X	
	12			X	
Total		1	1	6	4

Figura 3.23: *Tabla 5. Resultados del análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes.*

Como puede notarse en la tabla 5, al trabajar problemas bajo contexto económico, el grupo GAU se ubica en un 100 % en las más altas categorías, es decir Multiestructural y Relacional, lo que deja en evidencia la influencia de la U.D en la construcción del concepto de integral definida, mientras que el grupo GNU avanza en estas mismas categorías a un 67 %, ambos grupos obtienen mejores resultados ante problemas bajo contexto económico.

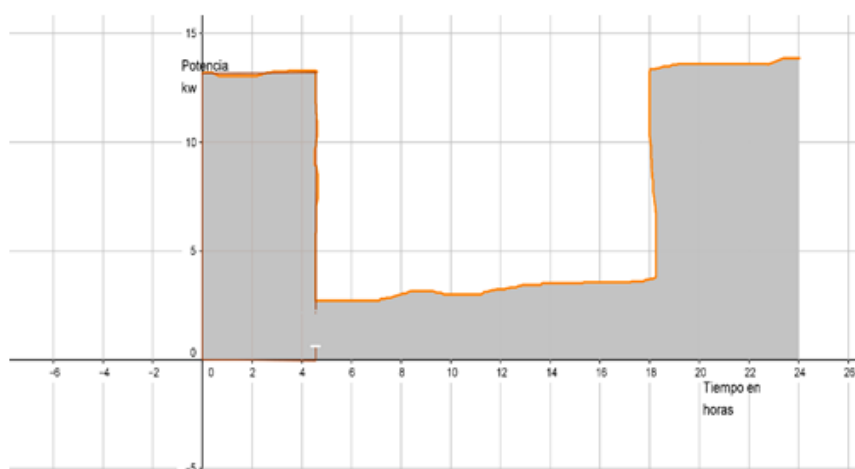
Que el grupo de estudiantes que recibieron clases sobre integral definida, usando la innovación didáctica, muestren mejores resultados en comparación con el otro, esto solo nos indica que la implementación de la U.D fue exitosa, como mencionamos antes estos estudiantes lograron formar esquemas conceptuales sólidos que le permiten enlazar en aplicaciones Matemáticas o económicos y financieros.

Las principales dificultades que impidieron lograr ubicar en los niveles superiores fueron, errores aritméticos al aplicar la regla de Barrow específicamente ante cambios de signos de expresiones entre paréntesis, obstáculos en algoritmo para la construcción de graficas (intersectos y en caso de función cuadrática la determinación del vértice) dificultades conceptuales de costo total, costo marginal, límites de integración al plantear la integral y análisis de lectura.

3.7.2. Análisis Interpretativo

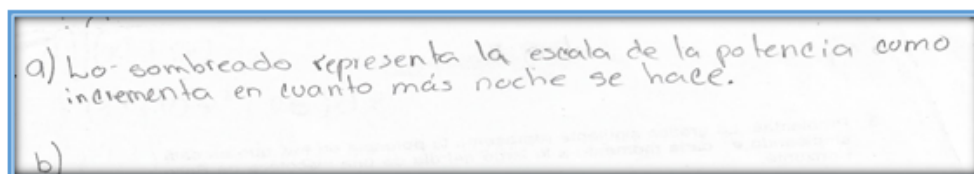
Analizaremos en primer lugar el proceso de evolución de los niveles de razonamiento de los estudiantes del **grupo GAU**, a partir de una exploración de sus conocimientos en el cuestionario cero ejercicio 3 y entrevista, para luego compararlo con situaciones problemáticas semejantes, después de haber experimentado la aplicación de la Unidad Didáctica.

Ejercicio 3. La grafica siguiente representa la potencia en kW, que se está empleando en cada momento a lo largo del día en una discoteca de Bello Horizonte.



- ¿Qué representa lo sombreado de la cero hora hasta las 4:20 am?
- ¿Cómo se puede calcular? Inténtalo.

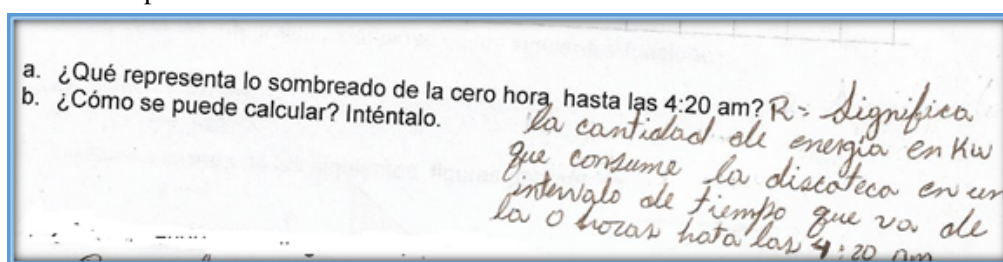
El **estudiante 1**, ante esta situación solo responde el inciso a:



En la entrevista trata de justificar ambos incisos considerando, que lo representado es una función lineal, pero no puede argumentar el cálculo. Por tanto se ubica:

Preestructural: No entiende lo que se le pide, no puede justificar.

Estudiante 2 responde:

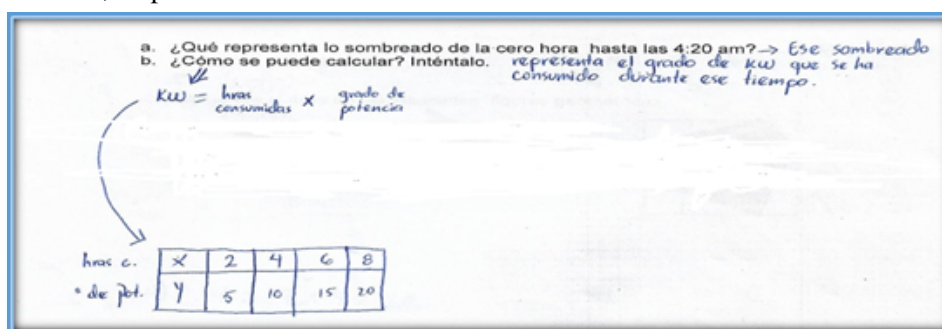


En la entrevista deduzco que si fuera velocidad sería distancia por tiempo. Considero que la relación que hace es por activar en esta tarea conocimientos de física respecto al desplazamiento, velocidad por tiempo.

Por tanto se ubica:

Preestructural: no entiende el problema, lo relaciona con un producto inadecuadamente.

El estudiante 3, responde:



En la entrevista re-evalúa sus conocimientos, dice que es una función constante y el producto siempre es 13, lo que demuestra que analiza bien el gráfico y evalúa en la función pero no puede argumentar repuesta.

Por tanto se ubica:

Uniestructural: se enfoca en un aspecto relevante, la función constante, pero no puede dar repuesta.

El **estudiante 4**, responde:

a. ¿Qué representa lo sombreado de la cero hora hasta las 4:20 am? ↴
 b. ¿Cómo se puede calcular? Inténtalo.

Esta pequeña sección del diagrama representa el máximo consumo de energía que tiene la discoteca a esta hora, por lo tanto disminuye se vuelve una constante, no teniendo variaciones.

b.)

x	0	2	4	
y	13	13	13	

$f(x) = 13$

En la entrevista explica que al evaluar siempre va a dar trece por ser constante la función, pero no puede justificar completamente la tarea.

Por tanto se ubica:

Uniestructural: se enfoca en un aspecto importante, la función constante y evalúa en cierto intervalo pero no puede dar respuesta.

Veamos lo que responde el **estudiante 5**:

a. Representa la potencia en kw, que se está empleando a un nivel determinado tiempo o momento en la gráfica nos muestra una representación de 24 horas, pero al indicar hasta las 4:20 am, nos muestra con qué potencia la discoteca Bello Horizonte trabaja hasta ese periodo de tiempo.

b. $10 \text{ kw} + 5 \text{ kw} = 2 + 4$
 $15 \text{ kw} = 6$
 $\text{kw} = \frac{6}{15}$
 $\text{kw} = 0.4$

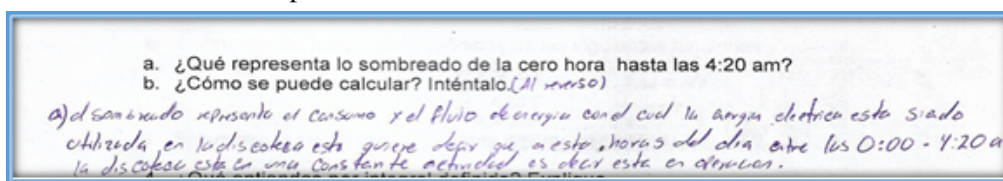
Se podría decir que esta en un nivel de 40% a lo largo del día.

En la entrevista al pedir que explique lo que hizo afirma que se puede sacar como un promedio, pero re-evalúa y dice que no tiene sentido lo que hace, pero que está segura que es una función constante que da 12.5 en cada hora.

Por tanto se ubica en:

Uniestructural: se enfoca en un aspecto importante, la función constante 12.5 pero no da respuesta completa.

Finalmente examinamos la repuesta del **estudiante 6**:



Función constante $y = 13 \text{ Kw}$
 $x = 7 \text{ horas}$

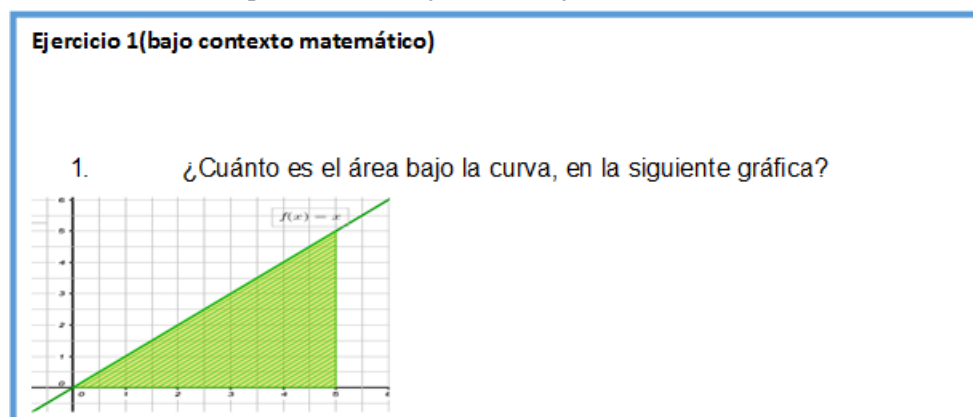
Kw	13	13	13	13	13
h	0	1	2	3	4

En la entrevista, dice que se puede determinar evaluando dado que es una función constante, pero cuando se le cuestiona sobre los 20 minutos, no lo puede interpretar. También lo ubicamos en un nivel

Uniestructural: se enfoca en un aspecto importante, la función constante 13 pero no da respuesta completa.

Como podemos constatar la mayoría de estudiantes están ubicados los niveles más bajos, pero esto muestra que sus conocimientos no son una hoja en blanco, sus conocimientos previos se activa y tratan de dar respuesta a la nueva situación. Podemos deducir que intuitivamente sus conocimientos respecto a situaciones que se pueden resolver con una integral definida están relacionados parcialmente con la de función.

Ahora analizaremos las respuestas de los ejercicios bajo contexto matemático del cuestionario 1.



La repuesta del **alumno 1** fue:

1. ¿Cuál es el área bajo la curva, en la siguiente gráfica?

$$a = \frac{b \times h}{2}$$

$$a = \frac{5 \times 5}{2}$$

$$a = 12.5$$

Trabaja efectivamente el problema, analiza el gráfico en el plano, plantea y resuelve de forma geo-

métrica usando fórmula del área de la región triangular, usa varios esquemas. Por lo tanto pasa del nivel preestructural al relacional.



La respuesta del **alumno 2** fue:

1. ¿Cuál es el área bajo la curva, en la siguiente gráfica?

$$= \int_0^5 x$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5$$

$$= \left[\frac{(5)^2}{2} \right] - \left[\frac{(0)^2}{2} \right]$$

$$= 12.5$$

Plantea efectivamente el problema, analiza el gráfico en el plano, resuelve de forma algebraica al reconocer que el área en ese caso corresponde a una integral definida usa varios esquemas conceptuales sólo que olvida expresar el diferencial dx . Por lo tanto pasa del nivel preestructural al multiestructural.



La respuesta del **alumno 3** fue:

1. ¿Cuál es el área bajo la curva, en la siguiente gráfica?

$$\int_0^5 x = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \frac{5.2}{2}$$

$$= \frac{25}{2}$$

$$A = 12.5$$

Analiza el gráfico en el plano efectivamente, plantea y resuelve de forma algebraica al reconocer que el área en ese caso, corresponde a una integral definida usa varios esquemas conceptuales, olvida expresar el diferencial dx . Por lo tanto pasa del nivel uniestructural al multiestructural.



Respecto a este ejercicio el **estudiante 4** responde:

1. ¿Cuál es el área bajo la curva, en la siguiente gráfica?

$$\int (x) = x$$

$$\int_0^5 x = [x^2]_0^5 = 5.2 = 25 u^2$$

Analiza el gráfico en el plano efectivamente, plantea y resuelve de forma algebraica al reconocer que el área en ese caso, corresponde a una integral definida usa varios esquemas conceptuales, olvida dx . Por lo tanto pasa del nivel uniestructural al multiestructural.

1. ¿Cuál es el área bajo la curva, en la siguiente gráfica?

$$\int (x) = x$$

$$\int_0^5 x = \left[x^2 \right]_0^5 = 5^2 = \underline{25 u^2}$$

El **estudiante 5**, responde:

1. ¿Cuál es el área bajo la curva, en la siguiente gráfica?

$$\int_0^5 (x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5$$

$$A = \frac{(5)^2}{2} - [0]$$

$$A = \frac{25}{2} u^2 = A = 12.5 u^2$$

Analiza el gráfico en el plano efectivamente, plantea correctamente la integral definida para determinar el área en unidades cuadradas, usa varios esquemas conceptuales apropiadamente. Por lo tanto pasa del nivel uniestructural al relacional.



Finalmente tenemos al **estudiante 6** con su repuesta:

1. ¿Cuál es el área bajo la curva, en la siguiente gráfica?

$$= \int_0^5 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5$$

$$= \left(\frac{(5)^2}{2} \right) - \left(\frac{(0)^2}{2} \right)$$

$$= \frac{25}{2} - 0$$

$$\boxed{A = 12.5 u^2}$$

$$A = \frac{5 \times 5}{2}$$

$$A = \frac{25}{2}$$

$$\boxed{A = 12.5 u^2}$$

Este estudiante muestra maestría en sus conocimientos, integra componentes geométricos, aritmético y algebraicos al usar dos caminos diferentes para dar solución al problema. Por tanto pasa de un nivel uniestructural al relacional.

1. ¿Cuál es el área bajo la curva, en la siguiente gráfica?

$$\int_0^5 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5$$

$$= \left(\frac{(5)^2}{2} \right) - \left(\frac{(0)^2}{2} \right)$$

$$= \frac{25}{2} - 0$$

$$A = 12.5 u^2$$

Handwritten calculations on the right:

$$A = \frac{5 \times 6}{2}$$

$$A = \frac{5 \times 5}{2}$$

$$A = \frac{25}{2}$$

$$A = 12.5 u^2$$

Ahora analizaremos otro problema del cuestionario 1 para determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes ante un problema bajo contexto económico.

3. En cierta fábrica, el costo marginal es de $24q + 48$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. ¿En cuánto se incrementa el costo total de manufactura si el nivel de producción se aumenta de 6 a 10 unidades?

Ante esta situación el **estudiante 1** responde lo siguiente:

$$\int_6^{10} (24q + 48)$$

$$= \left[\frac{24q^2}{2} + 48q \right]_6^{10}$$

$$= [12(10)^2 + 48(10)] - [12(6)^2 + 48(6)]$$

$$= 1680 - 720$$

$$= 960$$

Handwritten note on the right:

R = El costo total incrementa en 960 cuando el nivel de producción se aumenta de 6 a 10 unidades

Integra varios componentes tales como concepto de costo marginal, costo total, plantea la integral definida y resuelve aplicando regla de Barrow, además de contestar adecuadamente a la pregunta, lo que deja en evidencia su competencia de saber comunicar. Pero olvidó escribir dq , el cual es de mucha importancia, además debe saber escribir correctamente en el lenguaje matemático. Por tanto en este caso logra pasar de un nivel preestructural del cuestionario cero al multiestructural ante un caso aplicado a la economía.



El **estudiante 2**, contesta:

iii. - Aplicaciones de la integral definida a la economía

① $\int_6^{10} (24q + 48) dq$

$$= \left[\frac{24q^2}{2} + 48q \right]_6^{10}$$

$$= \left[\frac{24(10)^2}{2} + 48(10) \right] - \left[\frac{24(6)^2}{2} + 48(6) \right]$$

$$= [1680] - [720]$$

$$= 960$$

Si el nivel de producción se aumenta de 6 a 10 unid el costo total se incrementa a 960 de manufactura.

Integra magistralmente varios componentes tales como concepto de costo total, costo marginal, plantea la integral definida y resuelve aplicando regla de Barrow, además de contestar adecuadamente a la pregunta. Por tanto en este caso logra pasar de un nivel preestructural del cuestionario cero, al relacional ante un caso aplicado a la economía.



El **estudiante 3**, responde:

① $\int_6^{10} (24q + 48) dq = \left[\frac{24q^2}{2} + 48q \right]_6^{10}$

$$= \left[\frac{24(10)^2}{2} + 48(10) \right] - \left[\frac{24(6)^2}{2} + 48(6) \right]$$

$$= 1,680 - 720$$

$$= 960 \therefore \text{Si el nivel de producción se aumenta de 6 a 10 unidades el costo total incrementa en 960.}$$

Igual que en caso anterior muestra dominio de varios componentes tales como concepto de costo total, costo marginal, plantea la integral definida y resuelve aplicando regla de Barrow, además de contestar adecuadamente a la pregunta, lo que deja en evidencia su competencia de saber comunicar. Por tanto en este caso logra pasar de un nivel uniestructural del cuestionario cero al relacional ante un caso aplicado a la economía.



El **estudiante 4** ante este problema responde:

III 1) Costo marginal de $24q + 48$

$$\int_6^{10} (24q + 48) dq = \left[\frac{24q^2}{2} + 48q \right]_6^{10} = \left[\frac{24(10)^2}{2} + 48(10) \right] - \left[\frac{24(6)^2}{2} + 48(6) \right]$$

$$= 1680 - 720$$

$$= 960$$

R = el costo se incrementa en \$960 a la manufactura

Nuevamente vemos dominio de varios componentes tales como concepto de costo total, costo marginal, la integral definida y resuelve aplicando regla de Barrow, además de contestar adecuadamente a la pregunta, lo que deja en evidencia su competencia de saber comunicar. Pero olvidó el diferencial. Por tanto en este caso logra pasar de un nivel uniestructural del cuestionario cero al multiestructural ante un caso aplicado a la economía.



El **estudiante 5**, contesta:

$$\int_6^{10} (24q + 48) dq = \left[\frac{24q^2}{2} + 48q \right]_6^{10}$$

$$= \left[\frac{24(10)^2}{2} + 48(10) \right] - \left[\frac{24(6)^2}{2} + 48(6) \right]$$

$$= \left[\frac{2,400}{2} + 480 \right] - \left[\frac{864}{2} + 288 \right]$$

$$= 1,680 - 720$$

$$= 960$$

R = El costo total de manufactura, si el nivel de producción se aumenta de 6 a 10 unidades se incrementaría a un costo de 960 dólares por unidades.

Vemos dominio de varios componentes como concepto de costo total, costo marginal, la integral definida y resuelve aplicando regla de Barrow, además de contestar adecuadamente a la pregunta, lo que deja en evidencia su competencia de saber comunicar. Por tanto en este caso logra pasar de un nivel uniestructural del cuestionario cero a relacional ante un caso aplicado a la economía.



Caso similar ocurre con el **estudiante 6**:

Handwritten work for student 6:

$$a) \int_6^{10} (24x + 48) dx$$

$$= \left[\frac{24x^2}{2} + 48x \right]_6^{10}$$

$$= 24 \frac{(10)^2}{2} + 48(10) - \left[24 \frac{(6)^2}{2} + 48(6) \right]$$

$$= 1200 + 480 - 432 - 288$$

$$= 960$$

El costo se incrementa en 960 en sus niveles de producción entre estos intervalos 6-10.

Uniestructural



Relacional

Se infiere a lo largo de este análisis que los estudiantes evolucionan de no saber cómo resolver un problema, que se soluciona como una aplicación de la integral definida (sólo idea de función) bajo ciertas condiciones a superar esta barrera buscando la primitiva y evaluándola bajo las condiciones de la regla de Barrow. Parece ser más comprensible para los estudiantes trabajar con contextos relacionados con su perfil profesional.

Ahora veremos el análisis de los estudiantes tanto del grupo GAU Y GNU, ante situaciones donde aplican el concepto de integral definida y área. Aquí se muestra de forma resumida todos los estudiantes que están ubicados en la misma categoría según la Taxonomía SOLO. El ovalo rojo, en las fotos indicará algún error en la resolución del problema plantado.

2. Sea R, la región encerrada por el grafico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 8$, el eje de las x , y las rectas $x = -4$ y $x = 2$
- Grafique y sombree el área.
 - Encuentre el área limitada por las curvas.
 - Evaluar $\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx$
 - ¿Son iguales los resultados del inciso b y c? Justifique.

Empezamos mostrando a los alumnos ubicados en el **nivel preestructural**:

El **estudiante 7**, contesta ante este problema bajo contexto Matemático:

2. Sea R, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 8$, el eje de las x , y las rectas $x = -4$ y $x = 2$

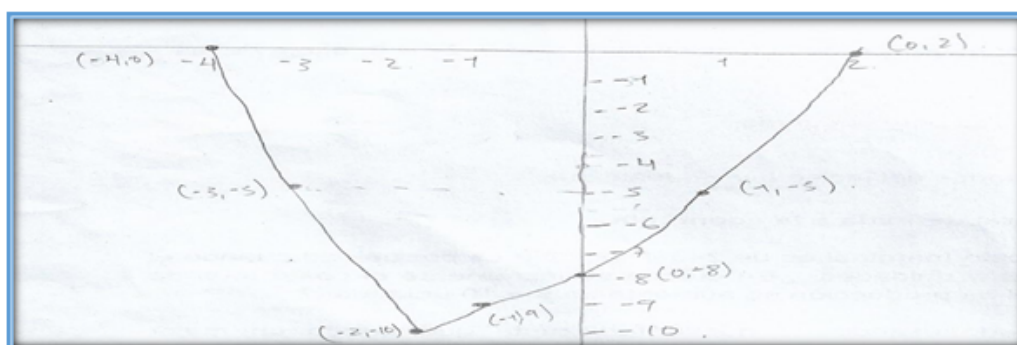
- Grafique y sombree el área.
- Encuentre el área limitada por las curvas.
- Evaluar $\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx$
- ¿Son iguales los resultados del inciso b y c? Justifique.

Handwritten work:

$$H = \int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 8x \right]_{-4}^2$$

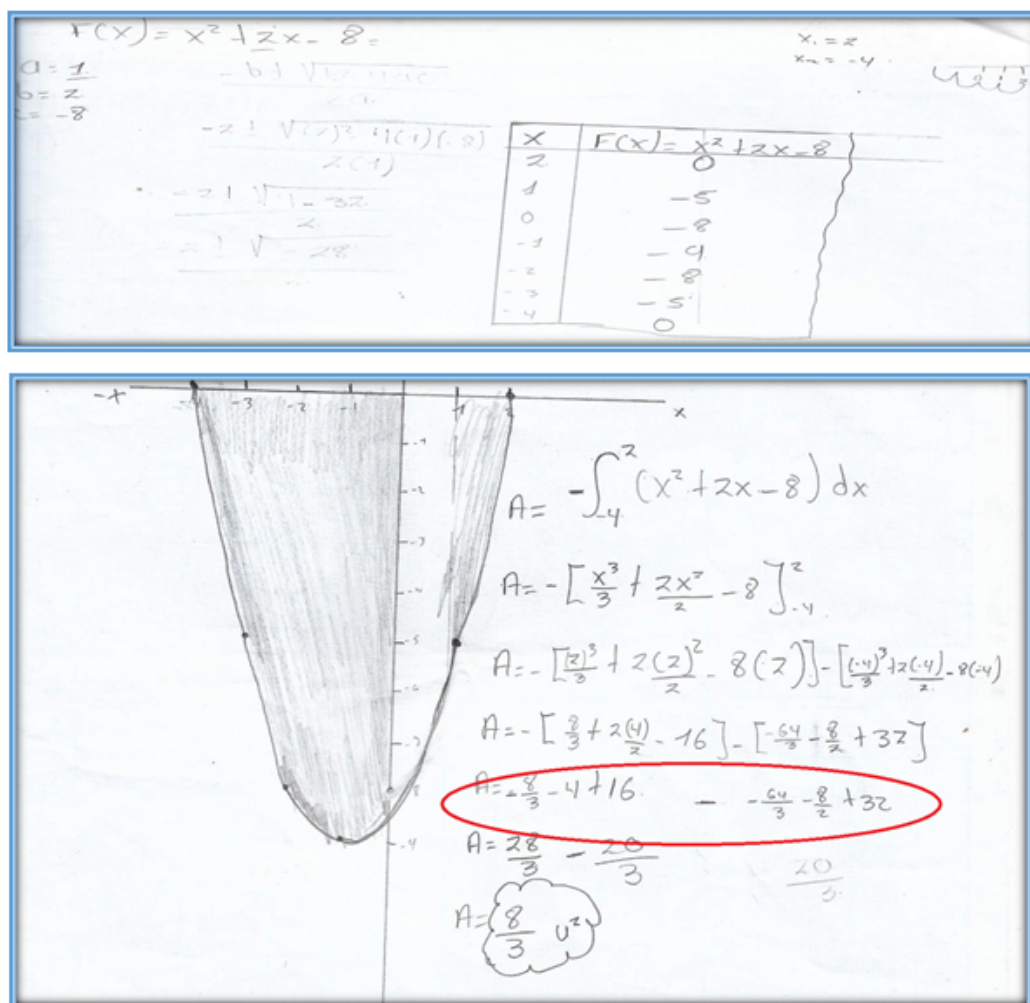
$$A = \frac{-28}{3} - \frac{80}{3}$$

$$H = \frac{52}{2} u^2$$


De los cuatro incisos sólo contesta parcialmente dos, muestra dificultad para realizar el grafico; el método de tabular entre los límites de integración, no le es efectivo y no sombre para representar la región a calcular. No tiene una conceptualización sólida de integral definida, ni la aplicación de esta cuando representa área, específicamente cuando la función es negativa en el intervalo.

No concibe que la integral puede ser negativa, el ovalo rojo nos muestra que comete un error aritmético, casi a fuerza, al restar $\frac{80}{3} - \frac{28}{3}$ para que le da positivo. Conceptualiza la integral como área.

El **estudiante 8** ubicado en esta misma categoría contesta:



Solo trabaja parcialmente dos incisos, no aborda adecuadamente la tarea, no sombrea adecuadamente el área solicitada, tabula, plantea bien la integral definida como aplicación para determinar área, pero cometes error aritmético, respecto a la ley de los signos para sumar o mal uso de la calculadora.

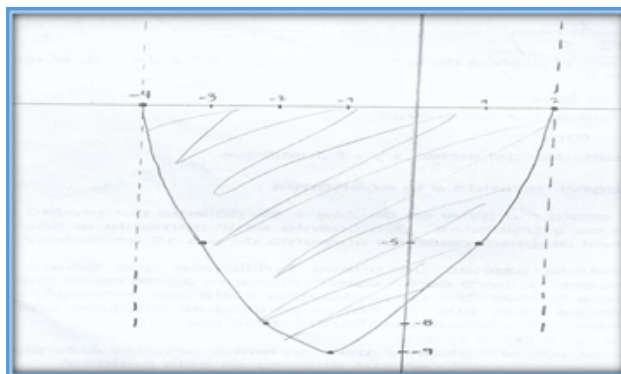
El estudiante 9:

2. Sea R, la región encerrada por el grafico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 8$, el eje de las x, y las rectas $x = -4$ y $x = 2$
- Grafique y sombree el área.
 - Encuentre el área limitada por las curvas.
 - Evaluar $\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx$
 - ¿Son iguales los resultados del inciso b y c? Justifique.

Este estudiante no responde ningún inciso, consideramos que posee conocimientos al respecto, pero no podemos decir por qué no trabajo. En resumen, los estudiantes ubicados en nivel preestructural son: 7, 8, y 9.

Veamos ahora a los alumnos ubicados en la categoría **Uniestructural**:

El estudiante 3, responde:



$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c|c|c|c|c}
 x & -1 & -2 & -3 & -4 \\
 \hline
 y & -9 & -8 & -5 & 0
 \end{array} &
 \begin{array}{c|c|c}
 x & 1 & 2 \\
 \hline
 y & -5 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 8x \right]_{-4}^2 \\
 &= \left[\frac{2^3}{3} + \frac{2(2)^2}{2} - 8(2) \right] - \left[\frac{-4^3}{3} + \frac{2(-4)^2}{2} - 8(-4) \right] \\
 A &= -9.33 + 37.33 = 28
 \end{aligned}$$

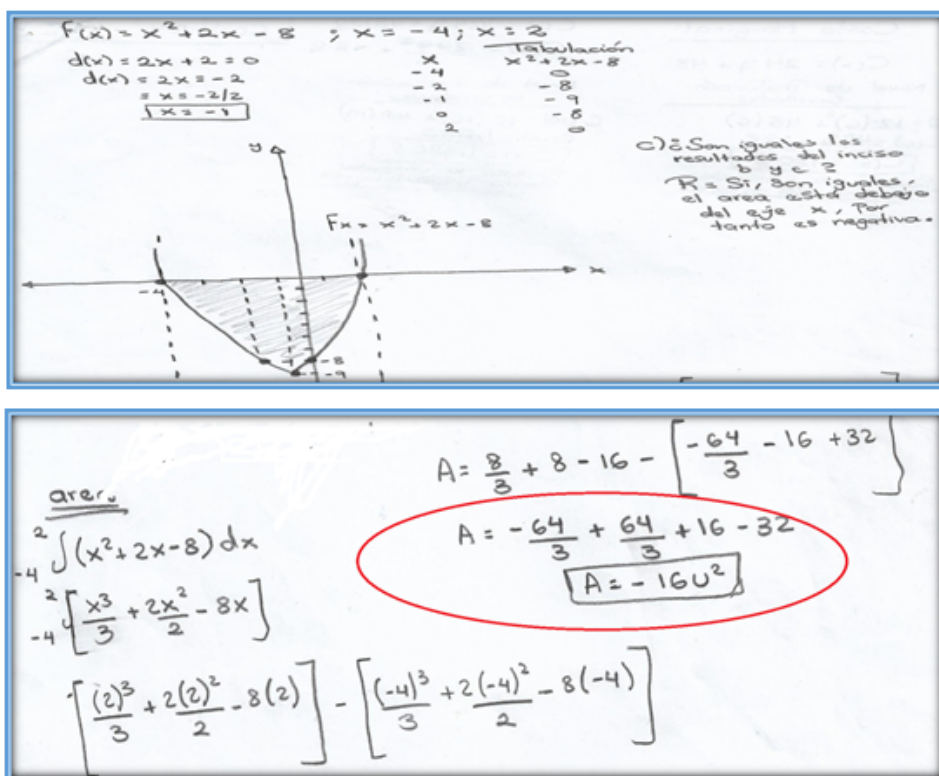
Este estudiante solo trabaja dos incisos, gráfica y representa el área correctamente, pero plantea mal la integral definida que representa área. No tiene una conceptualización clara de integral definida, ni la aplicación de esta, cuando representa área, específicamente cuando la función es negativa en el intervalo. Además de cometer error aritmético o mal uso de la calculadora.

El estudiante 10, responde:

$$\begin{aligned}
 c) \quad \int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 8x \right]_{-4}^2 \\
 &= \left[\frac{(2)^3}{3} + \frac{2(2)^2}{2} - 8(2) \right] - \left[\frac{(-4)^3}{3} + \frac{2(-4)^2}{2} - 8(-4) \right] \\
 &= \frac{28}{3} - \frac{80}{3} \\
 &= -\frac{52}{3}
 \end{aligned}$$

Solo contesta el inciso c, plantea y resuelve bien la integral pero no diferencia entre integral definida e integra como área. No pudo relacionar con el resto del problema

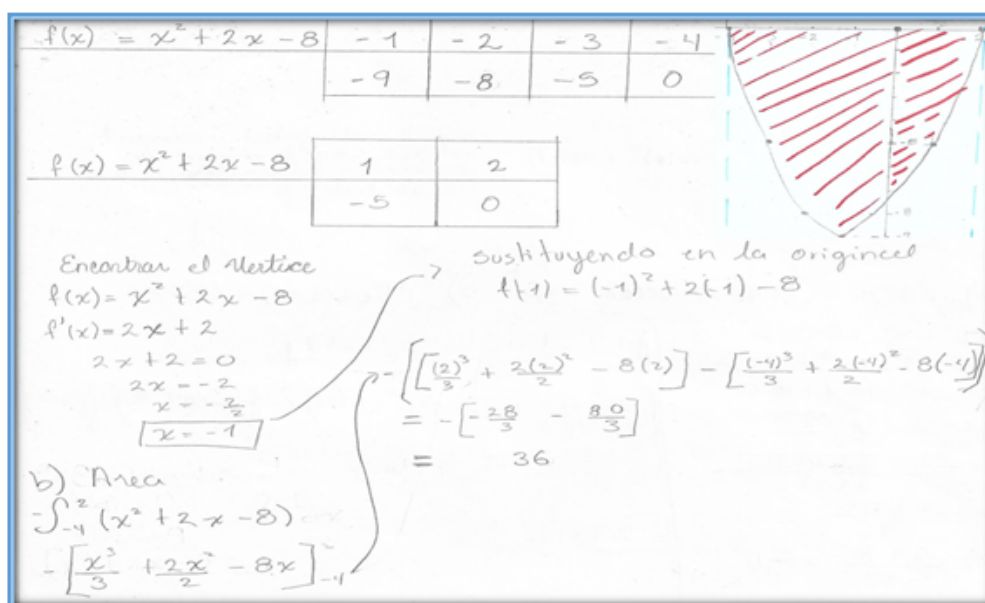
El estudiante 12, responde:



Este estudiante gráfica y representa correctamente el área, plantea una integral definida para determinar el área, pero lo hace incorrectamente, además errores aritméticos. No tiene una conceptualización clara de integral definida, ni la aplicación de esta, cuando representa área, específicamente cuando la función es negativa en el intervalo y considera erróneamente que el área es negativa. En conclusión, los estudiantes ubicados en la categoría uniestructural son: 3, 10 y 12.

Ahora mostraremos a los alumnos ubicados en la categoría **multiestructural**

El estudiante 1, responde:



c) Evaluar

$$\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx$$

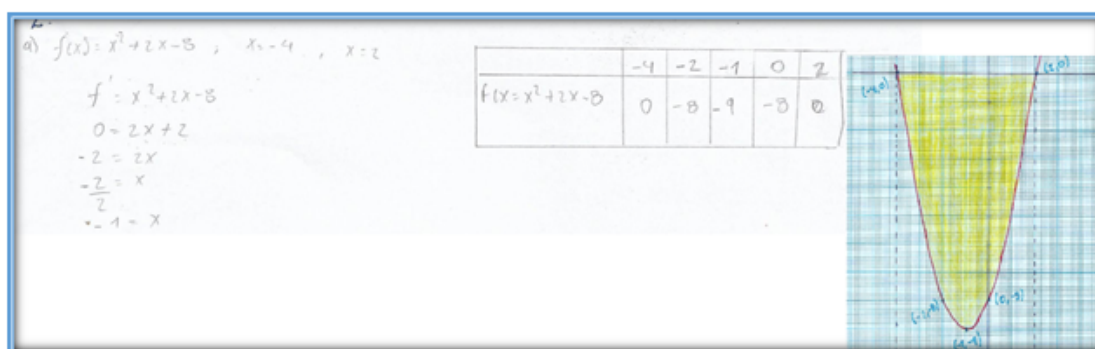
$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 8x \right]_{-4}^2$$

$$\left[\frac{(2)^3}{3} + \frac{2(2)^2}{2} - 8(2) \right] - \left[\frac{(-4)^3}{3} + \frac{2(-4)^2}{2} - 8(-4) \right]$$

$$= \frac{-28}{3} - \frac{80}{3} = -36$$

Contesta correctamente tres inciso, muestra tener claro como graficar y representar el área, plantea la integral definida que representa área y evalúa la integral correctamente, pero no puede unificar sus conocimientos para establecer la diferencia entre integral y área.

El estudiante 4, responde:



b) $-\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx = -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 8x\right]_{-4}^2 = -\left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 8x\right]_{-4}^2$

$= -\left[\left(\frac{2^3}{3} + 2^2 - 8(2)\right) - \left(\frac{(-4)^3}{3} + (-4)^2 - 8(-4)\right)\right]$

$= -\left[-\frac{28}{3} - \frac{44}{3}\right] = -(-40) = 40$

c) $\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 8x\right]_{-4}^2 = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 8x\right]_{-4}^2$

$= \left[\frac{2^3}{3} + 2^2 - 8(2)\right] - \left[\frac{(-4)^3}{3} + (-4)^2 - 8(-4)\right]$

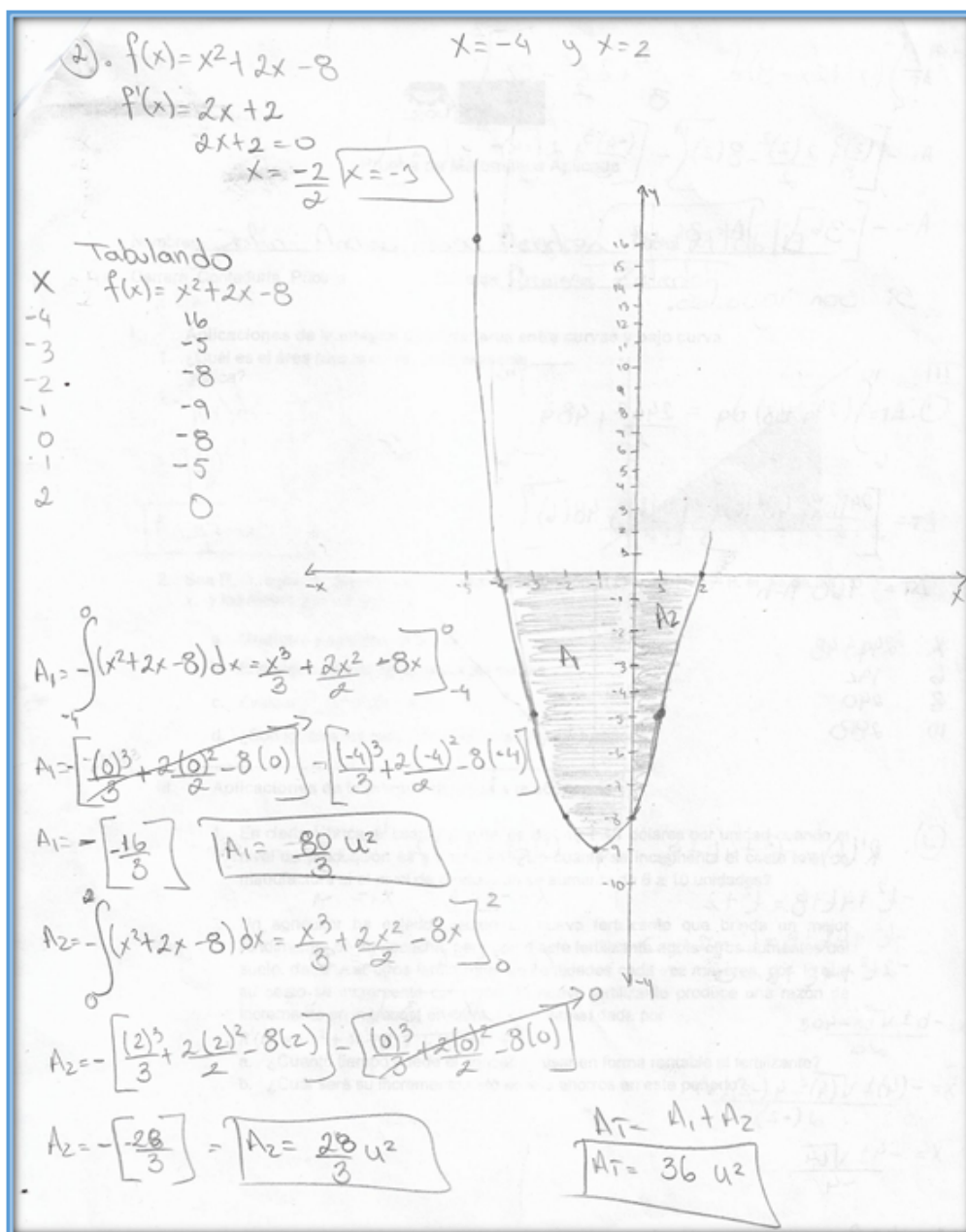
$= \left(\frac{8}{3} + 4 - 16\right) - \left(-\frac{64}{3} + 16 + 32\right)$

$= -\frac{28}{3} - \frac{44}{3} = -40$

d) los resultados de ambos incisos son diferentes ya que en el inciso b no están perdiendo el área y el área tiene que ser positiva (e ahí el cambio de signo) mientras que el inciso c solo evaluamos y al evaluar nos puede dar cualquier número racional.

Integra todos sus conocimientos, tiene claro como graficar y representar el área, además diferencia entre integral y área. Tiene una conceptualización de integral definida, como un número racional y tiene claro las condiciones cuando la integral representa área, pero comete error aritmético en ambos casos señalados o mal uso de la calculadora.

El estudiante 11, responde:



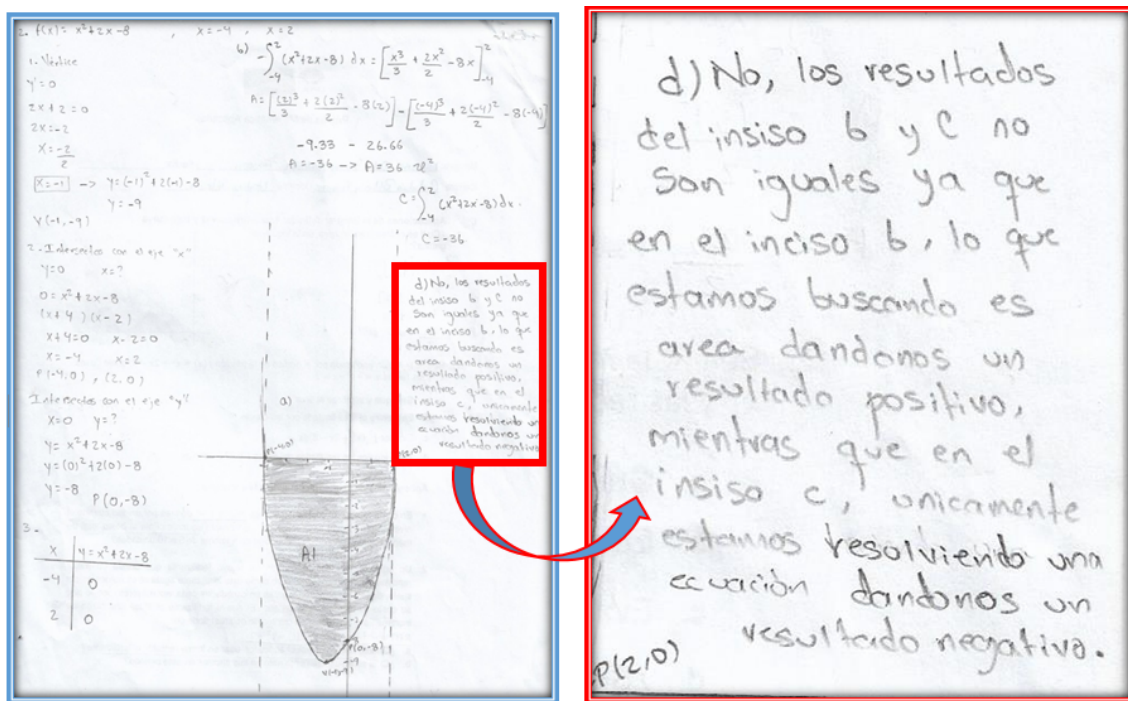
3. $\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 8x \right]_{-4}^2$
 $A = - \left[\frac{(2)^3}{3} + \frac{2(2)^2}{2} - 8(2) \right] - \left[\frac{(-4)^3}{3} + \frac{2(-4)^2}{2} - 8(-4) \right]$
 $A = - \left[-36 \right] \quad A = 36 u^2$
 Si son iguales.

Trabaja magistralmente tiene claro como representar el área en el plano, separa en dos regiones e integra correctamente, al resolver el inciso c, que es evaluar la integral, hace cálculo para área. No puede

diferenciar entre integral como área, que es una aplicación e integral. Su conceptualización de integral es área. En resumen, los estudiantes ubicados en el nivel multiestructural son: 1, 4 y 11.

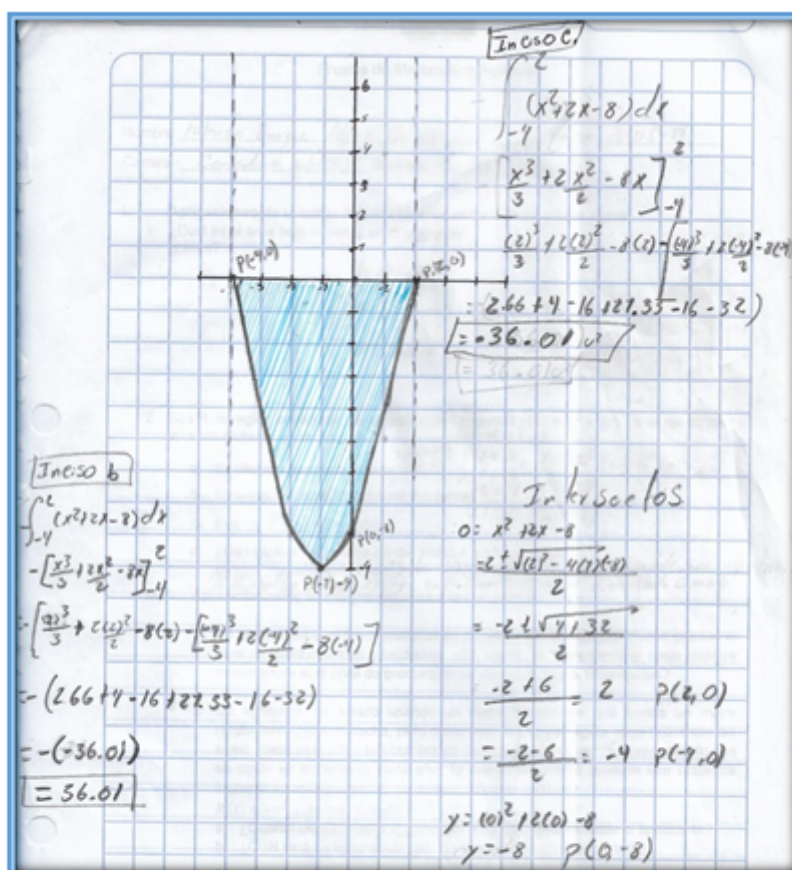
Ahora veremos a los estudiantes ubicados en la categoría **relacional**:

El **estudiante 5**, responde:



Demuestra tener una conceptualización bastante amplia de integral definida y sus aplicaciones, gráfica y representa el área correctamente, trabaja aplicando regla de Barrow, hace cálculos adecuados, diferencia entre integral y área: Relaciona todos sus conocimientos de geometría, aritmética, álgebra y capacidad para expresar sus resultados de forma Matemática y lenguaje común.

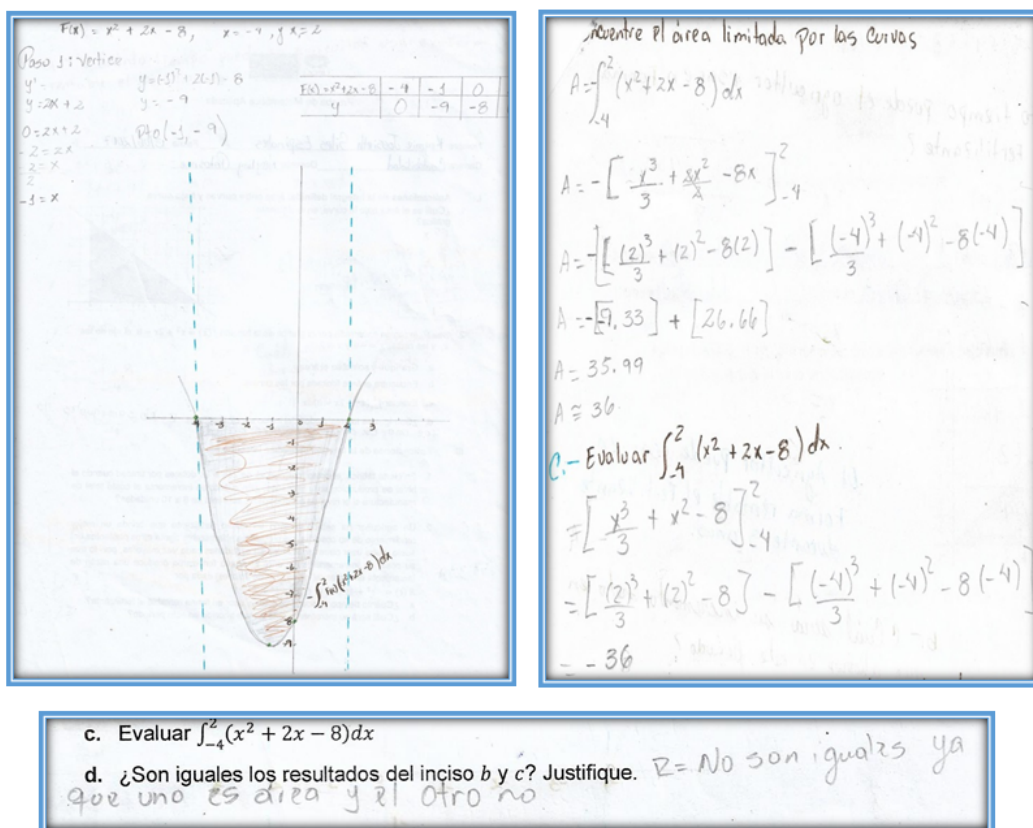
El estudiante 6, responde:



d. ¿Son iguales los resultados del inciso b y c? Justifique.
 No son iguales los resultados debido a que el área no puede ser negativa por lo tanto se hacen ajustes en la función para que el resultado cambie.
 Aplicaciones de la integral definida a la economía

Demuestra tener una conceptualización bastante amplia de integral definida y sus aplicaciones, gráfica y representa el área correctamente, trabaja aplicando regla de Barrow, hace cálculos adecuados, diferencia entre integral y área: Relaciona todos sus conocimientos de geometría, aritmética, álgebra y capacidad para expresar sus resultados de forma Matemática y lenguaje común.

Finalmente ubicamos al **estudiante 2** en esta categoría, por cumplir con las características descritas anteriormente.



Por tanto, los estudiantes ubicados en el nivel relacional son: 2, 5 y 6.

Se infiere a lo largo de este análisis que los estudiantes del grupo GAU, se ubican con un 83 % en los niveles más altos del modelo SOLO, caso contrario ocurre con el grupo GNU. Por lo que se infiere que la U.D favoreció a enriquecer los esquemas conceptuales respecto a la integral definida cuando los estudiantes son expuestos a problemas bajo contexto matemático. Se deja claro que ambos grupos cometen errores del tipo aritmético al aplicar la regla de Barrow y existen dificultades para graficar funciones cuadráticas.

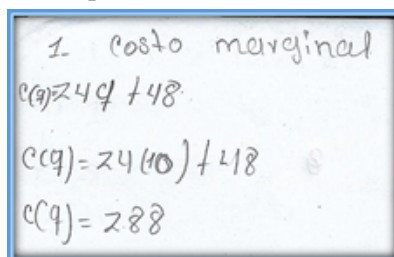
Finalmente en esta sección solo haremos el análisis intensivo del problema bajo contexto económico para el grupo GNU, dado que para el otro grupo ya se hizo. Empezaremos mostrando por niveles de SOLO la ubicación de los dicentes.

Ahora analizaremos el nivel de razonamiento de los estudiantes ante un problema bajo contexto económico.

3. En cierta fábrica, el costo marginal es de $24q + 48$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. ¿En cuánto se incrementa el costo total de manufactura si el nivel de producción se aumenta de 6 a 10 unidades?

Estudiantes en la categoría preestructural:

Ante esta situación el **estudiante 8** responde:

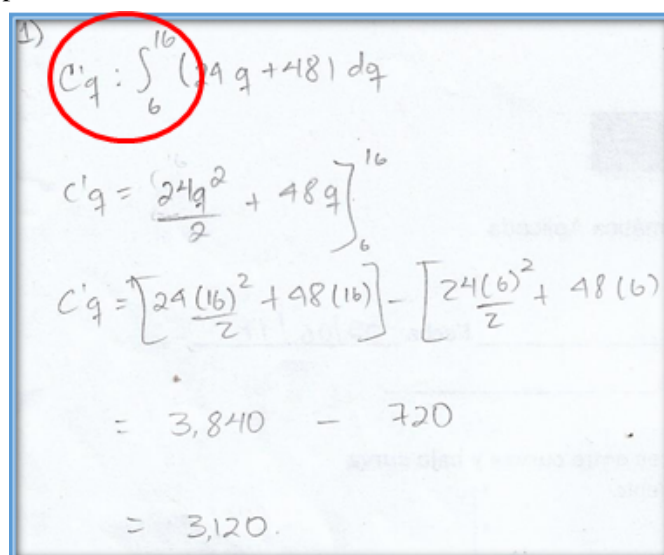


1 costo marginal
 $C(q) = 24q + 48$
 $C(q) = 24(10) + 48$
 $C(q) = 288$

No tiene claro el problema, no diferencia entre costo total y costo marginal, hace evaluaciones en el costo marginal, que no favorecen a la solución.

Ahora presentamos a los estudiantes ubicados en la categoría **uniestructural**:

El **estudiante 9** responde:

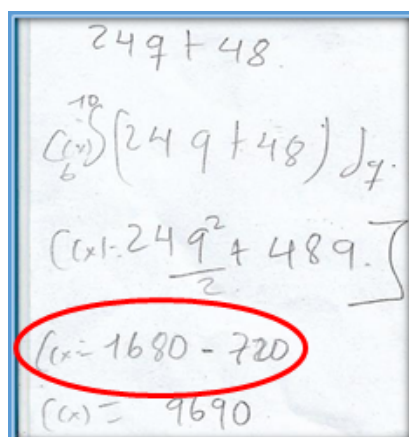


1) $C'q : \int_6^{16} (24q + 48) dq$
 $C'q = \left[\frac{24q^2}{2} + 48q \right]_6^{16}$
 $C'q = \left[24 \frac{(16)^2}{2} + 48(16) \right] - \left[24 \frac{(6)^2}{2} + 48(6) \right]$
 $= 3,840 - 720$
 $= 3,120$

Se centra en aspecto, plantear la integral definida, pero no representa adecuadamente el costo y no comprendió los límites de integración, como podemos preciar.

El resto de los estudiantes del grupo GNU se ubican en el nivel **multiestructural**:

El **estudiante 7** responde:



$24q + 48$
 $C(x) = \int_6^{10} (24q + 48) dq$
 $C(x) = \left[12q^2 + 48q \right]$
 $C(x) = 1680 - 720$
 $C(x) = 960$

Tiene claro la aplicación de la integral definida al mundo de los negocios, así como los conceptos de costo total y costo marginal, solo comete un error aritmético en la resta, Multiestructural.

Ante esta situación el **estudiante 10** contesta:

Nivel de producción aumenta de 6 a 10 u

III. 1. $24q + 48$.

$$\int (24q + 48) dq$$

$$\left[\frac{24q^2}{2} + 48q \right] + c$$

$$(12q^2 + 48q + c)$$

$$12(6)^2 + 48(6) \quad 12(10)^2 + 48(10)$$

$$432 + 288 \quad 1200 + 480$$

$$720 \quad 1680$$

El costo total incrementa en.

$$2400$$

Este estudiante domina varios esquemas, encuentra el costo total integrando el marginal y luego evalúa, lo cual es correcto, pero no comprendió a plenitud el problema, posible error de lectura, al dar como respuesta la suma de los costos.

El **estudiante 11**, contesta:

III. 1. $\Delta T = \int_6^{10} (24q + 48) dq = \left[\frac{24q^2}{2} + 48q \right]_6^{10}$

$$\Delta T = \left[\frac{24(10)^2}{2} + 48(10) \right] - \left[\frac{24(6)^2}{2} + 48(6) \right]$$

$$\Delta T = 960 \text{ h-h}$$

X	$24q + 48$
6	192
8	240
10	288

Este estudiante plantea una integral definida, donde el costo marginal representa la función que determina la curva del aprendizaje. Además de presentar la variación del costo como las horas hombres requeridas en niveles de producción. Aplica muchos esquemas pero no da respuesta convincente al problema.

Finalmente el **estudiante 12** responde:

Costo Marginal

$$C'(x) = 24q + 48$$

Nivel de Producción
Unidades

$$C(6) = 12(6)^2 + 48(6)$$

$$C(6) = 432 + 288$$

$$C(x) = 720 \$$$

Producir 6 unidades
Costa 720 dólares

Costo Marginal

$$C'(x) = \int (24q + 48) dq$$

$$C(x) = \frac{24q^2}{2} + 48q$$

$$C(x) = 12q^2 + 48q$$

Nivel de Producción
10 unidades

$$C(10) = 12(10)^2 + 48(10)$$

$$C(10) = 11680$$

$$C(x) = 11680 \$$$

Producir 10 unidades
Costa 11,680 dólares

Muestra dominio de los conceptos de costo total, marginal, aplicaciones de la integral definida, pero no comprendió la pregunta, error de lectura.

Las principales dificultades fueron de interpretación o cálculo aritmético, entiende la aplicación de integral definida pero los conceptos básicos de la economía no están claro. Mejoran en los niveles de razonamiento en este ejercicio respecto al realizado bajo contexto matemático.

3.8. CONCLUSIONES

Tal como fue planteado desde el segundo capítulo, el problema principal de este estudio fue analizar las incidencias de la implementación de la Unidad Didáctica sobre la integral definida en la conceptualizaciones que tienen los estudiantes de II año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas de la Universidad Politécnica de Nicaragua, recinto central Managua, durante el primer semestre del año 2017.

Por lo tanto, luego de haber realizado el análisis de la información recabada durante el proceso de aplicación de los instrumentos, se ha llegado a las siguientes conclusiones sobre el estudio, las cuales se exponen en el orden de los propósitos establecidos.

En relación al propósito general del capítulo 1. Diagnosticar el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida en la asignatura de Matemática Aplicada, con los estudiantes de Contaduría Pública y Finanzas de la escuela de Administración Comercio y Finanzas de la Universidad Politécnica de Nicaragua, durante el primer semestre del año 2017.

Los resultados muestran que el proceso de enseñanza aprendizaje respecto a la integral definida en los estudiantes, presenta dificultades dado que los conocimientos esperados no se logran, pues los estudiantes se ubican en los niveles más bajos, según la taxonomía SOLO. Esto quiere decir que las actividades, estrategias, recursos didácticos y en general la metodología implementada no es totalmente exitosa. Los documentos curriculares presentan relación pero hace falta mayor tratamiento en las orientaciones metodológicas y recursos didácticos, las cuales no son variadas ni actualizadas. Los maestros no están realizando planificación rigurosa, solo se basan en material de apoyo de la asignatura y sílabo semestral.

En relación al propósito general del capítulo 2. Implementar el diseño de Unidad Didáctica para el proceso de enseñanza aprendizaje del contenido de integral definida en la asignatura de Matemática Aplicada, con los estudiantes de segundo año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas, turno matutino de la UPOLI, en el primer semestre del año 2017.

La experimentación de la Unidad didáctica se desarrolló de manera exitosa, los estudiantes manifestaron que las sesiones de clases les habían sido beneficiosas y que fue más fácil entender con la metodología implementada, es decir aprender haciendo, además lo que uno hace no se olvida. También manifestaron que el trabajo cooperativo contribuyó en gran manera al proceso de aprendizaje, por que podían ayudarse entre ellos y piden que se siga implementando en otros temas y que los equipos de

trabajo sean variados, procurando dejar a un monitor (alumno ayudante de la clase) por grupo. Por otro lado, los docentes colaboradores en el proceso de diseño e implementación, señalaron como positivo la coherencia de las actividades, y la claridad de las preguntas, el hilo conductor en las tareas, la mezcla de trabajo dirigido e independiente, pero que lo más importante era la forma en que se construye el concepto.

En relación al propósito general del capítulo 3. Analizar la conceptualización de la integral definida en los estudiantes de segundo año de la carrera de Contaduría Pública y Finanzas de la Universidad Politécnica de Nicaragua.

El grupo GAU, al cual se le aplicó la Unidad Didáctica, al inicio del proceso de enseñanza aprendizaje muestra tener una conceptualización de integral definida muy pobre apenas puede relacionar débilmente con función ante una situación problemática planteada, en cambio después de desarrollar la innovación didáctica los estudiantes logran que evolucionen sus conceptualizaciones mostrando integrar más de un sistema de representación prevaleciendo el aritmético y el algebraico. Además integran conceptos matemáticos, económicos y administrativos, para resolver problemas bajo contexto matemático y económico.

Por tanto la conceptualización del grupo GAU después de la implementación es más rigurosa, la conciben como un número racional y que bajo ciertas condiciones representan área y es aplicable problemas de ciencias económicas y administrativa. Esta conceptualización incluye objetos matemáticos como función integración, límites y diferencial, acompañado de más algún registro de representación del concepto matemático y lo relacionan con aplicaciones económicas y área. Además de un teorema para evaluar las integrales definidas. El grupo GNU que no recibió la innovación didáctica muestra una conceptualización de integral definida como área y los resultados de cualquier integral deben ser positivos. Lo que muestra una débil conceptualización de la integral definida después del proceso de enseñanza aprendizaje.

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS DEL CAPITULO 3

En relación al propósito específico 1: Identificar las conceptualizaciones que adquieren los estudiantes de Contaduría Pública respecto a la integral definida, antes y después de la implementación de la Unidad Didáctica.

La conceptualización inicial sobre integral definida del grupo GAU es representada débilmente como una función y otros no pueden dar una respuesta lógica, lo que los ubicaba en los niveles **Uniestructural** y **Preestructural**, respectivamente. Luego al aplicar la U.D, las conceptualizaciones de los estudiantes

sobre la integral definida ante problemas bajo contexto matemático y económico fue la siguiente:

1. **Relacional:** enlazan e integran muchos esquemas conceptuales, muestra dominio de varios componentes tales como concepto de costo total, costo marginal, variación de costo, interpretan y plantean la integral definida evaluando con la resuelve regla de Barrow, además dan sentido lógico al problema al contestar adecuadamente a la pregunta, lo que deja en evidencia su competencia de saber comunicar.
2. **Multiestructural:** Realizan varias conexiones entre conceptos, teoremas, representaciones, plantean la aplicación de la integral definida, pero no articulan todo de forma coherente y cometen errores plantear la integral.

En relación al propósito específico 2: Comparar las conceptualizaciones sobre la integral definida, en dos grupos de Contaduría Pública a los cuales sólo a uno se le aplicó la unidad didáctica.

Tanto en problemas bajo contexto matemático y económico los estudiantes que recibieron la innovación didáctica, mostraron tener mejor estructura conceptual o conceptualización de la integral definida, al ubicarse en los niveles más alto de la taxonomía SOLO, donde demuestran tener mejor estructurado el concepto de integral definida, es decir una conceptualización rica en teoremas, definiciones, representaciones gráficas, aritméticas y algebraicas, además establecen que la integral definida puede ser un número racional, por lo que puede ser positivo, negativo o cero y bajo ciertas condiciones representa área. Además de relacionar estos conocimientos a aplicaciones propias de la ciencias económicas y administrativas. Las principales dificultades que impidieron llegar a los niveles más altos en ambos grupos fueron errores del tipo aritmético al aplicar la regla de Barrow, dificultades para representar gráficamente funciones, establecer la integral que representa área de funciones negativas y dificultades interpretativas del concepto de la función de costo.

RESPECTO AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN PLANTEADO EN EL CAPITULO 2

A lo largo de este estudio se pudo comprobar, que los estudiantes del grupo GAU de esta investigación lograron un crecimiento en sus conceptualizaciones iniciales de integral definida, sus concepciones fue una noción borrosa de función, pero después de aplicar la Unidad Didáctica se ve un avance significativo en sus esquemas conceptuales(área, integral definida, aplicaciones de la integral definida, propiedades, teoremas, esquemas conceptuales etc.), más aún cuando se trata de ejercicios contextualizados al mundo de los negocios y economía.

Sin embargo no todos alcanzaron el nivel relacional que se requiere para que integren diversos esquemas conceptuales sobre la integral definida como un todo coherente con estructura, significado y sin ningún error. Aun así al comparar con otro grupo que recibió proceso de enseñanza aprendizaje tradicional, los niveles de razonamiento sobre integral definida, según la taxonomía SOLO, demuestran ser superiores respecto a este contenido.

Por lo tanto, podemos afirmar que los resultados en ese estudio han puesto de manifiesto que se puede diseñar proceso de enseñanza aprendizaje a través de Unidades Didácticas que permitan a los estudiantes realizar avance conceptual, partiendo de actividades motivadoras, conocimientos previos, construyendo conceptos y reflexionando en trabajo cooperativo, siendo así protagonista de su propio aprendizaje y no receptores de la enseñanza que le transmite el docente. Por todo lo expuesto anteriormente consideramos que la incidencia en general que la Unidad Didáctica fue positiva, al contribuir significativamente en el aprendizaje de los estudiantes.

3.9. PERSPECTIVA DE FUTURO

Cualquier estudio de investigación desarrollado en el campo de la didáctica de la Matemática contribuye a despejar incógnitas sobre el tema tratado pero, de forma simultánea, genera nuevas preguntas, nuevas ideas o abre nuevas líneas de trabajo. En este apartado presentamos las siguientes perspectivas a futuro:

- Implementar la metodología de unidades didácticas en otros tópicos para la enseñanza aprendizaje de la Matemática.
- Realizar talleres de intercambio pedagógico sobre importancia y diseño de unidades didácticas, a docentes de Matemática de la Universidad Politécnica de Nicaragua.
- Plantear la formulación de otros problemas de Didáctica de la Matemática:
 1. Estudio riguroso sobre las dificultades o errores que cometen los estudiantes en el concepto de integral definida.
 2. Analizar conceptualización de integral definida, en los docentes de Matemática de la Universidad Politécnica de Nicaragua.

Bibliografía

- [1] Aldana, E. (2012). Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE. Tesis Doctoral. Salamanca. Universidad de Salamanca.
- [2] Asamblea Nacional de la República de Nicaragua. Ley General de Educación, Ley no. 582, Managua, Nicaragua, (2006).
- [3] Azcárate, C., y Sanmartí, N. (1996). Marco Teórico: Aproximación Psicológica y Metodológica. Evaluación (pp. 55-88) UAB.
- [4] Azcárate, Casadevall, Casellas y Bosch (1996). Cálculo diferencial e integral. Madrid: Síntesis.
- [5] Biggs, J., Collins, K. F. (1982). Evaluating the quality of learning: the Solo Taxonomy. Nueva York: Academic Press.
- [6] Biggs, J. (2006). Calidad del aprendizaje universitario. Editorial NARCEA, S. A. Ediciones. Madrid, España.
- [7] Couso, D., Badillo, E., Perafán, G. y Auduriz, A. (2005). Colección Didáctica, Unidades Didácticas en Ciencias y Matemáticas. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- [8] Díaz, L., Landásuri, M. y Hernández, F. (2010). CONCEPCIONES DE DESVIACIÓN ESTÁNDAR EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA. Colombia [Consulta: 20 de enero de 2017]. Disponible en: <http://es.scribd.com/doc/32057852/Concepciones-de-Desviacion-Estandar-en-Estudiantes-de-Educacion-Media>.

- [9] Fuster J., Gómez F. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 5, 61-76 [en línea] <http://www.emis.de/journals/DM/v5/art7.pdf> consultado el 20/02/2017.
- [10] Jansen, H. (2012). La lógica de la investigación por encuesta cualitativa y su posición en el campo de los métodos de investigación social. *Paradigmas*, 4, 39-72.
- [11] Hernández R, Fernández C., Baptista M. (2014). *Metodología de la Investigación*. Mexico: McGraw Hill.
- [12] Godino, J. D. (Director) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-933517-1-7. [461 páginas; 8,8MB] (Recuperable en <http://www.ugr.es/local/jgodino/>)
- [13] Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: ReproDigital.
- [14] Guba, E.G. (1981). "Criterios de credibilidad en la investigación naturalista". En GIMENO SANCISTÁN, J. y PÉREZ GÓMEZ, A. *La Enseñanza: su teoría y su práctica*. Madrid: Akal, 148-165
- [15] Ley 582: Gaceta diario oficial de la república de Nicaragua. Managua, 22 de marzo 2006.
- [16] Ley 89: Gaceta diario oficial de la república de Nicaragua. Managua, 05 de abril de 1990.
- [17] Llorens, J. L. y Santonja, F. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas* 5(1/2), 61-76.
- [18] Mendoza, J. (2013). *Análisis de los errores que cometen los estudiantes de secundaria en la deducción de las propiedades de la desviación típica*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua- Managua.
- [19] Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3 (2), 131-170.

- [20] Porres, M.(2011). Integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías. (Tesis de doctoral). Universidad de Valladolid. España. Potosme, N. (2013).Análisis de las conceptualizaciones de los estudiantes sobre la desviación típica. (Tesis de maestría). Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua- Managua.
- [21] Orton, A. (1983). Students understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics* 14, 1-18.
- [22] Orton, A. (1980). A Cross-sectional Study of the Understanding of Elementary Calculus in Adolescents and Young Adults. Tesis Doctoral. University of Leeds.
- [23] PNUD, (2014). Plan Nacional de Desarrollo Humano 201-2016. Consulta: 17 de agosto de 2017. Disponible en: <http://www.ni.undp.org/content/nicaragua/es/home/library.html>
- [24] Roja, R. (2000).Guía para realizar Investigaciones Sociales, México
- [25] Sanmartí, N. (2012). 10 ideas clave. Evaluar para aprender. Barcelona: Editorial GRÁO.
- [26] Universidad Politécnica de Nicaragua. Reglamento del Trabajo Académico de la UPOLI, Acuerdo de rectoría 67-2014, Managua, Nicaragua, (2014).
- [27] Universidad Politécnica de Nicaragua. Aprobación de Reformas al Modelo Educativo y Académico de la UPOLI, Acuerdo de rectoría 29 A-2012, Managua, Nicaragua, (2012).
- [28] Valdivie, C. y Garbin, S. (2010). Estudio de la evolución de los esquemas conceptuales previos asociados al infinitesimal: caso del alumno (2), *Educare*, 14 (3), 3 - 31.
- [29] Vergnaud, G. (1983a). Quelques problèmes théoriques de la didactique a propos d'un exemple: les structures additives. *Atelier International d'Été: Recherche en Didactique de la Physique*. La Londe les Maures, Francia, 26 de junio a 13 de julio.
- [30] Vergnaud, G. et al. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.) *Mathematics and cognition: A research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press.

- [31] Vergnaud, G. (1996a). Education: the best part of Piaget's heritage. *Swiss Journal of Psychology*, 55(2/3): 112-118.
- [32] Vergnaud, G. (1996b). A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do GEMPA*, Porto Alegre, No. 4: 9-19. Vergnaud, G. (1996c). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Perspectivas*, 26(10): 195-207.
- [33] Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In Nunes, T. & Bryant, P. (Eds.) *Learning and teaching mathematics, an international perspective*. Hove (East Sussex), Psychology Press Ltd. Vergnaud, G. (2007b): ¿En qué sentido la Teoría de los Campos Conceptuales puede ayudarnos para facilitar Aprendizaje Significativo? (In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning?). *Investigações em Ensino de Ciências*. V12(2), pp.285-302.
- [34] Vergnaud, G. (2011). Au fond d l'action. La conceptualización. In J. M. Barbier (Eds.) *Theoriques et savoir d'action*. Paris. Francia. Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London. Pp. 65-80.