

Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua

UNAN-Managua

Facultad de Ciencias e Ingeniería

Departamento de Matemática y Estadística

Informe final para optar al título de Licenciado en Matemática



Aplicación de la cuadratura de Gauss-Chebyshev en la solución de algunos
problemas de integración numérica

Autor:

Br. Darwing José Mena Gutiérrez

Tutora:

MSc. Pilar Angelina Marín Ruiz

Fecha: Jueves 17/03/2016

DEDICATORIA

Le dedico este trabajo monográfico:

a Dios, por haberme dado todo lo que tengo,

a mi mamá, por todo su amor y cariño,

a mi papá, por sus enseñanzas desde niño,

a mis amigos, por su apoyo y ayuda.

AGRADECIMIENTO

Quiero dar las gracias a Dios por haberme dado la oportunidad de culminar mis estudios universitarios. A mi familia, por su apoyo y esfuerzo que han puesto en mi educación, amor y por motivarme a seguir adelante.

Especial reconocimiento merece el interés mostrado por mi trabajo y las sugerencias recibidas de mi tutora Msc. Pilar Marín, con la que me encuentro en deuda por el ánimo infundido y la confianza en mí depositada.

A los maestros del Departamento de Matemática y Estadística con los que aprendí y desarrolle mis conocimientos en matemática. Su empeño y dedicación para que sus alumnos siempre se esfuercen por aprender y sobresalir continuamente estará presente.

Un agradecimiento a mis amigos por el ánimo recibidos durante este tiempo, particularmente a Gabriela Brenes por la motivación y el apoyo recibido a lo largo de estos años.

A todos ellos, muchas gracias.

CONTENIDO

I.	Introducción	1
II.	Objetivos.....	2
III.	Marco Teórico	3
3.1.	Definición de Polinomios de Chebyshev	3
3.1.1.	Definición de recurrencia	8
3.2.	Relación entre los cuatro tipos de polinomios de Chebyshev	13
3.3.	Desplazamientos de Polinomios de Chebyshev.....	15
3.3.1.	Los polinomios desplazados T_n^* , U_n^* , V_n^* y W_n^*	15
3.3.2.	Polinomios de Chebyshev para el rango general a, b	17
3.4.	Operaciones y principales propiedades de los polinomios de Chebyshev.....	18
3.4.1.	Ceros y extremos de los polinomios de Chebyshev.	18
3.4.2.	Evaluación de Sumas, Multiplicación, derivadas e integrales con polinomios de Chebyshev.....	22
3.5.	Propiedad de minimax.	31
3.5.1.	Teoría de aproximación	31
3.5.2.	El problema de aproximación.....	34
3.5.3.	Mejor aproximación y minimax	35
3.5.4.	La propiedad minimax de los polinomios de Chebyshev.....	38
3.6.	Interpolación Polinómica.....	40
3.6.1.	Interpolación de primer tipo	41
3.6.2.	Interpolación de segundo tipo	44
3.6.3.	Interpolación de tercer tipo.....	46
3.6.4.	Interpolación de cuarto tipo.....	48
3.7.	Uso del Software MATLAB	52
IV.	Diseño Metodológico.....	53

V.	Desarrollo	54
5.1.	Cuadratura de Gauss-Chebyshev	54
5.2.	Ejemplos de la cuadratura de Gauss-Chebyshev	60
VI.	Conclusiones.....	68
VII.	Recomendaciones	70
VIII.	Bibliografía.....	71
IX.	Anexo.....	73
	Anexo 1. Fórmulas trigonométricas	73
	Anexo 2. Polinomios de Jacoby	74
	Anexo 3. Interpolaciones de Polinomios de Chebyshev en MATLAB.....	75
	Anexo 4. Cuadraturas de Gauss-Chebyshev en MATLAB (Caso 1)	86
	Anexo 5. Cuadraturas de Gauss-Chebyshev en MATLAB (Caso 2)	90
	Anexo 6. Corolario 9	94

I. INTRODUCCIÓN

Los Polinomios de Chebyshev son un conjunto de polinomios ortogonales respecto a ciertas funciones de peso. Estos polinomios hacen uso de propiedades de las funciones trigonométricas. Existen varios tipos de polinomios de Chebyshev, los cuales son usados en muchas áreas del análisis numérico. Se les puede encontrar desde interpolación y aproximación polinómica, integrales definidas, diferenciación, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales hasta ecuaciones integrales y muchas más. La aplicación en esta área de la matemática hace muy importante el estudio de dichos polinomios, ya que su uso proporciona herramientas para la solución de problemas en la vida real.

Recordando un poco de interpolación polinómica, los métodos aplicados en los cursos de análisis numérico utilizan polinomios de grados elevados para aproximar funciones, sin embargo esto proporciona errores elevados en los extremos de las funciones a aproximar, ya que entre más grande sea el grado utilizado se obtienen oscilaciones muy pronunciadas. Debido a esto, el uso de polinomios de Chebyshev, utiliza ceros del polinomio que recorren toda la curva en puntos distribuidos no uniformemente sobre la función a aproximar. Este resultado evitará las grandes oscilaciones en los extremos de la función que se desea.

En cuanto a los softwares para el uso de estos polinomios, las ecuaciones generadas se pueden resolver mediante programas como Excel, sin embargo este genera problemas si se usan polinomios de grados muy altos, más con un poco de programación, se puede simplificar dicho procedimiento, por tanto, es necesario el uso del paquete Chebfun, que se utiliza a través de MATLAB. Este utiliza polinomios de Chebyshev en su programación. El aprendizaje de Chebfun resulta una interesante herramienta en la enseñanza de polinomios de Chebyshev.

II. OBJETIVOS

Objetivo General:

Aplicar la cuadratura de Gauss-Chebyshev a la solución de algunos problemas de integración numérica.

Objetivos Específicos:

- Mostrar algunas propiedades de los polinomios de Chebyshev para aproximar integrales numéricas.
- Exponer el método u algoritmo de Gauss-Chebyshev a seguir para el cálculo de integración numérica.
- Resolver algunas integrales numéricas por polinomio de interpolación a través de los polinomios de Chebyshev.
- Determinar el error de interpolación en el uso de los polinomios de Chebyshev.
- Usar el software MATLAB para el manejo de polinomios de Chebyshev en interpolación polinómica.

III. MARCO TEÓRICO

3.1. Definición de Polinomios de Chebyshev

Los Polinomios de Chebyshev constituyen un conjunto de polinomios ortogonales respecto a ciertas funciones de peso. Estos polinomios se relacionan haciendo uso de propiedades de las funciones trigonométricas.

Existen varios tipos de polinomios de Chebyshev, los cuales se pueden definir usualmente de dos maneras: la definición trigonométrica y la definición recursiva, sin embargo, en el presente trabajo se definirán cuatro tipos. Los dos primeros tipos de polinomios de Chebyshev, son los más conocidos ya que se encuentran en muchos textos y sitios de internet, mientras que los otros dos tipos de polinomios, de tercer y cuarto tipo, son menos conocidos y se pueden estudiar como polinomios de Jacobi.

El polinomio de Chebyshev de primer tipo se denota usualmente por $T_n(x)$ y el de segundo tipo como $U_n(x)$. Los polinomio de tercer y cuarto tipo se denotarán por $V_n(x)$ y $W_n(x)$ respectivamente. Estos últimos dos tipos son conocidos como polinomios de Jacobi. También se usará la notación $T_n^*(x)$, $U_n^*(x)$, $V_n^*(x)$ y $W_n^*(x)$ para representar los desplazamientos de los polinomios de Chebyshev al igual que se representa en Mason & Handscomb. Estos últimos son usados al cambiar el intervalo usual de los polinomios de Chebyshev $[-1,1]$ al intervalo $[0,1]$ cuyo uso es más conveniente.

Las definiciones que más se usan son las trigonométricas, debido a que en el momento de encontrar las raíces del polinomio, es más fácil encontrarlas por los ceros de las funciones trigonométricas.

A continuación se presentan 4 definiciones de polinomios de Chebyshev:

Definición 1. *El polinomio de Chebyshev $T_n(x)$ de primer tipo, es un polinomio en x de grado n , definido por la relación*

$$T_n(x) = \cos n\theta \quad \text{cuando} \quad x = \cos \theta.$$

(Mason & Handscomb, 2002)

Si se restringe el dominio de x al intervalo $[-1,1]$, entonces el dominio de θ puede ser tomado del intervalo $[0, \pi]$.

A partir del teorema de Moivre, se puede demostrar por inducción matemática que el $\cos n\theta$ es un polinomio de grado n respecto $\cos \theta$, esto es:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

Se puede observar que la parte real del miembro izquierdo es un polinomio de grado n , para $\cos \theta$, lo que justifica lo que se dijo anteriormente. (Mason & Handscomb, 2002)

Al usar las identidades trigonométricas puede obtenerse ejemplos del primer tipo de polinomios de Chebyshev. A continuación se muestran los primeros cinco casos, cuando $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 .

$$\begin{aligned} \cos 0\theta &= 1, & \cos 1\theta &= \cos \theta, & \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1, \\ \cos 3\theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, & \cos 4\theta &= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1, \dots \end{aligned}$$

Luego por la Definición 1 se obtienen los primeros cinco polinomios de Chebyshev de primer tipo en función de x .

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, & T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, & T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots \end{aligned}$$

A continuación se sigue con la definición de los polinomios de Chebyshev de segundo tipo.

Definición 2. El polinomio de Chebyshev $U_n(x)$ de segundo tipo, es un polinomio en x de grado n , definido por la relación

$$U_n(x) = \frac{\operatorname{sen}[(n+1)\theta]}{\operatorname{sen} \theta} \quad \text{donde} \quad x = \cos \theta$$

(Mason & Handscomb, 2002)

De manera similar que en $T_n(x)$, si el dominio de x se restringe a $[-1,1]$ el dominio de θ se encuentra en $[0, \pi]$. Luego, de las fórmulas elementales de identidades trigonométricas se llega a que:

$$\begin{aligned} \text{sen } 1\theta &= \text{sen } \theta, & \text{sen } 2\theta &= 2 \text{sen } \theta \cos \theta, & \text{sen } 3\theta &= \text{sen } \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \\ \text{sen } 4\theta &= \text{sen } \theta (8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta), & & \dots & & \end{aligned}$$

que al sustituir estas según la Definición 2 queda un polinomio en $\cos \theta$, de donde se sigue los primeros cuatro casos de polinomios de Chebyshev de segundo tipo en función de x :

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x, & U_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x, & & \dots & & \end{aligned}$$

Los siguientes tipos de polinomios de Chebyshev son los de tercer y cuarto tipo, V_n y W_n respectivamente. Estas, en su definición trigonométrica involucran al ángulo medio $\frac{\theta}{2}$.

Estos polinomios son usualmente referidos como *polinomios aerodinámicos*, pero Gautschi (1992) más apropiadamente los llamó “*Polinomios de Chebyshev de tercer y cuarto tipo*”. (Mason & Handscomb, 2002)

Definición 3. *El polinomio de Chebyshev $V_n(x)$ de tercer tipo, es un polinomio en x de grado n , definido por la relación*

$$V_n(x) = \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{\cos \frac{1}{2} \theta}$$

donde $x = \cos \theta$. (Mason & Handscomb, 2002)

Definición 4. *El polinomio de Chebyshev $W_n(x)$ de cuarto tipo, es un polinomio en x de grado n , definido por la relación*

$$W_n(x) = \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{\text{sen} \frac{1}{2} \theta}$$

donde $x = \cos \theta$. (Mason & Handscomb, 2002)

Al igual que las definiciones anteriores el dominio de x y de θ son $[-1,1]$ y $[0,\pi]$ respectivamente.

Por la fórmula de Moivre se ve que el $\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta$ es un polinomio impar de grado $2n + 1$ en $\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$. Por lo tanto al sustituir esto en la Definición 3 se obtiene que el grado de $V_n(x)$ es $2n$ respecto al $\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)$. Este último resultado lleva a un polinomio de grado n respecto a $\cos\theta$ ya que $\cos^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$, y esto justifica que $V_n(x)$ es un polinomio de grado n respecto a x .

Por ejemplo se obtendrán los resultados para $n = 0, 1, 2$.

Para $n = 0$

$$V_0(x) = \frac{\cos\left(0 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = 1.$$

Para el caso $n = 1$ se usa la fórmula para productos entero de ángulos de los anexos y otras fórmulas

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \frac{\cos\left(1 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \frac{\cos\left[3\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \frac{\cos^3\frac{\theta}{2} - \binom{3}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{1}{2}\theta} \\ &= \frac{4\cos^3\frac{1}{2}\theta - 3\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = 4\cos^2\frac{1}{2}\theta - 3 \\ &= 2\cos\theta - 1 = 2x - 1 \end{aligned}$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned}
 V_2(x) &= \frac{\cos\left(2 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \frac{\cos\left[5\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \frac{\cos^5\frac{\theta}{2} - \binom{5}{2}\cos^3\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \binom{5}{4}\cos\frac{\theta}{2}\sin^4\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{1}{2}\theta} \\
 &= \frac{16\cos^5\frac{1}{2}\theta - 20\cos^3\frac{1}{2}\theta + 5\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{1}{2}\theta} = 16\cos^4\frac{1}{2}\theta - 20\cos^2\frac{1}{2}\theta + 5 \\
 &= 16\left(\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\right)^2 - 20\left(\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)\right) + 5 \\
 &= 4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 4x^2 - 2x - 1
 \end{aligned}$$

Similar se obtiene para $n = 4$, con lo que los primeros 4 casos de n se cumplen lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 V_0(x) &= 1, & V_1(x) &= 2x - 1, & V_2(x) &= 4x^2 - 2x - 1, \\
 V_3(x) &= 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1, \dots
 \end{aligned}$$

De igual manera al ser el $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta$ una función polinómica impar de grado $2n + 1$ para $\sin\left(\frac{1}{2\theta}\right)$. Entonces por la Definición 4 se llega a que $W_n(x)$ es de grado $2n$ respecto a $\sin\left(\frac{1}{2\theta}\right)$, lo que equivale a un polinomio de grado n en $\sin^2\left(\frac{1}{2\theta}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$ y por tanto un polinomio de grado n en $\cos\theta$.

Por ejemplo: Para el caso $n = 1$ se tendrá:

$$\begin{aligned}
 W_1(x) &= \frac{\sin\left(1 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \\
 &= \frac{3\sin\frac{1}{2}\theta - 4\sin^3\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \\
 &= 3 - 4\sin^2\frac{1}{2}\theta \\
 &= 2\cos\theta + 1 \\
 &= 2x + 1.
 \end{aligned}$$

Luego se puede obtener las funciones para $n = 0, 1, 2$ y 3 con un proceso similar al seguido para los polinomios de tercer tipo:

$$W_0(x) = 1, \quad W_1(x) = 2x + 1, \quad W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1, \\ W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1, \dots$$

Se puede advertir claramente que los polinomios $V_n(x)$ y $W_n(x)$ son de hecho, dos casos particulares de polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ con $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ y viceversa. De manera explícita se tendrá:

$$\binom{2n}{n} V_n(x) = 2^{2n} P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x), \quad \binom{2n}{n} W_n(x) = 2^{2n} P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x).$$

3.1.1. Definición de recurrencia

En general, la definición recursiva es una manera más práctica y eficiente de trabajar con los polinomios de Chebyshev, que a partir de su definición trigonométrica. Como la definición recursiva y la definición trigonométrica significan lo mismo, se dará la demostración de que son equivalentes, por lo que se enunciarán como corolarios y no como definiciones.

Corolario 1. *Los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ de primer tipo, son polinomios en x de grado n , que puede ser escrito en la forma recursiva*

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

Con condiciones iniciales $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$.

Demostración: Se sabe por identidades trigonométricas (Anexo 1) que

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta$$

Ahora por la Definición 1, se puede sustituir $T_n = \cos n\theta$, $T_{n-2} = \cos(n-2)\theta$, $x = \cos \theta$ y $T_{n-1} = \cos(n-1)\theta$, de donde se sigue lo siguiente

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

Y además se deben cumplir las condiciones iniciales $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ que se obtienen de la Definición 1 en los casos $n = 0$ y $n = 1$.

Y esto genera recursivamente todos los polinomios $\{T_n(x)\}$ y finaliza la demostración.●

Corolario 2. *El polinomio de Chebyshev $U_n(x)$ de segundo tipo, es un polinomio en x de grado n , que puede ser escrito en la forma recursiva*

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

Con condiciones iniciales $U_0(x) = 1$ y $U_1(x) = 2x$.

Demostración: Se sabe por identidades trigonométricas (Anexo 1) que

$$\text{sen}(n+1)\theta + \text{sen}(n-1)\theta = 2 \cos \theta \text{sen } n\theta$$

Ahora por la Definición 2, se puede sustituir $U_n = \frac{\text{sen}(n+1)\theta}{\text{sen } \theta}$, $U_{n-1} = \frac{\text{sen } n\theta}{\text{sen } \theta}$, $x = \cos \theta$ y

$U_{n-2} = \frac{\text{sen}(n-1)\theta}{\text{sen } \theta}$, de donde se sigue lo siguiente

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

Y además se deben cumplir las condiciones iniciales $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ que se obtienen de la Definición 2 en los casos $n = 0$ y $n = 1$.

Y esto genera recursivamente todos los polinomios $\{U_n(x)\}$ y finaliza la demostración.●

Corolario 3. *El polinomio de Chebyshev $V_n(x)$ de tercer tipo, es un polinomio en x de grado n , que puede ser escrito en la forma recursiva*

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

Con condiciones iniciales $V_0(x) = 1$ y $V_1(x) = 2x - 1$.

Demostración: Se sabe por identidades trigonométricas (Anexo 1) que

$$\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \cos\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\theta = 2 \cos \theta \cos\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\theta$$

Ahora por la Definición 3, se puede sustituir $V_n = \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$, $V_{n-1} = \frac{\cos\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$, $x = \cos \theta$

y $V_{n-2} = \frac{\cos\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$, de donde se sigue que

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

Y además se deben cumplir las condiciones iniciales $V_0(x) = 1$, $V_1(x) = 2x - 1$ que se obtienen de la Definición 3 en los casos $n = 0$ y $n = 1$.

Y esto genera recursivamente todos los polinomios $\{V_n(x)\}$ y finaliza la demostración. ●

Corolario 4. *El polinomio de Chebyshev $W_n(x)$ de cuarto tipo, es un polinomio en x de grado n , que puede ser escrito en la forma recursiva*

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

Con condiciones iniciales $W(x) = 1$ y $W_1(x) = 2x + 1$.

Demostración: Se sabe por identidades trigonométricas (Anexo 1) que

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \sin\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\theta = 2 \cos \theta \sin\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\theta$$

Ahora por la Definición 4, se puede sustituir $W_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$, $W_{n-1} = \frac{\sin\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$, $x =$

$\cos \theta$ y $W_{n-2} = \frac{\sin\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$, de donde se sigue que

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

Y además se deben cumplir las condiciones iniciales $W_0(x) = 1$, $W_1(x) = 2x + 1$ que se obtienen de la Definición 4 en los casos $n = 0$ y $n = 1$.

Y esto genera recursivamente todos los polinomios $\{W_n(x)\}$ y acaba la demostración. ●

Obsérvese que $\{T_n(x)\}$, $\{U_n(x)\}$, $\{V_n(x)\}$ y $\{W_n(x)\}$ todos poseen la misma relación de recurrencia, pero sólo difieren en sus condiciones iniciales para $n = 1$.

A continuación se presenta las gráficas de las funciones $T_5(x)$ (izquierda) y $\cos 5\theta$ (derecha) en la Figura 1, donde el eje X representa la variable independiente θ o x , y el eje Y representa a la variable dependiente. En ellas se puede observar sus similitudes, el hecho de oscilar entre seis extremos de igual magnitud y de signos alternos. Entre sus diferencias se encuentra el hecho que los ceros del polinomio de Chebyshev no están igual espaciados como es el caso de la función coseno. Por otro lado los extremos de la función $T_5(x)$ en $x = \pm 1$ terminan *suave* a diferencia de la función coseno que termina con pendiente 0.

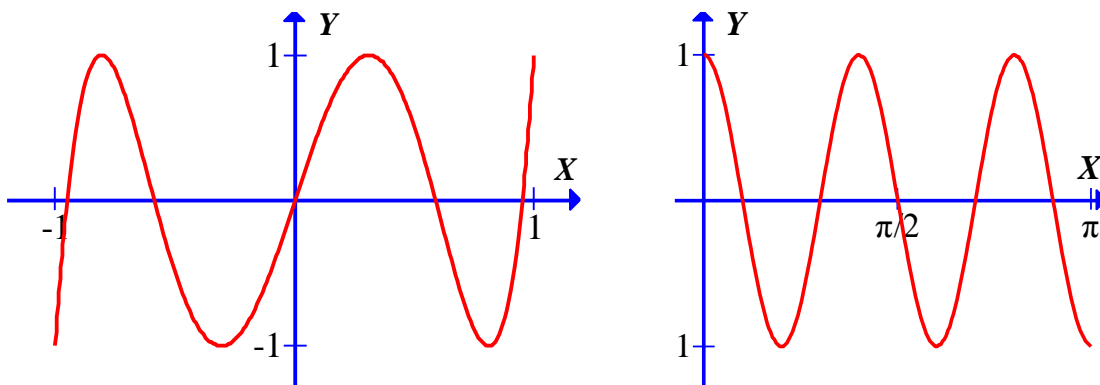


Figura 1. $T_5(x)$ en el rango $[-1,1]$ y $\cos 5\theta$ en el rango $[0, \pi]$

En la Figura 2 se muestra la gráfica de la función $U_5(x)$. Esta oscila entre seis extremos al igual que la función $T_5(x)$ de la Figura 1, pero a diferencia con la Figura 1, la función $U_5(x)$ posee extremos que no son iguales.

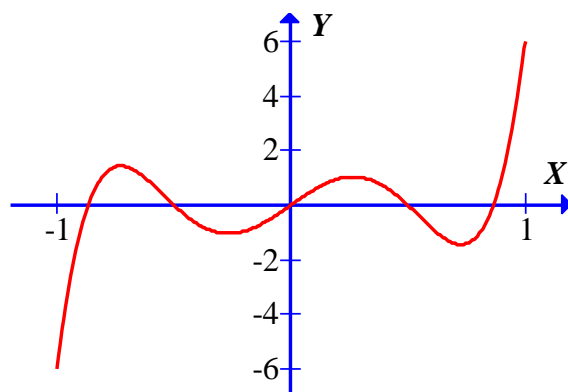


Figura 2. $U_5(x)$ en el rango $[-1,1]$

En la Figura 3 se muestran las gráficas de las funciones $V_5(x)$ y $W_5(x)$. Se podría decir que una de las gráficas es la simétrica respecto al origen de la otra gráfica.

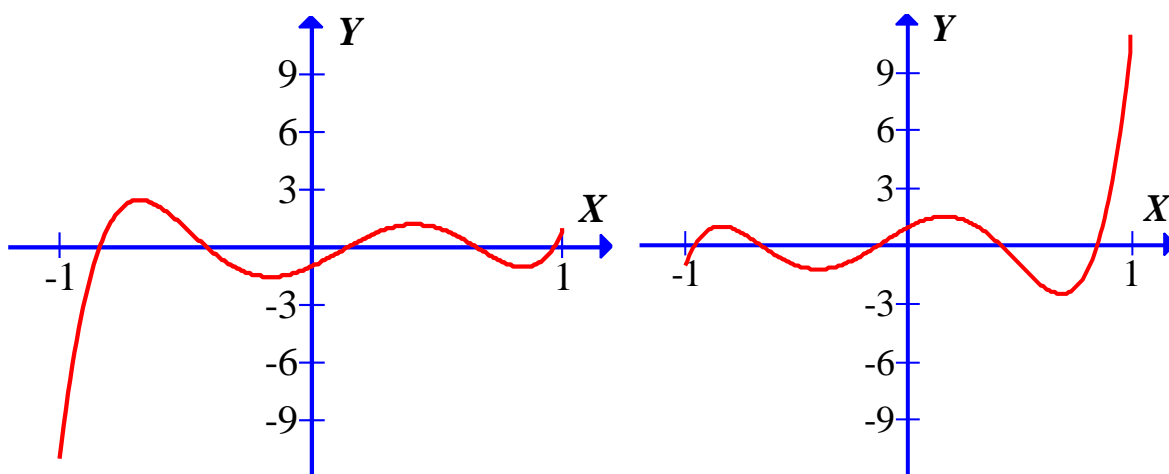


Figura 3. $V_5(x)$ y $W_5(x)$ en el rango $[-1,1]$

3.2. Relación entre los cuatro tipos de polinomios de Chebyshev

De la identidad de producto de funciones trigonométricas, se puede llegar a que

$$\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta = 2\sin\theta \cos n\theta$$

lleva a la relación

$$U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

entre los polinomios de Chebyshev de primer y de segundo tipo.

Ahora que se tiene una relación entre los polinomios de primer y de segundo tipo, se enlazarán con los polinomios de tercer y de cuarto tipo. Para esto se introducen las variables u y t , a como sigue:

$$u = \left[\frac{1}{2}(1+x) \right]^{\frac{1}{2}} = \cos \frac{1}{2}\theta, \quad t = \left[\frac{1}{2}(1-x) \right]^{\frac{1}{2}} = \sin \frac{1}{2}\theta.$$

Que al usar las definiciones 1, 2, 3 y 4 se puede operar hasta obtener lo que sigue

$$\begin{aligned} T_n(x) &= T_{2n}(u), & U_n(x) &= \frac{1}{2}u^{-1}U_{2n+1}(u), \\ V_n(x) &= u^{-1}T_{2n+1}(u), & W_n(x) &= U_{2n}(u). \end{aligned} \quad (1)$$

Por lo tanto, los polinomios $T_n(x)$, $U_n(x)$, $V_n(x)$ y $W_n(x)$ juntos forman los polinomios de primer y de segundo tipo en u , con peso u^{-1} en los casos de grados impares. También en (1) se muestra que $V_n(x)$ y $W_n(x)$ están directamente relacionados, respectivamente, al primero y segundo tipo de polinomios de Chebyshev. Estas relaciones justifican que se nombre a V_n y W_n como polinomios de Chebyshev de tercer y cuarto tipo.

Note que V_n y W_n no son pares ni impares, a diferencia de T_n y U_n . Se ha visto que el coeficiente principal de x^n en V_n y W_n es 2^n , así como en U_n , lo que sugiere un enlace cercano con U_n . De hecho si se promedian las condiciones iniciales de V_n y W_n (en la relación de recurrencia de los polinomios de tercer y cuarto tipo) se obtienen las condiciones iniciales para U_1 , del cual se puede mostrar que el promedio de V_n y W_n satisface la relación de recurrencia para U_n y por lo tanto para todo n

$$U_n(x) = \frac{1}{2}[V_n(x) + W_n(x)]. \quad (2)$$

El último resultado también se sigue directamente de las definiciones trigonométricas de U_n , V_n y W_n , desde que

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} &= \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta \cos\frac{1}{2}\theta + \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta}{2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta \cos\frac{1}{2}\theta} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} + \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta} \right]. \end{aligned}$$

La ecuación (2) no es el único enlace entre los conjuntos $\{V_n\}$, $\{W_n\}$ y $\{U_n\}$, al usar las relaciones trigonométricas

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta &= \operatorname{sen}(n+1)\theta - \operatorname{sen}n\theta \\ 2 \cos\frac{1}{2}\theta \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta &= \operatorname{sen}(n+1)\theta + \operatorname{sen}n\theta \end{aligned}$$

y dividiendo estas por el $\operatorname{sen}\theta$, se deduce que

$$V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x), \quad (3)$$

$$W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x). \quad (4)$$

Por tanto, V_n y W_n pueden ser simplemente determinados por $\{U_n\}$ una vez que estén disponibles. Note que (3) y (4) son confirmados por los ejemplos de las definiciones 2, 3 y 4 y son consistentes con la ecuación (2).

De la paridad/imparidad de $U_n(x)$ para n par/impar, se puede deducir inmediatamente de (3) y (4) que

$$\begin{aligned} W_n(x) &= V_n(-x), & (n \text{ par}); \\ W_n(x) &= -V_n(-x), & (n \text{ impar}). \end{aligned}$$

Esto significa que los polinomios de tercer y cuarto tipo esencialmente se transforman cada uno en el otro si el rango $[-1,1]$ de x es invertido y por lo tanto justifica el estudio de uno de estos tipos de polinomios.

Dos relaciones más que pueden derivarse de las definiciones son

$$V_n(x) + V_{n-1}(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x) = 2T_n(x).$$

Si se analiza el “orden jerárquico” de estos cuatro polinomios de Chebyshev, T_n , U_n , V_n y W_n , se podría decir que T_n es ciertamente el más importante y versátil. Por otra parte T_n generalmente lleva a la fórmula más simple, mientras que el resultado para los otros polinomios puede implicar ligeras variaciones, sin embargo, los cuatro tipos de polinomios juegan su rol. Por ejemplo, se podría ver que, U_n es más útil en integración numérica, mientras que V_n y W_n pueden ser útiles en situaciones donde la singularidad ocurra en un punto extremo (+1 ó -1) pero no en el otro extremo.

3.3. Desplazamientos de Polinomios de Chebyshev

Los desplazamientos de los Polinomios de Chebyshev se utilizan cuando el intervalo de definición no es $[-1,1]$, sino para cualquier intervalo $[a, b]$ con $a < b$. El primer caso será para el rango $[0,1]$ y el segundo caso un intervalo general.

3.3.1. Los polinomios desplazados T_n^* , U_n^* , V_n^* y W_n^*

Desde que el rango $[0,1]$ a menudo más conveniente para usar que el rango $[-1,1]$, algunas veces mapear la variable independiente x en $[0,1]$ en la variable s en $[-1,1]$ por la transformación

$$s = 2x - 1 \text{ ó } x = \frac{1}{2}(1 + s),$$

y esto deja al polinomio desplazado de Chebyshev (de primer tipo) $T_n^*(x)$ de grado n en x sobre $[0,1]$ dado por

$$T_n^*(x) = T_n(s) = T_n(2x - 1). \quad (5)$$

Por lo tanto, se tienen los polinomios

$$\begin{aligned} T_0^*(x) &= 1, & T_1^*(x) &= 2x - 1, & T_2^*(x) &= 8x^2 - 8x + 1, \\ T_3^*(x) &= 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

De (5) y el Corolario 1, se deduce la relación de recurrencia para T_n^* en la forma

$$T_n^*(x) = 2(2x - 1)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x) \quad (7)$$

con condiciones iniciales

$$T_0^*(x) = 1, \quad T_1^*(x) = 2x - 1.$$

Los polinomios $T_n^*(x)$ tienen una mayor propiedad especial, los que se derivan de la Definición 1 y de la ecuación (5):

$$T_{2n}(x) = \cos 2n\theta = \cos n(2\theta) = T_n(\cos 2\theta) = T_n(2x^2 - 1) = T_n^*(x^2)$$

de modo que

$$T_{2n}(x) = T_n^*(x^2). \quad (8)$$

Estas propiedades son fácilmente demostradas por los primeros pocos polinomios al comparar los ejemplos de la Definición 1 y (6). Por lo tanto, $T_n(x)$ es precisamente $T_{2n}(\sqrt{x})$, un mayor grado de polinomios de Chebyshev en la raíz cuadrada del argumento y la relación (8) da un enlace importante entre $\{T_n\}$ y $\{T_n^*\}$ complementando la relación desplazada (5).

También es posible definir T_n^* , como T_n y U_n , directamente por una relación trigonométrica. De hecho, si se combina la Definición 1 y la relación (8) se obtiene

$$T_n^*(x) = \cos 2n\theta \quad \text{cuando } x = \cos^2 \theta.$$

Esta relación podría reescribirse alternativamente, con θ reemplazada por $\frac{\phi}{2}$, en la fórmula

$$T_n^*(x) = \cos n\phi \quad \text{cuando } x = \cos^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \phi).$$

La última fórmula de T_n^* se puede obtener directamente de (5), al escribir

$$T_n(s) = \cos n\theta \quad \text{cuando } s = \cos \phi.$$

Note que los polinomios desplazados de Chebyshev $T_n^*(x)$ no son ni pares o impares, y que todas las potencias de x desde $1 = x^0$ hasta x^n aparecen en $T_n^*(x)$. Los coeficientes que quedan de x^n en $T_n^*(x)$ para $n > 0$ pueden deducirse de la relación de recurrencia (7) y sus condiciones iniciales a ser 2^{2n-1} .

Los polinomios desplazados U_n^* , V_n^* y W_n^* de segundo, tercer y cuarto tipo pueden definirse de manera análoga así:

$$U_n^*(x) = U_n(2x - 1), \quad V_n^*(x) = V_n(2x - 1), \quad W_n^*(x) = W_n(2x - 1). \quad (9)$$

Uniones entre U_n^* , V_n^* , W_n^* y el polinomio sin asterisco, en analogía a (8) antes visto, pueden establecerse fácilmente. Así usando la definición 2 y la relación (9) se llega a

$$\begin{aligned} \sen \theta U_{2n-1}(x) &= \sen 2n\theta = \sen n(2\theta) = \sen 2\theta U_{n-1}(\cos 2\theta) \\ &= 2 \sen \theta \cos \theta U_{n-1}(2x^2 - 1) = \sen \theta \{2xU_{n-1}^*(x^2)\} \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$U_{2n-1}(x) = 2xU_{n-1}^*(x^2). \quad (10)$$

La relación correspondiente entre V_n^* y W_n^* son ligeramente diferentes porque se complementan en (8) y (10) involucrando T_{2n-1} y U_{2n} . Primeramente usando la variable auxiliar u , como se habían definido antes, la relación (1) y la (9).

$$V_{n-1}^*(u^2) = V_{n-1}(2u^2 - 1) = V_{n-1}(x) = u^{-1}T_{2n-1}(u)$$

y por lo tanto, reemplazando u por x :

$$T_{2n-1}(x) = xV_{n-1}^*(x^2).$$

Similarmente,

$$W_{n-1}^*(u^2) = W_{n-1}(2u^2 - 1) = W_{n-1}(x) = U_{2n}(u)$$

y por lo tanto al reemplazar u por x :

$$U_{2n}(x) = W_{n-1}^*(x^2).$$

3.3.2. Polinomios de Chebyshev para el rango general $[a, b]$

En el apartado anterior se ha ajustado el rango $[-1,1]$ al rango $[0,1]$ por conveniencia, esto corresponde al uso de los polinomios desplazados de Chebyshev T_n^* , U_n^* , V_n^* , W_n^* en lugar de T_n , U_n , V_n y W_n respectivamente. De manera general se pueden definir apropiados polinomios de Chebyshev para cualquier rango finito dado $[a, b]$ de x , haciendo corresponder este rango con el rango $[-1,1]$ de una nueva variable s bajo la transformación lineal:

$$s = \frac{2x - (a + b)}{b - a}. \quad (11)$$

Los polinomios de Chebyshev de primer tipo apropiados a $[a, b]$ son, por lo tanto $T_n(s)$, donde s es dado por (11), y similarmente los polinomios de segundo, tercer y cuarto tipo apropiados para $[a, b]$ son $U_n(s)$, $V_n(s)$ y $W_n(s)$.

Poder cambiar el rango a un rango general permite centrar la atención en resolver un problema particular, en este caso el rango $[-1, 1]$. No obstante, en caso de estar trabajando cualquier otro intervalo, se debe tener en cuenta las modificaciones que deja el nuevo intervalo a los polinomios de Chebyshev.

3.4. Operaciones y principales propiedades de los polinomios de Chebyshev

3.4.1. Ceros y extremos de los polinomios de Chebyshev.

Los Polinomios de Chebyshev de grado $n > 0$ de todos los tipos tienen precisamente n ceros y $n + 1$ extremos locales en el intervalo $[-1, 1]$. Esto se puede apreciar para el caso $n = 5$ en las Figuras 1, 3 y 4. Advierta que $n - 1$ de estos extremos son interior a $[-1, 1]$ y se encuentran alternado entre máximo y mínimo (en el sentido que la pendiente desaparece), los otros dos extremos pertenecen a los puntos finales ± 1 (donde la pendiente no es cero).

De la Definición 1, los ceros de x en $[-1, 1]$ de $T_n(x)$ corresponden a los ceros para θ en $[0, \pi]$ del $\cos n\theta$, esto es

$$n\theta = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Por lo tanto, los ceros de $T_n(x)$ son

$$x = x_k = \cos \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{n}, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Por ejemplo, para $n = 3$, los ceros son

$$x = x_1 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \cos \frac{3\pi}{6} = 0, \quad x_3 = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Note que estos ceros están en orden decreciente en x (correspondiente al incrementar θ), y a veces es preferible enumerarlos en su orden natural como

$$x = \cos \frac{\left(n - k + \frac{1}{2}\right)\pi}{n}, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Note también que $x = 0$ es un cero de $T_n(x)$ para todo n impar, pero no para todo n par, y estas raíces están simétricamente localizados en pares a ambos lados de $x = 0$.

Los ceros de $U_n(x)$ (de la Definición 2) son fácilmente determinados en una manera similar de los ceros de $\sin(n+1)\theta$ como

$$x = y_k = \cos \frac{k\pi}{(n+1)}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

o en su orden natural

$$x = \cos \frac{(n-k+1)\pi}{n+1}, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Uno está naturalmente tentado a extender el conjunto de puntos encontrados anteriormente al incluir los valores extremos $y_0 = 1$ y $y_{n+1} = -1$, obteniendo el conjunto

$$x = y_k = \cos \frac{k\pi}{(n+1)}, \quad (k = 0, 1, \dots, n+1). \quad (12)$$

Estos no son ceros de $U_n(x)$, pero si del polinomio

$$(1-x^2)U_n(x).$$

Sin embargo, se verá que estos puntos son conocidos como nodos en aplicaciones de integración numérica.

Los ceros de $V_n(x)$ y $W_n(x)$ (de las Definiciones 3 y 4) corresponden a los ceros de $\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta$ y $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta$, respectivamente. Por lo tanto, los ceros de $V_n(x)$ ocurren en

$$x = \cos \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

o en su orden natural

$$x = \cos \frac{\left(n - k + \frac{1}{2}\right)\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

Mientras los ceros de $W_n(x)$ ocurren en

$$x = \cos \frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

o en su orden natural

$$x = \cos \frac{(n - k + 1)\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Note que la extensión del orden natural de este conjunto de puntos, al incluir el valor de $k = n + 1$ y por lo tanto $x = -1$ para (13) y el valor $k = 0$ y por lo tanto $x = 1$ en (14).

Por lo tanto, los polinomios

$$(1 + x)V_n(x) \text{ y } (1 - x)W_n(x)$$

tienen como ceros sus conjunto naturales (13) para $k = 1, \dots, n + 1$ y (14) para $k = 0, 1, \dots, n$, respectivamente.

Los extremos internos de $T_n(x)$ corresponden a los extremos de $\cos n\theta$, es decir los ceros de $\sin n\theta$, desde que

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = \frac{d}{dx} \cos n\theta = \frac{\frac{d}{d\theta} \cos n\theta}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-n \sin n\theta}{-\sin \theta}.$$

Por lo tanto, incluyendo los $x = \pm 1$, el extremo de $T_n(x)$ en $[-1, 1]$ son

$$x = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

o en su orden natural

$$x = \cos \frac{(n - k)\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

Estos puntos son precisamente los ceros de $(1 - x^2)U_{n-1}(x)$, es decir los puntos (12) anteriores (con n remplazado por $n - 1$). Note que los extremos son todos de igual magnitud (la unidad) y alternan en signo en los puntos (15) entre -1 y $+1$ como se puede apreciar en la Figura 1.

Los extremos de $U_n(x)$, $V_n(x)$ y $W_n(x)$ no son en general fácilmente de determinar. Pues, encontrarlos conlleva a la solución de ecuaciones transcendentales.

Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx} U_n(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{-(n+1) \sin \theta \cos(n+1)\theta + \cos \theta \sin(n+1)\theta}{\sin^3 \theta}$$

y los extremos, por tanto, corresponden a los valores de θ que satisfacen la ecuación

$$\tan(n+1)\theta = (n+1) \tan \theta \neq 0.$$

Lo que se puede decir de estos es que los valores extremos de $U_n(x)$ tienen magnitudes con incremento monótono así como $|x|$ incrementa desde 0 hasta la mayor magnitud de $n + 1$ llega a $x = \pm 1$.

Por otro lado, de las Definiciones 2, 3 y 4, se puede mostrar que

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2}U_n(x) &= \sin(n+1)\theta, \\ \sqrt{1+x}V_n(x) &= \sqrt{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta, \\ \sqrt{1-x}W_n(x) &= \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta; \end{aligned}$$

Por lo tanto los extremos de los polinomios con pesos $\sqrt{1-x^2}U_n(x)$, $\sqrt{1+x}V_n(x)$, $\sqrt{1-x}W_n(x)$ están explícitamente determinados y ocurren, respectivamente en:

$$x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad x = \cos \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}, \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

3.4.2. Evaluación de Sumas, Multiplicación, derivadas e integrales con polinomios de Chebyshev.

3.4.2.1. Sumas

Para evaluar la suma

$$S_n = \sum_{r=0}^n a_r P_r(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x) \quad (16)$$

donde $\{P_r(x)\}$ son polinomios de Chebyshev, ya sean, de primero, segundo, tercero o cuarto tipo. Se puede escribir (16) en forma vectorial como

$$S_n = \mathbf{a}^T \mathbf{p}$$

donde \mathbf{a}^T y \mathbf{p} denotan al vector fila y al vector columna

$$\mathbf{a}^T = (a_0, a_1, \dots, a_n), \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix}.$$

En cada uno de los cuatro casos, de las relaciones de recurrencia de los Corolarios 1, 2, 3 y 4 de arriba, se llega a que los polinomios toman la misma forma

$$P_r(x) - 2xP_{r-1}(x) + P_{r-2}(x) = 0, \quad r = 2, 3, \dots$$

con $P_0(x) = 1$ y, respectivamente,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= T_1(x) = x, & P_1(x) &= U_1(x) = 2x, \\ P_1(x) &= V_1(x) = 2x - 1, & P_1(x) &= W_1(x) = 2x + 1. \end{aligned}$$

La ecuación anterior puede ser escrita en notación matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ -2x & 1 & & & & & & & \\ 1 & -2x & 1 & & & & & & \\ & & 1 & -2x & 1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 1 & -2x & 1 & & \\ & & & & & 1 & -2x & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ P_3(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \\ P_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o (denotando la matriz $(n + 1) * (n + 1)$ por \mathbf{A})

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{c}$$

Para los polinomios $T_r(x)$ de primer tipo, es usual necesitar la suma modificada

$$S'_n = \sum_{r=0}^n a_r T_r(x) = \frac{1}{2} a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \cdots + a_n T_n(x),$$

en el cual el coeficiente de T_0 es dividido por la mitad, en cuyo caso (21) es reemplazado (recordando que $X = -x$) por

$$S'_n = S_n - \frac{1}{2} a_0 = (b_0 - b_1 x) + \frac{1}{2} (b_0 - 2x b_1 + b_2),$$

o

$$S'_n = \frac{1}{2} (b_0 - b_2). \quad (22)$$

Note que, para un x dado, llevará a cabo la recurrencia y requiere solamente $O(x)$ multiplicaciones, y por lo tanto es tan eficiente como la regla de Horner para evaluar un polinomio como una suma de potencias usando multiplicación en el lugar.

3.4.2.2. Estabilidad en la evaluación de una suma de Chebyshev.

Es importante considerar el efecto del error de redondeo cuando se usa la relación de recurrencia (20) situada arriba, desde que es conocida la inestabilidad que ocurre algunas veces. (por inestabilidad se refiere al crecimiento rápido del error de redondeo relativo a la solución verdadera en el proceso de cálculo.)

En el caso de la recurrencia (20), suponga que cada b_s es calculado con un error de redondeo local ϵ_s , los cuales errores locales juntos se propagan en el error δ_r a b_r para $r < s$, resultando en un error Δ en S_n o Δ' en S'_n . Escribiendo \bar{b}_r para el cálculo de b_r y \bar{S}_n o \bar{S}'_n para S_n o S'_n calculado sin mucho error de (18) o (22), luego de (20) (para una x fija)

$$\bar{b}_r = 2x\bar{b}_{r+1} - \bar{b}_{r+2} + a_r - \epsilon_r \quad (23)$$

mientras

$$b_r - \bar{b}_r = \delta_r. \quad (24)$$

También

$$\begin{aligned}\bar{S}_n &= \bar{b}_0 + \bar{b}_1 X, \\ \bar{S}'_n &= \frac{1}{2}(\bar{b}_0 - \bar{b}_2),\end{aligned}$$

y

$$S_n - \bar{S}_n = \Delta, \quad S'_n - \bar{S}'_n = \Delta'.$$

De (20), (23) y (24) se deduce que

$$\delta_r = 2x\delta_{r+1} - \delta_{r+2} + \epsilon_r, \quad (r < s) \quad (25)$$

mientras que

$$\begin{aligned}\Delta &= \delta_0 + \delta_1 X, \\ \Delta' &= \frac{1}{2}(\delta_0 - \delta_2).\end{aligned}$$

Ahora la recurrencia (25) es idéntica, en la forma, con la (20), mientras que ϵ_r reemplazando a a_r y δ_r reemplazando a b_r , mientras que $\delta_{n+1} = \delta_{n+2} = 0$. Tomando los pasos finales en cuenta, se deduce que

$$\Delta = \sum_{r=0}^n \epsilon_r P_r(x),$$

donde P_r es T_r , U_r , V_r o W_r , dependiendo de la elección de X y

$$\Delta' = \sum_{r=0}^n \epsilon_r T_r(x).$$

Usando la bien conocida desigualdad

$$\left| \sum_r x_r y_r \right| \leq \left(\sum_r |x_r| \right) \max_r |y_r|,$$

se deducen los errores límites

$$|\Delta'| \leq \left(\sum_{r=0}^n |\epsilon_r| \right) \max_{r=0}^n |T_r(x)| \leq \sum_{r=0}^n |\epsilon_r|$$

y

$$|\Delta| \leq \left(\sum_{r=0}^n |\epsilon_r| \right) \max_{r=0}^n |P_r(x)| \leq C_n \sum_{r=0}^n |\epsilon_r|,$$

donde $C_n = 1, n + 1, 2n + 1, 2n + 1$ cuando P_r es T_r, U_r, V_r o W_r , respectivamente. (Note que los ϵ_r en esta fórmula son errores absolutos, no relativos, incurridos en cada paso del cálculo.)

3.4.2.3. Evaluación De Un Producto

En ciertas ocasiones es necesario poder multiplicar polinomios de Chebyshev por cada otro, por ejemplo a la hora de probar la ortogonalidad de los polinomios de Chebyshev. Así también resulta útil el poder evaluar el producto por factores como x , $1 - x$ y $1 - x^2$, y poder expresar el resultado en términos de polinomios de Chebyshev. Tales productos son fácilmente transformados a polinomios de segundo, tercero y cuarto tipo, como una consecuencia de los denominadores de sus definiciones trigonométricas. Por ese motivo se enfatizará en $T_n(x)$ y en la menor extensión de $U_n(x)$.

Varias fórmulas se obtienen fácilmente al usar la sustitución trigonométrica $x = \cos \theta$ e identidades trigonométricas como sigue:

$$T_m(x)T_n(x) = \cos m\theta \cos n\theta = \frac{1}{2}(\cos(m+n)\theta + \cos|m-n|\theta),$$

dando

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}(T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x)).$$

$$xT_n(x) = \cos \theta \cos n\theta = \frac{1}{2}(\cos(n+1)\theta + \cos|n-1|\theta),$$

$$xU_n(x) \sin \theta = \cos \theta \sin(n+1)\theta = \frac{1}{2}(\sin(n+2)\theta + \sin n\theta),$$

dando

$$xT_n(x) = \frac{1}{2}(T_{n+1}(x) + T_{|n-1|}(x))$$

y

$$xU_n(x) = \frac{1}{2}(U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x)),$$

(siempre que se interprete $U_{-1}(x)$ como $\sin 0 / \sin \theta = 0$).

Generalmente, se puede obtener expresiones para $x^m T_n(x)$ (y similar para $x^m U_n(x)$) para cualquier m , expresando x^m en términos de polinomios de Chebyshev

De manera similar

$$\begin{aligned} (1-x^2)T_n &= \sin^2 \theta \cos n\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \cos n\theta \\ &= \frac{1}{2} \cos n\theta - \frac{1}{4}(\cos(n+2)\theta + \cos|n-2|\theta), \\ (1-x^2)U_n(x) \sin \theta &= \sin^2 \theta \sin(n+1)\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \sin(n+1)\theta \\ &= \frac{1}{2} \sin(n+1)\theta - \frac{1}{4}(\sin(n+3)\theta + \sin(n-1)\theta), \end{aligned}$$

dando por sus respectivas definiciones

$$(1-x^2)T_n(x) = -\frac{1}{4}T_{n+2}(x) + \frac{1}{2}T_n(x) - \frac{1}{4}T_{|n-2|}(x)$$

y

$$(1-x^2)U_n(x) = -\frac{1}{4}U_{n+2}(x) + \frac{1}{2}U_n(x) - \frac{1}{4}U_{n-2}(x)$$

donde $U_{-1}(x)$ se interpreta como 0 nuevamente, y $U_{-2}(x)$ como $\frac{\sin -\theta}{\sin \theta} = -1$.

Note que los casos particulares $n = 0$, $n = 1$ están incluidos en las últimas fórmulas obtenidas de arriba, específicamente

$$\begin{aligned}
 xT_0(x) &= T_1(x), \\
 xU_0(x) &= \frac{1}{2}U_1(x), \\
 (1-x^2)T_0(x) &= \frac{1}{2}T_0(x) - \frac{1}{2}T_2(x), \\
 (1-x^2)T_1(x) &= \frac{1}{4}T_1(x) - \frac{1}{4}T_3(x), \\
 (1-x^2)U_0(x) &= \frac{3}{4}U_0(x) - \frac{1}{4}U_2(x), \\
 (1-x^2)U_1(x) &= \frac{1}{2}U_1(x) - \frac{1}{4}U_3(x).
 \end{aligned}$$

3.4.2.4. Evaluación de una integral

La integral indefinida de $T_n(x)$ se puede expresar en términos de polinomios de Chebyshev a como sigue. Por medio de la sustitución usual $x = \cos \theta$,

$$\begin{aligned}
 \int T_n(x) dx &= \int -\cos n\theta \operatorname{sen} \theta d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \int (\operatorname{sen}(n+1)\theta - \operatorname{sen}(n-1)\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\cos|n-1|\theta}{n-1} \right]
 \end{aligned}$$

(donde el segundo término en los corchetes se omite para el caso $n = 1$).

Por lo tanto

$$\int T_n(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{|n-1|}(x)}{n-1} \right], & n \neq 1; \\ \frac{1}{4} T_2(x), & n = 1. \end{cases}$$

Claramente este resultado se puede usar para integrar la suma

$$S_n(x) = \sum_{r=0}^n a_r T_r(x)$$

en la forma

$$\begin{aligned}
 I_{n+1}(x) &= \int S_n(x) dx \\
 &= \text{constante} + \frac{1}{2}a_0T_1(x) + \frac{1}{4}a_1T_2(x) + \sum_{r=2}^n \frac{a_r}{2} \left[\frac{T_{r+1}(x)}{r+1} - \frac{T_{r-1}(x)}{r-1} \right] \\
 &= \sum_{r=0}^{n+1} A_r T_r(x)
 \end{aligned} \tag{26}$$

donde A_0 es determinado de la constante de integración, y

$$A_r = \frac{a_{r-1} - a_{r+1}}{2r}, \quad r > 0, \tag{27}$$

con $a_{n+1} = a_{n+2} = 0$.

Hay una directa e interesante integral que relaciona los polinomios de Chebyshev de primer y de segundo tipo,

$$\int U_n(x) dx = \frac{1}{n+1} T_{n+1}(x) + \text{constante} \tag{28}$$

(la cual se verifica fácilmente al sustituir $x = \cos \theta$).

Por lo tanto, la suma

$$S_n(x) = \sum_{r=1}^n b_r U_{r-1}(x)$$

se puede integrar inmediatamente para obtener

$$\int S_n(x) dx = \sum_{r=1}^n \frac{b_r}{r} T_r(x) + \text{constante}.$$

3.4.2.5. Evaluación de una derivada

La fórmula de derivación para $T_n(x)$ en términos de polinomios de primer tipo no es del todo fácil como la de la integral. De (28) se deduce que

$$\frac{d}{dx} T_{n+1}(x) = (n+1)U_n(x)$$

esto se puede expresar fácilmente en términos de polinomios de segundo tipo. Luego al utilizar la relación que existe entre los polinomios T_n y U_n y las condiciones iniciales para $U_n(x)$ se obtiene:

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = 2n \sum_{\substack{r=0 \\ n-r \text{ impar}}}^{n-1} 'T_r(x).$$

Por lo tanto, la derivada de una suma finita de polinomios de Chebyshev de primer tipo es fácilmente expresada como una suma de tales polinomios, al revertir el proceso usado en la integración de (26). Dando una suma de Chebyshev (de grado $n + 1$)

$$I_{n+1}(x) = \sum_{r=0}^{n+1} A_r T_r(x),$$

luego

$$S_n(x) = \frac{d}{dx} I_{n+1} = \sum_{r=0}^n 'a_r T_r(x),$$

donde los coeficientes $\{a_r\}$ están divididos por los $\{A_r\}$ dados, usando (27) en la forma

$$a_{r-1} = a_{r+1} + 2r A_r, \quad (r = n + 1, n, \dots, 1)$$

con

$$a_{n+1} = a_{n+2} = 0.$$

Explícitamente, se puede decir que

$$a_r = \sum_{\substack{k=r+1 \\ k-r \text{ impar}}}^{n+1} 2k A_k.$$

Hay otra fórmula, relativamente simple, para la derivada de $T_n(x)$, la cual se puede obtener como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} T_n(x) &= \frac{\frac{d}{d\theta} \cos n\theta}{\frac{d}{d\theta} \cos \theta} \\
&= \frac{n \operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen} \theta} \\
&= \frac{\frac{1}{2} n (\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta)}{\operatorname{sen}^2 \theta} \\
&= \frac{\frac{1}{2} n (T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x))}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $|x| \neq 1$,

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = \frac{n T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)}{1-x^2}.$$

3.5. Propiedad de minimax.

Para ver la propiedad de minimax que cumplen los polinomios de Chebyshev, se empezará con una introducción a la teoría de aproximación, para luego mostrar la propiedad minimax de los polinomios de Chebyshev.

3.5.1. Teoría de aproximación

Los cursos de Análisis Numérico se enseñan con métodos para aproximar cualquier función dada a través de otras funciones, como un polinomio, escogiendo valores no idénticos, pero sí, tan cercanos como se pueda respecto a la función dada. Esto con el fin de que sea más eficiente al evaluar o manipular los cálculos.

La estructura de un “problema de aproximación” incluye tres componentes centrales. *i)* Una *clase de funciones* (que contiene la función que será aproximada) *ii)* Una *forma de aproximación* (para la función de aproximación) y *iii)* una *norma* (del error de aproximación), en términos de los cuales el problema puede ser planteado.

Por *clase de funciones*, se refiere a una familia restringida \mathcal{F} de funciones f para las cuales cualquier función $f(x)$ que se quiera adaptar, se asume que le pertenece. En esta ocasión

se centrará la atención a funciones reales de variable real, pero estas pueden pertenecer a otras familias de funciones.

La razón para que se haya definido una familia de funciones, cuando en la práctica se esté interesado posiblemente en una sola función en específico, es que esto ayuda a aislar las propiedades de la función que son relevantes en la teoría. Por otro lado, hay un enlace cercano entre la clase de funciones con que se trabaja y la norma que se pueda usar.

Por *forma de aproximación* se refiere a una forma específica de la función que será adoptada, la que siempre debe incluir coeficientes ajustables u otros parámetros. Esto define una familia \mathcal{A} de posibles aproximaciones $f^*(x)$ a la función dada $f(x)$. Por ejemplo, se podría dar la aproximación por una de las siguientes familias:

1. Polinomios de grado n , con

$$\mathcal{A} = \Pi_n = \{f^*(x) = p_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n\}, \quad (\text{parámetros } \{c_j\})$$

2. Funciones racionales del tipo (p, q) , con

$$\mathcal{A} = \left\{ f^*(x) = r_{p,q}(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_px^p}{1 + b_1x + \dots + b_qx^q} \right\}, \quad (\text{parámetros } \{a_j\}, \{b_j\})$$

Para propósitos teóricos es deseable escoger la clase de función \mathcal{F} que sea un espacio vectorial (espacio lineal, espacio de funciones). Este espacio \mathcal{F} típicamente tiene dimensión infinita, sus vectores consisten en los valores $f(x)$ de cada uno de los puntos continuos x en $[a, b]$.

La familia \mathcal{A} de aproximación es usualmente tomada de una subclase de \mathcal{F} :

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$$

en la práctica, \mathcal{A} es también un espacio vectorial, de hecho es un espacio de funciones. En contraste con \mathcal{F} , \mathcal{A} es un espacio de funciones dimensionalmente finito, su dimensión es el número de parámetros en la forma de aproximación. Por lo tanto, el espacio Π_n de los polinomios $p_n(x)$ de grado n , tiene dimensión $n + 1$ y es isomorfo al espacio \mathbb{R}^{n+1} de vectores reales con $n + 1$ componentes $\{c = (c_0, c_1, \dots, c_n)\}$.

La *norma* de aproximación $\|\cdot\|$ sirve para comparar la función $f(x)$ con la aproximación $f^*(x)$ y resulta una única medida escalar de la cercanía de f^* a f , es decir

$$\|f - f^*\|.$$

Definición 5. Una norma $\|\cdot\|$ es definida como cualquier medida escalar real de elementos de un espacio vectorial que satisface los siguientes axiomas.

1. $\|u\| \geq 0$, con igualdad si y sólo si $u = 0$;
2. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (la desigualdad triangular);
3. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ para cualquier escalar α .

Algunas opciones de norma de espacios de funciones son los siguientes:

1. Norma \mathcal{L}_∞ (o norma uniforme, norma minimax, o norma de Chebyshev):

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|;$$

2. Norma \mathcal{L}_2 (o norma de mínimos cuadrados, o norma euclideana):

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b w(x) |f(x)|^2 dx},$$

Donde $w(x)$ es una función de peso no negativa;

3. Norma \mathcal{L}_1 (o norma media, o norma Manhattan):

$$\|f\| = \|f\|_1 = \int_a^b w(x) |f(x)| dx$$

4. Las tres normas de arriba pueden ser recogidas dentro de la norma \mathcal{L}_p , más general (o norma de Hölder):

$$\|f\| = \|f\|_p = \left[\int_a^b w(x) |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty)$$

Donde $w(x)$ es una función de peso no negativa.

5. La norma minimax con peso:

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} w(x) |f(x)|$$

(La cual no cae dentro del patrón de las normas de Hölder) También resulta apropiada en algunas circunstancias.

La norma \mathcal{L}_p se hace fuerte a medida que p incrementa.

Un espacio vectorial que posee una norma, es llamado un espacio lineal normado. Por lo tanto una vez que la norma es escogida, los espacios vectorial \mathcal{F} y \mathcal{A} de funciones y aproximación serán espacios lineales normados.

3.5.2. El problema de aproximación.

Se define una familia de funciones o espacio de funciones, \mathcal{F} , una familia de aproximaciones o (sub)espacio de aproximación \mathcal{A} , y una medida $\|f - f^*\|$ de que tan cercana es, dada una función $f(x)$ en \mathcal{F} a una aproximación derivada $f^*(x)$ en \mathcal{A} . Para juzgar más precisamente la calidad de $f^*(x)$, como una aproximación de $f(x)$ en términos de sus medidas, existen en la práctica tres tipos de aproximación, que se ven en la siguiente definición.

Definición 6. Si \mathcal{F} es un espacio lineal normado, si $f(x)$ es dado en \mathcal{F} y si \mathcal{A} es un subespacio de \mathcal{F} dado.

1. Una aproximación $f^*(x)$ en \mathcal{A} se dice que es “buena” (o aceptable) si

$$\|f - f^*\| \leq \epsilon$$

donde ϵ se encuentra a un nivel de absoluta precisión.

2. Una aproximación $f_B^*(x)$ en \mathcal{A} es una “mejor” aproximación si, para cualquier otra aproximación $f^*(x)$ en \mathcal{A} ,

$$\|f - f_B^*\| \leq \|f - f^*\|.$$

Note que algunas veces habrá más de una mejor aproximación a la misma función.

3. Una aproximación $f_N^*(x)$ en \mathcal{A} se dice que es la “más cercana y mejor” aproximación dentro de una distancia relativa ρ si

$$\|f - f_N^*\| \leq (1 + \rho)\|f - f_B^*\|,$$

donde ρ es un escalar específico positivo y $f_B^*(x)$ es una mejor aproximación.

En el caso de la norma \mathcal{L}_∞ , a menudo se usa la terminología *minimax* y *más cercana minimax* en lugar de *mejor* y *más cercana* y *mejor*.

El “problema de aproximación” consiste en determinar una aproximación de uno de estos tipos (buena, mejor o más cercana y mejor). Comúnmente se requiere que las aproximaciones “buena” y “mejor” o la “buena” y “más cercana y mejor”, deban ser alcanzadas. Después de todo, no es muy útil obtener la mejor aproximación si esta es muy pobre.

En la definición de “bueno” de la Definición 6, fue adoptado un criterio de error absoluto. Sin embargo, también es posible adoptar un criterio de error *relativo*, es decir

$$\left\| 1 - \frac{f^*}{f} \right\| \leq \epsilon.$$

En aproximación por polinomios en el intervalo $[a, b]$, siempre es posible obtener una buena aproximación tomando el grado lo suficientemente grande. Este es el resultado del siguiente teorema.

Teorema 1. (Teorema de Weierstrass) Para cualquier f dada en $\mathcal{C}[a, b]$ y para cualquier $\epsilon > 0$ dada, existe un polinomio p_n para algún n lo suficientemente grande, talque $\|f - p_n\|_\infty < \epsilon$.

Corolario 5. Resulta lo mismo para $\|f - p_n\|_p$ para cualquier $p > 1$.

Este resulta inmediato al aplicar el siguiente lema.

Lema 1. Si $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, y si a, b y $\int_a^b w(x)dx$ son finitos, entonces $\mathcal{L}_{p_2}[a, b]$ es un subespacio de $\mathcal{L}_{p_1}[a, b]$, y hay una constante finita $k_{p_1 p_2}$ talque

$$\|f\|_{p_1} \leq k_{p_1 p_2} \|f\|_{p_2}$$

para cada f en $\mathcal{L}_{p_2}[a, b]$.

3.5.3. Mejor aproximación y minimax

Dada una norma $\|\cdot\|$ (tales como $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ o $\|\cdot\|_1$), una mejor aproximación, como se definió anteriormente, es una solución al problema:

$$\text{minimise}_{f^* \in \mathcal{A}} \|f - f^*\|. \quad (30)$$

En el caso de aproximación polinómica:

$$f^*(x) = p_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n, \quad (31)$$

al reescribir (30) en términos de los parámetros como:

$$\text{minimice}_{c_0, \dots, c_n} \|f - p_n\|.$$

Siempre es posible obtener dicho p_n y además es único. Esto se observa en el siguiente teorema.

Teorema 2. Para cualquier p ($1 \leq p \leq \infty$), existe una única mejor aproximación polinomial p_n de cualquier función $f \in \mathcal{L}_p[a, b]$ en la norma \mathcal{L}_p , donde $w(x)$ se toma por la unidad en el caso en que $p \rightarrow \infty$.

Note que la mejor aproximación también existe en normas \mathcal{L}_p en un conjunto finito de puntos, para $1 \leq p \leq \infty$ y todas ellas son únicas para $p \neq 1$, pero no necesariamente única para $p = 1$. Tales normas \mathcal{L}_p se definen por:

$$\|f - f^*\|_p = \left[\sum_{i=1}^m w_i |f(x_i) - f^*(x_i)|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

donde los $\{w_i\}$ son pesos escalares positivos y $\{x_i\}$ es un conjunto discreto de m puntos montados, donde el valor de $f(x_i)$ es conocido.

Es posible definir otras formas de aproximación además de los polinomios, para los cuales existen y es única su mejor aproximación, sin embargo no se tratará en este trabajo porque se sale del objetivo que es el uso de los polinomios de Chebyshev.

Note que el Teorema 2 garantiza en particular la existencia y unicidad de la mejor aproximación en la norma \mathcal{L}_∞ o norma minimax. El problema de la mejor aproximación \mathcal{L}_∞ o aproximación minimax, combinando (29) y (31), es

$$\text{minimise}_{c_0, \dots, c_n} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)|.$$

De todo esto se observa claramente porqué es dado el nombre de minimax a este tipo de problema y porqué el resultado de mejor aproximación es usualmente referido como una “aproximación minimax”.

El Teorema 2 no es un teorema constructivo y no permite reconocer las características de una aproximación minimax. Sin embargo, es posible hacerlo, más explícitamente mediante el teorema siguiente:

Teorema 3. (Teorema de alternación para polinomios) Para cualquier $f(x)$ en $\mathcal{C}[a, b]$ existe un único polinomio con aproximación minimax $p_n(x)$ y es caracterizado por la “propiedad de alternación” (o “propiedad de equiosilación”) que hay $n + 2$ puntos (al menos) en $[a, b]$ en el que $f(x) - p_n(x)$ logra su mínimo valor absoluto (es decir, $\|f - p_n\|_\infty$) con signos alternos.

Este teorema, usualmente es atribuido a Chebyshev, pero más correctamente a Borel (1905), quien afirma que para que p_n sea la mejor aproximación, es necesario y suficiente que la propiedad de alternación deba mantenerse, que solamente un polinomio tiene esta propiedad y que hay solamente una mejor aproximación.

Al definir $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ como el espacio de funciones, los cuales son continuos y de período 2π . Hay un teorema similar al Teorema 3, el cual tiene por aproximación de una función continua a un polinomio trigonométrico, como

$$q_n(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sen k\theta) \quad (32)$$

en el rango $[-\pi, \pi]$ de θ .

Teorema 4. (Teorema de alternación para polinomios trigonométricos) Para cualquier $f(\theta)$ en $\mathcal{C}_{2\pi}^0$, la aproximación minimax $q_n(\theta)$ de la forma (32), existe y es únicamente caracterizado por una propiedad de alternación en $2n + 2$ puntos de $[-\pi, \pi]$. Si b_1, \dots, b_n (o a_0, \dots, a_n) son un conjunto de ceros, para que $q_n(\theta)$ sea una suma de funciones cosenos

(o senos) solamente y si $f(\theta)$ es una función impar (o par), entonces la aproximación minimax $q_n(\theta)$ es caracterizada por una propiedad de alternación en $n + 2$ (o respectivamente $n + 1$) puntos de $[0, \pi]$.

3.5.4. La propiedad minimax de los polinomios de Chebyshev.

Se sabe que el polinomio de Chebyshev $T_n(x)$ tiene $n + 1$ extremos, es decir

$$x = y_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Desde que $T_n(x) = \cos n\theta$ donde $x = \cos \theta$ (por la Definición 1) y desde que $\cos n\theta$ logra sus magnitudes máximas de la unidad, los que alternan de signo en sus extremos, tiene la siguiente propiedad.

Lema 2. (Propiedad de alternación de $T_n(x)$) En $[-1, 1]$, $T_n(x)$ logra su magnitud máxima de 1 al alternar los signos en precisamente $(n + 1)$ puntos, es decir, los puntos

$$x = y_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

Considerando la función

$$f(x) = x^n$$

y considerando la aproximación polinomial minimax de grado $n - 1$ en $[-1, 1]$, es decir $p_{n-1}(x)$. Luego, por el Teorema 3, $f(x) - p_{n-1}(x) = x^n - p_{n-1}(x)$ debe únicamente tener la propiedad de alternación en $n + 1$ puntos. Pero $T_n(x)$ tiene un coeficiente principal de x^n igual a 2^{1-n} y por lo tanto $2^{1-n}T_n(x)$ es de la misma forma $x^n - p_{n-1}(x)$ con la misma propiedad de alternación. Se sigue que

$$x^n - p_{n-1}(x) = 2^{1-n}T_n(x).$$

De donde $2^{1-n}T_n(x)$ es un polinomio Mónico, es decir un polinomio cuyo coeficiente principal es la unidad. Se siguen los siguientes dos corolarios del teorema de alternación.

Corolario 6. (Del Teorema 3) La aproximación polinomios minimax de grado $n - 1$ de la función $f(x) = x^n$ en $[-1,1]$ es

$$p_{n-1}(x) = x^n - 2^{1-n}T_n(x).$$

Corolario 7. (La propiedad minimax de T_n) $2^{1-n}T_n(x)$ es la aproximación minimax en $[-1,1]$ de la función cero por un polinomio mónico de grado n .

La propiedad de alternación del $\cos n\theta$ en $n + 1$ puntos de θ en $[0, \pi]$, también se cumple para los polinomios trigonométricos

$$\begin{aligned} \text{sen}(n + 1) \theta, & \quad \text{en } \theta = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi}{n + 1}, \quad (k = 0, \dots, n), \\ \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \theta, & \quad \text{en } \theta = \frac{k\pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad (k = 0, \dots, n), \\ \text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) \theta, & \quad \text{en } \theta = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi}{n + \frac{1}{2}}, \quad (k = 0, \dots, n). \end{aligned}$$

Luego por las propiedades de los polinomios de Chebyshev en las definiciones 2, 3 y 4 de $U_n(x)$, $V_n(x)$ y $W_n(x)$.

Corolario 8. [Del teorema de alternación] (Propiedad de pesos minimax de U_n , V_n y W_n .) La aproximación minimax de los ceros en $[-1,1]$, por polinomios mónicos de grado n , con pesos respectivos $\sqrt{1 - x^2}$, $\sqrt{1 + x}$ y $\sqrt{1 - x}$ son

$$2^{-n}U_n(x), 2^{-n}V_n(x) \text{ y } 2^{-n}W_n(x).$$

Se puede ver la característica de equioscilación en las figuras siguientes.

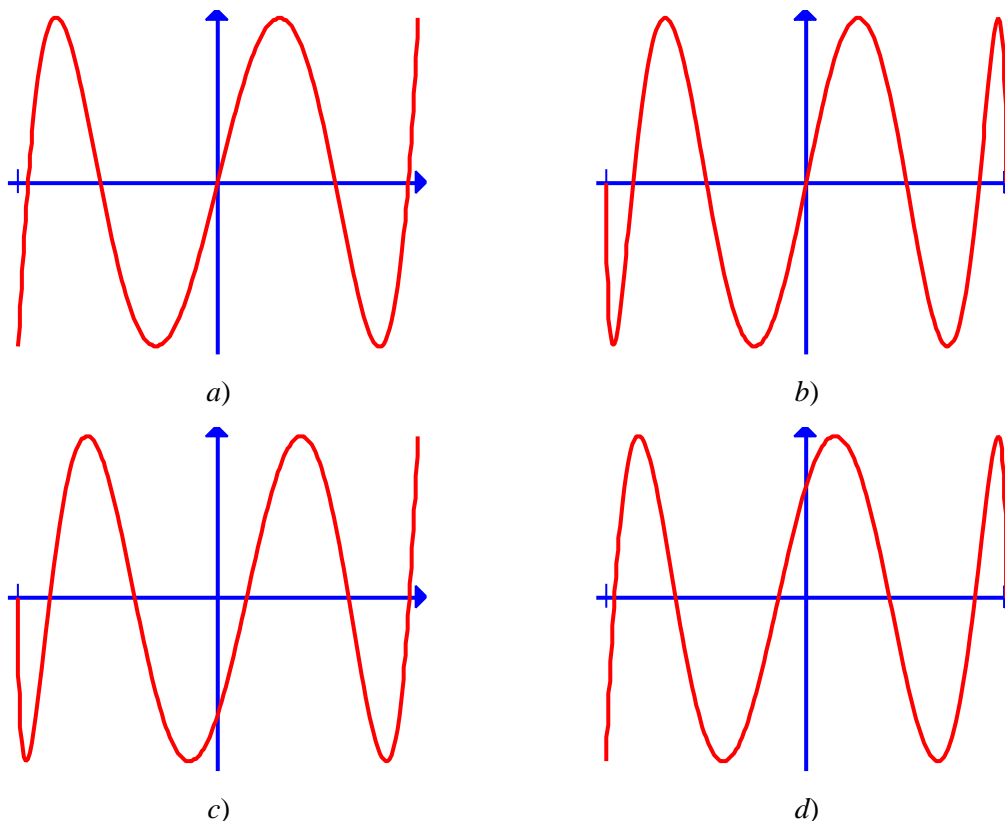


Figura 4. Equioscilación en $[-1,1]$ de: a) $T_5(x)$, b) $\sqrt{1-x^2}U_5(x)$, c) $\sqrt{1+x}V_5(x)$ y d) $\sqrt{1-x}W_5(x)$

3.6. Interpolación Polinómica

Para obtener una aproximación polinomial de grado n de una función continua $f(x)$ dada en el intervalo $[-1,1]$, se interpola entre los valores de $f(x)$ en $n + 1$ puntos distintos seleccionados adecuadamente en el intervalo dado. Por ejemplo, para interpolar en

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$$

por el polinomio

$$p_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n,$$

se requiere que

$$c_0 + c_1x_k + \dots + c_nx_k^n = f(x_k), \quad (k = 1, 2, \dots, n + 1). \quad (33)$$

La ecuación (33) es un conjunto de $n + 1$ ecuaciones lineales para los $n + 1$ coeficientes c_0, c_1, \dots, c_n que define a $p_n(x)$.

Cualesquiera sean los valores de $f(x_k)$, el polinomio de interpolación $p_n(x)$ existe y es único, desde que el determinante del sistema lineal (33) es distinto de cero. Esto es:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0.$$

Algunas fórmulas de interpolación están hechas para que los puntos x_1, x_2, \dots, x_{n+1} estén igualmente espaciados, tales como los que están basados en diferencias finitas. Sin embargo, si se escogen libremente los puntos de interpolación, no es necesariamente una buena idea el escogerlos igualmente espaciados. Al escogerse los puntos con un espaciado homogéneo en el intervalo $[-1, 1]$ para cada valor de n se obtiene

$$x_k = -1 + \frac{2k+1}{n+1}, \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad (34)$$

estos puntos son espaciados a una distancia de $\frac{2}{n+1}$, con un espacio medio de $\frac{1}{n+1}$ entre los primer y último puntos y el punto final del intervalo.

Una mejor opción de puntos de interpolación para asegurar una convergencia uniforme, pero no necesariamente para cada función continua, es el conjunto de ceros del polinomio de Chebyshev $T_{n+1}(x)$, específicamente

$$x = x_k = \cos \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{n+1}, \quad (k = 1, 2, \dots, n+1). \quad (35)$$

Al expresar el polinomio de interpolación en términos de polinomios de Chebyshev, los puntos de interpolación (35) pueden ser, por mucho, más estable y eficiente desde un punto de vista computacional que el conjunto de igual espaciado (34).

A continuación se presentan las ecuaciones que ayudarán a expresar una función $f(x)$ como una suma de polinomios de Chebyshev.

3.6.1. Interpolación de primer tipo

Dada una función continua $f(x)$, la interpolación polinómica de grado n , $p_n(x)$ de la función $f(x)$ en los ceros (35) está dada por la suma de polinomios de Chebyshev

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n 'c_i T_i(x), \quad (36)$$

donde los coeficientes c_i , están dado por la fórmula explícita

$$c_i = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} f(x_k) T_i(x_k)$$

y la sumatoria \sum' significa que para $i = 0$ su término correspondiente está dividido por dos. Así

$$\sum_{i=0}^n 'c_i T_i(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + \dots + c_n T_n(x).$$

Para observar el efecto que se produce al interpolar polinomios de Chebyshev se muestra el siguiente ejemplo, donde se ha escogido la función exponencial ya que es una función trascendente y no algebraica.

Ejemplo 1. Interpolar la función $f(x) = e^x$, con un polinomio de la forma (36).

Solución: Se interpolará $f(x)$ para $n = 1$ para observar el proceso. El desarrollo (36) para n dado se obtiene el polinomio

$$p_1(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x)$$

para el cual, primeramente se encuentran las raíces x_1 y x_2 usando (35), es decir

$$x_1 = \cos \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\pi}{1+1} = \cos \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = \cos \frac{\left(2 - \frac{1}{2}\right)\pi}{1+1} = \cos \frac{\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

A continuación se encuentran c_0 y c_1 por medio de la fórmula

$$c_i = \sum_{k=1}^2 f(x_k) T_i(x_k)$$

donde

$$\begin{aligned}
 c_0 &= f(x_1)T_0(x_1) + f(x_2)T_0(x_2) \\
 &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 1 + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 1 \\
 &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 c_1 &= f(x_1)T_1(x_1) + f(x_2)T_1(x_2) \\
 &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Por tanto el polinomio resultante para $n = 1$ será:

$$\begin{aligned}
 p_1(x) &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \cdot x \\
 p_2(x) &= 1.0854x + 1.2605.
 \end{aligned}$$

En adelante para todo n se utilizará los programas que se encuentran en el Anexo 3, incisos 1, 2, 3 y 4. Dichos programas se pueden copiar en un archivo *.m*, que se puede crear, editar y leer en MATLAB. Con estos se generarán los polinomios interpolados de Chebyshev para una función $f(x)$ dada.

En el ejemplo 1, se pueden generar los siguientes polinomios, para la función exponencial, con el uso del programa del Anexo 3.

$$\begin{aligned}
 p_2(x) &= 0.532x^2 + 1.1298x + 1 \\
 p_3(x) &= 0.1752x^3 + 0.5429x^2 + 0.9989x + 0.9946 \\
 p_4(x) &= 0.0434x^4 + 0.1773x^3 + 0.4996x^2 + 0.9973x + 1.
 \end{aligned}$$

Cuyas gráficas se puede observar en las siguientes figuras:

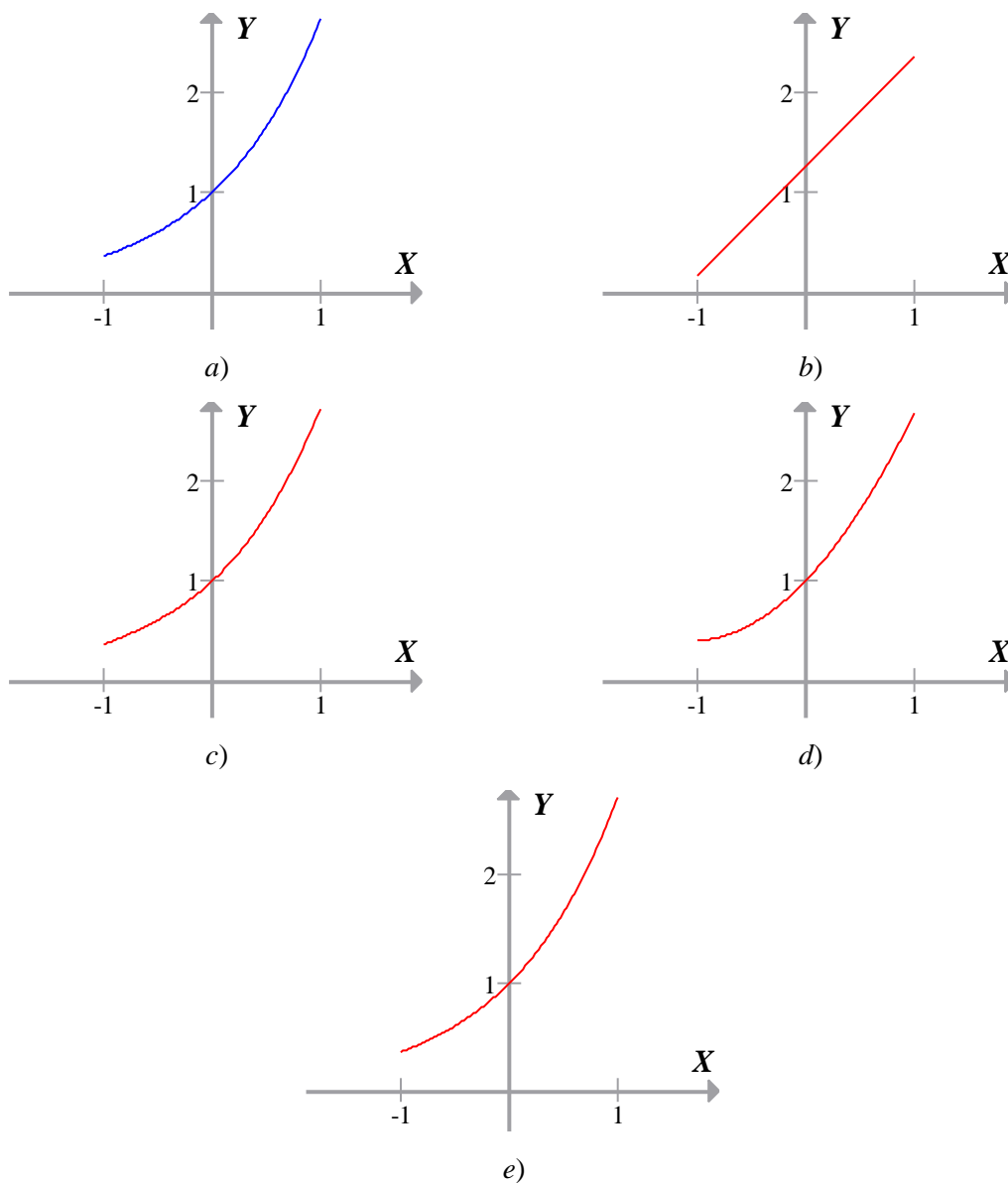


Figura 5. Gráficas de las funciones a) $f(x) = e^x$, b) $p_1(x)$, c) $p_2(x)$, d) $p_3(x)$ y e) $p_4(x)$.

3.6.2. Interpolación de segundo tipo

Considerando el caso de interpolación por un polinomio con peso $\sqrt{1-x^2}p_n(x)$ en los ceros de $U_{n+1}(x)$, específicamente

$$x_k = \frac{\cos k\pi}{n+2}, \quad (k = 1, 2, \dots, n+1),$$

entonces, el polinomio de interpolación con peso a $f(x)$ está dado por

$$\sqrt{1-x^2}p_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{i=0}^n c_i U_i(x) \quad (37)$$

con coeficientes dados por

$$c_i = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{1-x_k^2} f(x_k) U_i(x_k).$$

Ejemplo 2. Interpolarse la función $f(x) = e^x$, con polinomios de la forma (37).

Solución: Al utilizar el programa del anexo 3, inciso 2, se obtiene que la función dada se interpola en función de los polinomios de Chebyshev de segundo tipo para $n = 1, 2, 3$ y 4 por:

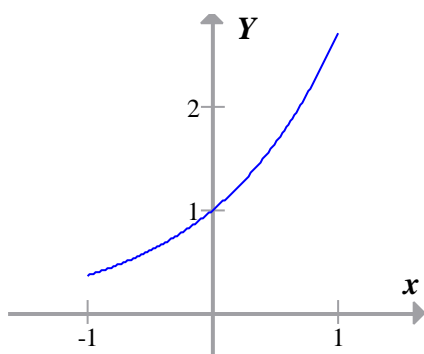
$$\sqrt{1-x^2}p_1(x) = \sqrt{1-x^2}(1.2034x + 1.3021)$$

$$\sqrt{1-x^2}p_2(x) = \sqrt{1-x^2}(1.5655x^2 + 1.535x + 1)$$

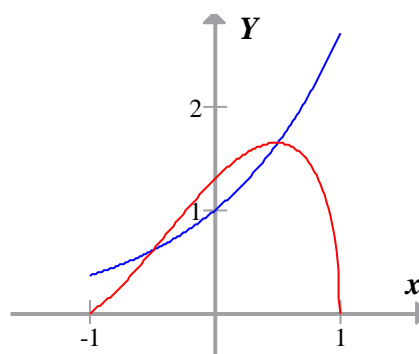
$$\sqrt{1-x^2}p_3(x) = \sqrt{1-x^2}(1.4754x^3 + 2.1234x^2 + 0.9274x + 0.8993)$$

$$\sqrt{1-x^2}p_4(x) = \sqrt{1-x^2}(2.3783x^4 + 2.1123x^3 + 0.6137x^2 + 0.6754x + 1)$$

cuyas gráficas se presentan a continuación:



a)



b)

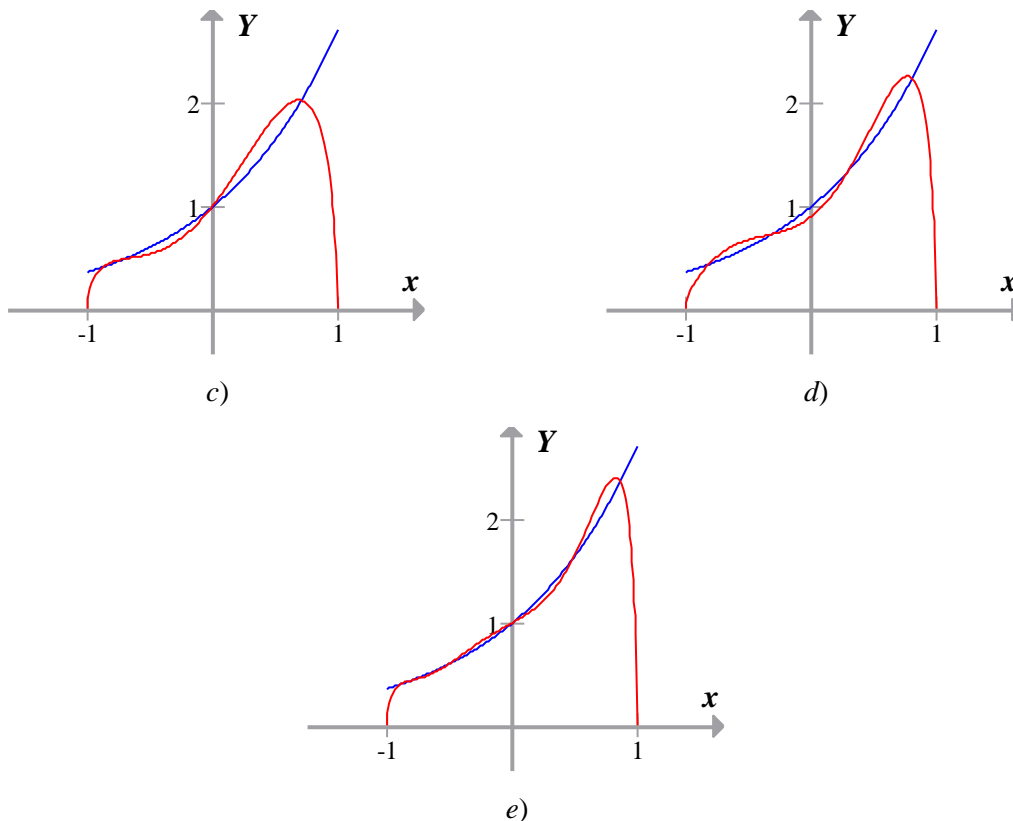


Figura 6. Gráficas de las funciones a) $f(x) = e^x$, b) $\sqrt{1-x^2}p_1(x)$, c) $\sqrt{1-x^2}p_2(x)$, d) $\sqrt{1-x^2}p_3(x)$ y e) $\sqrt{1-x^2}p_4(x)$.

3.6.3. Interpolación de tercer tipo

Tomando los puntos de interpolación en los ceros de $V_{n+1}(x)$, es decir en:

$$x_k = \cos \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi}{n + \frac{3}{2}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n + 1),$$

entonces el polinomio de interpolación con peso para $\sqrt{1+x}f(x)$ está dado por

$$\sqrt{1+x} p_n(x) = \sqrt{1+x} \sum_{i=0}^n c_i V_i(x) \quad (38)$$

donde

$$c_i = \frac{1}{n + \frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{1+x_k} f(x_k) V_i(x_k).$$

Ejemplo 3. Interpolarse la función $f(x) = e^x$, con polinomios de la forma (38).

Solución. Si se utiliza el programa del anexo 3, inciso 3, se obtienen los siguientes resultados para $n = 1, 2, 3$ y 4.

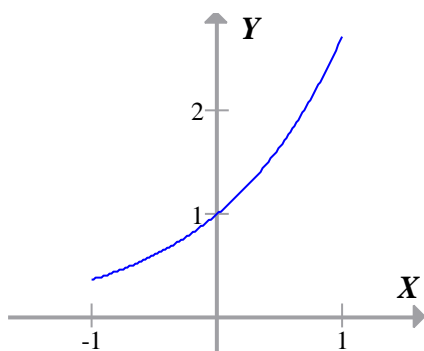
$$\sqrt{1+x}p_1(x) = \sqrt{1+x}(0.7034x + 1.1006)$$

$$\sqrt{1+x}p_2(x) = \sqrt{1+x}(0.4355x^2 + 0.4774x + 1.002)$$

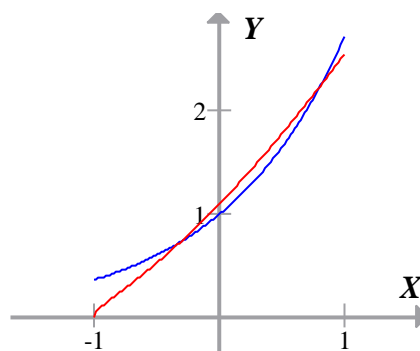
$$\sqrt{1+x}p_3(x) = \sqrt{1+x}(-0.0591x^3 + 0.5166x^2 + 0.4685x + 0.9902)$$

$$\sqrt{1+x}p_4(x) = \sqrt{1+x}(0.2246x^4 - 0.241x^3 + 0.4061x^2 + 0.5412x + 0.9941)$$

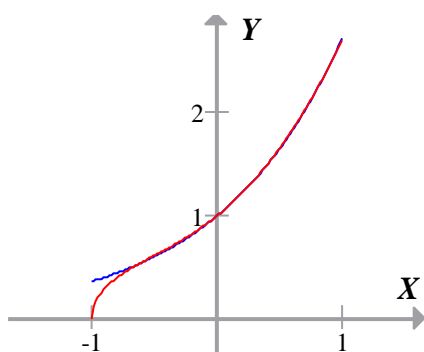
cuyas gráficas son



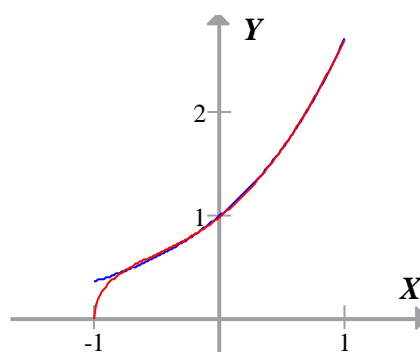
a)



b)



c)



d)

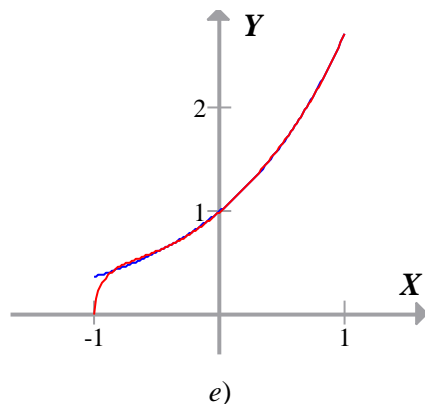


Figura 7. Gráficas de las funciones a) $f(x) = e^x$, b) $\sqrt{1+x}p_1(x)$, c) $\sqrt{1+x}p_2(x)$, d) $\sqrt{1+x}p_3(x)$ y e) $\sqrt{1+x}p_4(x)$.

3.6.4. Interpolación de cuarto tipo

Para interpolar en los ceros de $W_{n+1}(x)$, es decir en

$$x_k = \cos \frac{(n-k+2)\pi}{n + \frac{3}{2}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n+1),$$

el polinomio de interpolación con peso de $\sqrt{1-x} f(x)$ es dado por

$$\sqrt{1-x} p_n(x) = \sqrt{1-x} \sum_{i=0}^n c_i W_i(x), \quad (39)$$

donde

$$c_i = \frac{1}{n + \frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{1-x_k} f(x_k) W_i(x_k).$$

Ejemplo 4. Interpolar la función $f(x) = e^x$, con polinomios de la forma (39).

Solución. Si se utiliza el programa del anexo 3, inciso 4, se obtienen los siguientes resultados para $n = 1, 2, 3$ y 4.

$$\sqrt{1-x}p_1(x) = \sqrt{1-x}(1.1695x + 1.2772)$$

$$\sqrt{1-x}p_2(x) = \sqrt{1-x}(1.3807x^2 + 2.1841x + 1.1416)$$

$$\sqrt{1-x}p_3(x) = \sqrt{1-x}(1.5157x^3 + 2.5650x^2 + 1.7516x + 0.9192)$$

$$\sqrt{1-x}p_4(x) = \sqrt{1-x}(1.8498x^4 + 3.0385x^3 + 1.667x^2 + 1.1388x + 0.9478)$$

Cuyas graficas se representan a continuación

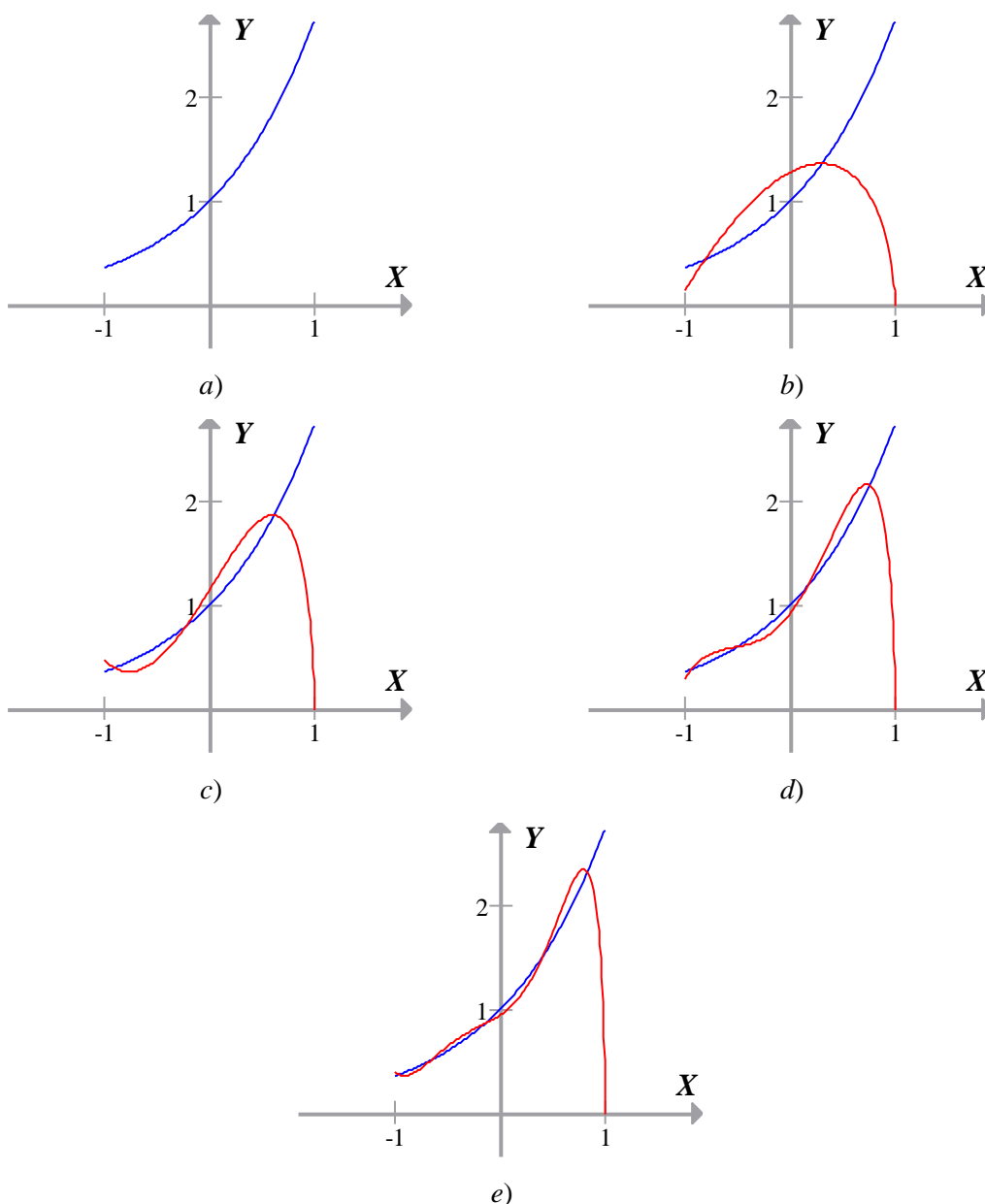


Figura 8. Gráficas de las funciones a) $f(x) = e^x$, b) $\sqrt{1-x}p_1(x)$, c) $\sqrt{1-x}p_2(x)$, d) $\sqrt{1-x}p_3(x)$ y e) $\sqrt{1-x}p_4(x)$.

Ejemplo 5. Interpolan la funci3n

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + 9}}{x^{12} + 2x^4 + 1}$$

en el intervalo $[-1,1]$, por medio de las ecuaciones (36), (37), (38) y (39), para $n = 10$. Dar su representaci3n gr3fica respectiva.

Soluciones. Por medio de los programas del anexo 3, se llega a los siguientes polinomios

$$p_{10}(x) = 0.5751x^{10} + 0.0513x^9 - 3.9723x^8 - 0.0706x^7 + 8.8068x^6 - 0.1250x^5 \\ - 7.4914x^4 + 0.1929x^3 - 0.2599x^2 - 0.0013x + 3.0000$$

$$\sqrt{1-x^2}p_{10}(x) = \sqrt{1-x^2}(11.9034x^{10} + 1.0940x^9 - 18.3571x^8 - 1.6582x^7 \\ + 13.5835x^6 + 0.7623x^5 - 7.7055x^4 + 0.0513x^3 + 1.2846x^2 \\ + 0.0052x + 3.0000)$$

$$\sqrt{1+x}p_{10}(x) = \sqrt{1+x}(4.4042x^{10} - 5.4957x^9 - 6.1689x^8 + 5.4365x^7 + 7.0552x^6 \\ - 0.3634x^5 - 6.5078x^4 - 0.1533x^3 + 0.8068x^2 - 1.5140x + 3.0008)$$

$$\sqrt{1-x}p_{10}(x) = \sqrt{1-x}(5.3127x^{10} + 6.8263x^9 - 7.2268x^8 - 7.3853x^7 + 7.3049x^6 \\ + 1.1215x^5 - 6.2801x^4 + 0.3911x^3 + 0.7934x^2 + 1.5178x + 3.0011)$$

Donde sus respectivas gr3ficas est3n dados en la siguiente figura

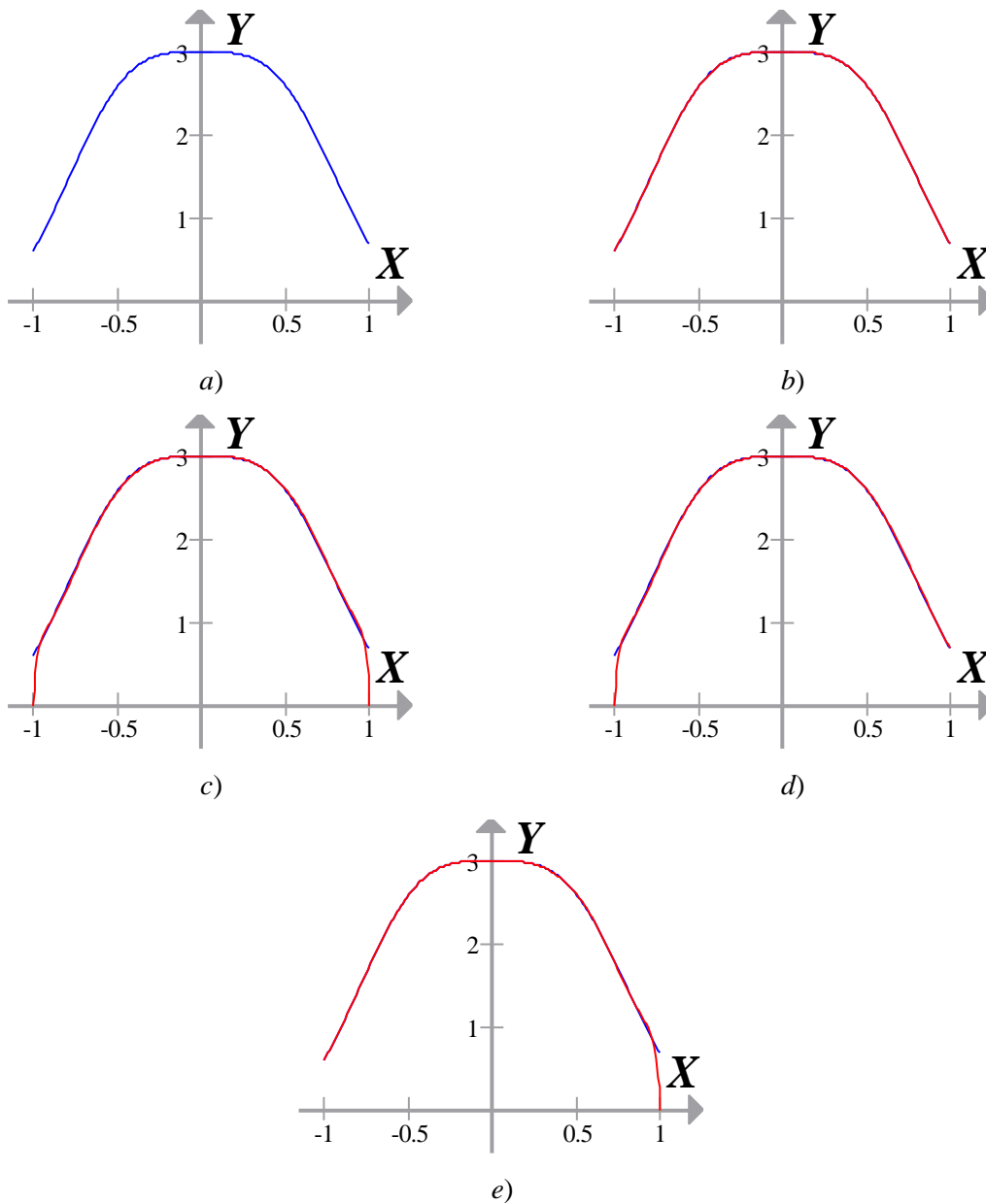


Figura 9. Gráficas de las funciones a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-2x^2+9}}{x^{12}+2x^4+1}$, b) $p_{10}(x)$, c) $\sqrt{1-x^2}p_{10}(x)$, d) $\sqrt{1+x}p_{10}(x)$ y e) $\sqrt{1-x}p_{10}(x)$.

3.7. Uso del Software MATLAB

Según Jalón, García y Vidal, MATLAB es el nombre abreviado de “MATrix LABoratory”. MATLAB es un programa para realizar cálculos numéricos con vectores y matrices. Tiene la particularidad de que puede trabajar también con números escalares –tanto reales como complejos–, con cadenas de caracteres y con otras estructuras de información más complejas.

MATLAB cuenta con su propio lenguaje de programación y con la capacidad de crear gráficos en dos y tres dimensiones. La utilización de *cajas de herramientas* y de *paquetes de bloques* ayudan a ampliar las capacidades de del mismo.

1. Paquete Chebfun.

Chebfun es un software de sistema de código abierto para cálculos numéricos con funciones variadas. El fundamento matemático es basado en interpolación polinomial a trozos la cual es llamada “Tecnología Chebyshev”. Chebfun tiene capacidades extensibles para tratar con operaciones diferenciales e integrales lineales o no lineales y también incluye analogías continuas de nociones de álgebra lineal como QR y descomposición de valores singulares. La extensión Chebfun2 trabaja con funciones en dos variables definidas en un rectángulo en el plano $X - Y$.

2. Funcionamiento del paquete Chebfun.

La mayoría de comandos de Chebfun están sobrecargados de comandos familiares de MATLAB, por ejemplo `sum(f)` calcula una integral, `roots(f)` encuentra los ceros y `u=L\f` resuelve una ecuación diferencial.

Para conseguir el sentido de amplitud y potencia de Chebfun, es bueno iniciar con las guías y ejemplos que proporciona la página oficial de Chebfun, como son por ejemplo <http://www.chebfun.org/examples/> y <http://www.chebfun.org/docs/guide/>.

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

El presente trabajo monográfico titulado *Aplicación de la cuadratura de Gauss-Chebyshev en la solución de algunos problemas de integración numérica*, en lo que respecta al nivel de conocimiento corresponde a ciencias puras, ya que para su realización se desarrollaron y se utilizaron todas las herramientas necesarias para la comprensión de sus contenidos, a través de la revisión bibliográfica y análisis de diferentes fuentes de datos.

Para la aplicación del método de Gauss-Chebyshev se revisó la bibliografía existente utilizando los conceptos, definiciones y teoremas que sirven de base para la comprensión y demostración del algoritmo de cuadratura Gaussiana. Para la aplicación del método de Gauss-Chebyshev se realizó en varias etapas siendo lo principal la revisión de libros, monografías, artículos publicados en internet y folletos relacionados con el tema. Estas consultas con el fin de elaborar de una forma clara y con todo el rigor científico la aplicación del método de Gauss-Chebyshev, pretendían mostrar la solución de algunos problemas de integración numérica desde la perspectiva de la temática propuesta.

Pasos para la Realización de este trabajo,

- I. Una revisión bibliográfica, con los libros de Análisis numérico disponibles, para tener una mejor comprensión y alcance del tema.
- II. Paralelamente se hizo una revisión de otros libros tales como: Análisis Numérico, Análisis Matemático y Metodología de la Investigación para completar conocimientos interdisciplinarios para una mejor perspectiva de estos tópicos, que son esenciales para la aplicación del método de Gauss-Chebyshev.
- III. Una vez analizada y comprendida toda la información, se organizó el trabajo que va a explicar de una manera detallada y con rigor científico las posibles aplicaciones del método de Gauss-Chebyshev en la solución de algunos problemas de integración numérica.

V. DESARROLLO

Entre los distintos métodos que existen en integración definida de funciones, se encuentran los métodos de Cuadraturas Gaussiana. En este caso se centrará la atención en la cuadratura de Gauss-Chebyshev, en la cual se integraran funciones de la forma $f(x)w(x)$ donde $w(x)$ es una función de peso que se definirán adelante.

La Cuadratura Gaussiana estima una integral por la combinación de valores de los integrando y los ceros de polinomios ortogonales.

5.1. Cuadratura de Gauss-Chebyshev.

Si se desea calcular la integral definida de $f(x)$ con la función de peso $w(x)$, es decir

$$I = \int_a^b f(x)w(x)dx.$$

Supóngase también, que I está siendo aproximada en la forma

$$I \simeq \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (40)$$

donde los A_k son ciertos coeficientes y los $\{x_k\}$ son ciertas abscisas en el intervalo $[a, b]$ (los cuales deben ser determinados). La idea de la cuadratura Gaussiana es encontrar la fórmula (40) que da un resultado exacto para todos los polinomios de mayor grado posible.

Si $J_{n-1}f(x)$ es el polinomio de grado $n - 1$ el cual interpola $f(x)$ en cualesquiera n puntos distintos x_1, \dots, x_n , luego

$$J_{n-1}f(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k)\ell_k(x)$$

donde ℓ_k es un polinomio de Lagrange

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^n \left(\frac{x - x_r}{x_k - x_r} \right).$$

El polinomio $J_{n-1}f(x)$ tiene la integral

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b J_{n-1}f(x)w(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_a^b w(x)\ell_k(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \end{aligned}$$

siempre que los coeficientes A_k sean escogidos de la forma

$$A_k = \int_a^b w(x)\ell_k(x) dx. \quad (41)$$

Con cualesquiera n abscisas distintas, por lo tanto, y con esta elección de coeficientes A_k , la fórmula (40) ciertamente da un resultado exacto cada vez que $f(x)$ sea un polinomio de grado $n - 1$ o menor. Sin embargo, se puede mejorar en este grado por una elección adecuada de las abscisas.

Adviértase también que, para abscisas generales no hay control sobre los signos y magnitudes de los coeficientes de A_k , entonces la evaluación de la formula (40) puede involucrar altas cancelaciones entre grandes términos de signos opuestos y en consecuencia un elevado error de redondeo. No obstante, cuando se escoge la abscisa para maximizar el grado de exactitud, esto puede cesar los problemas que habían surgido.

Teorema 5. Si x_k ($k = 1, \dots, n$) son los ceros de $\phi_n(x)$ y $\{\phi_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$ es un sistema de polinomios, ϕ_k tiene grado exacto k , ortogonal con respecto a w_k en $[a, b]$, luego (40) con coeficientes (41) da un resultado exacto cada vez que $f(x)$ sea un polinomio de grado $2n - 1$ o menor. Por otra parte, todos los coeficientes A_k son positivos en este caso.

Demostración. Desde que $\phi_n(x)$ es un polinomio de exactamente grado n . Cualquier polinomio $f(x)$ de grado $2n - 1$ puede ser escrito (por división de polinomios) en la forma,

$$f(x) = \phi_n(x)Q(x) + J_{n-1}f(x)$$

donde $Q(x)$ y $J_{n-1}(x)$ son polinomios de grado a lo más de $n - 1$.

Luego

$$\int_a^b f(x)w(x) dx = \int_a^b \phi_n(x)Q(x)w(x) dx + \int_a^b J_{n-1}f(x)w(x) dx. \quad (42)$$

Ahora $\phi_n(x)$ es ortogonal a todos los polinomios de grado menor que n , entonces la primera integral en el miembro derecho de (42) desaparece (se anula). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)w(x) dx &= \int_a^b J_{n-1}f(x)w(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n A_k J_{n-1}f(x_k), \end{aligned}$$

desde que los coeficientes han sido escogidos para dar un resultado exacto para polinomios de grado menor que n . Pero ahora

$$f(x_k) = \phi_n(x_k)Q(x_k) + J_{n-1}f(x_k) = J_{n-1}f(x_k),$$

y debido a que x_k es un cero de $\phi_n(x)$. Consecuentemente

$$\int_a^b f(x)w(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

y entonces (40) da un resultado exacto para $f(x)$ como es requerido.

Para mostrar que los coeficientes A_k son positivos, se necesita advertir solamente que $\ell_k(x)^2$ es un polinomio de grado $2n - 2$, y por lo tanto es exactamente integrable, donde

$$A_k \equiv \sum_{j=1}^n A_j \ell_k(x_j)^2 = \int_a^b \ell_k(x)^2 w(x) dx > 0$$

para cada k . •

Por lo tanto se puede esperar obtener una integral muy exacta con la fórmula (40), y la formula deberá ser estable numéricamente.

Cuando el intervalo $[a, b]$ es $[-1, 1]$ y los polinomios ortogonales $\phi_n(x)$ es uno de cuatro los polinomios de Chebyshev, entonces la función peso $w(x)$ es $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$,

$(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ ó $(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ y los ceros x_k son conocidos explícitamente. Queda determinar los coeficientes A_k , los cuales pueden obtenerse haciendo uso del siguiente lema.

Lema 3.

$$P \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta = \pi \frac{(\operatorname{sen} n\phi)}{\operatorname{sen} \phi},$$

$$P \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta = -\pi \cos n\phi,$$

Para cualquier ϕ en $[0, \pi]$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Nota: Desde que se ha declarado este lema en términos de la integral de “valor principal de Cauchy” $P \int \dots d\theta$, si se permite que ϕ tome un valor arbitrario, los integrandos tienen una singularidad no integrable en $\theta = \phi$. Sin embargo cuando se aplique este lema en lo siguiente, $\theta = \phi$ siempre resultará en hacer cero el numerador, entonces la singularidad de echo será removida y el valor principal de la integral será equivalente a la integral en el sentido ordinario.

Hora se puede llevar a cabo la evaluación de A_k .

Teorema 6. En la fórmula de Gauss-Chebyshev

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

donde $\{x_k\}$ son los n ceros de $\phi_n(x)$, los coeficientes A_k son como sigue:

1. Para $w_k(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\phi_n(x) = T_n(x)$:

$$A_k = \frac{\pi}{n}.$$

2. Para $w_k(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\phi_n(x) = U_n(x)$:

$$A_k = \frac{\pi}{n+1} (1-x_k^2).$$

3. Para $w_k(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $\phi_n(x) = V_n(x)$:

$$A_k = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}(1 + x_k).$$

4. Para $w_k(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $\phi_n(x) = W_n(x)$:

$$A_k = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}(1 - x_k).$$

Demostración. Prueba del caso 1. Al escribir

$$x_k = \cos \theta_k = \cos \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi}{n}$$

para los ceros de $T_n(x)$,

$$\begin{aligned} A_k &= \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)}{(x - x_k)nU_{n-1}(x_k)\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos n\theta \operatorname{sen} \theta_k}{(\cos \theta - \cos \theta_k)n \operatorname{sen} n\theta_k} d\theta \\ &= \frac{\pi}{n}, \end{aligned}$$

usando el corolario 9 (Anexo 6) y el Lema 3. ●

Este caso 1, es particularmente conveniente usarlo, desde que todos los pesos son iguales y la fórmula (40) puede por lo tanto ser evaluada con sólo $n - 1$ sumas y una multiplicación.

El caso 2 se demuestra de manera similar

$$\begin{aligned} A_k &= \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)}{(x - x_k)nU_{n-1}(x_k)\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{-\operatorname{sen}[n(\theta - \theta_k)] \operatorname{sen} \theta_k}{(n + 1)(\cos \theta - \cos \theta_k)} \cdot \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{n + 1}(1 - x_k^2), \end{aligned}$$

usando el corolario 9 (Anexo 6), el Lema 3 y transformando la expresión. ●

Los casos 3 y 4 del teorema 6, es decir los polinomios de Chebyshev de tercer y cuarto tipo, requieren un poco más de cuidado. Primero se establece el lema correspondiente al Lema 3.

Lema 4.

1.

$$P \int_0^\pi \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\theta - \cos\phi} \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) d\theta = \frac{\pi \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\phi}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\phi\right)}.$$

2.

$$P \int_0^\pi \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\theta - \cos\phi} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right) d\theta = -\frac{\pi \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\phi}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\phi\right)}.$$

Demostración del Lema 4. De la primera ecuación del Lema 3 si reemplaza el $\cos\theta$ por x y $\cos\phi$ por y ,

$$P \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)}{x-y} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi U_{n-1}(y). \quad (43)$$

Escribiendo $x = 2u^2 - 1$, $y = 2v^2 - 1$, donde $u = \cos\frac{1}{2}\theta$, $v = \cos\frac{1}{2}\phi$,

$$\begin{aligned} P \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{V_n(x)}{x-y} dx &= P \int_0^1 \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{T_{2n+1}(u)}{u^2-v^2} du \\ &= \frac{1}{2} P \int_{-1}^1 T_{2n+1}(u) \left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{u-v}\right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= P \int_{-1}^1 \frac{T_{2n+1}(u)}{u-v} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \pi U_{2n}(v), \text{ por (36)}. \end{aligned}$$

Reescribiendo esto en términos de θ y ϕ , se obtiene

$$P \int_0^\pi \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\theta} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\theta - \cos\phi} \operatorname{sen}\theta d\theta = \pi \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{1}{2}\phi}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\phi}, \quad (44)$$

y esto prueba la primera parte del lema.

La parte 2 se puede probar de manera similar, empezando por la segunda ecuación del Lema 3, la cual da

$$P \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{U_{n-1}(x)}{x-y} dx = \pi T_n(y),$$

y haciendo una sustitución similar. •

Siguiendo la demostración del Teorema 6 caso 3, se tiene

$$\begin{aligned} A_k &= P \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{r \neq k} \left(\frac{x-x_r}{x_k-x_r} \right) dx \\ &= P \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{V_n(x)}{(x-x_k)V_n'(x_k)} dx \\ &= P \int_0^\pi \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\theta} \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \cos \frac{1}{2} \theta_k \sin \theta_k \sin \theta}{(\cos \theta - \cos \theta_k) \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta} d\theta \\ &= \frac{2\pi}{n + \frac{1}{2}} \cos^2 \frac{1}{2} \theta_k, \text{ por (37)} \\ &= \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} (1 + x_k). \end{aligned}$$

Lo que prueba el caso 3. El caso 4 se sigue, al reemplazar x por $-x$.

5.2. Ejemplos de la cuadratura de Gauss-Chebyshev

A continuación se presentan algunos ejemplos de aplicación de la cuadratura de Gauss Chebyshev. No se hace uso del paquete Chebfun, ya que este tiene programado otro tipo de ecuaciones para aproximar funciones y no específicamente el de la cuadratura de Gauss-Chebyshev.

Ejemplo 6. Calcular el valor de la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

para $n = 4$.

Solución. Al ver que $f(x)$ es un polinomio de grado menor a $2n - 1 = 7$, que cumple con las condiciones del Teorema 5, se aplica el Teorema 6, Parte 1. Donde

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

tiene ceros x_1, x_2, x_3, x_4 con

$$x_1^2 = x_4^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, \quad x_2^2 = x_3^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

Por lo tanto

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \simeq \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^4 x_k^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 2 \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4} + \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Este resultado muestra el valor exacto de la integral, que ilustra la exactitud que se puede lograr con este método. Ahora se comprueba su valor exacto al resolver la integral dada con el cambio de variable $x = \cos \theta$.

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \sin \theta d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

que comprueba el resultado anterior.

Ejemplo 7. Resuelva la integral para el caso 3, considerando $f(x) = x^2$ y $n = 2$.

Solución. En este caso se quiere calcular la integral

$$I = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2 x^2 dx,$$

donde $V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1$ tiene ceros $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{5})$, con $x_1^2 = x_2^2 = \frac{1}{8}(3 \pm \sqrt{5})$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 I &\simeq \frac{2\pi}{5} [(1+x_1)x_1^2 + (1+x_2)x_2^2] \\
 &= \frac{2\pi}{5} \left[\frac{1}{4}(5+\sqrt{5})\frac{1}{8}(3+\sqrt{5}) + \frac{1}{4}(5-\sqrt{5})\frac{1}{8}(3-\sqrt{5}) \right] \\
 &= \frac{1}{2}\pi.
 \end{aligned}$$

Similar al ejemplo 1, este resultado es exacto y se comprueba al resolver la integral dada con los métodos de integración, así:

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} (\cos \theta)^2 \sin \theta \, d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)(1 + \cos 2\theta) \, d\theta = \frac{1}{2}\pi.$$

Ejemplo 8. Verifique que la fórmula de cuadratura es exacta para $n = 3$ en el caso de la integral

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} x^2 \, dx.$$

Solución. Se obtiene que $U_3(x) = 8x^3 - 4x$, donde sus ceros son $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y los A_k equivalen a $A_1 = \frac{\pi}{8}$, $A_2 = \frac{\pi}{4}$, $A_3 = \frac{\pi}{8}$. Ahora aplicando el teorema 6 con $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} x^2 \, dx &\simeq \sum_{k=1}^3 A_k f(x_k) \\
 &= \frac{\pi}{8} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{4} f(0) + \frac{\pi}{8} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
 &= \frac{\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

Ahora para terminar el ejercicio se calcula la integral por los métodos de integración, a como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} x^2 dx &= \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\pi (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{8}, \end{aligned}$$

Con lo que termina la demostración. •

En caso de querer encontrar una integral de la forma del Teorema 6, donde $f(x)$ no es una función polinómica, por ejemplo una función exponencial, se procederá a interpolar la función por un polinomio de la forma (36), (37), (38) o (39) para posteriormente aplicar el Teorema 6. Se debe tomar en cuenta que al interpolar utilizando (37), (38) o (39) estos quedan multiplicados por una función peso. Dicho peso es parte de los pesos que se utilizan en el teorema 6, y por tanto se utilizará el polinomio $p_n(x)$ como la función $f(x)$ en el teorema 6.

Lo dicho anteriormente se verá en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 9. Encontrar el valor aproximado de la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

utilizando el teorema 6, para $n = 1, 2, 3, 4$.

Solución. Del ejemplo 1 se obtuvieron los siguientes polinomios

$$p_1(x) = 1.0854x + 1.2605$$

$$p_2(x) = 0.532x^2 + 1.1298x + 1$$

$$p_3(x) = 0.1752x^3 + 0.5429x^2 + 0.9989x + 0.9946$$

$$p_4(x) = 0.0434x^4 + 0.1773x^3 + 0.4996x^2 + 0.9973x + 1.$$

Con ellos se obtendrán los siguientes resultados:

para $n = 1$

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \int_{-1}^1 \frac{p_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx A_1 p(x_1) = \pi * p_1(0) = \pi * 1.2605 = 3.9600.$$

Si se utiliza el programa del anexo 4, inciso 1, se genera como solución 3.960266052790758, ya que este conserva más decimales en su memoria. En adelante se utilizará ese programa para los ejemplos siguientes.

El valor aproximado de $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ usando el programa Graph es 3.9774632599, el cual se utilizará como punto de comparación, este cálculo proporciona una aproximación obtenida mediante la regla de integración de Gauss-Kronrod de 21 puntos con un error estimado menor que 10^{-3} .

Ahora para $n = 2$, se obtiene

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \int_{-1}^1 \frac{p_2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3.977321960082316$$

para $n = 3$,

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \int_{-1}^1 \frac{p_3(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3.977462634661957$$

y para $n = 4$,

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \int_{-1}^1 \frac{p_4(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3.977463258776695.$$

Ejemplo 10. Encontrar el valor aproximado de la integral

$$\int_{-1}^1 e^x dx \approx \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} p_n(x) dx$$

utilizando el teorema 6, para $n = 1, 2, 3, 4$, donde $\sqrt{1-x^2} p_n(x)$ es un polinomio obtenido por medio de (37).

Solución. Nótese que al interpolar una función $f(x)$ se obtienen las condiciones suficientes para aplicar el teorema 6, inciso 2.

Del ejemplo 2, se obtuvieron las interpolaciones polinómicas, y así para $n = 1$, al aplicar el programa del anexo 4, inciso 2 se obtiene

$$\int_{-1}^1 e^x dx \approx \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} p_1(x) dx = 2.045287258785330$$

para $n = 2$

$$\int_{-1}^1 e^x dx \approx \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} p_2(x) dx = 2.185563654013062$$

para $n = 3$

$$\int_{-1}^1 e^x dx \approx \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} p_3(x) dx = 2.246479386992671$$

para $n = 4$

$$\int_{-1}^1 e^x dx \approx \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} p_4(x) dx = 2.278773507212393,$$

donde el resultado aproximado obtenido por Graph es de 2.3504023873

Ejemplo 11. Encontrar el valor aproximado de la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x} p_n(x)}{\sqrt{1+x}} dx$$

utilizando el teorema 6, para $n = 1, 2, 3, 4$, donde $\sqrt{1-x} p_n(x)$ es un polinomio obtenido por medio de (39).

Solución: En este caso la función exponencial se interpola por $\sqrt{1-x} p_n(x)$ que al sustituir en esta integral se cumplen las condiciones para aplicar el Teorema 6, inciso 4.

Con las interpolaciones obtenidas en el ejemplo 4, y utilizando el programa del anexo 4, inciso 4, se obtienen los siguientes resultados

para $n = 1$

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x} p_1(x)}{\sqrt{1+x}} dx = 2.175439934102793$$

para $n = 2$

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x} p_2(x)}{\sqrt{1+x}} dx = 2.324548454589962$$

para $n = 3$

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x} p_3(x)}{\sqrt{1+x}} dx = 2.379937731627066$$

para $n = 4$

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+x}} dx \approx \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x} p_4(x)}{\sqrt{1+x}} dx = 2.407022916236814$$

donde el valor aproximado utilizando Graph es 2.4602620138.

Ejemplo 12. Calcular el valor de la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{x^4 + 3x - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

para $n = 3$.

Solución. Dado que el numerador es un polinomio de grado menor que $2n - 1 = 5$, entonces se puede utilizar el programa del Anexo 5, inciso a. y se obtendrá:

$$\int_{-1}^1 \frac{x^4 + 3x - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -1.963495408493620$$

y su valor en el programam Graph es de -1.9634954085 .

Ejemplo 13. Calcular el valor de la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} * e^{\sin x} dx$$

para $n = 10$.

Solución. Para esto primero interpolamos la función $e^{\sin x}$ con el anexo 3 inciso 4. Y luego se utiliza el anexo 4 iniso 4 y se obtiene.

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} * e^{\sin x} dx = 2.450228274670309$$

Y su valor en el programam Graph es de 2.2648283594.

Si se calcula esta integral para $n = 20$ se obtiene el valor 2.457532645863407.

Ejemplo 14. Calcular el valor de la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

para $n = 10$.

Solución: Obsérvese que al aplicar interpolación polinómica la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se aproxima por la función

$$f(x) \approx -3.2862x^{10} + 9.0371x^8 - 9.0371x^6 + 3.9537x^4 - 0.7060x^2 + 0.0353$$

pero a la hora de graficar no resulta la función dada, que se observa en la Figura 10. Esto se debe a que la función f no es continua en el punto $x = 0$.

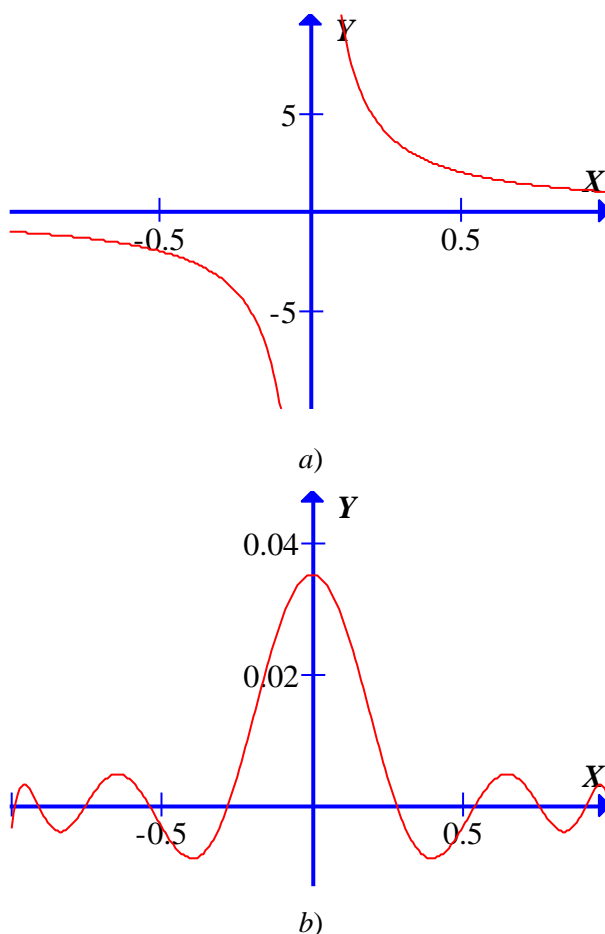


Figura 10. Gráficas de las funciones a) $f(x) = \frac{1}{x}$, b) Aproximación de $f(x)$ errónea, ya que $f(x)$ no es continua.

VI. CONCLUSIONES

Entre las principales propiedades que se mostraron para lograr aproximar integrales numéricas se encuentra la posibilidad de poder aproximar una función por un polinomio de Chebyshev de cualquiera de sus tipos. Para estas fue necesario conocer los ceros de los polinomios de Chebyshev y que dichos polinomios son ortogonales respecto a una función peso dado.

Los polinomios de Chebyshev se pueden ajustar a cualquier intervalo $[a, b]$, no solamente al intervalo $[-1, 1]$, sin embargo habrá que hacer modificaciones en las ecuaciones obtenidas.

Los ceros de los polinomios de Chebyshev no están igualmente espaciados, a como se utiliza en otros métodos de interpolación. Los ceros de los distintos tipos de polinomios de Chebyshev, forman una mejor selección de puntos que los igualmente espaciados. De hecho al observar los ejemplos de interpolación, entre más crece el valor de n , más se acerca la interpolación a la función interpolada. Que es una diferencia a cuando se usan otros métodos y entre más grande es el grado, hay partes de la interpolación que tienen una diferencia muy grande con la función original.

El teorema 6 expone los pasos que se deben seguir para aplicar el método de Gauss-Chebyshev en el cálculo de integración numérica, el cual se puede apreciar su aplicación en los ejemplos del 5 al 9.

Los cuatro tipos de polinomios de Chebyshev estudiados están relacionados mutuamente. Ya se vieron ecuaciones para expresar polinomios de Chebyshev en función de otro u otros polinomios, además se puede observar en varias ocasiones que no sólo por medio de las relaciones directas dadas, sino que, por otras relaciones como es el caso que se obtuvo al derivar T_n y resultaba en función de U_n .

La aproximación minimax nos asegura un error menor a 2^{1-n} , para $T_n(x)$ según el corolario 7, y por el corolario 8 se nos muestra un error menor a 2^{-n} , para $U_n(x)$, $V_n(x)$ y $W_n(x)$ cada uno con sus respectivos pesos.

El uso del software MATLAB para resolver ejercicios resultó bastante útil, ya que uno puede programar de acuerdo a las necesidades del problema. Cabe destacar que aunque hay *path* en MATLAB que resuelven polinomios de Chebyshev de primer tipo como es el caso de *chebfun*, este resulta con variantes que son muy difíciles de modificar, como fue el caso de considerar los extremos como raíces y no sólo los puntos interiores.

Con los ejemplos dados se concluye que es posible resolver problemas de integración numérica, pero al igual que muchos otros métodos de cuadraturas, esta no puede resolver todos los problemas, tal es el caso cuando se tienen funciones discontinuas en el intervalo usado, o cuando las integrales buscadas no poseen la respectiva función peso. Cuando las condiciones se cumplen aplicar la cuadratura de Gauss-Chebyshev es fácil.

VII. RECOMENDACIONES

Se invita a los estudiantes de la carrera de matemática el estudio de los polinomios de Chebyshev. Estos polinomios tienen aplicaciones en muchas áreas de la matemática. Esto implica que su estudio no se puede quedar sólo en cálculos básicos sino que hay que profundizar en su gran cantidad de aplicaciones.

Se podría estudiar las aplicaciones de los polinomios de Chebyshev en el campo de los números complejos, en las series de Chebyshev, el método de cuadratura de Clenshaw-Curtis, que sería una continuación a este trabajo, la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales con el método espectral, o inclusive en la solución de ecuaciones integrales.

Otro tema de investigación sería el uso del programa *chebfun*, ya que esta ocasión no se pudo aprovechar debido a las diferentes fórmulas utilizadas en el algoritmo.

Que los estudiantes de la carrera de matemática puedan estudiar más programación, ya que esta es una herramienta básica para comprobar y resolver problemas de modelación matemática. Muchos programas tienen demasiadas generalidades en su programación que a la hora de resolver un problema distinto (muy particular) resulta difícil adaptarse y resolver el problema.

A los maestros que imparten la clase de análisis numérico en la carrera de matemáticas que motiven a los estudiantes a profundizar en otros métodos numéricos, que por motivos de tiempo, no se abordan en clases como es el caso de los polinomios de Chebyshev.

VIII. BIBLIOGRAFÍA

- Atkinson, K. & Han, W. *Theoretical Numerical Analysis. A functional Analysis Framework*. (3ª edición). Editorial: Springer.
- Burden, R. L. & Faires, J. D. (2011) *Numerical Analysis*. (9ª edición). Boston. Editorial: CENGAGE Learning.
- Chebfun numerical computing with functions. (s. d.) Recuperado Marzo 18, 2015, a partir de <http://www.chebfun.org/>
- Gautschi, W. (1992), *On mean convergence of extended Lagrange interpolation*. America.
- Krasnov, M. & Kiselev, A. & Makárenko, G. (1983). *Funciones de variable compleja. Calculo operacional, Teoría de la estabilidad*. MIR. Moscú.
- Markushevich, A. (1987) *Teoría de las funciones analíticas*. Tomo 1. (Segunda Edición) MIR. Moscú.
- Mason, J. C. & Handscomb, D. C. (2003) *Chebyshev Polynomials*. Florida. Editorial: CRC Press LLC. Florida.
- MathWorks. MATLAB. (s. d.) Recuperado Agosto 7, 2015, a partir de http://es.mathworks.com/products/matlab/index.html?s_tid=gn_loc_drop
- Moler, C. B. (2004). *Numerical computing with MATLAB*. Filadelfia. Editorial: SIAM.
- Programación con MATLAB. (s. d.) Recuperado Noviembre 19, 2015, a partir de <http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/matlab/temasmatlab/TEMA%207.pdf>
- Programación en MATLAB. (s. d.) Recuperado Noviembre 19, 2015, a partir de <http://www.esi2.us.es/~jaar/Datos/FIA/T9.pdf>
- Quarteroni, A., Sacco, R. & Saleri, F. (2006). *Numerical Mathematics*. (2ª edición). Berlin. Editorial: Springer.
- Ruano, J. D. (2013). *Apuntes y ejercicios resueltos de análisis numérico*.
- Sentencias iterativas. (s. d.) Recuperado Noviembre 19, 2015, a partir de <http://www.sc.ehu.es/sbweb/energias-renovables/MATLAB/basico/iterativo/iterativo.html>

- Smith, Allen. (1991). *Análisis Numérico*. México DF. Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Trefethen, L. N. (2011). *Approximation theory and approximation practice*. Universidad de Oxford.
- Tutorial de MATLAB. (s. d.) Recuperado Marzo 18, 2018, a partir de http://www.usc.es/gir/docencia_files/tdd/tutorial_matlab.pdf
- Zaballa, Ion. *Prácticas de Ampliación de Métodos Numéricos con MATLAB*. (s. d) Recuperado Noviembre 19, 2015, a partir de http://www.ehu.eus/izaballa/Ana_Matr/Matlab/guia.pdf

IX. ANEXO

Anexo 1. Fórmulas trigonométricas

Fórmulas Fundamentales

$$\operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{csc} \theta = 1, \quad \cos \theta \cdot \operatorname{sec} \theta = 1, \quad \tan \theta \cdot \cot \theta = 1$$

Fórmula Pitagórica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Fórmulas de cofunción

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta, & \operatorname{sec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \operatorname{csc} \theta, & \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cot \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta, & \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sec \theta, & \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \tan \theta \end{aligned}$$

Fórmulas de adición y resta de ángulos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta \pm \gamma) &= \operatorname{sen} \theta \cos \gamma \pm \cos \theta \operatorname{sen} \gamma \\ \cos(\theta \pm \gamma) &= \cos \theta \cos \gamma \mp \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \gamma \\ \tan(\theta \pm \gamma) &= \frac{\tan \theta \pm \tan \gamma}{1 \mp \tan \theta \tan \gamma} \end{aligned}$$

Fórmulas de semiángulos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ \tan^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \end{aligned}$$

Fórmulas de producto

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta \cos \gamma &= \frac{\operatorname{sen}(\theta + \gamma) + \operatorname{sen}(\theta - \gamma)}{2} \\ \cos \theta \operatorname{sen} \gamma &= \frac{\operatorname{sen}(\theta + \gamma) - \operatorname{sen}(\theta - \gamma)}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \theta \cos \gamma = \frac{\cos(\theta + \gamma) + \cos(\theta - \gamma)}{2}$$

$$\sin \theta \sin \gamma = \frac{\cos(\theta - \gamma) - \cos(\theta + \gamma)}{2}$$

Fórmulas para productos enteros de ángulos

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \binom{n}{6} \cos^{n-6} \theta \sin^6 \theta \\ &\quad + \dots \\ \sin n\theta &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta \\ &\quad - \binom{n}{7} \cos^{n-7} \theta \sin^7 \theta + \dots \end{aligned}$$

Anexo 2. Polinomios de Jacobi

Los polinomios de Jacobi constituyen una familia de polinomios ortogonales en el intervalo $[-1,1]$ con respecto al peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, en que $\alpha, \beta > -1$. Estos polinomios incluyen a los polinomios de Legendre y Chebyshev.

Fórmula de Rodrigues

Dado el peso $w(x) > 0$, se define la función

$$\phi_n(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n w(x)].$$

Esta familia de funciones se conoce como la fórmula de Rodrigues, cuya función peso $w(x)$ está dada por

$$w(x) = K(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$$

con la restricción $\alpha, \beta > -1$. Esta familia de funciones es ortogonal en el intervalo $[-1,1]$, con respecto al producto interior $w(x)$. Esta familia se conoce como la familia de Polinomios de Jacobi.

Polinomios de Jacobi

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}],$$

con $\alpha, \beta > -1$.

A partir de estos polinomios de Jacoby se pueden determinar varias subfamilias de polinomios ortogonales que son útiles. Tales son los casos de los polinomios de Legendre, que corresponden al caso $\alpha = \beta = 0$, y de los polinomios de Chebyshev, que corresponden al caso $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$.

Polinomios de Chebyshev

Se presenta el caso cuando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, se tiene

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} (1-x^2)^{1/2} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n-1/2}].$$

Anexo 3. Interpolaciones de Polinomios de Chebyshev en MATLAB

A continuación se presentan los programas que se usaron en MATLAB para obtener un polinomio interpolado de Chebyshev de grado n .

De manera general la primera parte pide el valor de n para el grado de la función resultante. Inmediatamente encuentra las raíces del polinomio de Chebyshev correspondiente de grado $n + 1$ y los guarda en la variable `kk1`.

Seguido pide la función que se quiere interpolar e inmediatamente encuentra los resultados de evaluar las raíces encontradas en el paso anterior en la función dada y los guarda en `ff`.

Seguido el programa encuentra los coeficientes de los polinomios de Chebyshev correspondiente ($T_n(x)$, $U_n(x)$, $V_n(x)$ ó $W_n(x)$) para los sub índices $1, 2, 3, \dots, n$ y los guarda en la matriz `mtt1`.

Los siguientes dos pasos encuentran los coeficientes c_i de (36), (37), (38) o (39) y los guarda en el vector cci . A continuación se calculan los coeficientes del polinomio $p_n(x)$ buscado y se guardan en tnx .

Por último, se genera el polinomio buscado y en caso de (37), (38) y (39) multiplicado por la función peso correspondiente.

1. Polinomio de Primer Tipo $T_n(x)$.

```

xx=0;
n=input('introduzca el valor de n: ');
k1=[1:n+1];
for kk1=1:length(k1)
    xx(kk1)=cos((kk1-1/2)*pi/(n+1));
end

ff=0;
syms x;
f=input('Introduzca la función f(x)= ');
for kk2=1:length(k1)
    ff(kk2)=subs(f,xx(kk2));
end

tt=0;
t0=1;
t1=[1 0];
mtt1=zeros(n+1);
for kk3=0:n
    if kk3==0
        tt=1;
        mtt1(1,1)=[tt];
    else

```

```

    if kk3==1
        tt=[1,0];
        mtt1(2,1:2)=[tt];
    else
        ta=t1;
        t1=[t1,0];
        t0=[0,0,t0];
        tt=2*t1-t0;
        t0=ta;
        t1=tt;
        mtt1(kk3+1,1:kk3+1)=[tt];
    end
end
end

mxxm=zeros(n+1);
for kk4=0:n
    mxx1=ones(1,n+1);
    mxx2=[n:-1:0];
    mxx3=mxx1*xx(kk4+1);
    mxx4=mxx3.^mxx2;
    mxxm(kk4+1,:)=[mxx4];
end

vcc=0;
for kk5=0:n
    cca=0;
    for kk6=1:n+1
        cca1=mtt1(kk5+1,1:kk5+1);
        cca2=mxxm(kk6,n-kk5+1:n+1);
        cca3=cca1.*cca2;
    end
end

```

```

        cca4=sum(cca3);
        cca5=ff(kk6)*cca4;
        cca=cca+cca5;
    end
    vcc(kk5+1)=cca;
end
ccii=2/(n+1)*vcc;

tnx=zeros(1,n+1);
for kk7=0:n
    if kk7==0
        tnx1=[zeros(1,n-kk7),mtt1(kk7+1,1:kk7+1)]*ccii(kk7+1)*1/2;
        tnx=tnx+tnx1;
    else
        tnx1=[zeros(1,n-kk7),mtt1(kk7+1,1:kk7+1)]*ccii(kk7+1);
        tnx=tnx+tnx1;
    end
end

fx=0;
for kk11=0:n
    fx1=tnx(kk11+1)*(x^(n-kk11));
    fx=fx+fx1;
end
fx

```

2. Polinomio de Segundo Tipo $U_n(x)$.

```

xx=0;
n=input('introduzca el valor de n: ');
for kk1=1:n+1

```

```

    xx(kk1)=cos(kk1*pi/(n+2));
end

ff=0;
syms x;
    f=input('Introduzca la función f(x)= ' );
for kk2=1:n+1
    ff(kk2)=subs(f,xx(kk2));
end

tt=0;
t0=1;
t1=[2 0];
mtt1=zeros(n+1);
for kk3=0:n
    if kk3==0
        tt=1;
        mtt1(1,1)=[tt];
    else
        if kk3==1
            tt=[2,0];
            mtt1(2,1:2)=[tt];
        else
            ta=t1;
            t1=[t1,0];
            t0=[0,0,t0];
            tt=2*t1-t0;
            t0=ta;
            t1=tt;
            mtt1(kk3+1,1:kk3+1)=[tt];
        end
    end
end

```

```

    end
end

mxxm=zeros(n+1);
for kk4=0:n
    mxx1=ones(1,n+1);
    mxx2=[n:-1:0];
    mxx3=mxx1*xx(kk4+1);
    mxx4=mxx3.^mxx2;
    mxxm(kk4+1,:)=mxx4;
end

vcc=0;
for kk5=0:n
    cca=0;
    for kk6=1:n+1
        cca1=mtt1(kk5+1,1:kk5+1);
        cca2=mxxm(kk6,n-kk5+1:n+1);
        cca3=cca1.*cca2;
        cca4=sum(cca3);
        cca5=ff(kk6)*cca4*sqrt(1-xx(kk6)^2);
        cca=cca+cca5;
    end
    vcc(kk5+1)=cca;
end
ccii=2/(n+2)*vcc;

tnx=zeros(1,n+1);
for kk7=0:n
    tnx1=[zeros(1,n-kk7),mtt1(kk7+1,1:kk7+1)]*ccii(kk7+1);
    tnx=tnx+tnx1;

```

```
end
```

```
fx=0;
```

```
for kk1=0:n
```

```
    fx1=tnx(kk1+1)*(x^(n-kk1));
```

```
    fx=fx+fx1;
```

```
end
```

```
fx;
```

```
sqrt(1-x^2)*fx
```

3. Polinomio de Tercer Tipo $V_n(x)$.

```
xx=0;
```

```
    n=input('introduzca el valor de n: ');
```

```
for kk1=1:n+1
```

```
    xx(kk1)=cos((kk1-1/2)*pi/(n+3/2));
```

```
end
```

```
ff=0;
```

```
syms x;
```

```
    f=input('Introduzca la función f(x)=');
```

```
for kk2=1:n+1
```

```
    ff(kk2)=subs(f,xx(kk2));
```

```
end
```

```
tt=0;
```

```
t0=1;
```

```
t1=[2 -1];
```

```
mtt1=zeros(n+1);
```

```
for kk3=0:n
```

```

if kk3==0
    tt=1;
    mtt1(1,1)=[tt];
else
    if kk3==1
        tt=[2,-1];
        mtt1(2,1:2)=[tt];
    else
        ta=t1;
        t1=[t1,0];
        t0=[0,0,t0];
        tt=2*t1-t0;
        t0=ta;
        t1=tt;
        mtt1(kk3+1,1:kk3+1)=[tt];
    end
end
end

mxxm=zeros(n+1);
for kk4=0:n
    mxx1=ones(1,n+1);
    mxx2=[n:-1:0];
    mxx3=mxx1*xx(kk4+1);
    mxx4=mxx3.^mxx2;
    mxxm(kk4+1,:)=[mxx4];
end

vcc=0;
for kk5=0:n
    cca=0;

```

```

for kk6=1:n+1
    cca1=mtt1(kk5+1,1:kk5+1);
    cca2=mxxm(kk6,n-kk5+1:n+1);
    cca3=cca1.*cca2;
    cca4=sum(cca3);
    cca5=ff(kk6)*cca4*sqrt(1+xx(kk6));
    cca=cca+cca5;
end
vcc(kk5+1)=cca;
end
ccii=1/(n+3/2)*vcc;

tnx=zeros(1,n+1);
for kk7=0:n
    tnx1=[zeros(1,n-kk7),mtt1(kk7+1,1:kk7+1)]*ccii(kk7+1);
    tnx=tnx+tnx1;
end

fx=0;
for kk11=0:n
    fx1=tnx(kk11+1)*(x^(n-kk11));
    fx=fx+fx1;
end

fx;
sqrt(1+x)*fx

```

4. Polinomio de Cuarto Tipo $W_n(x)$.

```

xx=0;
n=input('introduzca el valor de n: ');

```



```

for kk1=1:n+1
    xx(kk1)=cos((n-kk1+2)*pi/(n+3/2));
end

ff=0;
syms x;
f=input('Introduzca la función f(x)= ' );
for kk2=1:n+1
    ff(kk2)=subs(f,xx(kk2));
end

tt=0;
t0=1;
t1=[2 1];
mtt1=zeros(n+1);
for kk3=0:n
    if kk3==0
        tt=1;
        mtt1(1,1)=[tt];
    else
        if kk3==1
            tt=[2,1];
            mtt1(2,1:2)=[tt];
        else
            ta=t1;
            t1=[t1,0];
            t0=[0,0,t0];
            tt=2*t1-t0;
            t0=ta;
            t1=tt;
            mtt1(kk3+1,1:kk3+1)=[tt];
        end
    end
end

```

```

    end
end
end

mxxm=zeros(n+1);
for kk4=0:n
    mxx1=ones(1,n+1);
    mxx2=[n:-1:0];
    mxx3=mxx1*xx(kk4+1);
    mxx4=mxx3.^mxx2;
    mxxm(kk4+1,:)=mxx4;
end

vcc=0;
for kk5=0:n
    cca=0;
    for kk6=1:n+1
        cca1=mtt1(kk5+1,1:kk5+1);
        cca2=mxxm(kk6,n-kk5+1:n+1);
        cca3=cca1.*cca2;
        cca4=sum(cca3);
        cca5=ff(kk6)*cca4*sqrt(1-xx(kk6));
        cca=cca+cca5;
    end
    vcc(kk5+1)=cca;
end
ccii=1/(n+3/2)*vcc;

tnx=zeros(1,n+1);
for kk7=0:n
    tnx1=[zeros(1,n-kk7),mtt1(kk7+1,1:kk7+1)]*ccii(kk7+1);

```

```

    tnx=tnx+tnx1;
end

fx=0;
for kk11=0:n
    fx1=tnx(kk11+1)*(x^(n-kk11));
    fx=fx+fx1;
end

fx;
sqrt(1-x)*fx

```

Anexo 4. Cuadraturas de Gauss-Chebyshev en MATLAB (Caso 1)

En estos programas se obtiene la solución numérica de funciones dadas (no polinómicas) o multiplicadas por un factor, dichas funciones ya fueron aproximadas por un polinomio de Chebyshev correspondiente de grado n . Lo que cumple con la condición que debe ser de grado $2n - 1$ o menor.

Primeramente se encuentran las raíces del polinomio de Chebyshev de grado n correspondiente y se guardan en la variable xxx.

Ahora se sustituyen las raíces dadas en el polinomio que había sido aproximado, de acuerdo a los coeficientes de tnx. Luego se calcula la suma del teorema 6, que es el resultado buscado y se imprime dicho resultado.

```

1. Polinomio de Primer Tipo  $T_n(x)$ .
xxx=0;
k2=[1:n];
for kk8=1:length(k2)
    xxx(kk8)=cos((kk8-1/2)*pi/n);
end

```

```

ftx=zeros(n,n+1);
for kk9=1:n
    ftx1=ones(1,n+1);
    ftx2=[n:-1:0];
    ftx3=ftx1*xxx(kk9);
    ftx4=ftx3.^ftx2;
    ftx(kk9,:)=[ftx4];
end

```

```

ifwxt=0;
for kk10=1:n
    ifa1=tnx;
    ifa2=ftx(kk10,:);
    ifa3=ifa1.*ifa2;
    ifa4=sum(ifa3);
    ifa5=pi/n*ifa4;
    ifwxt=ifwxt+ifa5;
end
ifwxt

```

2. Polinomio de Segundo Tipo $U_n(x)$.

```

xxx=0;
k2=[1:n];
for kk8=1:length(k2)
    xxx(kk8)=cos(kk8*pi/(n+1));
end

```

```

ftx=zeros(n,n+1);
for kk9=1:n

```

```

ftx1=ones(1,n+1);
ftx2=[n:-1:0];
ftx3=ftx1*xxx(kk9);
ftx4=ftx3.^ftx2;
ftx(kk9,:)=[ftx4];
end

```

```

ifwxt=0;
for kk10=1:n
    ifa1=tnx;
    ifa2=ftx(kk10,:);
    ifa3=ifa1.*ifa2;
    ifa4=sum(ifa3);
    ifa5=pi/(n+1)*(1-(xxx(kk10)^2))*ifa4;
    ifwxt=ifwxt+ifa5;
end
ifwxt

```

3. Polinomio de Tercer Tipo $V_n(x)$.

```

xxx=0;
k2=[1:n];
for kk8=1:length(k2)
    xxx(kk8)=cos((kk8-1/2)*pi/(n+1/2));
end

```

```

ftx=zeros(n,n+1);
for kk9=1:n
    ftx1=ones(1,n+1);
    ftx2=[n:-1:0];
    ftx3=ftx1*xxx(kk9);

```

```

    ftx4=ftx3.^ftx2;
    ftx(kk9,:)=[ftx4];
end

```

```

ifwxt=0;
for kk10=1:n
    ifa1=tnx;
    ifa2=ftx(kk10,:);
    ifa3=ifa1.*ifa2;
    ifa4=sum(ifa3);
    ifa5=pi/(n+1/2)*(1+xxx(kk10))*ifa4;
    ifwxt=ifwxt+ifa5;
end
ifwxt

```

4. Polinomio de Cuarto Tipo $W_n(x)$.

```

xxx=0;
k2=[1:n];
for kk8=1:length(k2)
    xxx(kk8)=cos(kk8*pi/(n+1/2));
end

```

```

ftx=zeros(n,n+1);
for kk9=1:n
    ftx1=ones(1,n+1);
    ftx2=[n:-1:0];
    ftx3=ftx1*xxx(kk9);
    ftx4=ftx3.^ftx2;
    ftx(kk9,:)=[ftx4];
end

```

```

ifwxt=0;
for kk10=1:n
    ifa1=tnx;
    ifa2=ftx(kk10,:);
    ifa3=ifa1.*ifa2;
    ifa4=sum(ifa3);
    ifa5=pi/(n+1/2)*(1-xxx(kk10))*ifa4;
    ifwxt=ifwxt+ifa5;
end
ifwxt

```

Anexo 5. Cuadraturas de Gauss-Chebyshev en MATLAB (Caso 2)

En estos programas se obtiene la solución numérica de las cuadraturas Gauss-Chebyshev, cuando la función dada es un polinomio de grado $2n - 1$ o menor., dichas funciones no necesitan ser aproximadas por un polinomio de Chebyshev correspondiente de grado n .

Primeramente se pide el valor de n y se encuentran las raíces del polinomio de Chebyshev de grado n correspondiente y se guardan en la variable xxx.

Luego se pide que se ingrese la función polinómica dada se se sustituyen las raíces dadas en el polinomio, guardándolos en la variable ff. Luego se calcula la suma del teorema 6, que es el resultado buscado y se imprime dicho resultado.

1. Polinomio de Primer Tipo $T_n(x)$.

```

n=input('introduzca el valor de n: ');
xxx=0;
kk11=[1:n];
for kk12=1:length(kk11)
    xxx(kk12)=cos((kk12-1/2)*pi/n);

```

```

end

ff=0;
syms x;
f=input('Introduzca la función f(x)=');
for kk13=1:length(kk11)
    ff(kk13)=subs(f,xxx(kk13));
end

ifwxt=0;
for kk14=1:n
    ifa1=ff(kk14);
    ifa2=pi/n*ifa1;
    ifwxt=ifwxt+ifa2;
end
ifwxt

```

2. Polinomio de Primer Tipo $T_n(x)$.

```

n=input('introduzca el valor de n: ');
xxx=0;
kk11=[1:n];
for kk12=1:length(kk11)
    xxx(kk12)=cos(kk12*pi/(n+1));
end

ff=0;
syms x;
f=input('Introduzca la función f(x)=');
for kk13=1:length(kk11)
    ff(kk13)=subs(f,xxx(kk13));

```



```

end

ifwxt=0;
for kk14=1:n
    ifa1=ff(kk14);
    ifa2=pi/(n+1)*(1-(xxx(kk14)^2))*ifa1;
    ifwxt=ifwxt+ifa2;
end
ifwxt

```

3. Polinomio de Primer Tipo $T_n(x)$.

```

n=input('introduzca el valor de n: ');
xxx=0;
kk11=[1:n];
for kk12=1:length(kk11)
    xxx(kk12)=cos((kk12-1/2)*pi/(n+1/2));
end

ff=0;
syms x;
f=input('Introduzca la función f(x)=');
for kk13=1:length(kk11)
    ff(kk13)=subs(f,xxx(kk13));
end

ifwxt=0;
for kk14=1:n
    ifa1=ff(kk14);
    ifa2=pi/(n+1/2)*(1+xxx(kk14))*ifa1;
    ifwxt=ifwxt+ifa2;

```

```
end
ifwxt
```

4. Polinomio de Primer Tipo $T_n(x)$.

```
n=input('introduzca el valor de n: ');
xxx=0;
kk11=[1:n];
for kk12=1:length(kk11)
    xxx(kk12)=cos(kk12*pi/(n+1/2));
end

ff=0;
syms x;
f=input('Introduzca la función f(x)=');
for kk13=1:length(kk11)
    ff(kk13)=subs(f,xxx(kk13));
end

ifwxt=0;
for kk14=1:n
    ifa1=ff(kk14);
    ifa2=pi/(n+1/2)*(1-xxx(kk14))*ifa1;
    ifwxt=ifwxt+ifa2;
end
ifwxt
```

Anexo 6. Corolario 9

El corolario 9, procede de un teorema que es resultado de polinomios ortogonales. En este caso, al haberse centrado la atención en la solución numérica de integrales dadas, este teorema quedaba fuera y por tanto sólo se mencionará y se omitirá demostración. Al igual que dos lamas resultantes y

Teorema 7. Si el sistema $\{\phi_i\}$, con ϕ_i un polinomio de grado exacto i , es ortogonal con $[a, b]$ con respecto a un peso no negativo $w(x)$, entonces ϕ_n exactamente n ceros en $[a, b]$, para cada $n \geq 0$.

Lema 5. El polinomio de grado n interpolando la función continua $f(x)$ en los $n + 1$ puntos distintos x_1, \dots, x_{n+1} puede escribirse como

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i(x) f(x_i)$$

donde $\ell_i(x)$ es el polinomio usual de Lagrange

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right).$$

Lema 6. Si x_1, \dots, x_{n+1} son los ceros del polinomio $\phi_{n+1}(x)$, entonces los polinomios de Lagrange del lema 5, se puede escribir en la forma

$$\ell_i(x) = \frac{\phi_{n+1}(x)}{(x - x_i) \phi'_{n+1}(x_i)},$$

donde $\phi'(x)$ denota la primera derivada de $\phi(x)$.

Corolario 9. Para interpolación polinomial en los ceros del polinomio de Chebyshev $T_{n+1}(x)$, los polinomios de Lagrange son

$$\ell_i(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{(n+1)(x - x_i)U_n(x_i)}$$

o

$$\begin{aligned} \ell_i(\cos \theta) &= \frac{\cos(n+1)\theta \operatorname{sen} \theta_i}{(n+1)(\cos \theta - \cos \theta_i) \operatorname{sen}(n+1)\theta_i} \\ &= -\frac{\operatorname{sen}(n+1)(\theta - \theta_i) \operatorname{sen} \theta_i}{(n+1)(\cos \theta - \cos \theta_i)}. \end{aligned}$$