

Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua
Facultad Regional Multidisciplinaria, Carazo
Recinto Universitario "Augusto César Sandino"
Programa de Doctorado y Maestría
Matemática Aplicada

Tesis Monográfica para optar al Grado de
Doctor en Matemática Aplicada



UNIVERSIDAD
NACIONAL
AUTÓNOMA DE
NICARAGUA,
MANAGUA
UNAN-MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDISCIPLINARIA DE CARAZO
UNIDAD DE POSGRADO Y EDUCACIÓN CONTINUA

"Modelos de Ecuaciones Diferenciales Parciales"

Autor

Msc. Daniel Eliezer Herradora Argeñal

Tutor: Dr. Iván Augusto Cisneros Díaz

Jinotepe, abril 2023

Índice

1. Agradecimientos	7
2. Dedicatoria	8
3. Carta Aval	9
4. Resumen	1
5. Introducción	2
6. Planteamiento del problema.	3
7. Antecedentes	4
8. Justificación	5
9. Objetivos	6
9.1. Objetivo General	6
9.2. Objetivos Específicos	6
10. Capítulo I: Generalidades de las EDP	7
10.1. Aspectos Generales	7
10.2. Cambio de variables independientes	12
10.3. Condiciones de contorno o frontera	14
10.4. Condiciones iniciales	19
10.5. Funciones diferenciables	20
10.6. Existencia local de soluciones de EDP	21
10.7. Problemas de Cauchy. Hipersuperficies	29
10.8. Curvas características EDP de primer y segundo orden	30
10.9. Solución general. Método de la solución completa	36
10.10. Método de la solución completa para ecuaciones de primer orden	37
10.11. El método de la hodrógrafa	39
10.12. Operadores diferenciales. Problemas lineales	40
10.13. Operadores de frontera y de condiciones iniciales	43
10.14. Problemas lineales	43
10.15. Cuestiones, problemas y ejercicios	44

11. Capítulo II: Métodos Analíticos de las EDP	56
11.1. Ecuación Diferencial de Bessel	58
11.2. Separación de variables	59
11.3. Las ecuaciones de difusión y calor	60
11.4. Ecuación del calor	63
11.5. El anillo calentado Redux	70
11.6. Condiciones de contorno no homogéneas	74
11.7. Condiciones de frontera de Robin	75
11.8. El problema del sótano	78
11.9. La ecuación de onda	80
11.10. Separación de variables y soluciones de la serie Fourier	81
11.11. Soluciones separables de la ecuación de onda	82
11.12. La fórmula de D'Alembert para intervalos acotados	86
11.13. El problema del valor límite de Neumann	89
11.14. Las Ecuaciones Planas de Laplace y Poisson	90
11.15. Separación de Variables para la Ecuación de Laplace	94
11.16. Soluciones separables de la ecuación de Laplace	94
11.17. Coordenadas polares	98
11.18. Clasificación de ecuaciones diferenciales parciales lineales	108
11.19. Características y el problema de Cauchy	111
12. Capítulo III: Aplicaciones de las EDP	117
12.1. Ecuaciones cinéticas: de Newton a Boltzmann	117
12.2. Las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler - Dinámica de fluidos y gases	119
12.3. Flujo de material granular	121
12.4. Movimiento celular quimiotáctico y formación de patrones biológicos	123
12.5. Modelado de semiconductores	124
12.6. Problemas de límite libre y transiciones de fase	126
12.7. Ecuaciones de reacción-difusión en Entornos homogéneos y heterogéneos	128
12.8. Transporte óptimo y ecuaciones de Monge-Ampère	130
12.9. Ecuaciones de onda	133
12.10. Procesamiento y análisis de imágenes digitales – PDE y herramientas variacionales	137
12.11. Modelado socioeconómico	141
12.12. Otras ecuaciones	144

12.12.1. Movimiento browniano	144
12.12.2. Problemas de difusión-convección	145
12.12.3. Precios del mercado de valores	147
12.12.4. Evolución de un estado cuántico	149
12.12.5. Movimiento de un campo escalar cuántico	150
12.12.6. Pérdida de línea de transmisión	151
12.13. Ondas disipativas	153
12.13.1. Una aplicación geofísica: Sismogramas Sintéticos	153
12.14. Vibraciones transversales de una varilla	153
12.15. Ondas dispersas	155
12.15.1. Las auroras	156
12.16. Calor convectivo en estado estacionario	157
12.16.1. La transmisión del calor tiene lugar por tres mecanismos básicos	158
12.17. Problemas planos en mecánica de medios continuos	159
12.18. Flujo transónico plano	161
13. Capitulo IV: Funciones Generalizadas	162
13.1. Definiciones Básicas	163
13.2. Operaciones con Funciones Generalizadas	165
13.3. Diferenciación e Integración de Funciones Generalizadas	167
13.4. Convolución de Funciones Generalizadas	170
13.4.1. Teoremas de Convolución	170
13.5. Símbolos de Orden	174
13.6. Serie Asintótica	175
13.7. Operaciones Algebraicas y Analíticas	178
13.8. Existencia de Funciones dada una Expansión Asintótica	182
13.9. Aproximación Asintótica de Sumas Parciales	184
13.10. Expansión de Taylor de Distribuciones	188
13.11. Expansión Asintótica de Momentos	188
13.12. Expansión en el Espacio P'	192
13.13. Fórmula Asintótica de Laplace	193
13.14. Expansión de Núcleos Oscilatorios	196
13.15. Expansión de $f(\lambda x)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ en otros casos	198

14. Capitulo V: Transformada de Fourier	200
14.1. Serie de Fourier	208
14.2. Extensiones periódicas	213
14.3. Funciones continuas por partes	214
14.4. El teorema de la convergencia	216
14.5. Funciones pares e impares	217
14.6. Diferenciación e integración	220
14.7. Transformadas de Fourier	223
14.8. Derivadas e Integrales	234
14.9. Funciones y convolución de Green	236
14.10. Solución de problemas de valores en la frontera	236
14.11. Circunvolución	238
14.12. La transformada de Fourier en el espacio de Hilbert	240
14.13. Mecánica cuántica y el principio de incertidumbre	242
15. Capítulo VI: Principales Ecuaciones Diferenciales Parciales	246
15.1. Ecuación de calor	246
15.1.1. Fenómenos de difusión	248
15.1.2. Ecuación de calor en una dimensión	248
15.1.3. Condiciones de frontera para la ecuación de calor	249
15.2. Descripción intuitiva de la ecuación de calor en una dimensión	250
15.2.1. Probabilidad y la ecuación de difusión	251
15.2.2. El principio del máximo para la ecuación de calor	252
15.2.3. Unicidad de soluciones de la ecuación de calor	253
15.3. La ecuación de Laplace	254
15.3.1. Principio del máximo para la ecuación de Laplace	255
15.3.2. Invariabilidad del operador de Laplace respecto a rotaciones	257
15.3.3. El laplaciano en coordenadas polares y esféricas	257
15.4. La ecuación de onda	258
15.4.1. Las vibraciones de una cuerda	258
15.4.2. Descripción intuitiva de la ecuación de onda	260
15.4.3. Las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de onda	261
15.5. Solución de D'Alembert	262
15.5.1. La fórmula de D'Alembert en la semirecta	264

15.6. Fórmula de Kirchhoff-Poisson	265
15.6.1. Solución del problema de la ecuación de onda en \mathbb{R}^3	266
15.6.2. Principio de Huygens	267
16. Capítulo VII: Códigos en Python	269
17. Conclusiones	291
18. Recomendaciones	292
19. Referencias Bibliográficas	293
20. Webgrafía	295
21. Anexos	296
21.1. Notas históricas de Series y Transformadas de Fourier	296

1. Agradecimientos

En primer lugar, a Dios, por conceder la vida, la salud y las fuerzas para culminar este trabajo.

A mis padres y esposa, por su apoyo moral y económico en todo momento, ellos han sido protagonistas directos de mi esfuerzo y sacrificio a lo largo de mi formación académica, por haberme inculcado el valor de la perseverancia y otros valores morales como la amistad, la gratitud, la tolerancia y el respeto, para ellos todo mi amor.

1.0 Mención Honorífica:

Los personajes acá destacados han sido un soporte de complementación a mi formación personal y profesional. Para mí sería vana la producción de éste opúsculo y una displicencia el preterir sus nombres.

1.1 William Milton Carvajal Herradora

MÁS QUE MI HERMANO Y FAMILIA, HA SIDO MI MODELO A SEGUIR DESDE LA INFANCIA Y MI MENTOR, DESDE SIEMPRE.

1.2 Laureana Adalila Molina Membreño

Amiga que me acoge bajo su cobertura profesional para mostrarme la existencia de mejores entornos de desarrollo científico y señalar la senda para olvidar mi zona de confort.

1.3 Ana Cristina Rostrán Molina

Escogerme como su amigo, promover mi profesionalismo, alexionarme en la investigación científica e integrarme en su staff de colaboradores científicos.

2 D edicatoria **General:**

A los maestros de la UNAN-Managua; en especial al Dr. Iván Augusto Cisneros Díaz, que, con sus aportes, ahínco y amor a la educación universitaria, se encuentra un amigo, más que un tutor dispuesto a conseguir la mejor producción académica contribuyendo en la formación de profesionales que figuran como elementos importantes en la sociedad.

2.0 D edicatoria **Personal:**

A LA MEMORIA DE MI PADRE:

DANIEL HERRADORA RIVERA



QUIEN DESDE POSICIÓN LABORAL, SIEMPRE PROMOVÍO
MIS ESTUDIOS CONTINUOS
Y FINANCIÓ EN VIDA PARTE DE ÉSTA FORMACIÓN;
SIN OMITIR RESPONSABILIDADES EN EL HOGAR,
SOBRE DIMENSIONANDO ASÍ SU ESFUERZO
PARA TODO SU NÚCLEO SIN CLAUDICAR

A ÉL, MI ETERNO AMOR.

3. Carta Aval

Dr. Iván Augusto Cisneros Díaz Tutor, docente titular del Departamento de Enseñanzas de las Ciencias de la Facultad de Educación e Idiomas, de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, UNAN-Managua, hago constar que el trabajo de investigación

Modelos de Ecuaciones Diferenciales Parciales

desarrollado por el maestrante Daniel Eliezer Herradora Argeñal, mismo que se desarrolló como una segunda fase en el marco del programa de Doctorado en Matemáticas Aplicada, ha sido realizado bajo mi apoyo y dirección.

Hago constancia también que a lo largo del período de investigación he mantenido periódicas entrevistas con el tutorando en las que hemos discutido y consensado los objetivos, así como la metodología, líneas de trabajo y perspectivas de futuro. Asumo que el trabajo responde de manera aceptable a los objetivos planteados y que hasta esta etapa el proyecto presenta el suficiente rigor científico para ser presentado y defendido ante el tribunal designado para tal efecto.

Ante todo ello espero que Daniel Eliezer Herradora Argeñal pueda dar por culminada su segunda fase del programa de Doctorado.

Dr. Iván Augusto Cisneros Díaz

Director de tesis

Jinotepe, abril 2023

4. Resumen

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo general caracterizar los modelos de solución de las principales ecuaciones de la física matemática, entre ellas: Ecuación de la Onda, Ecuación del Calor, Ecuación de Laplace y Ecuación de Poisson.

Se estudiarán aspectos teóricos relativo al análisis de dichas ecuaciones y su posterior implementación numérica mediante la codificación de sus algoritmos en el lenguaje de programación Python, bajo la perspectiva del paradigma de programación orientado a objeto.

La tesis está dividida en siete (7) capítulos: Generalidades de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), Métodos Analíticos de las EDP, Aplicaciones de las EDP, Funciones Generalizadas, Transformada de Fourier, Principales Ecuaciones Diferenciales Parciales y Códigos en Python. En todos ellos se desarrollan diversos ejemplos teóricos y prácticos que permiten caracterizar los modelos de solución de las EDP.

En cada capítulo se presenta aspectos generales teóricos y analíticos que caracterizan dicho estudio, así mismo, como las principales definiciones, propiedades y teoremas relativos a las ecuaciones diferenciales parciales (EDP), los cuales permitirán obtener insumos para la formulación de los algoritmos numéricos que resuelvan dichos modelos de ecuaciones de la física matemática.

5. Introducción

El estudio de las ecuaciones diferenciales parciales inició en el siglo XVIII con los trabajos de los matemáticos suizos D'Alembert y Euler y los franceses Lagrange y Laplace. Las ecuaciones diferenciales parciales aparecieron en el contexto de la modelización matemática de fenómenos de la física del medio continuo, tal es el caso de la ecuación de calor que es de fundamental importancia en diversos campos y temas científicos, como los procesos de difusión física, química y procesos industriales, difusión de partículas en pilas atómicas, difusión de vorticidad en flujos viscosos y movimiento lento en hidrodinámica.

Se pretende caracterizar los modelos físicos de la ecuación de la onda, ecuación del calor, ecuación de Laplace y ecuación de Poisson, desde un punto de vista teórico y numérico.

Los aspectos que se pretende estudiar con los métodos analíticos son el estudio de diferentes métodos de solución de las EDP, entre ellos: Separación de variables, Principio de superposición, Cambio de variables, Método de las características. Series de Fourier, Métodos de Transformadas de Laplace y Métodos de transformadas de Fourier, Funciones de Green y Métodos de aproximación.

Por otro lado, también se desarrollarán métodos iterativos numéricos para solucionar ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Tanto el avance y el abordaje será con asistencia del lenguaje de programación de alto nivel Python.

La incorporación de los métodos numéricos es un tema integrador de los esquemas de derivación surgidos de los polinomios interpolantes de Newton-Gregory aplicados a dos variables independientes y el método de las Diferencias finitas utilizado para resolver ecuaciones diferenciales con valores en la frontera.

Los métodos analíticos suelen ser limitados (como separación de variables), a diferencia de los procesos numéricos que permiten una mayor versatilidad en el diseño del modelo. En general, el proceso de solución numérica es el mismo que el utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con valores en la frontera: inicialmente se debe aplicar diferencias finitas y con una ecuación de recurrencia construir un sistema de ecuaciones. Por consiguiente será necesario contar con esquemas numéricos de derivación parcial para aplicarlos como diferencias finitas.

6. Planteamiento del problema.

La resolución de ecuaciones en derivadas parciales constituye una de los problemas más importantes de la aplicabilidad de los modelos de las principales ecuaciones de la física matemática. Los métodos numéricos son una herramienta fundamental en la solución de ecuaciones diferenciales parciales (EDP).

El estudio de los métodos iterativos para resolver ecuaciones en derivadas parciales es cada día más importante, ya que es necesario obtener soluciones aproximadas óptima y confiables, necesarias para resolver problemas y fenómenos ligado a la actividad científica de las ciencias.

Se estudiará la solución numérica de los problemas de modelo del calor, de onda y de Laplace, cuya solución analítica ya conocemos, lo cual nos servirá para darnos cuenta de la efectividad de tales métodos. Por supuesto, los métodos numéricos se aplican con gran precisión en la solución de ecuaciones y las técnicas que utilizaremos pueden adaptarse con facilidad a una gran cantidad de ecuaciones no homogéneas, incluso no lineales.

La necesidad por mejorar el orden y la rapidez de convergencia de los métodos iterativos es muy imperante en el estudio de dichos métodos y cada día, es más creciente las investigaciones referidas a la búsqueda de nuevos procedimientos numéricos. El esquema propuesto es aplicado a problemas particulares mostrando la efectividad del método.

Por lo antes expuesto, nuestro interés se centra en mejorar y optimizar las soluciones aproximadas para el problema de la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, mediante el esquema de refinamiento local de nodos (RLN) y el método de descomposición de dominio (MDD).

7. Antecedentes

Se revisó diferente literatura matemática sobre estudios de ecuaciones en derivadas parciales, la cual consistió en analizar la metodología y resultados obtenidos en diversos artículos publicados en revistas indexadas de matemáticas aplicadas. Esto permitió obtener una visión general sobre los diferentes modelos de soluciones de las ecuaciones de las ondas, ecuación del calor y las clásicas ecuaciones de Laplace y Poisson.

También se estudiaron los procedimientos matemáticos analíticos y numéricos de las ecuaciones clásicas en derivadas parciales, así como sus diferentes aplicaciones a la teoría de los métodos iterativos.

No existen antecedentes a nivel nacional sobre este tema de investigación, la revisión bibliográfica se efectuó en los sistemas bibliográficos de las Facultades Regionales Multidisciplinarias de Matagalpa, Estelí y Carazo;

A nivel internacional, se revisaron diversas tesis doctorales y de maestría, entre ellas: La tesis titulada "Diferencias finitas generalizadas en 2D aplicadas a problemas no lineales", Ángel García Gómez. (2018). Ésta tesis fue elaborada en la Universidad de Barcelona, España y concluye en la construcción de los métodos de los elementos finitos y el método sin mallas.

Por otro lado, la tesis titulada "Sobre las ecuaciones lineales con derivadas parciales de segundo orden", Baidaff, B. (1921). Ésta tesis fue elaborada en la Universidad de Buenos Aires, Argentina y concluye con diversos métodos de solución para resolver ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden.

Finalmente, los apuntes de clase titulado "Matemática Aplicada a las Ecuaciones en Derivadas Parciales", Aimar H. A. Bongiani B. y Morin P. (2018), de la Universidad Nacional del Litoral, Argentina. Estos apuntes contiene diversas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales y los distintos modelos de las ecuaciones de la física-matemática. Contiene teoría y ejercicios prácticos desarrollados.

8. Justificación

La investigación constituye un puente teórico entre la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales y los métodos numéricos para resolver las ecuaciones clásicas de la física-matemática.

La conveniencia del trabajo es mostrar diferentes formas o procesos analíticos para resolver ecuaciones diferenciales parciales, a través de la integración y combinación de la teoría física con la matemática.

La relevancia y su impacto social estará reflejada en poder estimular la creatividad matemática para desarrollar nuevas formas del pensamiento respecto a las formas de obtener soluciones a dichas ecuaciones física-matemática e incidir en la posibilidad de emplear dichas formulaciones en el proceso de simulación numérica.

La implicación práctica del trabajo consiste en la posibilidad de poder argumentar y utilizar estos resultados en la solución de problemas aplicados a la vida cotidiana.

El valor teórico del presente trabajo consiste en ofrecer diversas variantes teóricas y métodos matemáticos de las ecuaciones diferenciales parciales, con la posibilidad de poder combinar diferentes métodos para la solución de dichas ecuaciones.

La utilidad metodológica se puede manifestar en el uso de diversas estrategias y técnicas teóricas que permitan aplicar y demostrar dichos procesos matemáticos de la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Esto se puede evidenciar mediante un proceso de transformación y adaptación de estos procesos lógicos y abstractos.

Por tanto, este trabajo beneficiará a estudiantes, docentes e investigadores que se interesen en los diferentes métodos de solución de las ecuaciones clásicas de la física-matemática y en las diversas formas metodológicas de la enseñanza aprendizaje de la matemática.

Por último, resolver EDP a través de métodos analíticos, constituye un proceso complejo, de ahí la aplicación indistinguible de las soluciones numéricas, como un método confiable, óptimo y aproximativo.

9. Objetivos

9.1. Objetivo General

Caracterizar los modelos de solución de las ecuaciones diferenciales parciales de la ecuación de la onda, ecuación de calor, ecuaciones de Laplace y de Poisson de manera analítica y numérica.

9.2. Objetivos Específicos

1. Analizar los métodos clásicos de soluciones de las ecuaciones de la física matemática mediante una caracterización de los modelos de soluciones establecidos.
2. Compilar teoría y ejemplos referentes a la solución de las ecuaciones diferenciales parciales de las ecuaciones clásicas de la onda, calor, Laplace y de Poisson.
3. Simular mediante el paradigma de programación funcional, bajo la óptica del lenguaje programación en Python los algoritmos referidos a dichas ecuaciones.

10. Capítulo I: Generalidades de las EDP

En este primer capítulo se presentarán las definiciones generales sobre ecuaciones en derivadas parciales (EDP) y se enuncia uno de los teoremas de existencia y unicidad básicos, debido a Cauchy y a Kovalevskaya. También se introducen los problemas de Cauchy y la noción de hipersuperficie característica y se dedica una sección a definiciones básicas sobre operadores diferenciales y problemas de EDP lineales asociados.

10.1. Aspectos Generales

Siempre consideraremos funciones dependientes de un cierto número de variables reales y que toman valores complejos. Utilizaremos dos tipos de notación dependiendo de la situación.

Notación extendida: Escribiremos $u = u(x, y, \dots) = u_1(x, y, \dots) + i u_2(x, y, \dots)$ para denotar una función que depende de las variables reales (x, y, \dots) , que toma valores complejos cuya parte real e imaginario vienen dadas por

$$\operatorname{Re} u = u_1, \quad \operatorname{Im} u = u_2$$

Como números complejos, los valores de la función u pueden conjugarse y poseen módulo y argumento

$$\bar{u} = u_1 - iu_2, \quad |u| = +\sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad \arg u = \arctan \frac{u_2}{u_1}$$

Es útil recordar que:

$$|u|^2 = \bar{u}u, \quad u = |u| e^{i \arg u}.$$

Recordemos que en el álgebra de números complejos, dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tienen las fórmulas de Euler:

$$\begin{aligned} e^{ib} &= \cos b + i \sin b \\ e^{a+ib} &= e^a e^{ib} \\ &= e^a (\cos b + i \sin b). \end{aligned}$$

Frecuentemente, en las aplicaciones de la física, una de las variables a tener en cuenta es el tiempo t , así que en tales ocasiones denotaremos mediante (t, x, y, \dots) a las variables de las que dependen nuestras funciones.

Supondremos siempre que las funciones que manejamos admiten derivadas hasta el orden requerido por las operaciones que debamos efectuar. En particular tal orden ha de ser suficiente para

que el resultado de una derivación múltiple sea independiente del orden en que efectuemos las derivaciones individuales. Por ejemplo:

$$u_{xxyxzy} = u_{xxxyyz} = u_{zxyxyx}.$$

Dada la función

$$u(x, y) = xy + ie^{x^2+y^2}.$$

En este caso, las partes real e imaginarias estarán dadas por

$$u_1(x, y) = xy, \quad u_2(x, y) = e^{x^2+y^2},$$

por lo tanto

$$\bar{u} = xy - ie^{x^2+y^2}, \quad |u| = \sqrt{(xy)^2 + e^{2(x^2+y^2)}}$$

Se calcula inmediatamente que

$$u_x = y + 2ixe^{x^2+y^2}, \quad u_{xx} = i(2 + 4x^2)e^{x^2+y^2}.$$

Sea

$$u(x, y) = e^{xy+i(x^2+y^2)}.$$

Utilizando las fórmulas de Euler

$$u = e^{xy}(\cos(x^2 + y^2) + i \sin(x^2 + y^2)),$$

luego

$$u_1 = e^{xy} \cos(x^2 + y^2), \quad u_2 = e^{xy} \sin(x^2 + y^2)$$

$$|u| = e^{xy}, \quad \arg u = x^2 + y^2$$

Así, las derivadas de primer orden son

$$u_x = (y + i2x)e^{xy}(\cos(x^2 + y^2) + i \sin(x^2 + y^2))$$

$$u_y = (y + i2x)e^{xy}(\cos(x^2 + y^2) + i \sin(x^2 + y^2))$$

Notación abreviada: En una notación más compacta las funciones las escribiremos en la forma $u = u(x) = u_1(x) + iu_2(x)$, donde

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

denota un punto de \mathbb{R}^n . Frecuentemente, aunque no siempre, la variable x_0 será identificada con una variable tiempo t . Para las derivadas escribiremos

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}, \quad |\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \quad (1)$$

donde aparecen índices vectoriales

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}_+^n \subset \mathbb{R}^n$$

con n componentes enteras $\alpha_i \geq 0$. Obsérvese que $|\alpha|$ es el orden de la derivada $D^\alpha u$. Por definición si

$$\alpha = (0, 0, \dots, 0), \text{ entonces } D^\alpha u \equiv u$$

La relación entre los dos tipos de notación es fácil de establecer. Por ejemplo si $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, x, y, z)$

$$u_{xxzyz} = D^\alpha u, \quad \alpha = (0, 2, 1, 2).$$

Cuando tengamos una sola variable independiente x , usaremos la notación

$$D^n u = \frac{d^n u}{dx^n}$$

Definición 1 Una EDP es una ecuación de la forma:

$$F(x, D^\alpha u) = 0$$

siendo F una función que depende de $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, $n > 1$, y de un número finito de derivadas D^α . La nomenclatura es la siguiente:

1. Las variables x_i con $i = 0, \dots, n-1$, se denominan variables independientes de la EDP.
2. La función incógnita u de la EDP se denomina variable dependiente de la EDP.
3. Si r es el orden máximo de las derivadas $D^\alpha u$ de las que depende la función F , entonces r es por definición el orden de la EDP.

Aunque pueden tratarse situaciones más generales de gran interés, aquí sólo consideraremos EDP correspondientes a funciones F que dependen polinómicamente en las variables $D^\alpha u$. No imponemos tal tipo de restricciones a la dependencia respecto de las variables x_i . En particular, si F es un polinomio de grado uno en $D^\alpha u$ se dice que la EDP es una EDP lineal. En ese caso la EDP es de la forma

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u = f(x) = 0 \quad (2)$$

donde \sum'_{α} significa que la suma se extiende a un conjunto finito de multi-índices α con $|\alpha| \geq 0$. Las funciones $a_{\alpha}(x)$ y $f(x)$ se suponen dadas. Normalmente cuando tratamos con una ecuación como (1.2) la escribimos como

$$\sum'_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u = f(x) \quad (3)$$

y nos referimos al término $f(x)$ como el *término inhomogéneo* de la ecuación. Si $f(x) \equiv 0$ diremos que la EDP lineal es *homogénea*.

En general las EDP no lineales son mucho más difíciles de tratar que las lineales. Para considerar EDP concretas la notación extendida es más conveniente.

1. La EDP

$$u_x + e^{x+y} u_y - u = x^2 y^2,$$

es lineal de orden 1

2. La EDP

$$u_{xx} u + u_y + xy = 0$$

es no lineal, obsérvese el término $u_{xx} u$, es de orden 2.

Sin embargo, existen situaciones físicas en que aparecen ecuaciones más generales. Por ejemplos, la ecuación de *Sine-Gordon*:

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u$$

Se utiliza en la descripción de la transparencia auto-inducida o en el estudio las uniones inducidas Josephson. Así mismo, también es relevante en geometría diferencial.

Una extensión del concepto de EDP lineal es el de EDP cuasi-lineal, ahora se exige linealidad tan sólo en las derivadas de orden más alto.

La Física está conformada principalmente de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) lineales y no lineales. Tanto en electromagnetismo como en mecánica cuántica, las ecuaciones básicas son lineales, pero en otras áreas, como la dinámica de medios continuos o la relatividad general, las ecuaciones fundamentales son no lineales.

Hay cuatro ejemplos de EDP lineales, todas ellas de segundo orden, a las que vamos a dedicar un interés particular en ésta tesis:

1. La ecuación de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f, \quad (\text{Poisson})$$

siendo $f = f(x, y, z)$ una función dada. si $f \equiv 0$ la EDP se conoce como ecuación de Laplace. Ambas EDP aparecen a menudo en electrostática y en mecánica de fluidos.

2. La ecuación de ondas

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (\text{Ondas})$$

donde c es un número real positivo que representa la velocidad de propagación de las ondas.

3. La ecuación de Schrödinger

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + q(x, y, z)u \quad (\text{Schrodinger})$$

que describe la dinámica de una partícula de masa m en un campo de fuerzas con función potencial $q = q(x, y, z)$. El símbolo \hbar representa la constante de Planck normalizada. Es de observar la presencia del número imaginario i en el coeficiente de u_t .

4. La ecuación del calor

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (\text{Calor})$$

es relevante en procesos de difusión térmica y de difusión de fluidos en general. El símbolo a^2 representa el coeficiente de difusión.

Para escribir de forma abreviada las ecuaciones anteriores es conveniente usar la notación del operador Laplaciano:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

Hay muchos ejemplos de EDP no lineales de gran importancia por sus aplicaciones en la Física. Los métodos que se emplean en su estudio son muy diferentes de los desarrollados para las EDP lineales. Solo mostraremos un par de EDP no lineales que gozan de gran popularidad actualmente.

1. La ecuación de Korteweg–de Vries

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$$

con aplicaciones en hidrodinámica, física del estado sólido y física del plasma.

2. La ecuación de Schrödinger no lineal

$$iut = -u_{xx} + |u|^2 u$$

con relevancia en diversos campos entre los que destaca la óptica no lineal.

10.2. Cambio de variables independientes

Dada una EDP una de las manipulaciones más frecuentes que debemos efectuar es determinar la forma que adquiere cuando efectuamos un cambio de variables independientes $x \mapsto y(x)$ con ecuaciones de transformación:

$$y_i = y_i(x_0, x, \dots, x_{n-1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

que siempre supondremos invertible $y \mapsto x = x(y)$ con ecuaciones de transformación inversa

$$x_i = x_i(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

Para simplificar no utilizaremos un nuevo símbolo de función para la función compuesta $u(x(y))$ que simplemente denotaremos $u(y)$.

La forma que toma dicha ecuación en las nuevas variables se determina sustituyendo en $F(x, D^\alpha u)$ las variables x por $x(y)$, y las derivadas respecto de x por sus expresiones en términos de derivadas respecto de y . Para esto último hay que utilizar la regla de la cadena. Las expresiones de las derivadas de ordenes uno y dos son

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j'} \frac{\partial u}{\partial y_{j'}} \frac{\partial y_{j'}}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j'} \frac{\partial y_{j'}}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial y_{j'}} \right) = \sum_{i' j'} \frac{\partial y_{i'}}{\partial x_i} \frac{\partial y_{j'}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial y_{i'} \partial y_{j'}} + \sum_{j'} \frac{\partial^2 y_{j'}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial y_{j'}}$$

En ocasiones un cambio de variables puede convertir una EDP en otra más simple. El ejemplo clásico es la ecuación de ondas en 1+1 dimensiones.

1. Sea la EDP

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

Efectuemos el cambio de variable

$$y_1 = t + x, \quad y_2 = t - x$$

con cambio inverso

$$t = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad x = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$$

Inmediatamente se obtiene:

$$u_t = u_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + u_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial t} = u_{y_1} + u_{y_2}$$

$$u_x = u_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x} + u_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x} = u_{y_1} - u_{y_2}$$

$$u_{tt} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right) (u_{y_1} - u_{y_2}) = u_{y_1 y_1} + u_{y_2 y_2}$$

$$u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} \right) (u_{y_1} - u_{y_2}) = u_{y_1 y_1} + u_{y_2 y_2}$$

como consecuencia la EDP se escribe

$$4u_{y_1 y_2} = 0$$

En su nueva forma la EDP integrarse y se obtiene la solución

$$u = f(y_1) + g(y_2) = f(x - t) + g(t - x)$$

donde f y g son funciones arbitrarias.

2. Formularemos la EDP

$$u_x + u_y = x^2 y$$

en coordenadas polares

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \theta &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena

$$u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} u_r - \frac{y}{x^2 + y^2} u_\theta = \cos \theta u_r - \frac{\sin \theta}{r} u_\theta$$

$$u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} u_r + \frac{x}{x^2 + y^2} u_\theta = \sin \theta u_r + \frac{\cos \theta}{r} u_\theta$$

Luego la EDP se escribe:

$$(\cos \theta + \sin \theta) u_r + \frac{1}{r} (\cos \theta - \sin \theta) u_\theta = r^3 \sin \theta \cos^2 \theta$$

10.3. Condiciones de contorno o frontera

En general cuando consideramos una EDP, la función incógnita $u = u(x)$ se supone definida sobre un conjunto dado de \mathbb{R}^n . Supondremos siempre que Ω satisface las dos condiciones siguientes:

1. Ω es un conjunto abierto. Esto es, para todo punto $a \in \Omega$ existe un radio $r > 0$ tal que todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia a a es inferior a r ($d(x, a) < r$) pertenece a Ω
2. Ω es conexo.

Es decir, no es posible encontrar dos conjuntos abiertos no vacíos Ω_i ($i = 1, 2$) tales que

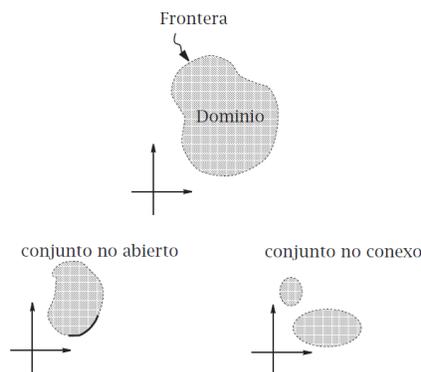
$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \quad \text{y} \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega.$$

En tal caso diremos que Ω es un dominio de \mathbb{R}^n . La frontera $S(\Omega)$ de Ω es el conjunto formado por los puntos $a \in \mathbb{R}^n$ tales que para todo radio $r > 0$, existen puntos x , tanto dentro $x \in \Omega$ como fuera $x \notin \Omega$, tales que $d(x, a) < r$. Obviamente la propiedad i) significa que Ω no tiene puntos en común con su frontera $S(\Omega)$. En cuanto a la propiedad ii) podemos interpretarla como la prohibición de que Ω pueda dividirse en dos sectores separados. El conjunto unión

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup S(\Omega),$$

se denomina el *cierre* de Ω .

A continuación mostramos diagramas de un dominio y de conjuntos que no son dominios dado que violan la propiedad i) o la propiedad ii).



Condiciones de contorno:

Dada una EDP sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$F(x, D^\alpha u) = 0, \quad x \in \Omega$$

normalmente se nos pide no sólo que encontremos una función $u = u(x)$ que satisfaga la EDP en todo punto de Ω , sino también que tal función satisfaga una serie de condiciones

$$f_i(x, D^\alpha u) = 0, \quad x \in S_i, \quad i = 1, \dots, m$$

donde los símbolos S_i denotan partes de la frontera $S(\Omega)$ de Ω , y las f_i son funciones dependientes de las variables x_i , y de un número finito de derivadas $D^\alpha u$ con $|\alpha| \geq 0$. Condiciones de esta clase se denominan *condiciones de contorno*, también se conocen como condiciones de frontera, en este texto utilizaremos ambas denominaciones. Solo consideraremos condiciones de contorno en las que las funciones f_i son polinomios de grado uno en las variables $D^\alpha u$ (condiciones de contorno lineales). Es decir, de la forma

$$\sum_{\alpha} b_{i,\alpha}(x) D^\alpha u - g_i(x) = 0, \quad x \in S_i$$

o bien

$$\sum_{\alpha} b_{i,\alpha} D^\alpha u|_{S_i} = g_i$$

Un problema consistente en resolver una EDP sobre un dominio Ω y un conjunto de condiciones de contorno se denomina *problema de contorno* o problema de frontera.

Ejemplo 1 *La ecuación de Laplace en una caja rectangular. Consideramos la EDP*

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

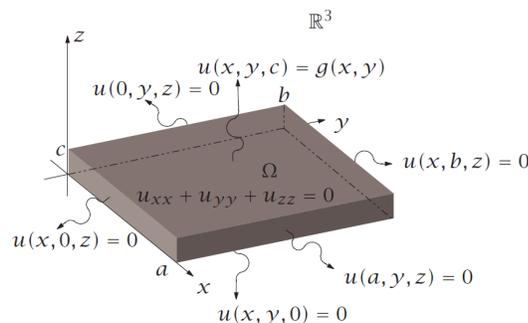
1. en $\Omega = (0, a) \times (0, b) \times (0, c)$. Las condiciones de contorno son

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, c) = g(x, y)$$

$$u(0, y, z) = 0, \quad u(a, y, z) = 0$$

$$u(x, 0, z) = 0, \quad u(x, b, z) = 0$$

La solución $u(x, y, z)$ a este problema modela el potencial electrostático en una caja con todas sus caras a potencial cero mientras que la sexta tiene el potencial $g(x, y)$.



Una EDP no siempre admite la imposición de determinadas condiciones de contorno. A título de ejemplo podemos considerar la ecuación de ondas

$$u_{xy} = 0$$

en el cuadrado $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$. Impongamos las condiciones de contorno siguientes

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, 1) = f_2(x), \quad u(0, y) = g_1(y), \quad u(1, y) = g_2(y)$$

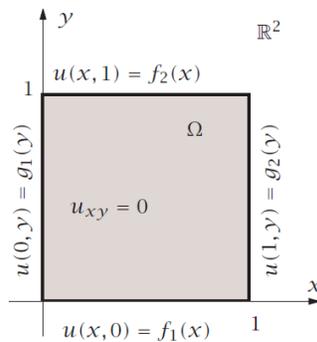
Veamos ahora que este problema puede no tener solución. Como se satisface la EDP $u_{xy} = 0$ la función u_x no depende de y , $u_x = u_x(x)$, y por ello debemos tener

$$f_1' = f_2'$$

y un argumento análogo conduce a

$$g_1' = g_2'$$

Por tanto, para que el problema de contorno tenga solución es necesario que se satisfagan condiciones adicionales sobre los datos de frontera. Este problema está relacionado con las curvas características que discutiremos más adelante.



En problemas sobre un dominio Ω en el espacio \mathbb{R}^3 se utiliza la siguiente nomenclatura para las condiciones de frontera más simples sobre una superficie S contenida en $S(\Omega)$:

1. Condición de Dirichlet:

$$u|_S = g$$

2. Condición de Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = g$$

Siendo

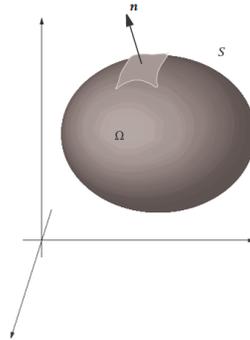
$$\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \nabla u = n_1 u_x + n_2 u_y + n_3 u_z$$

donde $n = (n_1, n_2, n_3)$ es el campo de vectores normales a la superficie S .

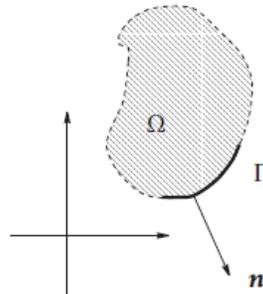
3. Condición mixta

$$\left(au + b \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_S = g$$

aquí a y b denotan funciones dadas



En ocasiones consideraremos versiones en \mathbb{R}^2 de las anteriores condiciones de contorno. En tales casos Ω será un recinto del plano, S una curva contenida en $S(\Omega)$ y en lugar de la notación S , $S(\Omega)$ preferiremos usar Γ , $\Gamma(\Omega)$ respectivamente.



En todo caso, siempre que trabajemos con una condición de contorno sobre una parte S de la frontera de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, supondremos que S puede describirse mediante una ecuación implícita

$$f_s(x) = 0$$

tal que

$$\nabla f_s(x) \neq 0, \quad x \in S.$$

Podemos definir un campo normal unitario según

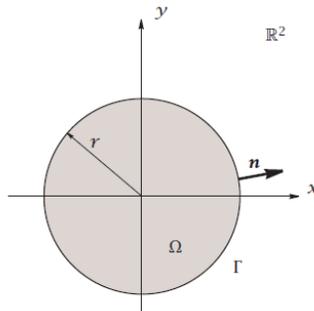
$$n(x) := \frac{\nabla f_s(x)}{\|\nabla f_s(x)\|}$$

Ejemplos: Los ejemplos siguientes muestran los campos de vectores normales y las correspondientes operaciones de derivación en la dirección del vector normal.

1. $\Omega \equiv$ círculo con centro el origen y radio r en \mathbb{R}^2 , $\Gamma = \Gamma(\Omega)$.

$$f_{\Gamma}(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

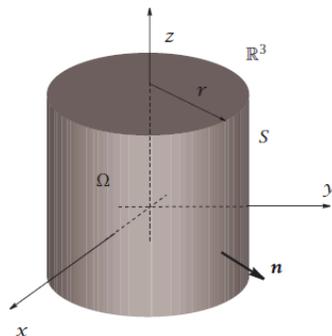
$$n = \frac{(2x, 2y)}{\|(2x, 2y)\|} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{r}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{r}(xu_x + yu_y) = u_r.$$



2. $\Omega \equiv$ interior del cilindro con eje OZ y radio r en \mathbb{R}^3 , $S = S(\Omega)$

$$f_s(x, y, z) = x^2 + y^2 - r^2$$

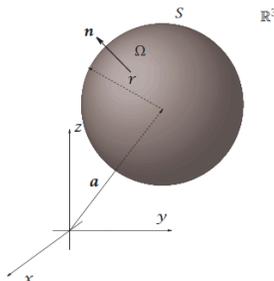
$$n = \frac{(2x, 2y)}{\|(2x, 2y)\|} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{r}(x, y, 0), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_s = \frac{1}{r}(xu_x + yu_y) = u_r$$



3. $\Omega \equiv$ interior de la esfera centrada en $a = (a_1, a_2, a_3)$ y radio r en \mathbb{R}^3 , $S = S(\Omega)$.

$$f_s(x, y, z) = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 - r^2$$

$$n = \frac{1}{r}(x - a_1, y - a_2, z - a_3), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_s = \frac{1}{r}((x - a_1)u_x + (y - a_2)u_y + (z - a_3)u_z)$$



Existe otro tipo de condiciones de contorno asociadas con pares apropiados de hipersuperficies de la frontera de Ω . Supongamos dos hipersuperficies $S_i, i = 1, 2$ de \mathbb{R}^n contenidas en $S(\Omega)$, tales que existe una aplicación biyectiva entre ellas

$$\begin{aligned} \sigma & : S_1 \rightarrow S_2 \\ x & \longmapsto \sigma(x) \end{aligned}$$

tal que tanto σ como su inversa, expresadas en coordenadas locales de sus superficies dominio, son funciones que admiten todas las derivadas. Una *condición de contorno* periódica viene expresada como una ecuación de la forma

$$f(x, D^\alpha u(x)) = f(\sigma(x), D^\alpha u(\sigma(x))), \quad x \in S_1$$

10.4. Condiciones iniciales

Otro tipo de condiciones que se suelen exigir a las soluciones de una EDP son las denominadas *condiciones iniciales* respecto de una de las variables independientes que denotaremos t . Normalmente son un conjunto de condiciones de la forma

$$u|_{t=t_0} = \Phi_0 \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=t_0} = \Phi_1, \dots, \frac{\partial^{r-1} u}{\partial t^{r-1}}|_{t=t_0} = \Phi_{r-1}$$

donde $r \geq 0$ y las funciones Φ_i dependen del resto de variables independientes. En general, las condiciones iniciales no son condiciones de contorno ya que también se consideran situaciones en las que el conjunto determinado por la ecuación $t = t_0$ puede estar en el *interior* de Ω .

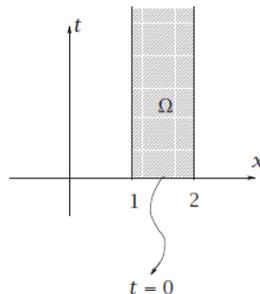
En problemas físicos en los que se analiza la evolución de un sistema suelen coexistir tanto condiciones de contorno como iniciales. Los siguientes ejemplos muestran un par de situaciones genéricas diferentes.

1. Sea la ecuación del calor en $1 + 1$ dimensiones

$$u_t = u_{xx}$$

sobre el dominio

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 | t > 0, 1 < x < 2\}$$



Podemos imponer las condiciones

$$u|_{t=0} = (x-1)(x-2), \quad u|_{x=1} = 0, \quad u_{x=2} = 0$$

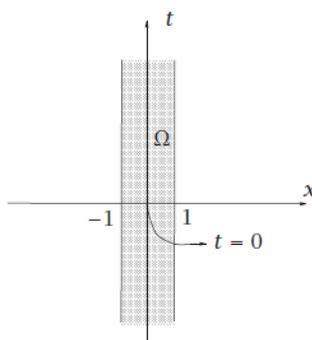
En este caso la condición inicial es también condición de contorno.

2. Sea la ecuación de Schrödinger en 1 + 1 dimensiones

$$iu_t = -u_{xx}$$

sobre el dominio

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < t < \infty, -1 < x < 1\}$$



Podemos imponer las condiciones

$$u|_{t=0} = \sin(\pi x)e^{-x^2}, \quad u|_{x=-1} = 0, \quad u|_{x=1} = 0$$

En este caso la condición inicial no es condición de contorno.

10.5. Funciones diferenciables

Cuando se buscan soluciones de un problema de contorno se consideran diferentes tipos de espacios funcionales en donde investigar la existencia de tales soluciones. Uno de los espacios más utilizados es el espacio $C^\infty(\Omega)$ de las *funciones diferenciables* en Ω . Por definición una función $f = f(x)$ pertenece a $C^\infty(\Omega)$ si admite todas las derivadas parciales de todos los ordenes $D^\alpha f(x)$ en todos los puntos $x \in \Omega$. Las propiedades de las funciones diferenciables que más nos interesan ahora son

1. Si $f, g \in C^\infty(\Omega)$ entonces las funciones

$$\lambda f(x) + \mu g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

también pertenecen a $C^\infty(\Omega) \quad \forall \lambda, \mu \in C$.

2. La composición de dos funciones diferenciables

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x))$$

es también una función diferenciable. Ahora $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$.

Para los problemas de contorno suele utilizarse el espacio $C^\infty(\Omega)$ de funciones diferenciables en el cierre $\bar{\Omega}$ de Ω . Por definición $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ si $u \in C^\infty(\Omega_0)$ para algún abierto $\Omega_0 \supset \bar{\Omega}$.

10.6. Existencia local de soluciones de EDP

Dada una EDP sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, la primera cuestión natural a considerar es la existencia de soluciones $u = u(x)$. Por nuestra experiencia con las ecuaciones diferenciales ordinarias debemos intuir que los resultados generales que podemos esperar han de ser *locales*. Es decir, resultados asegurando la existencia de soluciones en algún *abierto alrededor de cada punto* de Ω .

Un aspecto importante a considerar es el tipo de soluciones que buscamos. Es decir, las propiedades que exigimos a $u = u(x)$. Nuestra decisión en este aspecto está condicionada por las propiedades de la propia función $F = F(x, D^\alpha u)$ que define la EDP. En este sentido vamos a concentrarnos ahora en una clase de problemas en que es posible deducir un importante resultado sobre la existencia de soluciones analíticas. En este punto es importante comentar la noción de función analítica.

Funciones analíticas:

El espacio $A(\Omega)$ de *funciones analíticas* en un abierto Ω está formado por las funciones $f = f(x)$ tales que para todo punto $a \in \Omega$ existe un radio $r > 0$ y un desarrollo en serie múltiple de potencias de f

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha (x - a)^\alpha, \quad (x - a)^\alpha := (x_0 - a_0)^{\alpha_0} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - a_n)^{\alpha_n - 1}$$

convergente en la bola $|x - a| < r$.

Las propiedades de las funciones analíticas que más nos interesan ahora son:

1. Toda función analítica en Ω es también una función diferenciable en Ω . Además sus desarrollos en serie de potencias alrededor de cualquier $a \in \Omega$ coinciden con sus desarrollos de Taylor. Es decir

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha (x - a)^\alpha, \quad c^\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)$$

2. Si $f, g \in A(\Omega)$ entonces las funciones

$$\lambda f(x) + \mu g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

también pertenecen a $A(\Omega)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

3. La composición de dos funciones analíticas

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x))$$

es también una función analítica. Aquí tenemos, $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$.

Pasamos a introducir la noción de EDP en forma normal o de Kovalevskaya.

Definición 2 *Sea una EDP con variables independientes*

$$x = (x_0 = t, x), \quad x := (x_1, \dots, x_{n-1})$$

Decimos que la EDP posee forma normal (o de Kovalevskaya) de orden $r > 0$ respecto de la variable t si puede escribirse como

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^r} = G(x, D^\alpha u), \quad r > 0$$

siendo G una función que depende polinómicamente de un número finito de derivadas

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_0^{\alpha_0} \cdots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}$$

pero debe ser independiente de las siguientes

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r}; \quad D^\alpha u, \quad \text{con } |\alpha| > r$$

Observación:

1. De acuerdo con la definición anterior r es el orden de la ecuación diferencial parcial.
2. Para analizar si una EDP posee la forma normal respecto de una de sus variables independientes, lo primero que hay que hacer es despejar la derivada respecto de t de orden más alto y después comprobar que en el segundo miembro no aparezcan derivadas de orden estrictamente superior.

Ejemplo 2 *La EDP*

$$ux - uy = \log(xy)$$

posee la forma normal respecto de cualquiera de sus variables x ó y , puede escribirse como:

$$u_x = u_y + \log(xy)$$

$$u_y = u_x - \log(xy)$$

y en ambos casos se verifica la condición de normalidad respectiva.

Ejemplo 3 *La ecuación del calor en 1 + 1 dimensiones*

$$u_t - u_{xx} = 0$$

es claramente de forma normal respecto de la variable x , pero no lo es respecto de t ya que al despejar u_t

$$u_t = u_{xx}$$

en el segundo miembro queda una derivada de orden mayor que el de u_t . Sin embargo la $\log(xy)$ es cuando $xy > 0$, luego la EDP en x e y en los dominios $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$ y $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y < 0\}$.

Ejemplo 4 *La ecuación de Korteweg de Vries*

$$u_{xxx} = -uu_x - u_t$$

es claramente normal respecto de x .

Ejemplo 5 *Las ecuaciones de Poisson y de Laplace en 3 dimensiones son normales respecto de sus tres variables independientes x, y, z . La ecuación de ondas en 1 + 3 dimensiones es normal respecto de sus cuatro variables independientes t, x, y, z . Las ecuaciones de Schrödinger y del calor en 1 + 3 dimensiones no son normales respecto de t y si lo son respecto de x, y, z .*

Definición 3 *Dada una EDP normal de orden r respecto de una variable*

$$t \frac{\partial^r u}{\partial t^r} = G(x, D^\alpha u), x \in \Omega$$

definida sobre un dominio

$$\Omega = I \times \Lambda$$

siendo I un intervalo abierto de \mathbb{R} y Λ un abierto de \mathbb{R}^{n-1} , un problema de Cauchy con valores iniciales consiste en determinar una solución $u = u(x)$ que satisfaga las r condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(t_0, x) &= \Phi_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x) &= \Phi_1(x) \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{r-1} u}{\partial t^{r-1}}(t_0, x) &= \Phi_{r-1}(x) \end{aligned}$$

donde $t_0 \in I$ y $\Phi_i = \Phi_i(x)$ son una serie de funciones dadas, que reciben el nombre de valores iniciales del problema.

Ejemplo 6 Para la ecuación de Schrödinger no lineal, que tiene la siguiente forma normal con respecto a x ,

$$u_{xx} = -iu_t + u^3, \quad u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

se plantea el problema de Cauchy de condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= f(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) &= g(t) \end{aligned}$$

El teorema de Cauchy-Kovalevskaya

Uno de los resultados generales de la teoría de EDP, que se aplica tanto a los casos lineales como no lineales, es el siguiente teorema debido a Cauchy y Kovalevskaya, al cual nos referiremos como teorema CK.

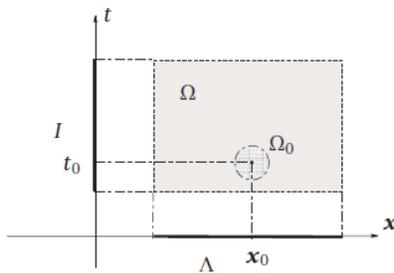
Teorema 7 Sea un problema normal de Cauchy con valores iniciales para una EDP normal $y = (t_0, x_0) \in \Omega$ un punto de su dominio tal que

1. Condición de analiticidad de la EDP. Como función de x la función $G(x, D^\alpha u)$ es analítica en x_0 .
2. Condición de analiticidad de los valores iniciales. Los valores iniciales $\Phi_i(x)$, ($i = 0, \dots, r - 1$) son funciones analíticas en x_0 .

Entonces existe una función $u = u(x)$ definida sobre un abierto $\Omega_0 \subset \Omega$ que contiene a x_0 tal que:

1. La función $u = u(x)$ satisface la EDP en Ω_0 y las condiciones iniciales en todo punto $(t_0, x) \in \Omega_0$
2. La función $u = u(x)$ es la única función analítica en Ω_0 que satisface tales propiedades.

El teorema nos garantiza la existencia y unicidad locales de una solución analítica de un problema de Cauchy con datos iniciales, siempre que se verifique que la EDP es normal y que tanto la EDP como los datos iniciales dependan analíticamente de las variables independientes.



Observación:

1. Hay una clara analogía entre este resultado y los teoremas de existencia básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Diremos que una EDP es *normal analítica* si es normal y satisface la condición i) de analiticidad del teorema CK. Entonces, bajo condiciones apropiadas se verifica:
 - a) La solución local de una EDO de orden r depende de r constantes arbitrarias.
 - b) La solución analítica local de una EDP normal-analítica de orden r depende de r funciones analíticas arbitrarias.
2. La demostración del teorema está basada en la generación de una solución en forma de serie múltiple de Taylor alrededor de x_0

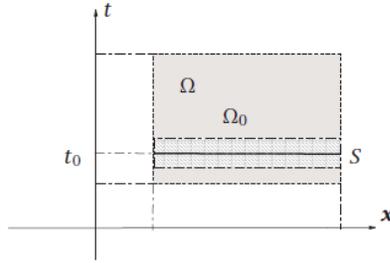
$$u(t, x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x_0) (x - x_0)^\alpha$$

Las incógnitas a determinar son las derivadas $D^\alpha u(x_0)$. Para ello observemos que derivando respecto de las variables $x_i, i \geq 1$, y utilizando las condiciones iniciales, podemos hallar todas las derivadas del tipo

$$\frac{\partial^{|\partial|} u}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} (t_0, x) = \frac{\partial^{|\partial| - \alpha_0} \Phi_{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} (x)$$

con $\alpha_0 \leq r-1$. Para calcular las derivadas con $\alpha_0 \geq r$ debemos utilizar las derivadas anteriores así como la propia EDP (1.5) y sus derivadas. Gracias a la forma normal de la EDP es posible de esta forma generar todas las derivadas $D^\alpha u(x_0)$ de forma unívoca. Este proceso demuestra la unicidad de la solución analítica de dicha ecuación. La demostración de la convergencia de la serie, es decir del hecho de que realmente construimos una función, es más delicada.

3. La condición $t = t_0$ ($t_0 \in I$) determina un trozo de hiperplano en $S \subset \Omega$. Si la función $G(x, D^\alpha u)$ es analítica en S y los datos iniciales $\Phi_i(x)$ son funciones analíticas en Λ , entonces el teorema asegura la existencia de una solución analítica local alrededor de cada punto de S . Como consecuencia puede demostrarse que existe una solución analítica única del problema de Cauchy en un abierto Ω_0 que contiene a S .



Para entender el alcance de este importante resultado es conveniente considerar los ejemplos siguientes.

1. Consideremos el problema siguiente

$$\begin{aligned} u_t &= u_x, (t, x) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0, x) &= e^x \end{aligned}$$

Claramente la EDP es normal respecto de t , y se cumplen las condiciones de dependencia analítica en todo \mathbb{R}^2 . Busquemos una solución local alrededor del punto $(t, x) = (0, 0)$

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m} u}{\partial t^n \partial x^m} (0, 0) t^n x^m$$

Derivando respecto de x la condición inicial tenemos que

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} (0, 0) = \frac{\partial^m e^x}{\partial x^m} \Big|_{x=0} = e^0 = 1$$

Por otra parte derivando respecto de t la EDP

$$\frac{\partial^n + 1 u}{\partial t^n + 1} = \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^n \partial x}, \quad n \geq 0$$

Derivando esta última relación respecto de x se obtiene

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial t^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n-1}\partial x^2} = \dots = \frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}$$

Derivando esta última relación respecto de x se obtiene

$$\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial t^{n+1}\partial x^m} = \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+m+1}}, \quad n, m \geq 0$$

por tanto

$$\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial t^{n+1}\partial x^m}(0,0) = \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+m+1}}(0,0)$$

$$\frac{\partial^{n+m+1}e^x}{\partial x^{n+m+1}}|_{x=0} = 1, \quad n, m \geq 0$$

De esta forma, obtenemos

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n \geq 0, m \geq 0} \frac{1}{n!m!} t^n x^m \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} t^n \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} x^m \\ &= e^t e^x \end{aligned}$$

2. *Ausencia de normalidad:* Consideremos ahora el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, (t, x) \in \mathbb{R} \times (-1, 1) \\ &= u(0, x) = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

La general de la $u_t = u_x$ tiene la forma $f(t+x)$ donde f es cualquier función derivable. Se además queremos que $u(0, x) = e^x$ debemos tener $f(x) = e^x$ y así $u(t, x) = e^{t+x}$ como hemos obtenido

En este caso, aunque se cumplen las condiciones de analiticidad del teorema CK en todo el dominio, la EDP no es normal respecto de t . Luego no podemos asegurar que se verifiquen las conclusiones del teorema CK. De hecho vamos a comprobar que no se cumplen. Para ello vamos a suponer que existe una solución analítica local en $(t, x) = (0, 0)$

$$u(t, x) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{n+m}u}{\partial t^n \partial x^m}(0,0) t^n x^m$$

La serie ha de ser convergente para todo (t, x) en algún abierto del tipo $(-r_0, r_0) \times (-r_1, r_1)$. Para todo x_0 tal que $|x_0| < r_1$ la función $u(t, x_0)$ será una función analítica de t alrededor de $t = 0$, luego admitirá un desarrollo en serie

$$u(t, x_0) = \sum_{n \geq 0} a_n(x_0) t^n$$

donde

$$a_n(x_0) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(0, x_0)$$

Pero derivando la EDP

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n-1} \partial x^2}, \quad n \geq 0$$

e iterando este resultado se obtiene

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n+4} u}{\partial t^{n-2} \partial x^4}, \dots = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}$$

Por otra parte derivando respecto de x la condición inicial tenemos que

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}(0, x_0) = \frac{\partial^m (1-x)^{-1}}{\partial x^m} \Big|_{x=x_0} = \frac{m!}{(1-x_0)^{m+1}}$$

Por tanto

$$a_n(x_0) = \frac{(2n)!}{n! (1-x_0)^{2n+1}}$$

Pero este resultado implica que la serie tiene radio de convergencia $r = 0$ ya que aplicando la fórmula bien conocida:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(1-x_0)^2} = \infty \end{aligned}$$

Luego no es posible encontrar una solución analítica alrededor de $(0, 0)$. A pesar de que no existe una solución analítica local en $(0, 0)$ de este problema de Cauchy, puede demostrarse que sí que existe una solución de clase C^∞ .

3. Ausencia de la condición i) de analiticidad de la EDP

Si la condición i) de analiticidad no se verifica podemos tener problemas muy graves con la existencia de soluciones locales. No es sólo que nos podamos encontrar con la ausencia de soluciones analíticas, sino que quizás la EDP *no tiene soluciones locales admisibles*. La

construcción de tales ejemplos es sofisticada, sólo mencionaremos el debido a H. Lewy (1957) que es la siguiente EDP lineal de primer orden

$$u_x + iu_y - 2i(x + iy)u_t = f(t)$$

Resulta que si $f = f(t)$ es una función continua con valores reales, que sólo depende de t y no es analítica en $t = 0$, entonces no existe ninguna solución local de clase C^1 en $(t, x, y) = (0, 0, 0)$.

10.7. Problemas de Cauchy. Hipersuperficies

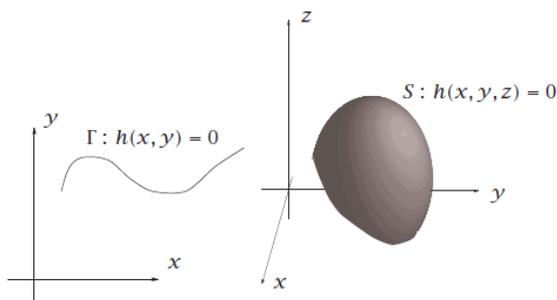
En la sección anterior hemos considerado la cuestión de la existencia de soluciones locales de una EDP. Ahora queremos considerar la misma cuestión pero para problemas de Cauchy de valores iniciales sobre un subconjunto S de \mathbb{R}^n determinado por una ecuación implícita:

$$h(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = 0. \tag{1.11}$$

Tales subconjuntos S se denominan hipersuperficies de \mathbb{R}^n . Podemos construir un campo de vectores unitarios normales sobre S mediante la expresión:

$$n(x) := \frac{\nabla h(x)}{\|\nabla h(x)\|}$$

En los casos $n = 2$ (el plano) y $n = 3$ (el espacio), S será una curva, que denotaremos Γ , y una superficie, respectivamente.



Por admisible entendemos aquellas soluciones cuyo grado de diferenciabilidad es mayor o igual que el orden de la EDP.

Entre los resultados generales que pueden usarse en tal contexto la siguiente consecuencia de un importante resultado (**teorema de Nirenberg** (1959)): dada una EDP lineal de la forma:

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} D^{\alpha} u(x) = f(x)$$

donde los c_α son constantes y f una C^∞ en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces existe una local de clase C^∞ en x_0 . ξ_2 de las soluciones se encuentran completamente determinadas por y sus derivadas:

$$\frac{\partial^n u}{\partial \xi_2^n}(0, \xi_2) = \Phi^{(n)}(\xi_2)$$

Sin embargo, el cálculo de las derivadas con respecto a ξ_1 de u sobre Γ no puede hacerse usando la condición inicial. Por tanto el primer miembro de la EDP no estará completamente determinado sobre Γ , salvo cuando suceda que $A(0, \xi_2) = 0$. En tal caso para que pueda existir solución del problema de Cauchy debe suceder

$$B(0, \xi_2)\Phi'(\xi_2) + G(0, \xi_2, \Phi) = 0$$

que claramente es una ligadura entre los coeficientes B, G que definen la EDP y la función ϕ . La curva $\Gamma : \xi_1 = 0$ es un ejemplo de lo que se entiende por curva característica, concepto que será estudiado a continuación.

10.8. Curvas características EDP de primer y segundo orden

Consideremos ahora el problema general de Cauchy para una EDP de primer orden en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de la forma:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + G(x, y, u) = 0 \quad (1.15)$$

$$u|_\Gamma = \Phi(x, y), \quad (1.16)$$

donde las funciones a y b toman valores reales y Γ es una curva en Ω de ecuación:

$$\Gamma: y = y(x)$$

Nuestro objetivo es determinar las curvas Γ que son características. Para ello efectuamos un cambio de variables $(x, y) \mapsto (\xi_1, \xi_2)$

$$\xi_1 = \xi_1(x, y), \quad \xi_2 = \xi_2(x, y)$$

con el fin de llevar nuestro problema a la forma (1.14). Por tanto, debemos imponer la condición

$$\xi_1(x, y) = y - y(x)$$

Esta condición hace que la ecuación de la curva Γ en las nuevas variables sea

$$a \left(u_{\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + u_{\xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right) + b \left(u_{\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + u_{\xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \right) + G(\xi_1, \xi_2, u) = 0$$

o bien

$$(a\xi_{1,x} + b\xi_{1,y})u_{\xi_1} + (a\xi_{2,x} + b\xi_{2,y})u_{\xi_2} + G(\xi_1, \xi_2, u) = 0 \quad (1.17)$$

La condición inicial se escribe

$$u(0, \xi_2) = \Phi(0, \xi_2), \quad (1.18)$$

donde ahora suponemos que todas las funciones $a, b, u, G...$ están expresadas en términos de las variables (ξ_1, ξ_2) . Derivando (1.18) se obtiene

$$u_{\xi_2}(0, \xi_2) = \Phi_{\xi_2}(0, \xi_2).$$

Por tanto la función F de la EDP (1.17)

$$F = (a\xi_{1,x} + b\xi_{1,y})u_{\xi_1} + (a\xi_{2,x} + b\xi_{2,y})u_{\xi_2} + G(\xi_1, \xi_2, u),$$

está determinada por la condición inicial sobre Γ salvo por el término en u_{ξ_1} . Pero este término está ausente cuando:

$$(a\xi_{1,x} + b\xi_{1,y})|_{\Gamma} = 0 \quad (1.19)$$

luego esta condición es la que caracteriza las curvas características. Como la curva Γ satisface:

$$\xi_1(x, y(x)) = 0$$

entonces derivando esta ecuación respecto de x

$$\xi_{1,x}(x, y(x)) + \xi_{1,y}(x, y(x))y'(x) = \xi_{1,x} + \xi_{1,y}y'|_{\Gamma} = 0$$

Por tanto la condición (1.19) queda

$$((b - ay') \xi_{1,y})|_{\Gamma} = 0$$

Así obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria que determina las curvas características:

$$y'(x) = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

Ejemplo 8 Sea la EDP

$$u_x + u_y + xyu^2 = 0$$

En este caso

$$a = 1, \quad b = 1,$$

la ecuación (1.20) de las características es

$$y'(x) = 1$$

Luego las características son las rectas

$$y = x + c.$$

Ejemplo 9 Para la EDP

$$xu_x + yu_y + u = 0,$$

se tiene que

$$a = x, \quad b = y$$

luego la ecuación (1.20) de las características es

$$y'(x) = \frac{y}{x}$$

cuya integración conduce a las siguientes curvas características

$$y = cx$$

Ejemplo 10 La EDP

$$\sin y u_x + \cos x u_y + u^3 = 0$$

tiene

$$a = \sin y, \quad b = \cos x$$

la ecuación (1.20) de las características es

$$y'(x) = \frac{\cos x}{\sin y}$$

Luego las características son las curvas

$$y = \arccos(-\sin x + c)$$

Curvas características para EDP de segundo orden

Consideremos ahora el problema de Cauchy para EDP de segundo orden en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de la forma:

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + G(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1.21)$$

$$u|_{\Gamma} = \Phi_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \Phi_1(x, y)$$

donde las funciones a, b y c toman valores reales y Γ es una curva Ω en de ecuación:

$$\Gamma: \quad y = y(x)$$

Nuestro objetivo de nuevo es determinar las curvas Γ que son características. Para ello efectuamos también un cambio de variables $(x, y) \mapsto (\xi_1, \xi_2)$

$$\xi_1 = \xi_1(x, y), \quad \xi_2 = \xi_2(x, y)$$

con la condición

$$\xi_1(x, y) = y - y(x)$$

que hace que la ecuación de la curva Γ en las nuevas variables sea

$$\Gamma: \quad \xi_1 = 0 \tag{1.22}$$

Veamos qué derivadas podemos determinar a partir de las condiciones iniciales. La primera de estas condiciones adopta la forma

$$u(0, \xi_2) = \Phi_0(0, \xi_2)$$

y mediante derivación es claro que se obtienen todas las derivadas respecto de ξ_2 en Γ :

$$u_{\xi_2}(0, \xi_2) = \Phi_{0,\xi_2}(0, \xi_2), \quad u_{\xi_2\xi_2}(0, \xi_2) = \Phi_{0,\xi_2\xi_2}(0, \xi_2), \dots$$

En cuanto a la segunda condición inicial, tenemos en primer lugar que como consecuencia de (1.22) el campo de vectores normales es de (1.22) el campo de vectores normales es

$$n = \frac{1}{\sqrt{\xi_{1,x}^2 + \xi_{1,y}^2}}(\xi_{1,x}, \xi_{1,y}),$$

y la derivada correspondiente es

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \lambda(\xi_2)u_{\xi_1}(0, \xi_2) + \mu(\xi_2)u_{\xi_2}(0, \xi_2)$$

en que conocemos las funciones λ y μ . Así la segunda condición inicial se escribe

$$\lambda(\xi_2)u_{\xi_1}(0, \xi_2) + \mu(\xi_2)u_{\xi_2}(0, \xi_2) = \Phi_1(0, \xi_2) \tag{1.23}$$

que es de la forma

$$u_{\xi_1}(0, \xi_2) = \Phi_1(\xi_2)$$

En conclusión, las condiciones iniciales nos permiten determinar sobre Γ la función u y todas sus derivadas respecto de ξ_1 hasta el segundo orden con la excepción de $u_{\xi_1\xi_2}(0, \xi_2)$.

Al escribir la EDP (1.21) sobre Γ en las variables ξ_1 , el único término que no vendrá determinado por las condiciones iniciales será el de $u_{\xi_1\xi_2}(0, \xi_2)$. Para hallar su coeficiente, vemos que

$$u_{xx} = \left(\xi_{1,x} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_{2,x} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \left(\xi_{1,x} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \xi_{2,x} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) = \xi_{1,x}^2 u_{\xi_1\xi_1} + \dots,$$

$$u_{yy} = \left(\xi_{1,y} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_{2,y} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \left(\xi_{1,y} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \xi_{2,y} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) = \xi_{1,y}^2 u_{\xi_1\xi_1} + \dots,$$

$$u_{xy} = \left(\xi_{1,x} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_{2,x} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \left(\xi_{1,y} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \xi_{2,y} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) = \xi_{1,x} \xi_{1,y} u_{\xi_1 \xi_1} + \dots,$$

De donde se deduce que el término que contiene $u_{\xi_1 \xi_1}(0, \xi_2)$ en (1.21) es

$$(a\xi_{1,x}^2 + 2b\xi_{1,x}\xi_{1,y} + c\xi_{1,y}^2)u_{\xi_1 \xi_1}$$

Por consiguiente las características son determinadas por la condición

$$(a\xi_{1,x}^2 + 2b\xi_{1,x}\xi_{1,y} + c\xi_{1,y}^2)|_{\Gamma} = 0.$$

De manera equivalente cuando $a \neq 0$

$$\xi_{1,x}(x, y(x)) + \frac{1}{a} \left(b \pm \sqrt{b^2 - ac} \right) \xi_{1,y}(x, y(x)) = 0 \quad (1.24)$$

Como $\xi_1(x, y(x)) = 0$, derivando respecto de x se obtiene

$$\xi_{1,x}(x, y(x)) + \xi_{1,y}(x, y(x))y'(x) = 0$$

que al usarlo en (1.24) nos proporciona el siguiente par de ecuaciones diferenciales ordinarias para las características

$$y' = \frac{1}{a} \left(b \pm \sqrt{b^2 - ac} \right). \quad (1.25)$$

Cada una de estas ecuaciones puede determinar una familia de características. Además nos permite establecer la siguiente clasificación de las EDP de segundo orden (1.21) en subconjuntos $\Omega_0 \subseteq \Omega$ en que no cambie el signo de la función $b^2 - ac$.

Ejemplo 11 *La ecuación de Laplace*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

verifica

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1$$

luego $b - ac = -1 < 0$. Es elíptica en todo el plano. No tiene características.

Ejemplo 12 *La ecuación de ondas*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

verifica

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -1$$

luego $b - ac = 1 > 0$. Es hiperbólica en todo el plano. Sus características vienen descritas por las ecuaciones

$$x'(t) = \pm 1$$

son por tanto las dos familias de rectas

$$x = \pm t + k$$

Ejemplo 13 *La ecuación del calor*

$$u_t - u_{xx} = 0$$

verifica

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = 0$$

luego $b - ac = 0$. Es parabólica en todo el plano. Sus características verifican

$$t'(x) = 0$$

Luego son la familia de rectas $t = k$.

Ejemplo 14 *Para la ecuación de Tricomi*

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

se tiene

$$a(x, y) = y, \quad b = 0, \quad c = 1$$

Así,

$$b^2 - ac = -y$$

Por tanto, la ecuación es

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{elíptica en } y > 0 \\ \text{parabólica en } y = 0 \\ \text{hiperbólica en } y < 0 \end{array} \right.$$

En el caso hiperbólico, $y < 0$, la ecuación diferencial de las características es

$$y' = \pm \sqrt{-\frac{1}{y}}$$

luego las curvas características son

$$y(x) = - \left(\mp \frac{3}{2}x + c \right)^{2/3}$$

con $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria.

La ecuación de Tricomi aparece en la descripción del movimiento de un cuerpo en un gas, siendo su velocidad aproximadamente la del sonido. El caso elíptico ($y > 0$) corresponde a movimiento subsónico y el hiperbólico ($y < 0$) a movimiento supersónico.

10.9. Solución general. Método de la solución completa

En el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias se ha visto que cuando se pretende resolver la ecuación

$$F(x, u, Du, \dots, D^N u) = 0$$

se ha de esperar una solución general que depende de N constantes de integración

$$u = u(x, c_1, \dots, c_N)$$

Las N constantes de integración son arbitrarias están directamente relacionadas con las condiciones iniciales.

Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$D^2 u - u = 0$$

tiene como solución general

$$u = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-x)$$

En el contexto de este curso, el de las EDP, ocurre un fenómeno análogo. Dada una EDP

$$F(x, D^\alpha u) = 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

de orden N se entiende por solución general una solución que depende de N funciones arbitrarias de $(n - 1)$ variables, estas variables son funciones de las variables independientes x_0, \dots, x_{n-1} .

Ya hemos visto que la solución general de la ecuación de ondas

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

es

$$u(t, x) = f(t + x) + g(t - x)$$

donde tanto F_1 como F_2 son de orden N , la solución general de $F_1(x, D^\alpha u) = 0$ es solución general de $F(x, D^\alpha) = 0$. Sin embargo, en esta solución general no encontramos las soluciones de $F_2(x, D^\alpha u) = 0$ que son también soluciones de $F(x, D^\alpha u) = 0$.

10.10. Método de la solución completa para ecuaciones de primer orden

En esta sección vamos a estudiar un método para encontrar soluciones generales (o completas) de ecuaciones de primer orden de la forma

$$F\left(x_0, \dots, x_{n-1}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right) = 0$$

En la Física estas ecuaciones suelen darse en diversas circunstancias. Por ejemplo, en los estudios de Mecánica nos encontramos con la ecuación de Hamilton–Jacobi

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial s}{\partial x_{n-1}}\right)^2 = 1$$

Existe un aspecto técnico sobre estas familias multi-paramétricas: ¿Dependen realmente de m parámetros? Esto es, es posible introducir $a_i = a_i(b_0, \dots, b_{m-2})$, de tal modo que la solución tan sólo dependerá de $m - 1$ parámetros.

De este modo tenemos asegurado que la solución depende realmente de m parámetros. Cuando tenemos una solución que realmente depende de n parámetros decimos que es una **integral completa**.

Ejemplo 15 Ecuación de Clairut: Esta es una EDP relevante en geometría diferencial:

$$x \cdot \nabla u + f(\nabla u) = u$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dado $a \in \mathbb{R}^n$ tenemos la integral completa siguiente

$$u(x, a) = a \cdot x + f(a)$$

Ejemplo 16 Ecuación de la eikonal: En óptica geométrica aparece la siguiente ecuación

$$|\nabla u| = 1$$

y, dado $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$, una integral completa es

$$u(x, a, b) = a \cdot x + b, \text{ siempre que } |a| = 1$$

Ejemplo 17 Ecuación de Hamilton–Jacobi: En la mecánica encontramos la ecuación (aquí la acción S la denotamos por u)

$$ut + H(\nabla u) = 0, \nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

donde el hamiltoniano H sólo depende del momento. Una solución completa es

$$u(x, t, a, b) = a \cdot x - H(a)t + b, \quad a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$$

Dada una familia multi-paramétrica de soluciones $u(x, a)$ de una EDP de primer orden podemos construir una solución a partir de ella, en principio no incluida en la familia.

Este resultado se sigue del siguiente cálculo

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, a(x)) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial a_j}(x, a(x)) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, a(x))$$

ya que entonces

$$F \left(x, \tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_{n-1}} = F(x, u(x, a(x)), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}(x, a(x))) \right) = 0$$

La solución envolvente de construida a partir de una solución multi-paramétrica de una EDP de primer orden permite en algunos casos hallar la solución general.

Una solución general para una EDP de primer orden dependerá de una función de $(n - 1)$ variables. Pero la solución envolvente construida depende de justamente de una función arbitraria de $(n - 1)$ funciones: $a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$.

Ejemplo 18 Considerar la EDP

$$u_x = u_y^m$$

una solución a un parámetro es

$$u(x, y, a) = a^m x - ay + f(a)$$

cuya envolvente viene dada por $\tilde{u}(x, y) = u(x, y, a(x, y))$, donde $a(x, y)$ satisface $ma^{m-1}x + y + f'(a) = a$

Ejemplo 19 La ecuación eikonal en el plano:

$$u_x^2 + u_y^2 = 1$$

tiene como solución completa

$$u(x, y, a, b) = x \cos a + y \sin a + b$$

y pongamos $b = h(a)$. La solución general viene dada por

$$x \cos a(x, y) + y \sin a(x, y) + h(a(x, y))$$

donde $a(x, y)$ resuelve

$$-x \sin a + y \cos a + h'(a) = 0$$

Si imponemos que $h = 0$, obtenemos

$$\tan a(x, y) = \frac{x}{y}$$

y por ello a es el ángulo polar. Luego la solución es $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$

Ejemplo 20 Consideremos la ecuación de Hamilton–Jacobi para una partícula libre:

$$H(p) = \frac{p^2}{2m}: \quad u_t + \frac{|\nabla u|^2}{2m} = 0$$

una solución completa es

$$a \cdot x - \frac{a^2}{2m}t + b, \quad a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$$

La solución general se obtiene a partir de

$$a(x, t) \cdot x - \frac{a(x, t)^2}{2m}t + h(a(x, t))$$

donde $a(x, t)$ es solución de

$$x_i - \frac{1}{m}a_i t + h_{a_i}(a) = 0$$

Si hacemos $h = 0$ obtenemos

$$a = m \frac{x}{t}$$

y por ello, una solución de la ecuación de Hamilton–Jacobi es

$$m \frac{|x|^2}{2t}$$

10.11. El método de la hodrógrafa

Vamos a presentar un método que permite construir soluciones para la siguiente EDP

$$u_t = f(u)u_x, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Si $u = u(t, x)$ es solución podemos considerar localmente, siempre que $u_x \neq 0$ la función implícita $x = x(t, u)$. Ésta función cumple $u = u(t, x(t, u))$ y por ello

$$1 = u_x x_u, \quad 0 = u_t + u_x x_t$$

Esto es

$$x_t = -\frac{u_t}{u_x} = -f(u)$$

cuya solución es

$$x = -f(u)t + g(u)$$

Esta última ecuación es conocida como ecuación de la hodógrafa. Supongamos que localmente hemos hallado una solución $u(x, t)$ de la hodógrafa, entonces

$$x + f(u(x, t))t = g(u(x, t))$$

y por tanto

$$1 + f'(u)tu_x = g'(u)u_x, \quad f'(u)tu_t + f(u) = g'(u)u_t$$

Así,

$$f'(u)t - g'(u) = \frac{1}{u_x}, \quad f'(u)t - g'(u) = \frac{f(u)}{u_t}$$

y tenemos que

$$u_t = f(u)u_x$$

Observar que la EDP es de primer orden con dos variables independientes, así la solución general dependerá de una función arbitraria de una variable. La solución de la hodógrafa depende de una función arbitraria g de una variable, por ello es solución general. Por tanto, cualquier solución conduce a una hodógrafa y la hodógrafa lleva a una solución general.

10.12. Operadores diferenciales. Problemas lineales

En esta sección se formulan los problemas de contorno y/o de condiciones iniciales de tipo lineal, que son el tema de estudio de este curso. Se proporcionan las notaciones apropiadas para tratar con comodidad tales problemas.

Todo operador diferencial es una aplicación lineal. Es decir, verifica

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda Lu + \mu Lv, \quad \forall u, v \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Una notación habitual que usaremos para referirnos a un operador diferencial es

$$L := \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x)D^{\alpha}$$

Ejemplo 21 Sea el siguiente operador en $C^\infty(\mathbb{R})$

$$L = x^2D + x$$

Su acción sobre la función $u = \cos x$ es

$$Lu = -x^2 \sin x + x \cos x$$

Ejemplo 22 *El operador laplaciano*

$$Lu := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

puede denotarse como

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Es un operador diferencial sobre $C^\infty(\bar{\Omega})$, siendo Ω un dominio cualquiera de \mathbb{R}^3 . Su acción sobre la función

$$u := \exp(x^2 + y^2 + z^2)$$

es

$$Lu = (4(x^2 + y^2 + z^2) + 6) \exp(x^2 + y^2 + z^2)$$

Los operadores diferenciales son los objetos matemáticos apropiados para manejar las EDP lineales. Así, una EDP lineal de la forma

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u = f(x)$$

siendo L el operador diferencial

$$Lu := \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u$$

Por tanto el problema que representa la EDP lineal consiste en encontrar elementos $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ cuya imagen mediante la aplicación lineal L coincida con la función f .

Ejemplos de estas EDP son

1. Ecuación de Posición en 3 dimensiones:

$$Lu = f, \quad Lu := u$$

2. Ecuación de ondas en 1 + 3 dimensiones:

$$Lu = 0, \quad Lu := i\hbar u_t + \frac{\hbar^2}{2m} u + qu$$

3. La ecuación del calor en $1 + 3$ dimensiones:

$$Lu = 0, \quad Lu := u_t - a^2 \Delta u$$

Los operadores diferenciales tienen propiedades algebraicas muy importantes. Admiten las siguientes operaciones naturales

1. Suma de operadores $L + M$

$$(L + M)u := Lu + Mu$$

2. Producto de números complejos por operadores λL

$$(\lambda L)u := \lambda(Lu)$$

3. Producto de operadores LM

$$(LM)u := L(Mu)$$

4. Conmutador de operadores $[L, M]$

$$[L, M]u := L(Mu) - M(Lu)$$

Con respecto a la suma y al producto de números complejos los operadores diferenciales forman un espacio lineal. El operador cero, definido como el operador diferencial con todos los coeficientes iguales a cero, se denota $L = 0$ (obviamente en tal caso $Lu = 0$ para toda u). Con respecto a la operación de producto de operadores, que coincide con la composición de operadores como aplicaciones, la peculiaridad más destacada es que no es una operación conmutativa. Por ejemplo, si tomamos

$$L = D, \quad M = D + x$$

se tiene

$$L(Mu) = D^2u + xDu + u, \quad M(Lu) = D^2u + xDu$$

Por tanto $LM \neq ML$.

Es claro que dos operadores conmutan si y sólo si su conmutador es el operador cero $[L, M] = 0$.

10.13. Operadores de frontera y de condiciones iniciales

Todo operador de frontera es una aplicación lineal. Es decir, verifica

$$l(\lambda u + \mu v) = \lambda l(u) + \mu l(v), \quad \forall u, v \in C^\infty(\bar{\Omega}), \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Es claro que estas aplicaciones son también lineales.

Los operadores de frontera y de condiciones iniciales son los objetos matemáticos apropiados para manejar las condiciones de contorno lineales y las condiciones iniciales. Así, una condición de contorno lineal de la forma

$$\sum_{\alpha} b_{\alpha}(x) D^{\alpha} u|_S = g$$

se escribe de forma condensada como

$$l(u) = g$$

siendo l el operador de frontera

$$l(u) := \sum_{\alpha} b_{\alpha}(x) D^{\alpha} u|_s$$

Ejemplos típicos de operadores de frontera asociados con condiciones de contorno

$l(u) = g$ son

1. **Condición de Dirichlet:**

$$l(u) := u|_s$$

2. **Condición de Neumann:**

$$l(u) := \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_s$$

3. **Condición mixta**

$$l(u) := au + b \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_s$$

10.14. Problemas lineales

El problema típico que consideraremos en este curso es el de caracterizar las funciones $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ que son solución de un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} Lu = f \\ l_i(u) = g_i, \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

donde L es un operador diferencial y l_i una serie de operadores de frontera o de condiciones iniciales.

Características

El símbolo o parte principal del operador diferencial

$$L := \sum_{|\alpha| < m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

se define como

$$\sigma(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

Una característica de L es una hipersuperficie S de ecuación $\phi(x) = 0$ tal que

$$\sigma(x, \nabla\phi) = 0$$

Construimos, de forma análoga a la anterior discusión sobre características, nuevas coordenadas x' con $x'_j = x_j$, $j = 2, \dots, n$, y $x'_1 = \phi(x)$. Entonces la ecuación

$$Lu = f$$

se transforma en

$$\sigma(x, \nabla\phi(x)) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} + Mu = f$$

donde M es un operador diferencial en las variables x' que no contiene derivadas con respecto a x'_1 de orden superior a $(m - 1)$. Por tanto, los problemas de Cauchy de condiciones iniciales sobre las características llevan aparejados ligaduras adicionales entre los datos que definen el problema.

Una ecuación es elíptica en un punto x_0 si por el no pasa ninguna característica; v. g., no existen soluciones reales $p = (p_i)$ a

$$\sigma(x_0, p) = 0$$

10.15. Cuestiones, problemas y ejercicios

Cuestiones

1. Señalar cual de las siguientes ecuaciones en derivadas parciales está en forma normal con respecto de t

a) $u_t + u_t u_x = 0$

- b) $u_t + uu_{xx} + u_{xxx}^2 = 0$
- c) $u_{tt} + u_{tx} + u_{xx}u_t^2 = 0$
- d) $u_{tt} + u_{xxx} = 0$
- e) $u_t + \exp(u_x) = 0$

Resolución: La respuesta correcta es la 3. Que falla en el resto: en la primera la u_t no está despejada, en la segunda el orden es 3 y en t el orden de derivación es 1, algo parecido para la cuarta, por último en la 5 la dependencia en las derivadas no es polinómica.

2. Determinar para cual de los siguientes problemas de valores iniciales el teorema de Cauchy–Kowalevskaya asegura la existencia de solución local analítica alrededor del punto $(t, x) = (0, 0)$

- a) $u_t = \log(1 + x)u_x, \quad u|_{t=0} = 1/\cos x$
- b) $u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = x$
- c) $u_t = \log(x - 1)u_x, \quad u|_{t=0} = 1$
- d) $u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = x, \quad u|_{t=0} = \log(x - 1)$
- e) $u_t = u_x, \quad u|_{t=0} = \sqrt{x}$

Resolución: Veamos cuales no pueden ser: en la segunda no tenemos forma normal con respecto de t , en la tercera, en la cuarta y en la quinta los coeficientes de la EDP no son analíticos en $x = 0$. Sin embargo en la primera la EDP está en forma normal, y los coeficientes tanto de la EDP como los que aparecen en las condiciones iniciales son analíticos; por ello, esta es la respuesta correcta.

3. Dada la ecuación en derivadas parciales

$$yu_{xx} + 2xu_{xy} + u_y^2 = 0$$

determinar cual de las curvas siguientes es característica

- a) $y^2 = 2x^2$
- b) $y^2 = 4x^2$
- c) $y = 2x$
- d) $y = x^2$

e) $y = -2x$

Resolución: En esta EDP de segundo orden se tiene $a(x, y) = y, b(x, y) = x, c(x, y) = 0$. Por tanto, la EDO que determina las características es $y' = (x \pm x^2)/y$; esto es, bien $y' = 0$ o $yy' = 2x$. Así, integrando estas ecuaciones obtenemos dos familias de características $y =$ constante, $y^2/2 = x^2 +$ constante.

4. Dada la ecuación en derivadas parciales

$$x^2 u_{xx} - xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = \exp u$$

cual de las siguientes afirmaciones es cierta

- a) Es parabólica para $xy > 0$
- b) Es hiperbólica para $xy \neq 0$
- c) Es elíptica para $xy \neq 0$
- d) Es hiperbólica para $x > y$
- e) Es elíptica para todo (x, y)

Resolución En esta EDP de segundo orden se tiene $a(x, y) = x^2, b(x, y) = -xy/2, c(x, y) = y^2$. Por tanto, $b^2 - ac = -3/4x^2y^2$ y siempre que $xy \neq 0$ la ecuación será elíptica.

5. Determinar las características de la siguiente EDP

$$e^{-y} u_{xx} + 2e^x u_{xy} + e^{2x+y} u_{yy} + u = 0$$

- a) $y = -\ln(C - e^x)/2$
- b) $y = -\ln(C - e^x)$
- c) $y = \ln(Cx - e^x)$
- d) $y = -\ln(C - 2e^x)$
- e) $y = \ln(C - e^{2x})$

donde C es una constante arbitraria.

Resolución En esta EDP de segundo orden se tiene $a(x, y) = e^{-y}, b(x, y) = e^x, c(x, y) = e^{2x+y}$. Por tanto, $b^2 - ac = 0$ la ecuación es parabólica y las características son las soluciones de $y' = b/a = e^{x+y}$ cuya solución es $e^{-y} + e^x = C$.

Por tanto, la opción correcta es la (b).

6. Determinar el conmutador $[L, M]$ de los operadores

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad Mu = x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} + zu$$

- a) $[L, M] = -\frac{\partial}{\partial x}$
- b) $[L, M] = 2z \frac{\partial}{\partial y}$
- c) $[L, M] = 2 \frac{\partial}{\partial z}$
- d) $[L, M] = -y \frac{\partial}{\partial x}$
- e) $[L, M] = -2 \frac{\partial}{\partial y}$

Resolución Para evaluar el conmutador basta con usar la propiedad $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ y que $[\partial/\partial x_i, x_j] = \delta_{ij}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} [L, M] &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x \frac{\partial}{\partial y} \right] - \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}, x \frac{\partial}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}, z \right] \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x}, x \right] \frac{\partial}{\partial y} - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y}, y \right] \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z}, z \right] \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

y la respuesta correcta es la (c).

7. Sea el problema diferencial

$$\begin{aligned} 2xyu_x + u_y &= 0, \quad x, y > 0 \\ u(1, y) &= y^2 \end{aligned}$$

Evaluar la solución en el punto $x = e, y = 0$.

- a) -1
- b) 1
- c) 0
- d) $1/2$
- e) $-1/2$

Resolución: Las características las da la EDO $y' = 1/(2xy)$ cuyas soluciones son $y^2 - \ln x = C$. Por tanto, la solución general es $u(x, y) = F(y^2 - \ln x)$ donde F es una función diferenciable arbitraria. Imponiendo que $u(1, y) = y^2$ obtenemos que $u(x, y) = y^2 - \ln x$ y por tanto $u(e, 0) = -1$.

8. Determinar el conmutador $[L, M]$ de los operadores

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad Mu = (x^2 + y^2 + z^2)u$$

- a) $[L; M] = 4x$
- b) $[L; M] = 3 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \right)$
- c) $[L; M] = 2 \left(x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x} \right)$
- d) $[L; M] = 1 + 2 \left(y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right)$
- e) $[L; M] = x^2 + y^2 + z^2$

Resolución: El resultado se concluye de la siguiente secuencia de identidades

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, x^2 + y^2 + z^2 \right] &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, x^2 \right] + \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, y^2 \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, x^2 \right] \frac{\partial}{\partial y} + \left[\frac{\partial}{\partial y}, y^2 \right] \frac{\partial}{\partial x} = 2x \frac{\partial}{\partial y} + 2y \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

9. Sea el problema de condiciones iniciales de la ecuación de primer orden

$$u_t = \frac{u_x}{u}, \quad u|_{t=0} = x$$

Determinar cual de las siguientes opciones proporciona la función g apropiada para aplicar el método de la transformación hodográfica

$$x = -\frac{t}{u} + g(u)$$

y la solución correcta del problema.

- a) $g(u) = \sqrt{u}, u = \frac{1}{3} (x - \sqrt{x^2 + t})$
- b) $g(u) = u, u = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 + 4t})$
- c) $g(u) = u, u = \frac{1}{2} (x - \sqrt{x^2 + 4t})$
- d) $g(u) = \sqrt{u}, u = \frac{1}{3} (x - \sqrt{x^2 + 4t})$
- e) $g(u) = 1/u, u = \frac{1}{2} (x - \sqrt{x^2 + t})$

Resolución: La PDE tiene la forma $u_t = f(u)u_x$ y podemos aplicar la transformación hodográfica:

$$x + f(u)t = g(u)$$

esto es

$$x + t \frac{1}{u} = g(u).$$

Debemos imponer que $u|_{t=0} = x$ que en la ecuación hodográfica implica

$$x - \frac{1}{u|_{t=0}} 0 = g(u|_{t=0}) \implies x = g(x)$$

y la ecuación hodográfica es

$$ux + t = u^2 \implies u = \left(x + \sqrt{x^2 + 4t} \right) / 2.$$

Luego la respuesta correcta es la b).

Problemas

1. Dada la EDP de primer orden

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0$$

utilizando el método de la solución completa hallar la solución general.

Resolución: Una integral completa de la ecuación viene dada por

$$u(x, y, a, b) = ax \pm ay + b$$

hallamos la envolvente de

$$u(x, y, a, b) = ax \pm ay + f(a)$$

resolviendo

$$u_a = x \pm y + f'(a)$$

y por ello

$$a = f'^{-1}(x \pm y)$$

y la solución general es

$$u = f'^{-1}(x \pm y)(x \pm y) + f(f'^{-1}(x \pm y))$$

Se debe subrayar que la EDP en cuestión se escribe como

$$(ux + uy)(ux - uy) = 0$$

Por tanto, existen dos soluciones generales

$$u = g(x + y), \quad u = g(x - y)$$

donde g es una función arbitraria. Este es el mismo resultado que el obtenido con la técnica de la solución completa.

2. Dada la EDP de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = 0$$

hallar la solución general.

Resolución: Una integral completa viene dada por

$$u(x, y, z, a, b, c) = a^2x + b^2y + abz + c$$

imponiendo

$$0 = u_a = 2ax + bz + fa$$

$$0 = u_b = 2by + az + f$$

Por ello, si $a(x, y, z), b(x, y, z)$ resuelve el anterior sistema tendremos la solución general $u = a^2x + b^2y + abz + f(a, b)$.

3. Dada la EDP de primer orden

$$uy = \exp(u_x)$$

aplicar el método de la solución completa para determinar su solución general. Hallar alguna solución explícita con dependencia no lineal en x, y .

Resolución: Una integral completa de la EDP es

$$u(x, y, a, b) = ax + \exp(a)y + b$$

hallemos la envolvente de

$$u(x, y, a) = ax + \exp(a)y + f(a)$$

Para ello debemos resolver

$$u_a = x + \exp(a)y + f'(a) = 0$$

que localmente determina una función $a(x, y)$. Por ello la solución general será $u(x, y) = a(x, y)x + \exp(a(x, y))y + f(a(x, y))$. En particular, si $f = 0$ tenemos

$$a = \log\left(-\frac{x}{y}\right)$$

y por ello una solución es

$$u = \left(\log\left(-\frac{x}{y}\right) - 1\right)x$$

Ejercicios

1. Determinar las partes real e imaginaria, el módulo y las derivadas parciales de primer orden de las funciones siguientes:

a) $f(x, y, z) = \exp(i(k_1x + k_2y + k_3z))$, siendo $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$.

b) $f(x, y) = (x + y) \exp(x^2 + iy^2)$.

c) $f(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2 + z^2))$.

2. Determinar el orden de las siguientes ecuaciones e indicar cuáles son homogéneas o lineales:

a) $u_x - xu_y = 0$

b) $u + u_x u_y = 0$

c) $\sqrt{1 + x^2}(\cos y)u_x + u_x y - \exp(x/y)u = x^2$

d) $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$

e) $iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0$

f) $u_x + e^y u_y = x^2$

g) $u_{xy} = e^u$

h) $u_{tt} - \Delta u = xyz$

3. Determinar las superficies de nivel $f = C^{te}$ de las funciones siguientes:

a) $f(x, y, z, t) = \exp(i(k_1x + k_2y + k_3z - \omega t))$, siendo $k_1, k_2, k_3, \omega \in \mathbb{R}$.

b) $f(x, y, z, t) = \exp(i(kr - \omega t))$, siendo r la distancia del punto (x, y, z) al origen y $k, \omega \in \mathbb{R}$.

c) Describir cómo se mueven dichas superficies.

4. Determinar la solución general de las ecuaciones:

a) $ux = x + y$

b) $uxy = 0$

5. Determinar alguna solución no trivial de las siguientes ecuaciones:

a) $iu_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

b) $(u_x)^2 = u_y + u_z \cdot (u_{ttt})^3$

c) $u_x + v_y = 0$

6. Considérese el problema de contorno de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \delta\Omega \end{cases}$$

a) Probar que sólo cuando se cumple que

$$\iiint_{\Omega} f \cdot dV = \iint_{\delta\Omega} g \cdot dS$$

puede existir solución del problema.

b) Demostrar que cuando existe solución, es única salvo por una constante aditiva.

7. Clasificar las ecuaciones:

a) $yu_{xy} + xu_{xx} = 0$

b) $u_{xx} - 5u_{xy} = 0$

c) $4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_y = 0$

d) $4u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$

8. Considérese la ecuación:

$$3u_y + u_{xy} = 0$$

a) Indicar su tipo.

b) Calcular su solución general. (Utilizar el cambio de variable dependiente $v = u_y$)

c) Imponiendo las condiciones:

$$u(x, 0) = e^{-3x}, u_y(x, 0) = 0$$

averiguar si existe solución única.

9. Reducir la ecuación

$$u_{xx} + 3u_{yy} - 2u_x + 24u_y + 5u = 0$$

a la forma

$$v_{xx} + v_{yy} + cv = 0$$

10. Considérese la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0$$

La función $u(x) \equiv 0$ es claramente solución. ¿Es la única solución posible para cualquier valor de L

11. Considérese el círculo de radio a con centro en el origen de coordenadas. Sean (r, θ) coordenadas polares $y(x, y)$ coordenadas cartesianas. Resolver el problema de Dirichlet interior

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \delta\Omega \end{cases} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

en los siguientes casos:

a) $f = A$

b) $f = A \cos \theta$

c) $f = A + By$

d) $f = Axy$

e) $f = A + B \sin \theta$

f) $f = A \sin 2\theta + B \cos^2 \theta$

donde A y B son constantes.

12. Resolver el problema de contorno interior de Neumann

$$\Delta u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = f(\theta)$$

donde C es la circunferencia de radio a centrada en el origen de coordenadas, en los siguientes casos:

- a) $f = A$
- b) $f = A \cos \theta$
- c) $f = A \cos 2\theta$
- d) $f = A \cos \theta + B$
- e) $f = A \sin \theta + B \sin^3 \theta$

donde A y B son constantes no nulas.

13. Considérese la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0$$

con las condiciones de contorno

$$u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(L) = 0$$

La función $u(x) \equiv 0$ es claramente solución. ¿Es la única solución posible para cualquier valor de L ?

14. Considérese el círculo de radio a con centro en el origen de coordenadas. Sean (r, θ) coordenadas polares y (x, y) coordenadas cartesianas. Resolver el problema de Dirichlet interior

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{r=a} = f, \end{cases} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

en los siguientes casos:

- a) $f = A$
- b) $f = A \cos \theta$
- c) $f = A + By$
- d) $f = Axy$
- e) $f = A + B \sin \theta$
- f) $f = A \sin 2\theta + B \cos 2\theta$

donde A y B son constantes.

15. Resolver el problema de contorno interior de Neumann

$$\Delta u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = f(\theta)$$

donde C es la circunferencia de radio a centrada en el origen de coordenadas, en los siguientes casos:

a) $f = A$

b) $f = A \cos \theta$

c) $f = A \cos 2\theta$

d) $f = A \cos \theta + B$

e) $f = A \sin \theta + B \sin 3\theta$

donde A y B son constantes no nulas.

11. Capítulo II: Métodos Analíticos de las EDP

Nuestra incursión inicial en el vasto continente matemático que comprende las ecuaciones diferenciales parciales comenzará con algunas ecuaciones básicas de primer orden. En las aplicaciones, las ecuaciones parciales de primer orden se utilizan con mayor frecuencia para describir procesos dinámicos, y entonces el tiempo, t , es una de las variables independientes.

Nuestra discusión se centrará en dinámicas de modelos de una sola dimensión espacial, teniendo en cuenta que la mayoría de los métodos que presentamos puede extenderse a situaciones de dimensiones superiores. Las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden y los sistemas modelan una amplia variedad de fenómenos de olas, incluido el transporte de contaminantes en fluidos, ondas de inundación, acústica, dinámica de gases, movimiento de glaciares, cromatografía, flujo de tráfico, y varios sistemas biológicos y ecológicos.

Una técnica de solución básica se basa en un cambio inspirado de variables, que viene de reescribir la ecuación en un marco de coordenadas en movimiento. Esto naturalmente conduce al concepto fundamental de curva característica, a lo largo del cual señales y perturbaciones físicas se propagan. El método de características resultante es capaz de resolver un ecuación diferencial de primer orden reduciéndola a uno o más ordinarios no lineales de primer orden.

Pasando al régimen no lineal, el nuevo fenómeno más importante es el posible descomposición de las soluciones en tiempo finito, lo que da como resultado la formación de ondas de choque. Un ejemplo familiar es el boom supersónico producido por un avión que rompe la barrera del sonido. Las señales continúan propagándose a lo largo de curvas características, pero ahora las curvas pueden cruzarse, precipitando el inicio de una discontinuidad de choque. La dinámica de choque resultante no está especificada únicamente por la ecuación diferencial parcial, sino que se basa en propiedades físicas adicionales, que serán especificadas por una ley de conservación apropiada junto con una condición de causalidad.

Habiendo alcanzado una comprensión básica de la dinámica de ondas de primer orden, nos enfocamos nuestra atención en la primera de las tres ecuaciones diferenciales parciales paradigmáticas de segundo orden, conocida como la ecuación de onda, que se utiliza para modelar ondas y vibraciones en un elástico barra, una cuerda de violín o una columna de aire en un instrumento de viento. Sus versiones multidimensionales sirven para modelar vibraciones de membranas, cuerpos sólidos, ondas de agua, ondas electromagnéticas, incluyendo luz, ondas de radio, microondas, ondas acústicas y muchos otros fenómenos físicos.

La ecuación de onda unidimensional es una de las pocas que son físicamente relevantes. Las ecuaciones diferenciales parciales que tiene una fórmula de solución explícita, originalmente descubierta por el matemático (y enciclopedista) francés del siglo XVIII Jean d'Alembert. Su solución es el resultado de poder "factorizar" la ecuación de onda de segundo orden en una par de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden.

Cuando se entra en un nuevo tema matemático en nuestro caso, las ecuaciones diferenciales parciales- uno debe analizar primero y entender completamente los ejemplos más simples. De hecho, las matemáticas son, en esencia, una empresa que se basa en el conocimiento y la experiencia de los temas elementales. y la experiencia con temas elementales en este caso, las ecuaciones diferenciales ordinarias para progresar, primero con los tipos más simples de ecuaciones diferenciales parciales, y luego, desarrollando y aplicando cada nuevo conocimiento y técnica, a situaciones cada vez más complicadas.

La ecuación diferencial parcial más simple, para una función $u(t, x)$ de dos variables, es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Es una ecuación lineal homogénea de primer orden. Si fuera una ecuación diferencial ordinaria para una función $u(t)$ a menudo sola, la solución sería obvia: $u(t) = c$ debe ser constante. Una prueba de este hecho básico procede integrando ambos lados con respecto a t y luego apelando al Teorema Fundamental del Cálculo. Para resolver dicha ecuación como una ecuación diferencial parcial para $u(t, x)$, integremos de manera similar ambos lados de la ecuación de, digamos, 0 a t , produciendo

$$0 = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s, x) ds = u(t, x) - u(0, x)$$

Por tanto, la solución toma la forma

$$u(t, x) = f(x), \text{ donde } f(x) = u(0, x)$$

y por tanto es una función de la variable espacial x . El único requisito es que $f(x)$ sea continuamente diferenciable.

Al mismo tiempo, se presenta una de las ecuaciones fundamentales de la física-matemática, entre ellas:

11.1. Ecuación Diferencial de Bessel

La ecuación de Bessel está definida por

$$x^2 y_{xx} + xy_x + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (\text{Bessel})$$

La solución de la ecuación de Bessel para cualquier valor de ν obtenida a través del método de series es de la forma

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$

Donde $J_\nu(x)$ y $Y_\nu(x)$ Se conocen como las Funciones de Bessel de primera clase y segunda clase respectivamente y están dadas por las ecuaciones

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 + \nu + n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(v\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(v\pi)}$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 - \nu + n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}$$

Observación: Las funciones de Bessel juegan un papel fundamental en la solución y entendimiento de problemas en distintas área de la Física e Ingeniería, tales son los casos:

1. Los modos de propagación de las ondas electromagnéticas en cavidades cilíndricas, tales como coaxiales o fibras ópticas.
2. La propagación de calor
3. Los Espectros de Frecuencia de una Modulación Angular.

Recuérdese que el proceso de modulación consiste en variar algunos de los parámetros de una portadora, generalmente senoidal, de acuerdo a una señal de información o señal moduladora. En el caso de modulación angular, se hace variar la frecuencia o la fase de la portadora. Así la modulación angular tiene dos variantes: modulación de frecuencia (FM) y modulación de fase (PM). En ambos casos, la amplitud de la portadora se mantiene constante. Por esta razón a estos tipos de modulación se les designa también como de envolvente constante, en tanto que a la modulación de amplitud se le designa como de envolvente variable. A veces a la modulación angular se le designa también como modulación exponencial. Las versiones digitales de la modulación angular son las diversas variantes de FSK y PSK.

11.2. Separación de variables

Tres ecuaciones diferenciales parciales cardinales lineales de segundo orden han impulsado colectivamente el desarrollo de todo el tema. Los dos primeros ya los hemos encontrado: La ecuación de la onda, la cual describe vibraciones y ondas en medios continuos, incluidas ondas sonoras, ondas de agua, ondas elásticas, ondas electromagnéticas, etc. La ecuación de calor modela los procesos de difusión, incluida la energía térmica en los sólidos, los solutos en los líquidos y las poblaciones biológicas.

En tercer lugar, y en muchos sentidos la más importante de todas, está la ecuación de Laplace y su contraparte no homogénea, la ecuación de Poisson, que gobiernan la mecánica del equilibrio. Las dos últimas ecuaciones surgen en una asombrosa variedad de contextos matemáticos y físicos, que van a través de la elasticidad y la mecánica de sólidos, la mecánica de fluidos, el electromagnetismo, el potencial teoría, termomecánica, geometría, probabilidad, teoría de números y muchos otros campos.

Las soluciones a la ecuación de Laplace se conocen como funciones armónicas, y el descubrimiento de sus muchas propiedades notables forma uno de los capítulos más célebres de la historia de las matemáticas. Las tres ecuaciones, junto con sus parientes multidimensionales, aparecerán repetidamente a lo largo de este texto.

El objetivo del capítulo actual es desarrollar el método de separación de variables para resolver estas ecuaciones diferenciales parciales clave en sus encarnaciones de dos variables independientes.

Para las ecuaciones de ondas y calor, las variables son tiempo, t , y una sola coordenada espacial, x , lo que lleva a problemas de valor de frontera inicial que modelan el comportamiento dinámico de un medio unidimensional. Para las ecuaciones de Laplace y Poisson, ambas variables representan las coordenadas espaciales, x e y , y los problemas de valores de contorno asociados modelan la configuración de equilibrio de un cuerpo plano, por ejemplo, las deformaciones de una membrana.

El método de separación de variables busca soluciones especiales que puedan escribirse como el producto de funciones de las variables individuales, reduciendo así la ecuación diferencial parcial a un par de ecuaciones diferenciales ordinarias. Las soluciones más generales pueden entonces expresarse como series infinitas en las soluciones separables apropiadas. Para las dos ecuaciones variables consideradas aquí, esto da como resultado una representación en serie de Fourier de la solución. En el caso de la ecuación de la onda, la separación de variables sirve para centrar la atención en

el carácter vibratorio de la solución, mientras que el enfoque anterior de d'Alembert enfatiza sus aspectos de partículas.

Desafortunadamente, para la ecuación de Laplace, la separación de variables se aplica solo a problemas de valor límite en geometrías muy especiales, por ejemplo, rectángulos y discos.

En la sección final se presenta la oportunidad para resumir la clasificación tripartita fundamental de las ecuaciones diferenciales parciales planas de segundo orden. Cada una de las tres ecuaciones paradigmáticas personifica una de las clases: hiperbólica, como la ecuación de onda; parabólico, como la ecuación del calor; y elíptica, como las ecuaciones de Laplace y Poisson. Cada categoría disfruta de sus propias propiedades y características distintivas, tanto analíticas como numéricas, y, de hecho, forma una subdisciplina matemática separada.

11.3. Las ecuaciones de difusión y calor

Comencemos con una breve derivación física de la ecuación del calor a partir de los primeros principios. Consideramos una barra, es decir, un cuerpo delgado y conductor de calor. “Delgado” significa que podemos considerar la barra como un continuo unidimensional sin una variación de temperatura transversal significativa. Supondremos que la barra está completamente aislada a lo largo de su longitud, por lo que el calor puede entrar (o salir) solo a través de sus extremos no aislados. Usamos t para representar el tiempo y $a \leq x \leq b$ para denotar la posición espacial a lo largo de la barra, que ocupa el intervalo $[a, b]$. Nuestro objetivo es encontrar la temperatura $u(t, x)$ de la barra en la posición xy en el tiempo t .

Las ecuaciones dinámicas que gobiernan la temperatura se basan en tres principios físicos fundamentales. Primero está la Ley de Conservación de la Energía Térmica. Esta ley de conservación en particular toma la forma

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

donde $\varepsilon(t, x)$ representa la densidad de energía térmica en el tiempo t y la posición x , mientras que $w(t, x)$ denota el flujo de calor, es decir, la tasa de flujo de energía térmica a lo largo de la barra. Nuestra convención de signos es que $w(t, x) > 0$ en los puntos donde la energía fluye en la dirección de aumentar x (de izquierda a derecha).

La forma integrada de la ley de conservación, toma la forma

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \varepsilon(t, x) dx = w(t, a) - w(t, b) \quad (5)$$

establece que la tasa de cambio en la energía térmica dentro de la barra es igual al flujo de calor total que pasa por sus extremos no aislados. Los signos de los términos de contorno con firman que el flujo de calor en la barra da como resultado un aumento de temperatura.

El segundo ingrediente es una suposición constitutiva sobre las propiedades del material de la barra. Se ha observado que, en condiciones razonables, la energía térmica es proporcional a la temperatura:

$$\varepsilon(t, x) = \lambda(x)u(t, x) \quad (6)$$

el factor

$$\sigma(x) = \rho(x)\chi(x) > 0$$

es el producto de la densidad ρ del material y su capacidad calorífica específica χ , que es la cantidad de energía térmica requerida para elevar la temperatura de una unidad de masa del material en un grado. Tenga en cuenta que estamos asumiendo que el medio no cambia con el tiempo, por lo que cantidades físicas como la densidad y el calor específico dependen sólo de la posición x . También asumimos, quizás con menos justificación física, que sus propiedades materiales no dependen de la temperatura; de lo contrario, nos veríamos obligados a lidiar con una ecuación de difusión no lineal mucho más complicada.

El tercer principio físico relaciona el flujo de calor y la temperatura. Los experimentos físicos muestran que la energía térmica se mueve de caliente a fría a una tasa que es directamente proporcional al gradiente de temperatura, que, en el caso unidimensional, significa su derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$.

La relación resultante

$$w(t, x) = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x} \quad (7)$$

se conoce como ley de enfriamiento de Fourier. El factor de proporcionalidad $\kappa(x) > 0$ es la conductividad térmica de la barra en la posición x , y el signo menos refleja la observación cotidiana de que la energía térmica se mueve de lo caliente a lo frío. Un buen conductor de calor, por ejemplo, plata, tendrá alta conductividad, mientras que un mal conductor, por ejemplo, vidrio, tendrá baja conductividad.

La combinación de las tres leyes produce la ecuación de difusión lineal

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma(x) u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad a < x < b \quad (8)$$

que gobierna la termodinámica de un medio unidimensional. También se utiliza para modelar una amplia variedad de procesos difusivos, incluida la difusión química y la difusión de contaminantes,

en líquidos y gases, la dispersión de la población y la propagación de enfermedades infecciosas. Si hay una fuente de calor externa a lo largo de la barra, entonces la ecuación de difusión adquiere un término no homogéneo prescrito adicional

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma(x) u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + h(t, x) \quad a < x < b \quad (9)$$

Para prescribir de forma única la solución $u(t, x)$, necesitamos especificar una distribución de temperatura inicial

$$u(t_0, x) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (10)$$

Además, debemos imponer una condición de contorno adecuada en cada extremo de la barra. Hay tres tipos comunes. La primera es una condición de límite de Dirichlet, donde el extremo se mantiene a una temperatura prescrita. Por ejemplo,

$$u(t, a) = \alpha(t)$$

fija la temperatura (posiblemente variable con el tiempo) en el extremo izquierdo. Alternativamente, la condición de frontera de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, a) = \mu(t)$$

prescribe el flujo de calor $w(t, a) = \chi(a)u_x(t, a)$ allí. En particular, una condición de Neumann homogénea, $u(t, a) \equiv 0$, modela un extremo aislado que evita que la energía térmica entre o salga. La condición de frontera de Robin

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, a) + \beta(t)u(t, a) = \Gamma(t)$$

modela el intercambio de calor resultante de la colocación del extremo de la barra en un baño de calor (depósito térmico) a temperatura $\Gamma(t)$. Se requiere que cada extremo de la barra satisfaga una de estas condiciones de contorno. Por ejemplo, una barra con ambos extremos con temperaturas prescritas se rige por el par de condiciones de frontera de Dirichlet

$$u(t, a) = \alpha(t), \quad u(t, b) = \beta(t) \quad (11)$$

mientras que una barra con dos extremos aislados requiere dos condiciones de contorno de Neumann homogéneas

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, a) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, b) = 0 \quad (12)$$

Las condiciones de contorno mixtas, con un extremo a una temperatura fija y el otro aislado, se formulan de manera similar, por ejemplo,

$$u(t, a) = \alpha(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, b) = 0 \quad (13)$$

Finalmente, las condiciones de contorno periódicas

$$u(t, a) = u(t, b) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, a) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, b) \quad (14)$$

corresponden a un anillo circular obtenido al unir los dos extremos de la barra. Como antes, asumimos que se permite que el calor fluya solo alrededor del anillo; el aislamiento evita que la radiación de calor de un lado del anillo afecte al otro lado.

11.4. Ecuación del calor

Retendremos el término "ecuación de calor" para referirnos al caso en el que la barra está compuesta de un material uniforme, por lo que su densidad ρ , conductividad χ y calor específico χ son todas constantes positivas. También excluimos las fuentes de calor externas (distintas de las de los extremos), lo que significa que la barra permanece aislada en toda su longitud. Bajo estos supuestos, la ecuación de difusión general (6) se reduce a la ecuación de calor homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (15)$$

para la temperatura $u(t, x)$ en el momento t y la posición x . El constante

$$\gamma = \frac{k}{\sigma} = \frac{k}{\rho X} \quad (16)$$

se llama difusividad térmica; incorpora todas las propiedades físicas relevantes de la barra.

La solución $u(t, x)$ se prescribirá de forma única una vez que especifiquemos las condiciones iniciales (8) y una condición de contorno adecuada en sus dos extremos. Las soluciones separables de la ecuación de calor se basan en el ansatz exponencial

$$u(t, x) = e^{-\lambda t} v(x)$$

donde $v(x)$ depende solo de la variable espacial. Las funciones de esta forma, que se "separan" en un producto de una función de t y una función de x , se conocen como soluciones separables.

Sustituyendo (18) en (16) y cancelando los factores exponenciales comunes, encontramos que $v(x)$ debe resolver la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden

$$-\gamma \frac{d^2 v}{dx^2} = \lambda v$$

Cada solución no trivial $v(x) \equiv 0$ es una función eigen, con valor propio asociado λ , para el operador diferencial lineal

$$L[v] = -\gamma v''(x)$$

Con las soluciones propias separables (18) en la mano, podremos reconstruir la solución deseada $u(t, x)$ como una combinación lineal, o más bien una serie infinita, de las mismas.

Concentrémonos en el caso más simple: una barra uniforme y aislada de longitud que se mantiene a temperatura cero en ambos extremos. Especificamos su temperatura inicial $f(x)$ en el tiempo $t_0 = 0$, por lo que las condiciones iniciales y de contorno relevantes son

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= 0 & u(t, \ell) &= 0 & t &\geq 0 \\ u(0, x) &= f(x) & & & 0 &\leq x \leq \ell \end{aligned} \quad (17)$$

Las soluciones propias (18) se encuentran resolviendo el problema del valor en la frontera de Dirichlet

$$\gamma \frac{d^2 v}{dx^2} + \lambda v = 0 \quad v(0) = 0 \quad v(\ell) = 0$$

Por cálculo directo, se encuentra que si λ es complejo o real y no positivo, entonces la única solución al problema del valor en la frontera (20) es la solución trivial $v(x) \equiv 0$. Esto significa que todos los valores propios deben ser necesariamente reales y positivos. De hecho, no es necesario comprobar explícitamente la realidad y la positividad de los valores propios. Más bien, se derivan de propiedades muy generales de problemas con valores de frontera definidos positivos, de los cuales (20) es un caso particular. Vea la Sección 9.5 para la teoría subyacente y el Teorema 9.34 para el resultado relevante.

Cuando $\lambda > 0$, la solución general de la ecuación diferencial es una función trigonométrica

$$v(x) = a \cos(wx) + b \sin(wx), \text{ donde } w = \sqrt{\lambda/\gamma}$$

a y b son constantes arbitrarias. La primera condición de frontera requiere $v(0) = a = 0$.

Esto sirve para eliminar el término coseno, y luego la segunda condición de frontera requiere

$$v(\ell) = b \sin w\ell = 0.$$

Por lo tanto, dado que requerimos $b \neq 0$, de lo contrario, la solución es trivial y no califica como una función propia $-w\ell$ debe ser un múltiplo entero de π , y entonces

$$w = \frac{\pi}{\ell}, \frac{2\pi}{\ell}, \frac{3\pi}{\ell}, \dots$$

Concluimos que los valores propios y las funciones propias del problema de valores en la frontera (20) son

$$\lambda_n = \gamma \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2, \quad v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

Las soluciones propias correspondientes a la ecuación (18) son

$$u_n(t, x) \exp\left(-\frac{\gamma n^2 \pi^2 t}{\ell^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Cada uno representa un perfil de temperatura oscilante trigonométricamente que mantiene su forma mientras decae a cero a una velocidad exponencialmente rápida.

Para resolver el problema del valor inicial general, reunimos las soluciones propias en una serie infinita,

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{\gamma n^2 \pi^2 t}{\ell^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (19)$$

cuyos coeficientes b_n deben ser fijados por las condiciones iniciales. De hecho, suponiendo que la serie converge, el perfil de temperatura inicial es

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = f(x) \quad (20)$$

Tiene la forma de una serie sinusoidal de Fourier (3.52) en el intervalo $[0, \ell]$. Por tanto, los coeficientes se determinan mediante las fórmulas de Fourier (3.53), por lo que

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

La fórmula resultante (4.23) describe la serie sinusoidal de Fourier para la temperatura $u(t, x)$ de la barra en cada tiempo posterior $t \geq 0$.

Ejemplo 23 *Considere el perfil de temperatura inicial*

$$u(0, x) = f(x) = \begin{cases} -x & 0 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ x - \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \leq x \leq \frac{7}{10} \\ 1 - x & \frac{7}{10} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (22)$$

en una barra de longitud 1, Usando la ecuación (25), los primeros pocos coeficientes de Fourier de $f(x)$ se calculan (ya sea por integración exacta o numérica) para ser

$$\begin{aligned} b_1 &\approx ,0897 & b_2 &\approx -,1927 & b_3 &\approx -,0289 & b_4 &= 0 \\ b_5 &\approx -,0162 & b_6 &\approx ,0132 & b_7 &\approx ,0104 & b_8 &= 0 \end{aligned}$$

La solución de la serie de Fourier resultante para la ecuación de calor es

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(t, x) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\gamma n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \\
 &\approx ,0897 e^{-\gamma \pi^2 t} \sin \pi x - ,1927 e^{-4\gamma \pi^2 t} \sin 2\pi x - ,0289 e^{-9\gamma \pi^2 t} \sin 3\pi x - \dots
 \end{aligned}$$

La solución, para $\gamma = 1$, se traza en algunos momentos representativos. Observe que las esquinas del perfil inicial se suavizan inmediatamente. A medida que avanza el tiempo, la solución decae, a una tasa exponencial rápida de $e^{-\pi^2 t} \approx e^{-9,87t}$, a una temperatura cero uniforme, que es la distribución de temperatura de equilibrio para el Dirichlet homogéneo.

Condiciones de borde

A medida que la solución decae hasta el equilibrio térmico, los modos de Fourier superiores desaparecen rápidamente y la solución asume la forma progresivamente más simétrica de un solo arco sinusoidal, de amplitud rápidamente decreciente.

Comportamiento suavizante y prolongado

El hecho de que podamos escribir la solución de un problema de valor en la frontera inicial en forma de una serie infinita (4.23) es una especie de progreso. Sin embargo, debido a que no podemos sumar la serie en forma cerrada, esta "solución" es mucho menos satisfactoria que una fórmula directa y explícita. No obstante, existen importantes características cualitativas y cuantitativas de la solución que pueden deducirse fácilmente de tales expansiones de series.

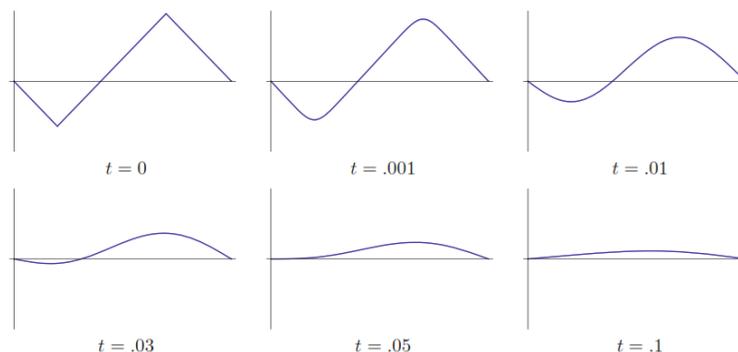


Figura 4.1. Una solución a la ecuación del calor

Si los datos iniciales $f(x)$ son integrables (por ejemplo, continuos por partes), entonces sus coeficientes de Fourier están uniformemente acotados; de hecho, para cualquier $n \geq 1$,

$$|b_n| \leq \frac{2}{\ell} \int_0^\ell |f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}| dx \leq \frac{2}{\ell} \int_0^\ell |f(x)| dx \equiv M \tag{23}$$

Esta propiedad es válida incluso para datos bastante irregulares. En estas condiciones, cada término de la solución en serie (4.23) está acotado por una función que decae exponencialmente

$$|b_n \exp(-\frac{\gamma n^2 \pi^2}{\ell^2} t) \sin \frac{n\pi x}{\ell}| \leq M \exp(-\frac{\gamma n^2 \pi^2}{\ell^2} t)$$

Esto significa que, tan pronto como $t > 0$, la mayoría de los términos de alta frecuencia, $n \gg 0$, serán extremadamente pequeños. Sólo se notarán los primeros términos, por lo que la solución degenera esencialmente en una suma finita en los primeros modos de Fourier. A medida que aumenta el tiempo, más y más modos de Fourier se volverán insignificantes, y la suma degenera aún más en cada vez menos términos significativos.

Eventualmente, cuando $t \rightarrow \infty$, todos los modos de Fourier caerán a cero. Por lo tanto, la solución convergerá exponencialmente rápido a un perfil de temperatura cero: $u(t, x) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, lo que representa la barra en su equilibrio térmico uniforme final.

El hecho de que su temperatura de equilibrio sea cero es el resultado de mantener ambos extremos de la barra fijos a temperatura cero, por lo que cualquier energía térmica inicial se disipa finalmente a través de los extremos. Las fluctuaciones de temperatura a pequeña escala tienden a anularse rápidamente a través de la difusión de energía térmica, y el último término en desaparecer es el que tiene la disminución más lenta, a saber

$$u(t, x) \approx b_1 \exp(-\frac{\gamma \pi^2}{\ell^2} t) \sin \frac{\pi x}{\ell} \quad \text{cuando} \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin x dx \quad (24)$$

Para datos iniciales genéricos, el coeficiente $b_1 = 0$, y la solución se acerca al equilibrio térmico a una tasa exponencial prescrita por el valor propio más pequeño, $\lambda_1 = \gamma \pi^2 / \ell^2$, que es proporcional a la difusividad térmica dividida por el cuadrado de la longitud de la barra.

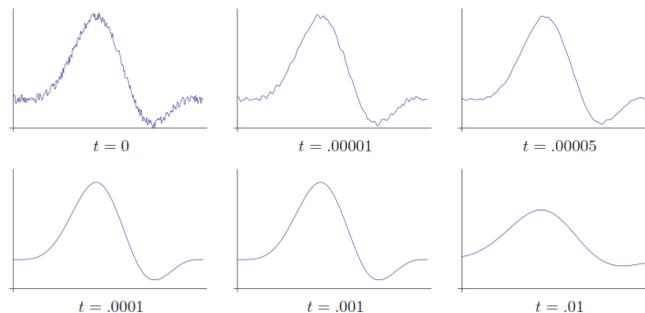


Figura4,2. De solar una señal con la ecuación de calor

mientras más larga sea la barra, o cuanto menor sea la difusividad, más tiempo tardará el efecto de mantener los extremos a temperatura cero en propagarse a lo largo de toda su longitud.

Además, de nuevo siempre $b_1 \neq 0$, la forma asintótica del perfil de temperatura es un pequeño arco sinusoidal que decae exponencialmente, tal como observamos en el ejemplo 4.1. En situaciones excepcionales, es decir, cuando $b_1 = 0$, la solución decae aún más rápido, a una velocidad igual al valor propio $\lambda_k = \gamma k^2 \pi^2 / \ell^2$ correspondiente al primer término distinto de cero, $b_k = 0$, en la serie de Fourier; su forma asintótica ahora oscila k veces durante el intervalo.

Otra observación, estrechamente relacionada, es que, para cualquier tiempo fijo $t > 0$ después del momento inicial, los coeficientes de la serie sinusoidal de Fourier (4.23) decaen exponencialmente rápido cuando $n \rightarrow \infty$.

De acuerdo con la discusión realizada, esto implica que la serie de Fourier converge a una función infinitamente diferenciable de x en cada tiempo positivo t , sin importar cuán irregular sea el perfil de temperatura inicial. Hemos descubierto la propiedad de suavizado básica del flujo de calor, que establecemos para un tiempo inicial general t_0 .

En otras palabras, la ecuación de calor suaviza instantáneamente cualquier discontinuidad y esquinas en el perfil de temperatura inicial mediante una rápida amortiguación de los modos de alta frecuencia.

El efecto de la ecuación de calor sobre los datos iniciales irregulares subyace a su efectividad para suavizar y eliminar el ruido de las señales. Tomamos los datos iniciales $u(0, x) = f(x)$ como una señal ruidosa, y luego desarrollamos la ecuación de calor hacia un tiempo prescrito $t^* > 0$. La función resultante $g(x) = u(t^*, x)$ será una versión suavizada de la señal original $f(x)$ en la que se ha eliminado la mayor parte del ruido de alta frecuencia. Por supuesto, si ejecutamos el flujo de calor durante demasiado tiempo, todas las características de baja frecuencia también se suavizarán y el resultado será una señal constante y uniforme. Por lo tanto, la elección del tiempo de parada t^* es crucial para el éxito.

La figura muestra el efecto de ejecutar la ecuación de calor, con $\gamma = 1$, en una señal que ha sido contaminada por ruido aleatorio. Observe la rapidez con la que se elimina el ruido. Al final, el efecto de suavizado general del flujo de calor ha causado una degradación significativa (borrosidad) de la señal original. El método de la ecuación de calor para eliminar el ruido tiene la ventaja de que no es necesario calcular explícitamente los coeficientes de Fourier, ni tampoco es necesario reconstruir la señal suavizada. Los esquemas básicos de solución numérica para la ecuación del calor se discutirán en otro capítulo.

Una consecuencia teórica importante de la propiedad de suavizado es que la difusión es un proceso unidireccional: no se puede correr el tiempo hacia atrás e inferir con precisión cómo era una distribución de temperatura en el pasado. En particular, si el dato inicial $u(0, x) = f(x)$ no es uniforme, entonces el valor de $u(t, x)$ para cualquier $t < 0$ no se puede definir, porque si $u(t_0, x)$ se definió e integrable en algún $t_0 < 0$, entonces, según el teorema 4.2, $u(t, x)$ sería uniforme en todos los tiempos posteriores $t > t_0$, incluido $t = 0$, en contradicción con nuestro supuesto.

Además, para la mayoría de los datos iniciales, los coeficientes de Fourier en la fórmula de solución (4.23) son, en cualquier $t < 0$, creciendo exponencialmente a medida que $n \rightarrow \infty$, lo que indica que el ruido de alta frecuencia ha abrumado por completo la solución, lo que impide cualquier tipo de convergencia. de la serie Fourier.

Matemáticamente, podemos invertir el futuro y el pasado cambiando t por $-t$. En la ecuación diferencial, esto simplemente invierte el signo del término derivado del tiempo; las derivadas x no se ven afectadas. Por lo tanto, según el razonamiento anterior, la ecuación de calor hacia atrás

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (25)$$

con un coeficiente de difusión negativo $-\gamma < 0$

Es un problema mal planteado en el sentido de que pequeños cambios en los datos iniciales - por ejemplo, una pequeña perturbación de un modo de alta frecuencia - pueden producir cambios arbitrariamente grandes en la solución arbitrariamente cercanos al tiempo inicial. En otras palabras, la solución no depende continuamente de los datos iniciales. Peor aún, para datos iniciales no uniformes, la solución ni siquiera está bien definida en el tiempo hacia adelante $t > 0$ (aunque está bien planteada si ejecutamos t hacia atrás).

Lo mismo es válido para procesos de difusión más generales, por ejemplo, (4.6). Si, como en todos los casos físicamente relevantes, el coeficiente de u_{xx} es positivo en todas partes, entonces el problema del valor inicial está bien planteado para $t > 0$, pero mal planteado para $t < 0$. Por otro lado, si el coeficiente es negativo en todas partes, se cumple lo contrario. Un coeficiente que cambia de signo haría que la ecuación diferencial estuviera mal posicionada en ambas direcciones.

Aunque teóricamente no es deseable, el efecto no suavizante de la ecuación de calor al revés tiene beneficios potenciales en ciertos contextos. Por ejemplo, en el procesamiento de imágenes, la difusión borrará gradualmente una imagen amortiguando los modos de alta frecuencia. La mejora de la imagen es el proceso inverso y puede basarse en ejecutar el flujo de calor hacia atrás de alguna manera estable.

En medicina forense, determinar el momento de la muerte en función de la temperatura actual de un cadáver también requiere ejecutar las ecuaciones que gobiernan la disipación del calor corporal hacia atrás en el tiempo. Una opción sería restringir la evolución hacia atrás a los primeros modos de Fourier, lo que evita que las fluctuaciones a pequeña escala abrumen el cálculo.

También surgen problemas mal planteados en la reconstrucción de perfiles subterráneos a partir de datos sísmicos, un problema central de la industria del petróleo y el gas. Estas y otras aplicaciones están impulsando la investigación contemporánea sobre cómo sortear inteligentemente la mala postura de procesos de difusión hacia atrás.

Observación: La irreversibilidad de la ecuación de calor, junto con la irreversibilidad del transporte no lineal en presencia de ondas de choque discutidas en la Sección 2.3, resaltan una distinción crucial entre ecuaciones diferenciales parciales y ecuaciones diferenciales ordinarias. Las ecuaciones diferenciales ordinarias son siempre reversibles: las propiedades de existencia, unicidad y dependencia continua de las soluciones son todas igualmente válidas en el tiempo inverso (aunque sus propiedades cualitativas y cuantitativas detalladas dependerán, por supuesto, de si el tiempo avanza o retrocede). La irreversibilidad y la mala posición de las ecuaciones diferenciales parciales que modelan procesos termodinámicos, biológicos y otros procesos difusivos en nuestro universo pueden explicar por qué la flecha del tiempo apunta exclusivamente al futuro.

11.5. El anillo calentado Redux

A continuación, consideremos el problema de valor límite periódico que modela el flujo de calor en un anillo circular aislado. Fijamos la longitud del anillo para que sea $\ell = 2\pi$, con $-\pi \leq x \leq \pi$ representando la coordenada “angular” alrededor del anillo. Para simplificar, también elegimos unidades en las que la difusividad térmica es $\gamma = 1$. Por lo tanto, buscamos resolver la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad t > 0 \quad (26)$$

sujeto a condiciones de contorno periódicas

$$(t, -\pi) = u(t, \pi), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, -\pi) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) \quad t \geq 0 \quad (27)$$

que aseguran la continuidad de la solución cuando la coordenada angular cambia de $-\pi$ a π . La distribución de temperatura inicial es

$$u(0, x) = f(x), \quad -\pi < x \leq \pi$$

La temperatura resultante $u(t, x)$ será una función periódica en x del período 2π . La sustitución de la solución separable ansatz (3.15) en la ecuación de calor y las condiciones de contorno da como resultado el problema de valores propios periódicos

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda v = 0 \quad v(-\pi) = v(\pi) \quad v'(-\pi) = v'(\pi) \quad (28)$$

Como ya señalamos en la Sección 3.1, los valores propios de este problema de valores de frontera en particular son $\lambda_n = n^2$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$ es un número entero no negativo; las funciones propias correspondientes son las funciones trigonométricas

$$v_n(x) = \cos nx \quad \tilde{v}_n = \sin nx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tenga en cuenta que $\lambda_0 = 0$ es un valor propio simple, con una función propia constante $\cos \theta x = 1$ (la solución sinusoidal $\sin \theta x = 1$ es trivial) mientras que los valores propios positivos son, de hecho, dobles, y cada uno posee dos funciones propias linealmente independientes. Las soluciones propias correspondientes a la ecuación del anillo calentado (4.30-31) son

$$u_n(t, x) = e^{-n^2 t} \cos nx \quad \tilde{u}_n(t, x) = e^{-n^2 t} \sin nx \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La solución resultante en series finitas es

$$u(t, x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{-n^2 t} \cos nx + b_n e^{-n^2 t} \sin nx) \quad (29)$$

con coeficientes a_n, b_n aún no especificados. Las condiciones iniciales requieren

$$u(0, x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x) \quad (30)$$

que es precisamente la serie de Fourier completa (3.34) del perfil de temperatura inicial $f(x)$.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

son sus coeficientes de Fourier habituales (3.35).

Como en el problema de Dirichlet, después del instante inicial, los términos de alta frecuencia en la serie (4.34) se vuelven extremadamente pequeños, ya que $e^{-n^2 t} \ll 1$ para $n \gg 0$. Por lo tanto, tan pronto como $t > 0$, la solución instantáneamente se vuelve suave y rápidamente degenera en lo que es en esencia una suma finita sobre los primeros modos de Fourier. Además, cuando $t \rightarrow \infty$, todos los modos de Fourier decaerán a cero con la excepción del modo constante, asociado con el

valor propio nulo $\lambda_0 = 0$. En consecuencia, la solución convergerá, a una tasa exponencial, a una temperatura constante.

$$u(t, x) \rightarrow \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

que es igual al promedio del perfil de temperatura inicial. En términos físicos, dado que el aislamiento evita que la energía térmica se escape del anillo, se redistribuye rápidamente para que el anillo alcance una temperatura constante uniforme, su eventual estado de equilibrio.

Antes de alcanzar el equilibrio, solo los modos de Fourier de frecuencia más baja aún serán notables, por lo que la solución se verá asintóticamente como

$$u(t, x) \approx \frac{1}{2}a_0 + e^{-t}(a_1 \cos x + b_1 \sin x) = \frac{1}{2}a_0 + r_1 e^{-t} \cos(x + \delta_1) \quad (31)$$

donde

$$a_1 = r_1 \cos \delta_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx, \quad b_1 = r_1 \sin \delta_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx$$

Por lo tanto, para la mayoría de los datos iniciales, la solución se acerca al equilibrio térmico a una tasa exponencial de t . Las excepciones son cuando $a_1 = b_1 = 0$, para el cual la tasa de convergencia es aún más rápida, es decir, a una tasa $e^{-k^2 t}$, donde k es el número entero más pequeño tal que al menos uno de los coeficientes de Fourier de k -ésimo orden a_k , b_k es distinto de cero. De hecho, una vez que estamos convencidos de que la barra debe tender al equilibrio térmico cuando $t \rightarrow \infty$, podemos predecir la temperatura final sin conocer la fórmula de solución explícita. Nuestra derivación en la sección 4.1 implica que la ecuación del calor tiene la forma de una ley de conservación (4.1), siendo la densidad conservada la temperatura $u(t, x)$. Como en (4.2), la forma integrada de la ley de conservación dice

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx \\ &= \gamma \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) dx \\ &= \gamma \left[\frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, -\pi) \right] = 0 \end{aligned}$$

donde los términos de flujo se cancelan gracias a las condiciones de contorno periódicas (4.31). Físicamente, cualquier flujo de un extremo de la barra circular se alimenta inmediatamente al otro extremo contiguo, por lo que no hay pérdida neta de energía térmica. Concluimos que, para el problema del valor de frontera periódico, la energía térmica total

$$E(t) = \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) dx = C \quad (32)$$

permanece constante para siempre. (En contraste, la energía térmica no permanece constante para el problema del valor de frontera de Dirichlet, decayendo constantemente a 0 debido a la salida de calor a través de los extremos de la barra; vea el ejercicio 4.1.13 para más detalles). correctamente, según (4.3), la energía térmica se obtiene multiplicando la temperatura por el producto, $\sigma = \rho\chi$, de la densidad y el calor específico del cuerpo. Para la ecuación del calor, ambos son constantes, por lo que la energía térmica física es igual a $\sigma E(t)$.

Matemáticamente, podemos ignorar con seguridad este factor constante adicional o, de manera equivalente, trabajar en unidades físicas en las que $\sigma = 1$. Esto no se extiende a los cuerpos no uniformes, la energía térmica está dada por $E(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(x)u(t, x)dx$ y cuya constancia, en condiciones de contorno adecuadas, se sigue de la forma de la ley de conservación (4.6) de la ecuación de difusión lineal.

En general, un sistema está en equilibrio (estático) si permanece inalterado a medida que avanza el tiempo. Por tanto, cualquier configuración de equilibrio tiene la forma $u = u^*(x)$ y, por tanto, satisface $\partial u^*/\partial t = 0$. Si, además, $u(x)$ es una solución de equilibrio de la ecuación de calor periódica (4.30-33), entonces debe satisfacer

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = 0 = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \quad u^*(-\pi) = \frac{\partial u^*}{\partial t}(\pi) \quad (33)$$

En otras palabras, u^* es una solución al problema de valor de frontera periódico (4.33) para el valor propio nulo $\lambda = 0$. Por tanto, las funciones propias nulas (incluida la solución cero) son todas las posibles soluciones de equilibrio. En particular, para el problema del valor de frontera periódico, las funciones propias nulas son constantes y, por lo tanto, las soluciones a la ecuación de calor periódica tenderán a una temperatura de equilibrio constante. Ahora, una vez que sabemos que la solución tiende a una constante, $u(t, x) \rightarrow a$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces su energía térmica tiende a

$$E(t) = \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x)dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} a dx = 2\pi a \quad \text{es } t \rightarrow \infty$$

Por otro lado, como acabamos de demostrar, la energía térmica es constante, por lo que

$$E(t) = E(0) = \int_{-\pi}^{\pi} u(0, x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Combinando estas dos, concluimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\pi a$$

y entonces la temperatura de equilibrio

$$a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

es igual a la temperatura inicial promedio. Esto reconfirma nuestro resultado anterior, pero evita tener que conocer una fórmula de solución en serie explícita. Como resultado, el último método se puede aplicar a una gama mucho más amplia de situaciones.

11.6. Condiciones de contorno no homogéneas

Hasta ahora, hemos concentrado nuestra atención en condiciones de contorno homogéneas. Hay un truco simple que convertirá un problema de valor de frontera con condiciones de frontera de Dirichlet no homogéneas pero constantes,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u(t, 0) = \alpha \quad u(t, \ell) = \beta \quad t \geq 0 \quad (34)$$

en un problema de Dirichlet homogéneo. Comenzamos resolviendo el perfil de temperatura de equilibrio. Como en (4.39), el equilibrio no depende de t , por tanto, satisface el problema del valor en la frontera

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = 0 = \gamma \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \quad u^*(0) = \alpha \quad u^*(\ell) = \beta$$

Al resolver la ecuación diferencial ordinaria se obtiene $u^*(x) = a + bx$, donde las constantes a , b están fijadas por las condiciones de contorno. Concluimos que la solución de equilibrio es una línea recta que conecta los valores límite:

$$u^*(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\ell} x \quad (35)$$

La diferencia

$$\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - u^*(x) = u(t, x) - \alpha - \frac{\beta - \alpha}{\ell} x$$

mide la desviación de la solución del equilibrio. Claramente satisface las condiciones de contorno homogéneas en ambos extremos:

$$\tilde{u}(t, 0) = 0 = \tilde{u}(t, \ell)$$

Además, por linealidad, dado que tanto $u(t, x)$ como $u^*(x)$ son soluciones de la ecuación de calor, también lo es $\tilde{u}(t, x)$. Los datos iniciales deben adaptarse de manera similar:

$$\tilde{u}(0, x) = u(0, x) - u^*(x) - \alpha - \frac{\beta - \alpha}{\ell} x \equiv \hat{f}(x) \quad (36)$$

Al resolver el problema de valor de frontera inicial homogéneo resultante, escribimos $\tilde{u}(t, x)$ en forma de serie de Fourier (4.23), donde los coeficientes de Fourier se especifican mediante los datos iniciales modificados $\hat{f}(x)$ en (4.43). La solución al problema del valor en la frontera no homogéneo tiene, por tanto, la forma de serie

$$u(t, x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\ell}x + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \exp\left(-\frac{\gamma n^2 \pi^2}{\ell^2}t\right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (37)$$

cuando

$$\tilde{b}_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \tilde{f}(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (38)$$

Dado que $\tilde{u}(t, 0)$ decae a cero a una tasa exponencial cuando $t \rightarrow \infty$, el perfil de temperatura real (4.44) decaerá asintóticamente al perfil de equilibrio,

$$u(t, x) \rightarrow u^*(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\ell}x$$

a la misma tasa exponencialmente rápida, gobernada por el primer valor propio $\lambda_1 = \pi^2/\ell^2 - a$ menos que $\tilde{b}_1 = 0$, en cuyo caso la tasa de desintegración es aún más rápida.

Este método no funciona tan bien cuando las condiciones de contorno dependen del tiempo:

$$u(t, 0) = \alpha(t), u(t, \ell) = \beta(t)$$

Al intentar imitar la técnica anterior, descubrimos que la desviación

$$\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - u^*(t, x)$$

donde

$$u^*(t, x) = \alpha(t) + \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{\ell}x \quad (39)$$

satisface las condiciones de contorno homogéneas, pero ahora resuelve una versión no homogénea o forzada de la ecuación de calor:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + h(t, x)$$

donde

$$h(t, x) = -\frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial t}(t, x) = -\alpha'(t) - \frac{\beta'(t) - \alpha'(t)}{\ell}x \quad (40)$$

Las técnicas de solución para la última ecuación diferencial parcial se analizarán en la sección 8.1 a continuación.

11.7. Condiciones de frontera de Robin

Considere una barra de unidad de longitud y unidad de difusividad térmica, aislada a lo largo de su longitud, que tiene uno de sus extremos a 0^0 y el otro en un baño de calor. La termodinámica

resultante se modela mediante la ecuación de calor sujeta a las condiciones de frontera de Dirichlet en $x = 0$ y las condiciones de frontera de Robin en $x = 1$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u(t, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) + \beta u(t, 1) = 0 \quad (41)$$

donde $\beta \neq 0$ es una constante que mide la tasa de transferencia de energía térmica, con $\beta > 0$ cuando el baño está frío y, por lo tanto, la energía se extrae de la barra. Como antes, la solución general al problema de valor de frontera inicial resultante se puede ensamblar a partir de las soluciones propias separables basadas en nuestra ansatz exponencial habitual $u(t, x) = e^{-\lambda t} v(x)$. Sustituyendo esta expresión en (4.48), encontrar que la función propia $v(x)$ debe satisfacer el problema del valor en la frontera

$$-\frac{d^2 v}{dx^2} = \lambda v \quad v(0) = 0 \quad v'(1) + \beta v(1) = 0 \quad (42)$$

Para encontrar soluciones no triviales $v(x) \neq 0$ a (4.49), supongamos primero $\lambda = \varpi^2 > 0$, donde, sin pérdida de generalidad, $\varpi > 0$. La solución de la ecuación diferencial ordinaria que satisface la condición de frontera de Dirichlet en $x = 0$ es un múltiplo constante de $v(x) = \sin(\varpi x)$. Sustituyendo esta función en la condición de frontera de Robin en $x = 1$, encontramos

$$\varpi \cos \varpi + \beta \sin \varpi = 0$$

o equivalentemente

$$\varpi = -\beta \tan \varpi \quad (43)$$

No es difícil ver que hay un número infinito de soluciones positivas reales $0 < \varpi_1 < \varpi_2 < \varpi_3 < \dots \rightarrow \infty$ para la última ecuación trascendental. De hecho, se pueden caracterizar como las abscisas $\varpi_n > 0$ de los puntos de intersección de las gráficas de las dos funciones $f(\varpi) = \varpi$

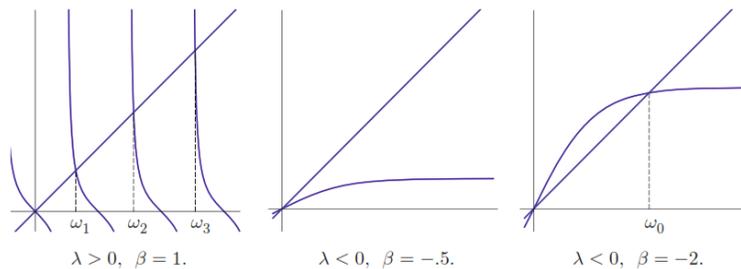


Figura 4.3. Ecuación de valores propios para las condiciones de frontera de Robin

y $g(\varpi) = \beta \tan \varpi$, como se muestra en la primera gráfica de la Figura 4.3. Cada raíz ϖ_n define un valor propio positivo $\lambda_n = \varpi_n^2 > 0$ para el problema de valor límite (4.49) y, por lo tanto, una resolución propia que decae exponencialmente.

$$u_n(t, x) = e^{-\lambda_n t} \sin(\varpi_n x) \quad (44)$$

al problema del valor en la frontera de Robin (4.48). Si bien no existe una fórmula explícita, las aproximaciones numéricas a los valores propios se encuentran fácilmente mediante un buscador de raíces numéricas, por ejemplo, el método de Newton, [24, 94]. En particular, para $\beta = 1$, los primeros tres valores propios son

$$\lambda_1 = \varpi_1^2 \approx 4,1159, \lambda_2 = \varpi_2^2 \approx 24,1393, \lambda_3 = \varpi_3^2 \approx 63,6591.$$

¿Qué pasa con un valor propio cero? Si $\lambda = 0$ en (4.49), entonces la solución de la ecuación diferencial ordinaria que satisface la condición de frontera de Dirichlet es un múltiplo constante de $v(x) = x$. Esta función satisface la condición de frontera de Robin $v'(1) + \beta v(1) = 0$ si y solo si $\beta = -1$.

En esta configuración especial, la ecuación de calor admite una resolución propia independiente del tiempo $u_0(t, x) = x$ con valor propio $\lambda_0 = 0$. Físicamente, la tasa de transferencia de energía térmica a la barra a través de su extremo en el baño de calor es exactamente suficiente para cancelar la pérdida de calor a través del extremo de Dirichlet, lo que da como resultado una solución de estado estacionario. Todos los demás modos propios corresponden a valores propios positivos y, por tanto, están decayendo exponencialmente. La solución general decae al estado estacionario, que es un múltiplo constante de la resolución propia nula:

$$u(t, x) \rightarrow cx$$

cuando $t \rightarrow \infty$, a una tasa exponencial prescrita, genéricamente, por el primer valor propio positivo $\lambda > 0$.

Sin embargo, a diferencia de los tipos más comunes de condiciones de contorno (Dirichlet, Neumann, mixtas, periódicas), no podemos descartar automáticamente la existencia de valores propios negativos en el caso de Robin. Suponga que $\lambda = -\varpi^2 < 0$ con $\varpi > 0$. Ahora la solución a (4.49) que satisface la condición de frontera de Dirichlet en $x = 0$ es un múltiplo constante de la función seno hiperbólico $v(x) = \sinh(\varpi x)$. Sustituir esta expresión en la condición de frontera de Robin en $x = 1$ produce

$$\varpi \cos \varpi + \beta \sin \varpi = 0$$

o equivalentemente

$$\varpi = -\beta \tan \varpi \tag{45}$$

donde

$$\tanh w = \frac{\sinh w}{\cosh w} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$$

es la tangente hiperbólica. Si $\beta > -1$, no hay soluciones $\varpi > 0$ para esta ecuación trascendental, y en este caso todos los valores propios son estrictamente positivos y todas las soluciones a la ecuación de calor están decayendo exponencialmente. Por otro lado, si $\beta < 1$, hay una única solución $\varpi_0 > 0$, que produce un único valor propio negativo $\lambda_0 = \varpi_0^2$.

En la Figura 4.3 aparecen gráficos representativos que ilustran las dos posibilidades; en el primero, la gráfica de $f(\varpi) = \varpi$ no interseca la gráfica de $g(\varpi) = 1/2 \tanh \varpi$ cuando $\varpi > 0$, mientras que interseca la gráfica de $\hat{g}(\varpi) = 2 \tanh \varpi$ en un solo punto, con abscisas $\varpi_0 \approx 1,9150$, produciendo el autovalor negativo $\lambda_0 \approx -\varpi_0^2 \approx -3,6673$. Por lo tanto, cuando $\beta < -1$, además de todos los modos propios que decaen exponencialmente asociados con los valores propios positivos, hay un solo modo propio inestable que crece exponencialmente

$$u_0(t, x) = e^{\lambda_0 t} \sinh(\varpi_0 x) \quad (46)$$

Físicamente, $\beta < 1$ implica que la energía térmica está entrando por el extremo Robin de la barra a una velocidad más rápida de la que se puede eliminar a través del extremo Dirichlet y, por lo tanto, la barra experimenta un aumento exponencial en su temperatura general.

Observación: Aunque algunas condiciones de frontera de Robin admiten soluciones de crecimiento exponencial y, por lo tanto, conducen a una dinámica inestable, el problema del valor de frontera inicial sigue estando bien planteado porque la solución existe y está determinada únicamente por los datos iniciales y, además, por pequeños cambios en las condiciones iniciales inducen cambios relativamente pequeños en la solución resultante en intervalos de tiempo acotados.

11.8. El problema del sótano

Como ejemplo final, discutimos un problema que involucra el análisis de la ecuación del calor en un intervalo semi-infinito. La pregunta es la siguiente: ¿a qué profundidad se debe cavar un sótano? En la era previa a la refrigeración, se utilizaba un sótano para mantener los alimentos frescos en verano, pero no congelados en invierno. Suponemos que la temperatura dentro de la Tierra depende solo de la profundidad y la época del año. Sea $u(t, x)$ la desviación de la temperatura de su media anual a la profundidad $x > 0$ y el tiempo t . Supondremos que la temperatura en la superficie de la Tierra, $x = 0$, fluctúa de manera periódica; específicamente, establecemos

$$u(t, 0) = a \cos wt \quad (47)$$

donde la frecuencia oscilatoria

$$w = \frac{2\pi}{365,25 \text{ días}} = 2,0 \times 10^{-7} \text{ sec}^{-1} \quad (48)$$

se refiere a las variaciones anuales de temperatura. En este modelo, ignoraremos las fluctuaciones diarias de temperatura, ya que su efecto no es significativo debajo de una capa superficial muy delgada. A grandes profundidades, se supone que la temperatura no varía:

$$u(t, x) \rightarrow 0 \quad \text{es} \quad x \rightarrow \infty \quad (49)$$

donde 0 se refiere a la temperatura media.

Por lo tanto, debemos resolver la ecuación de calor en una barra semi-infinita $0 < x < \infty$, con condiciones de contorno dependientes del tiempo (4.55, 57) en los extremos. El análisis se simplificará un poco si reemplazamos el coseno por un exponencial complejo, por lo que buscamos un complejo con solución en condiciones de contorno

$$u(t, 0) = ac^{i\omega t} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x) = 0 \quad (50)$$

Probemos una solución separable de la forma

$$u(t, x) = v(x)e^{i\omega t} \quad (51)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de calor $u_t = \gamma u_{xx}$ lleva a

$$i\omega v(x)e^{i\omega t} = \gamma v''(x)e^{i\omega t}$$

Al cancelar los factores exponenciales comunes, llegamos a la conclusión de que $v(x)$ debería resolver el problema del valor en la frontera

$$\gamma v''(x) = i\omega v, \quad v(0) = a \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0$$

Las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria son

$$v_1(x) = e^{\sqrt{i\omega/\gamma}x} = e^{\sqrt{w/(2\gamma)}(1+i)x} \quad v_2(x) = e^{-\sqrt{i\omega/\gamma}x} = e^{-\sqrt{w/(2\gamma)}(1+i)x}$$

La primera solución crece exponencialmente a medida que $x \rightarrow \infty$, por lo que no guarda relación con nuestro problema. Por lo tanto, la solución al problema del valor en la frontera debe ser un múltiplo de la solución que decae exponencialmente

$$v(x) = ae^{-\sqrt{w/(2\gamma)}(1+i)x}$$

Sustituyendo de nuevo en (4.59), encontramos que la solución (compleja) al problema del sótano de raíz es

$$u(t, x) = ae^{-x\sqrt{w/(2\gamma)}} e^{i(\omega t - \sqrt{w/(2\gamma)}x)} \quad (52)$$

La solución real correspondiente se obtiene tomando la parte real,

$$u(t, x) = ae^{-x\sqrt{\omega/(2\gamma)}} \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}}x) \quad (53)$$

El primer factor en (4.61) está decayendo exponencialmente en función de la profundidad. Por lo tanto, cuanto más subterráneo está, menos perceptible es el efecto de las fluctuaciones de temperatura de la superficie. El segundo factor es periódico en el tiempo, con la misma frecuencia anual ω . La característica interesante es que las variaciones de temperatura (4.61) están típicamente desfasadas con respecto a las fluctuaciones de temperatura de la superficie, con un desfase general de

$$\delta = \sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}}x$$

eso depende linealmente de la profundidad x . En particular, una bodega construida a una profundidad donde δ es un múltiplo impar de π estará completamente desfasada, siendo más calurosa en invierno y más fría en verano. Por lo tanto, la profundidad ideal (menos profunda) a la que construir un sótano de raíz tomaría $\delta = \pi$, correspondiente a una profundidad de

$$x = \pi\sqrt{\frac{2\gamma}{\omega}} \quad (54)$$

Para suelos típicos de la Tierra, $\gamma \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ y entonces, $x \approx 9,9$ metros. Sin embargo, a esta profundidad, la amplitud relativa de las oscilaciones es

$$e^{-x\sqrt{\omega/(2\gamma)}} = e^{-\pi} = 0,04$$

y por tanto sólo hay una fluctuación de temperatura del 4%. En Minneapolis, la temperatura varía, aproximadamente, de -40° C a $+40^\circ \text{ C}$, y por lo tanto, nuestro sótano de raíces de 10 metros de profundidad experimentaría solo una desviación anual de temperatura de 3.2° C con respecto al invierno, cuando es el más cálido, al verano, cuando hace más frío. Construir el sótano con el doble de profundidad provocaría una fluctuación de temperatura de 0,2%, ahora en fase con las variaciones de la superficie, lo que significa que el sótano estaría, a todos los efectos prácticos, a una temperatura constante durante el año.

11.9. La ecuación de onda

Regresemos a la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (55)$$

con velocidad de onda constante $c > 0$, utilizado para modelar las vibraciones de barras y cuerdas.

Desafortunadamente, el enfoque de d'Alembert no se extiende a otras ecuaciones de interés para nosotros, por lo que vale la pena desarrollar técnicas de solución alternativas, particularmente aquellas basadas en métodos de Fourier. De hecho, las soluciones en serie resultantes proporcionan información valiosa sobre la dinámica de las olas en intervalos delimitados.

11.10. Separación de variables y soluciones de la serie Fourier

Una de las técnicas más antiguas, y aún una de las más utilizadas, para construir soluciones analíticas explícitas para una amplia gama de ecuaciones diferenciales parciales lineales es el método de separación de variables. De hecho, ya hemos empleado una versión simplificada del método al construir cada resolución propia de la ecuación de calor como una función exponencial de t multiplicada por una función de x .

En general, el método de separación de variables busca soluciones a la ecuación diferencial parcial que se puede escribir como el producto de funciones de las variables independientes individuales. Para la ecuación de onda, buscamos soluciones

$$u(t, x) = w(t)v(x)$$

que se puede escribir como el producto de una función de t sola y una función de x sola. Cuando el método tiene éxito (lo cual no está garantizado de antemano), ambos factores se encuentran como soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias.

Veamos si tal expresión puede resolver la ecuación de onda. En primer lugar,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = w''(t)v(x) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = w(t)v''(x)$$

donde los números primos indican derivadas ordinarias. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de onda (4.63), obtenemos

$$\omega''(t)v(x) = c^2\omega(t)v''(x)$$

Dividiendo ambos lados por $w(t)v(x)$ (que asumimos que no es idénticamente cero, ya que de lo contrario, la solución sería trivial) da como resultado

$$\frac{w''(t)}{w(t)} = c^2 \frac{v''(x)}{v(x)}$$

que efectivamente "separa" las variables t y x en cada lado de la ecuación, de ahí el nombre "separación de variables".

Ahora bien, ¿cómo podría una función de t sola ser igual a una función de x sola? Un momento de reflexión debería convencer al lector de que esto puede suceder si y solo si las dos funciones son constantes, por lo que

$$\frac{w''(t)}{w(t)} = c^2 \frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda \quad (56)$$

donde usamos λ para indicar la constante de separación común. Por tanto, los factores individuales $w(t)$ y $v(x)$ deben satisfacer ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2 w}{dt^2} - \lambda w = 0 \quad \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{\lambda}{c^2} v = 0$$

como fue prometido. Ya sabemos cómo resolver estas dos ecuaciones diferenciales ordinarias mediante técnicas elementales. Hay tres casos diferentes, dependiendo del signo de la constante de separación λ . Como resultado, cada valor de λ conduce a cuatro soluciones independientes separables de la ecuación de onda, como se indica en la tabla adjunta.

11.11. Soluciones separables de la ecuación de onda

Hasta ahora, no hemos tenido en cuenta las condiciones de contorno. Considere en primer lugar el caso de una cadena de longitud con dos extremos fijos y, por tanto, sujeta a condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas.

$$u(t, 0) = 0 = u(t, \ell)$$

Sustituyendo el ansatz separable (4.65), encontramos que $v(x)$ debe satisfacer

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{\lambda}{c^2} v = 0 \quad v(0) = 0 = v(\ell)$$

El sistema completo de soluciones (no triviales) a este problema de valores en la frontera se encontró en (4.21):

$$v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por tanto, de acuerdo con la tabla, las correspondientes soluciones separables son

$$u_n(t, x) = \cos \frac{n\pi ct}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \tilde{u}_n(t, x) = \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (57)$$

Ahora emplearemos estas soluciones para construir una solución en serie candidata a la ecuación de onda sujeta a las condiciones de contorno prescritas:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} + d_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right] \quad (58)$$

La solución es esta combinación lineal de los modos naturales de Fourier que vibran con frecuencias.

$$w_n = \frac{n\pi c}{\ell} = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

donde la segunda expresión se sigue de (2.66). Observe que, cuanto más larga es la cuerda ℓ , o cuanto mayor es su densidad ρ , más lentas son las vibraciones, mientras que al aumentar su rigidez o tensión k las acelera, exactamente de acuerdo con nuestra intuición física.

Los coeficientes de Fourier b_n y d_n en (4.68) estarán determinados únicamente por las condiciones iniciales

$$u(0, x) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x) \quad 0 < x < \ell$$

Al diferenciar la serie término por término, descubrimos que debemos representar el desplazamiento y la velocidad iniciales como series sinusoidales de Fourier

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{n\pi c}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} = g(x)$$

Por lo tanto

$$b_n = \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (59)$$

son los coeficientes del seno de Fourier (3.85) del desplazamiento inicial $f(x)$, mientras que

$$d_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (60)$$

son versiones reescaladas de los coeficientes del seno de Fourier de la velocidad inicial $g(x)$.

Ejemplo 24 *Una cuerda de longitud unitaria fijada en ambos extremos se mantiene tensa en su centro y luego se suelta. Nuestra tarea es describir las vibraciones resultantes. Supongamos que las unidades físicas se eligen de modo que $c^2 = 1$, por lo que se nos pide que resuelva el problema del valor de frontera inicial*

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = 0 \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad (61)$$

Para ser específicos, suponemos que el centro de la cuerda se ha movido media unidad, por lo que el desplazamiento inicial es

$$y = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

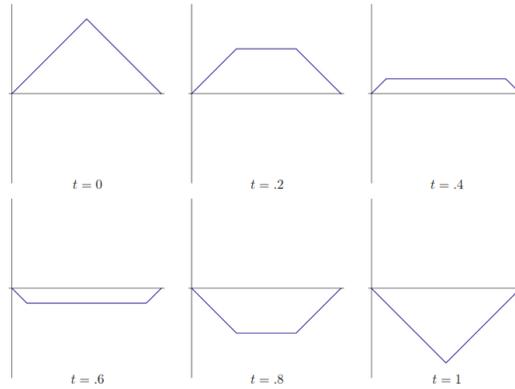


Figura 4.4. Solución de cuerda pulsada de la ecuación de onda.

Las frecuencias vibratorias $\varpi_n = n\pi$ son los múltiplos integrales de π , por lo que los modos naturales de vibración son

$$\begin{aligned} &\cos(n\pi t) \sin(n\pi x) \\ &\sin(n\pi t) \sin(n\pi x) \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \dots$

En consecuencia, la solución general al problema del valor en la frontera es

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(n\pi t) \sin(n\pi x) + d_n \sin(n\pi t) \sin(n\pi x))$$

donde

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} 4 \int_0^{1/2} x \sin(n\pi x) dx = \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2} & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}$$

mientras que $d_n = 0$. Por lo tanto, la solución es la serie sinusoidal de Fourier

$$u(t, x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)\pi t \sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2} \quad (62)$$

cuyo perfil se muestra en la Figura 4.4. En el tiempo $t = 1$, el desplazamiento original se reproduce exactamente, pero al revés. La dinámica subsiguiente procede como antes, pero en forma de imagen especular. El desplazamiento original reaparece en el tiempo $t = 2$, después de lo cual el movimiento se repite periódicamente. Curiosamente, en los momentos $t_k = 0,5, 1,5, 2,5, \dots$, el desplazamiento es idénticamente cero, $u(t_k, x) \equiv 0$, aunque la velocidad no es, $u_t(t_k, x) \equiv 0$. La

solución parece ser fina por partes, es decir, su gráfica es una colección de líneas rectas. De hecho, esto puede demostrarse como consecuencia de la fórmula de d'Alembert.

Observe que, a diferencia de la ecuación de calor, la ecuación de onda no suaviza las discontinuidades y esquinas en los datos iniciales. Y, aunque nos referiremos libremente a tales funciones C^2 por partes como "soluciones", no son, de hecho, soluciones clásicas. (Sin embargo, su estatus como soluciones débiles puede establecerse utilizando los métodos anteriores).

Si bien la forma en serie (4.68) de la solución es quizás menos satisfactoria que una fórmula de estilo d'Alembert, aún podemos usarla para deducir propiedades cualitativas importantes. En primer lugar, dado que cada término es periódico en t con período $2\ell/c$, la solución completa es periódica en el tiempo con ese período: $u(t + 2\ell/c, x) = u(t, x)$. De hecho, después de medio período, la solución se reduce a

$$u\left(\frac{\ell}{c}, x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi(\ell - x)}{\ell} = -u(0, \ell - x) = -f(\ell - x)$$

en general

$$u\left(t + \frac{\ell}{c}, x\right) = -u(t, \ell - x) \quad u\left(t + \frac{2\ell}{c}, x\right) = u(t, x) \quad (63)$$

Por lo tanto, la forma de onda inicial se reproduce, primero como una imagen especular invertida de sí misma en el tiempo $t = \ell / c$, y luego en su forma original en el tiempo $t = 2\ell/c$. Esto tiene la importante consecuencia de que las vibraciones de los medios unidimensionales (homogéneos) son inherentemente periódicas, porque las frecuencias fundamentales (4.69) son todas múltiplos enteros del más bajo: $\varpi_n = n\varpi_1$.

Nota: La observación inmediatamente anterior tiene importantes consecuencias musicales. Para el oído humano, las vibraciones sónicas que son múltiplos integrales de una sola frecuencia y, por lo tanto, periódicas en el tiempo, suenan armoniosas, mientras que aquellas con frecuencias relacionadas irracionalmente y, por lo tanto, experimentan vibraciones aperiódicas, suenan disonantes. Esta es la razón por la que la mayoría de los instrumentos tonales dependen de vibraciones en una dimensión, ya sea una cuerda de violín o piano, una columna de aire en un instrumento de viento (flauta, clarinete, trompeta o saxofón), una barra de xilófono o un triángulo. Por otro lado, la mayoría de los instrumentos de percusión se basan en las vibraciones de medios bidimensionales, por ejemplo, tambores y platillos, o cuerpos sólidos tridimensionales, por ejemplo, bloques.

Considere a continuación una cuerda con ambos extremos libres, y así sujeta a las condiciones de frontera de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) \quad (64)$$

Las soluciones de (4.66) que satisfacen $v'(0) = 0 = v'(\ell)$ son ahora

$$v_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{\ell} \quad \text{con} \quad w_n = \frac{n\pi c}{\ell}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

La solución resultante toma la forma de una serie de coseno de Fourier.

$$u(t, x) = a_0 + c_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{n\pi ct}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad (65)$$

Los primeros dos términos provienen de la función propia nula $v_0(x) = 1$ con $\varpi_0 = 0$. La cuerda vibra con las mismas frecuencias fundamentales (4.69) que en el caso de extremo fijo, pero ahora hay un modo inestable adicional $c_0 t$ que ya no es periódica, pero crece linealmente en el tiempo. En general, la presencia de funciones propias nulas implica que la ecuación de onda admite modos inestables.

Sustituyendo (4.76) en las condiciones iniciales

$$u(0, x) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, x) = g(x) \quad 0 < x < \ell$$

encontramos que los coeficientes de Fourier están prescritos, como antes, por el desplazamiento y la velocidad iniciales:

$$a_n \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad c_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Los coeficientes de orden cero

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx \quad c_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) dx$$

son iguales al desplazamiento inicial promedio y la velocidad inicial promedio de la cuerda. En particular, cuando $c_0 = 0$, no hay velocidad inicial neta y no se excita el modo inestable. En este caso, la solución es periódica en el tiempo, oscilando alrededor de la posición dada por el desplazamiento inicial promedio. Por otro lado, si $c_0 \neq 0$, la cuerda se moverá hacia afuera con una velocidad media constante c_0 , mientras vibra a las mismas frecuencias fundamentales.

Se aplican consideraciones similares al problema del valor límite periódico para la ecuación de onda en un anillo circular.

11.12. La fórmula de D'Alembert para intervalos acotados

En el teorema 2.15, derivamos la fórmula explícita de d'Alembert

$$u(t, x) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz$$

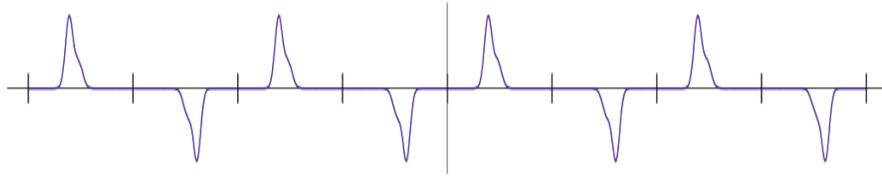


Figura 4.5. Extraña extensión periódica de un pulso concentrado

para resolver el problema de valor inicial básico para la ecuación de onda en un intervalo infinito:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u(0, x) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x) \quad -\infty < x < \infty$$

En esta sección explicamos cómo adaptar la fórmula para resolver problemas de valores de frontera iniciales en intervalos acotados, sumando así de manera efectiva la solución de la serie de Fourier.

El caso más fácil de tratar es el problema periódico en $0 \leq x \leq \ell$, con condiciones de contorno

$$u(t, 0) = u(t, \ell), \quad u_x(t, 0) = u_x(t, \ell)$$

Si extendemos el desplazamiento inicial $f(x)$ y la velocidad $g(x)$ para que sean funciones periódicas de período ℓ , mientras $f(x + \ell) = f(x)$ y $g(x + \ell) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces la solución de d'Alembert también será periódica en x , si $u(t, x + \ell) = u(t, x)$. En particular, satisface las condiciones de contorno y, por tanto, coincide con la solución deseada.

A continuación, suponga que tenemos condiciones de contorno fijas (de Dirichlet)

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, \ell) = 0 \tag{66}$$

La solución resultante se puede escribir como una serie sinusoidal de Fourier (4.68) y, por lo tanto, es tanto impar como 2ℓ -periódica en x . Por lo tanto, para escribir la solución en la forma d'Alembert (4.77), extendemos el desplazamiento inicial $f(x)$ y la velocidad $g(x)$ para que sean funciones periódicas impares del período 2ℓ :

$$f(-x) = -f(x), \quad f(x + 2\ell) = f(x), \quad g(-x) = -g(x), \quad g(x + 2\ell) = g(x).$$

Esto asegurará que la solución de d'Alembert también siga siendo extraña y periódica. Como resultado, satisface las condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas (4.79) para todo t , cf. Tenga en cuenta que, mientras que la solución $u(t, x)$ se define para todo x , los únicos valores físicamente

relevantes ocurren en el intervalo $0 \leq x \leq \ell$. No obstante, los efectos de los desplazamientos en el régimen no físico se sentirán eventualmente a medida que las ondas en propagación atraviesen el intervalo físico.

Por ejemplo, considere un desplazamiento inicial que se concentra cerca de $x = \xi$ para algunos $0 < \xi < \ell$, la extensión periódica consta de dos conjuntos de réplicas: las del mismo forma que aparece en las posiciones $\xi \pm 2\ell, \xi \pm 4\ell, \dots$, y sus imágenes especulares invertidas en las posiciones intermedias $-\xi, -\xi \pm 2\ell, -\xi \pm 4\ell, \dots$; La figura 4.5 muestra un ejemplo representativo. La solución resultante comienza con cada uno de los pulsos, tanto positivos como negativos, dividiéndose en dos réplicas de la mitad del tamaño que se propagan con velocidad c en direcciones opuestas.

Cuando un pulso en movimiento a la izquierda y a la derecha se encuentran, emergen inalterados de la interacción. El proceso se repite periódicamente, con una fila infinita de pulsos de la mitad del tamaño que se mueven hacia la derecha interactuando caleidoscópicamente con una fila infinita que se mueve hacia la izquierda.

Sin embargo, solo la parte de esta solución que se encuentra en $0 \leq x \leq \ell$ se observa realmente en la cadena física. El efecto es como si uno estuviera viendo la solución completa cuando pasa por una ventana de longitud. Dichos observadores interpretarán lo que ven de manera un poco diferente.

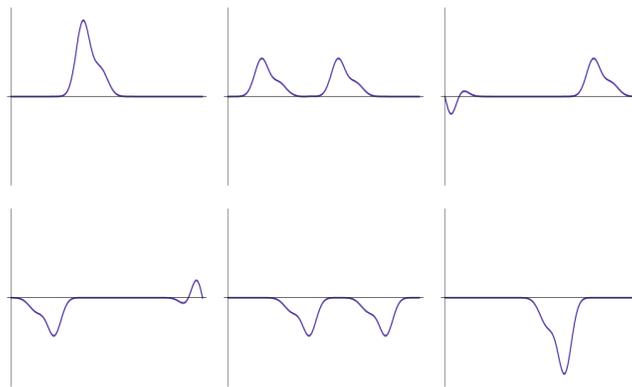


Figura 4.6. Solución de la ecuación de onda con extremos fijos.

Es decir, el pulso original que comienza en la posición $0 < \xi < \ell$ se divide en dos réplicas de la mitad del tamaño que se mueven hacia afuera en direcciones opuestas. A medida que cada pulso de la mitad del tamaño llega al final de la cuerda, se encuentra con un pulso de imagen especular que se ha estado propagando en la dirección opuesta al régimen no físico.

El pulso se refleja al final del intervalo y se convierte en una imagen de espejo invertida que se mueve en la dirección opuesta. El pulso positivo original se ha movido fuera del extremo de la

cuerda justo cuando su imagen especular se ha movido al régimen físico. (Una realización física común es un pulso que se propaga por una cuerda para saltar que se mantiene fija en su extremo; el pulso reflejado regresa al revés.)

Un reflejo similar ocurre cuando el otro pulso de la mitad del tamaño golpea el otro extremo del intervalo físico, después de cuya solución consiste en dos pulsos invertidos de la mitad del tamaño que se mueven uno hacia el otro. En el tiempo $t = \ell/c$ se recombinan en el punto $\ell - \xi$ para formar instantáneamente una imagen especular de tamaño completo, pero invertida, de la perturbación original, de acuerdo con (4.74).

El pulso recombinado, a su vez, se divide en dos pulsos invertidos de la mitad del tamaño que, cuando cada uno choca con el extremo, se refleja y vuelve a su forma vertical original. En el tiempo $t = 2\ell / c$, los pulsos se recombinan para reproducir exactamente el desplazamiento original. Luego, el proceso se repite y la solución es periódica en el tiempo con el período $2\ell/c$.

En la Figura 4.6, la primera imagen muestra el desplazamiento inicial. En el segundo, se ha dividido en clones de tamaño medio que se mueven hacia la izquierda y hacia la derecha. En la tercera imagen, la protuberancia que se mueve hacia la izquierda está en proceso de colisionar con el extremo izquierdo de la cuerda. En la cuarta imagen, ha emergido de la colisión y ahora está boca abajo, reflejada y moviéndose hacia la derecha.

Mientras tanto, el pulso que se mueve hacia la derecha comienza a chocar con el extremo derecho. En la quinta imagen, ambos pulsos han completado sus colisiones y ahora se mueven de nuevo hacia el otro, donde, en la última imagen, se recombinan en una imagen especular invertida del pulso original. A continuación, el proceso se repite, en una imagen especular, recombinando finalmente el pulso original, momento en el que todo el proceso comienza de nuevo.

11.13. El problema del valor límite de Neumann

La siguiente ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = 0$$

se maneja de manera similar. Dado que la solución tiene la forma de una serie de coseno de Fourier en x , extendemos las condiciones iniciales para que sean pares 2ℓ -funciones periódicas

$$f(-x) = f(x), \quad f(x + 2\ell) = f(x), \quad g(-x) = g(x), \quad g(x + 2\ell) = g(x)$$

La solución de d'Alembert resultante (4.77) también es par y 2ℓ -periódica en x , y por tanto satisface las condiciones de contorno, cf. Ejercicio 4.2.31 (b). En este caso, cuando un pulso golpea

uno de los extremos, su reflejo permanece en posición vertical, pero se convierte en una imagen especular del original; una ilustración física familiar es una onda de agua que se refleja en una pared sólida.

En resumen, ahora hemos estudiado dos formas muy diferentes de resolver la ecuación de onda unidimensional. El primero, basado en la fórmula de d'Alembert, enfatiza sus aspectos similares a partículas, donde los paquetes de ondas individuales chocan entre sí, o se reflejan en el límite, manteniendo al mismo tiempo su forma general, mientras que el segundo, basado en el análisis de Fourier, enfatiza el carácter vibratorio o ondulado de las soluciones.

Algunas soluciones parecen ondas vibratorias, mientras que otras parecen mucho más partículas que interactúan. Pero, como los proverbiales ciegos que describen a un elefante, estas son simplemente dos facetas de la misma solución. La fórmula de la serie Fourier muestra cómo cada solución similar a una partícula puede descomponerse en sus modos vibratorios constituyentes, mientras que la fórmula de d'Alembert demuestra cómo las soluciones vibratorias se combinan en paquetes de ondas en movimiento.

La coexistencia de características de partículas y ondas recuerda el debate histórico de larga duración sobre la naturaleza de la luz. Newton y sus discípulos propusieron un método basado en partículas, anticipándose al concepto moderno de fotones. Sin embargo, hasta principios del siglo XX, la mayoría de los físicos defendían un punto de vista ondulatorio o vibratorio de Einstein.

La explicación del efecto fotoeléctrico sirvió para resucitar la interpretación de las partículas. Solo con el establecimiento de la mecánica cuántica se resolvió el debate: la luz y, de hecho, todas las partículas subatómicas manifiestan características tanto de partículas como de ondas, según el experimento y la situación física. ¡Pero una base teórica para la desconcertante dualidad onda-partícula ya podría haberse encontrado en las fórmulas de solución en competencia de Fourier y d'Alembert para la ecuación de onda clásica.

11.14. Las Ecuaciones Planas de Laplace y Poisson

La ecuación bidimensional de Laplace es la ecuación diferencial lineal parcial de segundo orden.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (67)$$

nombrado en honor al influyente matemático francés del siglo XVIII Pierre-Simon Laplace. Junto con sus versiones de dimensiones superiores, es posiblemente el más importante ecuación diferencial

en todas las matemáticas. Una solución con valores reales $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace se conoce como función armónica. Por tanto, el espacio de funciones armónicas puede identificarse como el núcleo del operador diferencial parcial lineal de segundo orden.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (68)$$

conocido como el operador de Laplace, o Laplacian para abreviar. La versión no homogénea o forzada, a saber

$$-\Delta [u] = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (69)$$

se conoce como la ecuación de Poisson, que lleva el nombre de Simeon – Denis Poisson, a quien Laplace le enseñó. Las razones matemáticas y físicas para incluir el signo menos se irán aclarando gradualmente.

Además de su importancia teórica, las ecuaciones de Laplace y Poisson surgen como ecuaciones de equilibrio básicas en una notable variedad de sistemas físicos. Por ejemplo, nosotros puede interpretar $u(x, y)$ como el desplazamiento de una membrana, por ejemplo, una piel de tambor; la falta de homogeneidad $f(x, y)$ en la ecuación de Poisson representa un forzamiento externo sobre la superficie de la membrana.

Otro ejemplo es el equilibrio térmico de las placas planas; aquí $u(x, y)$ representa la temperatura y $f(x, y)$ una fuente de calor externa. En la mecánica de fluidos, $u(x, y)$ representa la función potencial cuyo gradiente $v = \nabla u$ es el campo vectorial de velocidad de un flujo de fluido planar estable. Se aplican consideraciones similares a los potenciales electrostáticos y gravitacionales bidimensionales. Las contrapartes dinámicas de la ecuación de Laplace son las versiones bidimensionales de las ecuaciones de calor y de olas.

Dado que las ecuaciones de Laplace y Poisson describen configuraciones de equilibrio, casi siempre aparecen en el contexto de problemas de valores en la frontera. Buscamos una solución $u(x, y)$ a la ecuación diferencial parcial definida en los puntos (x, y) que pertenecen a un dominio abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. La solución es necesaria para satisfacer las condiciones adecuadas en el límite del dominio, denotado por $\partial\Omega$, que constará de una o más curvas cerradas simples, como se ilustra en la Figura 4.7. Como en los problemas de valores de frontera unidimensionales, hay varios tipos

especialmente importantes de condiciones de contorno.

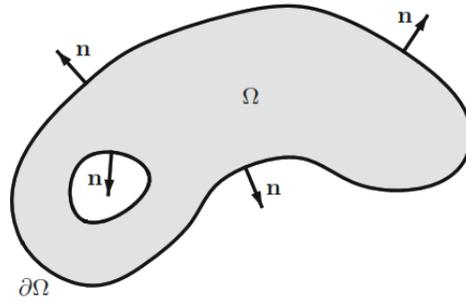


Figura 4.7. Un dominio plano con unidad exterior normal en su límite

Las primeras son las condiciones de contorno fijas o de Dirichlet, que especifican el valor de la función u en el límite:

$$u(x, y) = h(x, y) \quad \text{para } (x, y) \in \partial\Omega \quad (70)$$

En condiciones de regularidad leve en el dominio Ω , los valores de contorno h , y la función de forzamiento f , las condiciones de Dirichlet (4.85) sirven para especificar de manera única la solución $u(x, y)$ a la ecuación de Laplace o de Poisson. Físicamente, en el caso de una membrana libre o forzada, las condiciones de contorno de Dirichlet corresponden a pegar el borde de la membrana a un cable a una altura $h(x, y)$ sobre cada punto de contorno $(x, y) \in \partial\Omega$, como se ilustra en la Figura 4.8.

Se puede obtener fácilmente una realización física sumergiendo el alambre en una solución de jabón; la película de jabón resultante que se extiende sobre el alambre forma una superficie mínima que, si el alambre está razonablemente cerca de la forma plana, es la solución al problema de Dirichlet prescrito por el alambre.

De manera similar, en el modelado del equilibrio térmico, una condición de límite de Dirichlet representa la imposición de una distribución de temperatura prescrita, representada por la función h , a lo largo del límite de la placa.

La segunda clase importante consiste en las condiciones de frontera de Neumann.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = k(x, y) \quad \text{en } \partial\Omega \quad (71)$$

en el que se prescribe la derivada normal de la solución u en la frontera. En general, n denota la unidad hacia afuera normal al límite $\partial\Omega$, es decir, el vector de longitud unitaria, $\|n\| = 1$, que es ortogonal a la tangente al límite y apunta fuera del dominio; ver la Figura 4.7. Por ejemplo, en

termomecánica, una condición de límite de Neumann especifica el flujo de calor que sale de una placa a través de su límite.

Las condiciones de límite de Neumann “sin flujo” u homogéneas, donde $k(x, y) \equiv 0$, corresponden a un límite completamente aislado. En el caso de una membrana, las condiciones de contorno de Neumann homogéneas corresponden a un borde libre y suelto de un tambor. En la mecánica de fluidos, las condiciones de Neumann prescriben el flujo de fluido a través de la frontera; en particular, condiciones de contorno de Neumann homogéneas

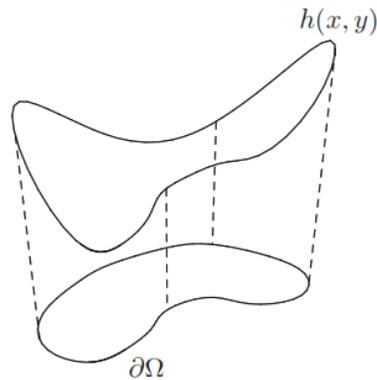


Figura 4.8. Condiciones de frontera de Dirichlet

corresponden a un límite sólido que el fluido no puede penetrar. De manera más general, las condiciones de frontera de Robin

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x, y)u = k(x, y) \text{ en } \partial\Omega$$

También conocidas como condiciones de límite de impedancia debido a sus aplicaciones en electromagnetismo, se utilizan para modelar placas aisladas en baños de calor o membranas unidas a resortes.

Finalmente, se pueden mezclar los tipos anteriores de condiciones de frontera, imponiendo, digamos, condiciones de Dirichlet en una parte de la frontera y condiciones de Neumann en la parte complementaria. Un problema típico de valor de frontera mixto tiene la forma

$$-\Delta u = f \text{ en } \Omega, u = h \text{ en } D, \frac{\partial u}{\partial n} = k \text{ en } N \quad (72)$$

siendo el límite $\partial\Omega = D \cup N$ la unión disjunta de un “segmento de Dirichlet”, denotado por D , y un “segmento de Neumann” N . Por ejemplo, si u representa la temperatura de equilibrio en una placa, entonces el segmento de Dirichlet del límite es donde la temperatura es fija, mientras que el segmento de Neumann está aislado o, más generalmente, tiene un flujo de calor prescrito. De

manera similar, al modelar el desplazamiento de una membrana, el segmento de Dirichlet es donde el borde del tambor se une a un soporte, mientras que el segmento de Neumann homogéneo se deja colgando libre.

11.15. Separación de Variables para la Ecuación de Laplace

Nuestro primer enfoque para resolver la ecuación de Laplace

$$\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se basará en el método de separación de variables. Como en (4.64), buscamos soluciones que se puedan escribir como un producto

$$u(x, y) = v(x)w(y)$$

de una función de x sola multiplicada por una función de y sola. Nosotros calculamos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v''(x)w(y) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v(x)w''(y)$$

y también

$$\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0$$

Luego separamos las variables colocando todos los términos que involucran a x en un lado de la ecuación y todos los términos que involucran a y en el otro; esto se logra dividiendo por $v(x)w(y)$ y luego escribiendo la ecuación resultante en la forma separada

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda \tag{73}$$

Como argumentamos en (4.65), la única forma en que una función de x sola puede ser igual a una función de y sola es si ambas funciones son iguales a una constante de separación común λ . Por tanto, los factores $v(x)$ y $w(y)$ deben satisfacer las ecuaciones diferenciales ordinarias elementales

$$v'' - \lambda v = 0 \qquad w'' + \lambda w = 0$$

Como antes, las fórmulas de solución dependen del signo de la constante de separación λ . Enumeramos la colección resultante de funciones armónicas separables en la siguiente tabla:

11.16. Soluciones separables de la ecuación de Laplace

Dado que la ecuación de Laplace es un sistema lineal homogéneo, cualquier combinación lineal de soluciones también es una solución. Por tanto, podemos construir soluciones más generales como combinaciones lineales finitas o, siempre que prestemos la debida atención a los problemas de

convergencia, series infinitas en las soluciones separables. Nuestro objetivo es resolver problemas de valores en la frontera, por lo que debemos asegurarnos de que la combinación resultante satisfaga las condiciones de la frontera. Pero esta no es una tarea tan fácil, a menos que el dominio subyacente tenga una geometría bastante especial.

De hecho, los únicos dominios delimitados en los que podemos resolver explícitamente problemas de valores de frontera utilizando las soluciones separables anteriores son los rectángulos. Entonces, nos concentraremos en los problemas de valores de frontera para la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ en un rectangulo } R = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$$

Para avanzar, permitiremos valores de límite distintos de cero en solo uno de los cuatro lados del rectángulo. Para ilustrar, nos centraremos en las siguientes condiciones de contorno de Dirichlet:

$$u(x, 0) = f(x), u(x, b) = 0, u(0, y) = 0, u(a, y) = 0 \quad (74)$$

Una vez que sepamos cómo resolver este tipo de problema, podemos emplear la superposición lineal para resolver el problema general del valor de frontera de Dirichlet en un rectángulo; consulte el ejercicio 4.3.12 para obtener más detalles. Otras condiciones de contorno se pueden tratar de manera similar, con la condición de que la condición en cada lado del rectángulo sea completamente Dirichlet o completamente Neumann o, más generalmente, completamente Robin con coeficiente de transferencia constante.

Para resolver el problema del valor en la frontera (4.91–92), el primer paso es reducir las soluciones separables a solo aquellas que respetan las tres condiciones de frontera homogéneas.

La función separable $u(x, y) = v(x)w(y)$ desaparecerá en los lados superior, derecho e izquierdo del rectángulo, siempre que

$$v(0) = v(a) = 0 \quad y \quad w(b) = 0$$

Con referencia a la tabla anterior, la primera condición $v(0) = 0$ requiere

$$v(x) = \begin{cases} \sin wx & \lambda = -w^2 < 0 \\ x & \lambda = 0 \\ \sinh(wx) & \lambda = w^2 > 0 \end{cases}$$

donde $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ es la función del seno hiperbólico habitual. Sin embargo, el segundo y tercer caso no pueden satisfacer la segunda condición de frontera $v(a) = 0$, por lo que los descartamos. El primer caso conduce a la condición

$$v(a) = \sin \varpi a = 0, \quad y \quad \varpi a = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Las constantes y soluciones de separación correspondientes (hasta un múltiplo constante) son

$$\lambda_n = -w^2 = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (75)$$

Nota: Hasta ahora, simplemente hemos recalculado los valores propios conocidos y las funciones propias del problema familiar del valor límite $v'' - \lambda v = 0, v(0) = v(a) = 0$

A continuación, como $\lambda = -\varpi^2 < 0$, tenemos $w(y) = c_1 e^{\varpi y} + c_2 e^{-\varpi y}$ para las constantes c_1, c_2 . La tercera condición de frontera $w(b) = 0$ requiere que, hasta un múltiplo constante,

$$w_n(y) = \sinh w(b - y) = \sinh \frac{n\pi(b - y)}{a} \quad (76)$$

Concluimos que las funciones armónicas

$$u_n(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b - y)}{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (77)$$

proporcionar una lista completa de soluciones separables que satisfacen las tres condiciones de contorno homogéneas. Queda por analizar la condición de contorno no homogénea a lo largo del borde inferior del rectángulo. Para ello, intentemos una superposición lineal de las soluciones separables relevantes en forma de una serie infinita.

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b - y)}{a}$$

cuyos coeficientes c_1, c_2, \dots serán prescritos por la condición de contorno restante. En el borde inferior, $y = 0$, encontramos

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} = f(x) \quad 0 \leq x \leq a \quad (78)$$

que toma la forma de una serie sinusoidal de Fourier para la función $f(x)$. Dejar

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \quad (79)$$

sean sus coeficientes de seno de Fourier, de donde $c^n = b_n / \sinh(n\pi b/a)$. Por lo tanto, anticipamos que la solución al problema del valor en la frontera se puede expresar como la serie infinita

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \quad (80)$$

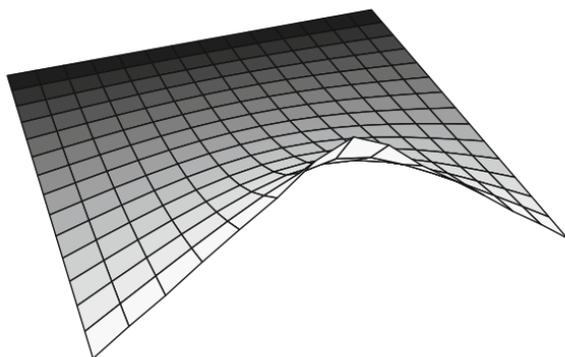


Figura 4.9. Membrana cuadrada sobre un alambre

¿Esta serie realmente converge a la solución del problema del valor en la frontera?

El análisis de Fourier dice que, en condiciones muy suaves en la función de frontera $f(x)$, la respuesta es sí. Suponga que sus coeficientes de Fourier están uniformemente acotados,

$$|b_n| \leq M \quad \text{para toda } n \geq 1$$

lo cual, de acuerdo con (4.27), es verdadero siempre que $f(x)$ sea continuo a trozos o, más generalmente, integrable: $\int_0^a |f(x)| dx < \infty$. En este caso, como se le pide que pruebe en el ejercicio 4.3.20, los coeficientes de la serie sinusoidal de Fourier (4.98) van a cero exponencialmente rápido:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \rightarrow 0 \quad \text{para todo } 0 < y \leq b$$

y así, en cada punto dentro del rectángulo, la serie puede aproximarse bien por suma parcial. El teorema 3.31 nos dice que, para cada $0 < y \leq b$, la solución $u(x, y)$ es una función infinitamente diferenciable de x . Además, mediante la diferenciación de términos de la serie con respecto a y y el uso de la Proposición 3.28, también establecemos que la solución es infinitamente diferenciable con respecto a y ; consulte el ejercicio 4.3.21. (De hecho, como veremos, las soluciones de la ecuación de Laplace son siempre funciones analíticas dentro de su dominio de definición, incluso cuando sus valores de frontera son bastante aproximados). Dado que todos los términos individuales satisfacen la ecuación de Laplace, concluimos que la serie (4.98) es de hecho una solución clásica al problema del valor en la frontera.

11.17. Coordenadas polares

El método de separación de variables puede explotarse con éxito en algunas otras geometrías muy especiales. Un caso particularmente importante es un disco circular. Para ser específicos, supongamos que el disco tiene un radio de 1 y está centrado en el origen. Considere el problema del valor límite de Dirichlet

$$\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 < 1, \quad \text{y} \quad u = h, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (81)$$

de modo que la función $u(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace en el disco unitario y las condiciones de contorno de Dirichlet especificadas en el círculo unitario. Por ejemplo, $u(x, y)$ podría representar el desplazamiento de un tambor circular que está unido a un cable de altura

$$h(x, y) = h(\cos \theta, \sin \theta) \equiv h(\theta), \quad -\pi < \theta \leq \pi \quad (82)$$

en cada punto $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ en su borde.

Las soluciones rectangulares separables no son particularmente útiles en esta situación, por lo que buscamos soluciones que se adapten mejor a una geometría circular. Esto nos inspira a adoptar coordenadas polares.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \text{o} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

y escribe la solución $u(r, \theta)$ en función de la misma.

Advertencia: A menudo retendremos el mismo símbolo, por ejemplo, u , al reescribir una función en un sistema de coordenadas diferente. Esta es la convención del análisis tensorial, la física y la geometría diferencial, [3], que trata la función (campo escalar) como un objeto intrínseco, que se realiza concretamente a través de su fórmula en cualquier sistema de coordenadas elegido.

Por ejemplo, si $u(x, y) = x^2 + 2y$ en coordenadas rectangulares, entonces su expresión en coordenadas polares es $u(r, \theta) = (r \cos \theta)^2 + 2r \sin \theta$, *no* $r^2 + 2\theta$. Esta convención evita el inconveniente de tener que idear nuevos símbolos al cambiar de coordenadas.

Necesitamos relacionar las derivadas con respecto a x y y con las derivadas con respecto a r y θ . Realizando un cálculo estándar de la regla de la cadena multivariante basado en (4.103), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (83)$$

Aplicando los cuadrados de los últimos operadores diferenciales a $u(r, \theta)$, encontramos, después de un cálculo en el que muchos de los términos se cancelan, la forma de coordenadas polares de la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (84)$$

Las condiciones de contorno se imponen en el círculo unitario $r = 1$, y así, por (4.102), toman la forma

$$u(1, \theta) = h(\theta) \quad (85)$$

Tenga en cuenta que, para ser funciones de un solo valor de x , y , la solución $u(r, \theta)$ y sus valores de frontera $h(\theta)$ deben ser funciones periódicas de 2π de la coordenada angular:

$$u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta), \quad h(\theta + 2\pi) = h(\theta) \quad (86)$$

La separación polar de variables se basa en Ansatz

$$u(r, \theta) = v(r)w(\theta) \quad (87)$$

lo que supone que la solución es un producto de funciones de las variables individuales. Sustituyendo (4.108) en la forma polar (4.105) de la ecuación de Laplace se obtiene

$$v''(r)w(\theta) + \frac{1}{r}v'(r)w(\theta) + \frac{1}{r^2}v(r)w''(\theta) = 0$$

Ahora separamos las variables moviendo todos los términos que involucran r a un lado de la ecuación y todos los términos que involucran a θ al otro. Esto se logra multiplicando primero la ecuación por $r^2/(v(r)w(\theta))$ y luego moviendo el término final al lado derecho:

$$\frac{r^2v''(r) + rv'(r)}{v(r)} = -\frac{w''(\theta)}{w(\theta)} = \lambda$$

Como en el caso rectangular, una función de r puede ser igual a una función de θ si y solo si ambos son iguales a una constante de separación común, que llamamos λ . Por tanto, la ecuación diferencial parcial se divide en un par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$r^2v'' + rv' - \lambda v = 0, \quad w'' + \lambda w = 0 \quad (88)$$

que prescribirá la solución separable (4.108). Observe que ambos tienen la forma de una ecuación de función propia en la que la constante de separación λ juega el papel del valor propio.

Como siempre, solo nos interesan las soluciones distintas de cero.

Ya hemos resuelto el problema de valores propios para $w(\theta)$. Luego $w(\theta + 2\pi) = w(\theta)$ debe ser una función periódica 2π . Por lo tanto, según nuestra discusión anterior, este problema de valor de frontera periódico tiene funciones propias distintas de cero

$$1, \sin n\theta, \cos n\theta \quad n = 1, 2, \dots, \quad (89)$$

correspondiente a los valores propios (constantes de separación)

$$\lambda = n^2 \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$

Con el valor de λ fijo, la ecuación diferencial ordinaria lineal para la componente radial,

$$r^2 v'' + r v' - n^2 v = 0$$

no tiene coeficientes constantes. Pero, afortunadamente, tiene la forma de una ecuación diferencial ordinaria de Euler de segundo orden, [23, 89], y por lo tanto se puede resolver fácilmente sustituyendo la potencia ansatz $v(r) = r^k$. (Véase también el ejercicio 4.3.23.) Tenga en cuenta que

$$v'(r) = k r^{k-1}, \quad v''(r) = k(k-1) r^{k-2},$$

y por lo tanto, sustituyendo en la ecuación diferencial

$$r^2 v'' + r v' - n^2 v = [k(k-1) + k - n^2] r^k = (k^2 - n^2) r^k$$

Por tanto, r^k es una solución si y solo si

$$k^2 - n^2 = 0 \quad \text{y por lo tanto} \quad k = \pm n$$

Para $n \neq 0$, hemos encontrado las dos soluciones linealmente independientes

$$v_1(r) = r^n, \quad v_2(r) = r^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (90)$$

Cuando $n = 0$, la potencia ansatz produce solo la solución constante. Pero en este caso, la ecuación $r^2 v'' + r v' = 0$ es efectivamente de primer orden y lineal en v , por lo que se integra fácilmente. Esto proporciona las dos soluciones independientes

$$v_1(r) = 1, \quad v_2(r) = \log r \quad n = 0 \quad (91)$$

Combinando (4.110) y (4.112-113), producimos la lista completa de soluciones de coordenadas polares separables para la ecuación de Laplace:

$$1, r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta, \log r, r^{-n} \cos n\theta, r^{-n} \sin n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \quad (92)$$

Ahora, las soluciones en la fila superior de (4.114) son continuas (de hecho analíticas) en el origen, donde $r = 0$, mientras que las soluciones en la fila inferior tienen singularidades como $r \rightarrow 0$. Estos últimos no son útiles en la situación actual, ya que requerimos que la solución permanezca acotada y suave, incluso en el centro del disco. Por lo tanto, debemos usar solo las soluciones no singulares para inventar una solución en serie candidata

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta) \quad (93)$$

Los coeficientes a_n, b_n serán prescritos por las condiciones de contorno (4.106). Sustituyendo $r = 1$, obtenemos

$$u(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = h(\theta)$$

Reconocemos esto como una serie estándar de Fourier (3.29) (con θ reemplazando x) para la función periódica $2\pi h(\theta)$. Por lo tanto

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad (94)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (95)$$

son precisamente sus coeficientes de Fourier, cf. (3,35). De esta manera, hemos producido una solución en serie (4.115) para el problema del valor en la frontera (4.105-106).

Observación: Presentamos la variable compleja

$$z = x + iy = r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta \quad (96)$$

nos permite escribir

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n \cos n\theta + i r^n \sin n\theta$$

Por lo tanto, las soluciones separables no singulares son los polinomios armónicos

$$r^n \cos n\theta = \operatorname{Re} z^n, \quad r^n \sin n\theta = \operatorname{Im} z^n \quad (97)$$

Los primeros se enumeran en la siguiente tabla:

n	$\operatorname{Re} z^n$	$\operatorname{Im} z^n$
0	1	0
1	x	y
2	$x^2 - y^2$	$2xy$
3	$x^3 - 3xy^2$	$3x^2y - y^3$
4	$x^4 - 4x^2y^2 + y^4$	$4x^3y - 4xy^3$

Su expresión general se obtiene mediante la fórmula binomial:

$$\begin{aligned}
 z^n &= (x + iy)^n \\
 &= x^n + nx^{n-1}(iy) + \binom{n}{2}x^{n-2}(iy)^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}(iy)^3 + \dots + (iy)^n \\
 &= x^n + inx^{n-1}y - \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 - i\binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \dots
 \end{aligned}$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{98}$$

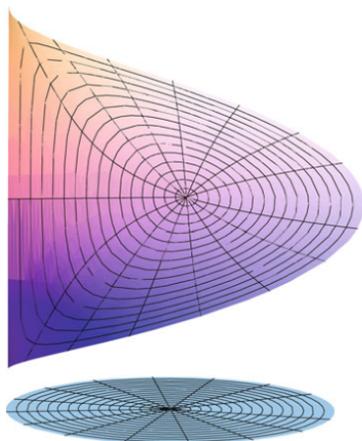


Figura 4,10. Membrana unida a un alambre helicoidal

son los coeficientes binomiales habituales. Separando los términos reales e imaginarios, producimos la fórmula explícita

$$r^n \cos n\theta = \operatorname{Re} z^n = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{4}x^{n-4}y^4 - \dots \tag{99}$$

$$r^n \sin n\theta = \operatorname{Im} z^n = nx^{n-1}y - \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \binom{n}{5}x^{n-5}y^5 - \dots \tag{100}$$

para los dos polinomios armónicos independientes de grado n .

Ejemplo 25 Considere el problema del valor límite de Dirichlet en el disco unitario con

$$u(1, \theta) = \theta \quad \text{para} \quad -\pi < \theta < \pi \tag{101}$$

Los datos de contorno se pueden interpretar como un cable en forma de una sola vuelta de una hélice en espiral que se asienta sobre el círculo unitario. El cable tiene una discontinuidad de un solo salto, de magnitud 2π , en el punto límite $(-1, 0)$. La serie Fourier requerida

$$h(\theta) = \theta \sim 2\left(\sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \frac{\sin 4\theta}{4} + \dots\right)$$

ya se calculó en el ejemplo 3.3. Por lo tanto, invocando nuestra fórmula de solución (4.115-116), tenemos

$$u(r, \theta) = 2\left(r \sin \theta - \frac{r^2 \sin 2\theta}{2} + \frac{r^3 \sin 3\theta}{3} - \frac{r^4 \sin 4\theta}{4} + \dots\right) \quad (102)$$

es la solución deseada, que se representa en la figura 4.10. De hecho, esta serie se puede resumir explícitamente. En vista de (4.119) y la fórmula habitual (A.13) para el logaritmo complejo, tenemos

$$u = 2 \operatorname{Im}\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots\right) = 2 \operatorname{Im} \log(1 + z) = 2\psi'$$

donde

$$\psi' = \tan^{-1} \frac{y}{1+x}$$

es el ángulo que forma la línea que pasa por los dos puntos (x, y) y $(1, 0)$ con el eje x , como se muestra en la figura 4.11. Debe intentar convencerse de que, en el círculo unitario, $2\psi = \theta$ tiene los valores límite correctos. Observe que, aunque los valores límite son discontinuos, la solución es una función analítica dentro del disco.

De hecho, a diferencia de la serie rectangular (4.98), la fórmula de solución de la serie polar general (4.115) puede, de hecho, sumarse en forma cerrada. Si sustituimos las fórmulas explícitas de Fourier (4.116) en (4.115), recordando cambiar la variable de integración a, digamos, ψ para evitar un conflicto de notación, obtenemos

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\psi) d\psi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r^n \cos n\theta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\psi) \cos n\psi d\psi + \frac{r^n \sin n\theta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\psi) \sin n\psi d\psi \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\psi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\theta \cos n\psi + \sin n\theta \sin n\psi) \right] d\psi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\psi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \psi) \right] d\psi \end{aligned}$$

A continuación, mostramos cómo sumar la serie final. Usando (4.118), podemos escribirlo como la parte real de una serie geométrica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{1-z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{2(1-z)}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{2|1-z|^2}\right) = \frac{\operatorname{Re}(1+z-\bar{z}-|z|^2)}{2|1-z|^2} \\ &= \frac{1-|z|^2}{2|1-z|^2} = \frac{1-r^2}{2(1+r^2-2r\cos\theta)} \end{aligned}$$

que se conoce como el núcleo de Poisson. Sustituir nuevamente en (4.125) establece la importante fórmula integral de Poisson para la solución del problema del valor en la frontera.

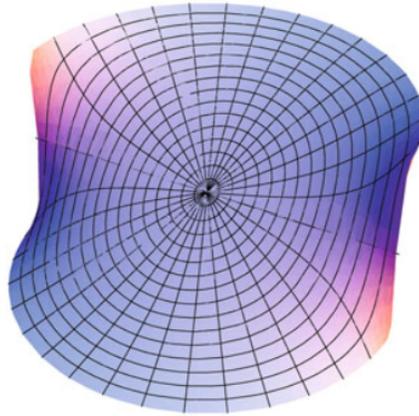


Figura 4.12. Temperatura de equilibrio de un disco

Ejemplo 26 *Un disco de metal uniforme de radio unitario tiene la mitad de su límite circular a 1° , mientras que la otra mitad se mantiene a 0° . Nuestra tarea es encontrar la temperatura de equilibrio $u(x, y)$. En otras palabras, buscamos la solución al problema del valor de frontera de Dirichlet*

$$\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 < 1, u(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, y > 0 \\ x^2 + y^2 = 1, y < 0 \end{cases} \quad (103)$$

En coordenadas polares, los datos de los límites son una función escalonada (periódica)

$$h(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$

Por tanto, según la fórmula de Poisson (4.126), la solución viene dada por

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\psi) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \psi)} d\psi \quad (104)$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{1-r^2}{2r \sin \theta}\right), & 0 < \theta < \pi \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{1-r^2}{2r \sin \theta}\right), & -\pi < \theta < 0 \end{cases} \quad (105)$$

donde usamos la rama principal $-\frac{1}{2}\pi < \tan^{-1} t < \frac{1}{2}\pi$ f la tangente inversa. Volviendo a coordenadas rectangulares, encontramos que la temperatura de equilibrio tiene la explícita fórmula

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2y}\right) & x^2 + y^2 < 1, \quad y > 0 \\ \frac{1}{2} & x^2 + y^2 < 1, \quad y = 0 \\ -\frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2y}\right) & x^2 + y^2 < 1, \quad y < 0 \end{cases}$$

Promedio, principio máximo y analiticidad Investiguemos algunas consecuencias importantes de la fórmula integral de Poisson (4.126). Primero, establecer $r = 0$ produce

$$u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\psi) d\psi \quad (106)$$

El lado izquierdo es el valor de u en el origen - el centro del disco y por lo tanto independiente de θ ; el lado derecho es el promedio de sus valores límite alrededor del círculo unitario. Esta fórmula es un ejemplo particular de un hecho general importante.

Teorema 27 *Sea $u(x, y)$ armónico dentro de un disco de radio a centrado en un punto (x_0, y_0) con valores de frontera continuos por partes (o, más generalmente, integrables) en el círculo $C = \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2\}$. Entonces su valor en el centro del disco es igual al promedio de sus valores en el círculo límite*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_{-\pi}^{\pi} u(x_0 + a \cos \theta, y_0 + a \sin \theta) d\theta \quad (107)$$

Demostración 1 *Usamos las simetrías de traslación y escala de la ecuación de Laplace, para mapear el disco de radio a centrado en (x_0, y_0) al disco unitario centrado en el origen. Específicamente, establecemos*

$$U(x, y) = u(x_0 + ax, y_0 + ay) \quad (108)$$

Un cálculo sencillo de la regla de la cadena demuestra que $U(x, y)$ también satisface la ecuación de Laplace en el disco unitario $x^2 + y^2 < 1$, con valores de frontera

$$h(\theta) = U(\cos \theta, \sin \theta) = u(x_0 + a \cos \theta, y_0 + a \sin \theta)$$

Por lo tanto, por (4.130),

$$U(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

Reemplazar U por su fórmula (4.132) produce el resultado deseado.

Una consecuencia importante de la fórmula integral (4.131) es el Principio Máximo Fuerte para funciones armónicas.

Teorema 28 *Sea u una función armónica no constante definida en un dominio acotado Ω y continua en $\partial\Omega$. entonces alcanza sus valores máximo y mínimo solo en los puntos límite del dominio. En otras palabras, si*

$$m = \min\{u(x, y) | (x, y) \in \partial\Omega\}, \quad M = \max\{u(x, y) | (x, y) \in \partial\Omega\},$$

son, respectivamente, sus valores máximo y mínimo en el límite, entonces

$$m < u(x, y) < M$$

en todos los puntos interiores $(x, y) \in \Omega$.

Demostración 2 Sea $M^* \geq M$ el valor máximo de u en todo $\Omega = \Omega \cup \partial\Omega$, y suponga que $u(x_0, y_0) = M^*$ en algún punto interior $(x_0, y_0) \in \Omega$. El teorema 4.8 implica que $u(x_0, y_0)$ es igual a su promedio sobre cualquier círculo C centrado en (x_0, y_0) que delimita un disco cerrado contenido en Ω . Dado que u es continua y $u \leq M^*$ en C , su promedio debe ser estrictamente menor que M^* , excepto en el caso trivial en el que es constante e igual a M^* en todo C . Por lo tanto, nuestra suposición implica que $u(x, y) = M^* = u(x_0, y_0)$ para todos (x, y) pertenecientes a cualquier círculo $C \subset \Omega$ centrado en (x_0, y_0) . Dado que Ω está conectado, esto nos permite concluir que $u(x, y) = M^*$ es constante a lo largo de Ω , en contradicción con nuestra suposición original.

Un argumento similar funciona para el mínimo; alternativamente, se puede intercambiar máximo y mínimo reemplazando u por $-u$.

Físicamente, si interpretamos $u(x, y)$ como el desplazamiento vertical de una membrana estirada sobre un alambre, entonces el teorema 4.9 dice que, en ausencia de forzamiento externo, la membrana no puede tener protuberancias internas; sus puntos más alto y más bajo son necesariamente en el límite del dominio. Esto reconfirma nuestra intuición física: la fuerza restauradora ejercida por la membrana estirada servirá para aplastar cualquier bulto, y por lo tanto una membrana con un máximo o mínimo local no puede estar en equilibrio. Una interpretación similar es válida para la conducción de calor.

Un cuerpo en equilibrio térmico alcanzará su temperatura máxima y mínima solo en los puntos límite. De hecho, la energía térmica fluiría lejos de cualquier máximo interno, o hacia cualquier mínimo local, por lo que si el cuerpo contuviera un máximo o mínimo local en su interior, no podría permanecer en equilibrio térmico.

El principio máximo implica inmediatamente la unicidad de las soluciones al problema del valor de frontera de Dirichlet para las ecuaciones de Laplace y Poisson:

Teorema 29 Si u y \tilde{u} satisfacen la misma ecuación de Poisson $-\Delta u = f = \Delta \tilde{u}$ dentro de un dominio acotado Ω , y $u = \tilde{u}$ en $\partial\Omega$, y $u \equiv \tilde{u}$ en todo Ω .

Demostración 3 Por linealidad, la diferencia $v = u - u$ satisface el problema de valor límite homogéneo $\Delta v = 0$ en Ω y $v = 0$ en $\partial\Omega$. Nuestra suposición implica que los valores límite máximo y mínimo de v son ambos $0 = m = M$. El teorema 4.9 implica que $v(x, y) \equiv 0$ en todo $(x, y) \in \Omega$, y por lo tanto $u \equiv \tilde{u}$ en todas partes en Ω .

Finalmente, analicemos la analiticidad de las funciones armónicas. En vista de (4.119), el término de n -ésimo orden en la solución en serie polar (4.115), a saber,

$$a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta = a_n \operatorname{Re} z^n + b_n \operatorname{Im} z^n = \operatorname{Re}[(a_n - ib_n)z^n]$$

es, de hecho, un polinomio homogéneo en (x, y) . Esto significa que, cuando se escribe en coordenadas rectangulares x e y , (4.115) es, de hecho, una serie de potencias para el armónico función $u(x, y)$. Es bien sabido, [8, 23, 97], que cualquier serie de potencias convergentes converge a una función analítica, en este caso $u(x, y)$. Además, la serie de potencias debe ser, de hecho, la serie de Taylor para $u(x, y)$ basada en el origen, por lo que sus coeficientes son múltiplos de las derivadas de u en $x = y = 0$. Los detalles se resuelven en el ejercicio 4.3.49.

Podemos adaptar este argumento para probar la analiticidad de todas las soluciones a la ecuación de Laplace.

Nótese especialmente el contraste con la ecuación de onda, que tiene muchas soluciones no analíticas.

Teorema 30 Una función armónica es analítica en todos los puntos del interior de su dominio de definición.

Demostración 4 Sea $u(x, y)$ una solución a la ecuación de Laplace en el dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea $x_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, y elija $a > 0$ tal que el disco cerrado de radio a centrado en x_0 esté completamente contenido dentro de Ω :

$$D_a(x_0) = \{\|x - x_0\| \leq a\} \subset \Omega$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana habitual. Entonces, la función $U(x, y)$ definida por (4.132) es armónica en el disco unitario, con valores de frontera bien definidos. Por lo tanto, según las observaciones anteriores, $U(x, y)$ es analítico en todos los puntos dentro del disco unitario, y por lo tanto también lo es

$$u(x, y) = U\left(\frac{x - x_0}{a}, \frac{y - y_0}{a}\right)$$

en cada punto (x, y) del interior del disco $D_a(x_0)$. Dado que $x_0 \in \Omega$ era arbitrario, esto establece la analiticidad de u en todo el dominio.

Con esto concluye nuestra discusión del método de separación de variables para la ecuación planar de Laplace y algunas de sus importantes consecuencias. El método se puede utilizar en algunos otros sistemas de coordenadas especiales.

11.18. Clasificación de ecuaciones diferenciales parciales lineales

Por fin, hemos sido introducidos a las tres ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden lineales paradigmáticas para funciones de dos variables. Las versiones homogéneas son:

1. La ecuación de onda: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, hiperbólica,
2. La ecuación del calor: $u_t - \gamma u_{xx} = 0$, parabólico,
3. Ecuación de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, elíptica.

La última columna indica el tipo de ecuación, de acuerdo con la taxonomía estándar de ecuaciones diferenciales parciales; una explicación aparecerá momentáneamente. Las ecuaciones de onda, calor y Laplace son los representantes prototípicos de estos tres géneros fundamentales.

Cada género tiene sus propias características analíticas distintivas, manifestaciones físicas e incluso esquemas de solución numérica. Las ecuaciones que gobiernan las vibraciones, como la ecuación de onda, son típicamente hiperbólicas. Las ecuaciones que modelan la difusión, como la ecuación del calor, son parabólicas. Las ecuaciones hiperbólicas y parabólicas normalmente representan procesos dinámicos, por lo que una de las variables independientes se identifica como tiempo.

Por otro lado, las ecuaciones que modelan los fenómenos de equilibrio, incluidas las ecuaciones de Laplace y Poisson, suelen ser elípticas y solo involucran variables espaciales. Las ecuaciones diferenciales parciales elípticas están asociadas con problemas de valores de frontera, mientras que las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas requieren problemas de valores de frontera iniciales y finales.

La teoría de clasificación de ecuaciones diferenciales parciales lineales reales de segundo orden para una función de valor escalar $u(t, x)$ que depende de dos variables procede de la siguiente manera. La ecuación más general de este tipo tiene la forma

$$L[u] = Au_{tt} + Bu_{tx} + Cu_{xx} + Du_t + Eu_x + Fu = G \quad (109)$$

donde se permite que los coeficientes A, B, C, D, E, F sean funciones de (t, x) , al igual que la función de inhomogeneidad o forzado $G(t, x)$. La ecuación es homogénea si y solo si $G \equiv 0$. Suponemos que al menos uno de los coeficientes principales A, B, C no es idénticamente cero, ya que de lo contrario, la ecuación degenera en una ecuación de primer orden.

La cantidad clave que determina el tipo de tal ecuación diferencial parcial es su discriminante

$$\Delta = B^2 - 4AC \quad (110)$$

Esto debería (y por una buena razón) recordarle al lector el discriminante de la ecuación cuadrática

$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

cuyas soluciones trazan una curva plana, una sección cónica. En los casos no degenerados, el discriminante (4.135) fija su tipo geométrico:

1. Hipérbola cuando $\Delta > 0$
2. Parábola cuando $\Delta = 0$
3. Elipse cuando $\Delta < 0$

Esto motiva la elección de la terminología utilizada para clasificar las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden.

Definición 4 *En un punto (t, x) , la ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden (4.134) se llama*

1. Hiperbólico si $\Delta(t, x) > 0$
2. Parabólico si $\Delta(t, x) = 0$, pero $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$
3. Elíptica si $\Delta(t, x) < 0$
4. Singular si $A = B = C = 0$

En particular:

1. La ecuación de onda $u_{tt} - u_{xx} = 0$ tiene discriminante $\Delta = 4$ y es hiperbólica.
2. La ecuación de calor $u_{xx} - u_t = 0$ tiene discriminante $\Delta = 0$ y es parabólica.

3. La ecuación de Poisson $u_{tt} + u_{xx} = -f$ tiene discriminante $\Delta = -4$ y es elíptica.

Ejemplo 31 *Cuando los coeficientes A, B, C varían, es posible que el tipo de ecuación diferencial parcial no permanezca fijo en todo el dominio. Las ecuaciones que cambian de tipo son menos comunes, además de ser mucho más difíciles de analizar y resolver, tanto analítica como numéricamente. Un ejemplo que surge en la teoría de la aerodinámica supersónica, [44], es la ecuación de Tricomi*

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (111)$$

Comparando con (4.134), encontramos que

$$A = x, B = 0, C = 1, \text{ mientras } D = E = F = G = 0.$$

El discriminante en este caso particular es

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4x,$$

y por tanto la ecuación es hiperbólica cuando $x > 0$, elíptica cuando $x < 0$ y parabólica en la línea de transición $x = 0$. En el modelo físico, la región hiperbólica corresponde al flujo subsónico, mientras que las regiones supersónicas son de tipo elíptico. El límite parabólico de transición representa la línea de choque entre las regiones subsónicas y supersónicas: el familiar boom sónico cuando un avión cruza la barrera del sonido.

Si bien esta clasificación tripartita en ecuaciones hiperbólicas, parabólicas y elípticas aparece inicialmente en el contexto bivariado, la terminología, las propiedades subyacentes y los modelos físicos asociados se trasladan a las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en dimensiones superiores. La mayoría de las ecuaciones diferenciales parciales que surgen en las aplicaciones pertenecen a una de estas tres categorías, y es justo decir que el campo de las ecuaciones diferenciales parciales se divide en tres subcampos distintos. O más bien cuatro subcampos, el último que contiene todas las ecuaciones, incluidas las de orden superior, que no encajan en la categorización anterior.

Observación 1 *La clasificación en tipos hiperbólicos, parabólicos, elípticos y singulares se traslada como se indica a ecuaciones cuasilineales de segundo orden, cuyos coeficientes A, \dots, G pueden depender de u y sus derivadas de primer orden, u_t, u_x . Aquí el tipo de ecuación puede variar tanto con el punto en el dominio como con la solución particular que se esté considerando.*

Incluso de manera más general, para una ecuación diferencial parcial de segundo orden completamente no lineal

$$H(t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}) = 0$$

uno define su discriminante como

$$\Delta = \left(\frac{\partial H}{\partial u_{tx}}\right)^2 - 4\frac{\partial H}{\partial u_{tt}}\frac{\partial H}{\partial u_{xx}}$$

Su signo determina el tipo de ecuación como arriba, nuevamente dependiendo del punto en el dominio y la solución bajo consideración.

11.19. Características y el problema de Cauchy

En el capítulo anterior, descubrimos que las curvas características guían el comportamiento de las soluciones a ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Las características juegan un papel igualmente fundamental en el análisis de ecuaciones y sistemas diferenciales parciales hiperbólicos más generales.

En particular, proporcionan un mecanismo para distinguir entre las diversas clases de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden.

Como antes, centraremos nuestra atención en ecuaciones diferenciales parciales que involucran dos variables independientes. El punto de partida es el problema del valor inicial general, también conocido como el problema de Cauchy, en honor al prolífico matemático francés del siglo XIX Augustin-Louis Cauchy, justamente famoso por sus contribuciones de amplio alcance a lo largo de las matemáticas y sus aplicaciones, incluido el Cauchy- La desigualdad de Schwarz, muchos de los conceptos fundamentales en el análisis complejo, así como los fundamentos de la elasticidad y la ciencia de los materiales.

El problema general de Cauchy especifica datos iniciales apropiados a lo largo de una curva suave $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ y busca una solución a la ecuación diferencial parcial que asume los datos iniciales dados en Γ . En todos nuestros ejemplos, la curva en cuestión ha sido una línea recta, por ejemplo, el eje x , pero fácilmente se podrían imaginar situaciones más generales. Si la ecuación diferencial parcial tiene orden n , entonces los datos de Cauchy consisten en los valores de la variable dependiente u junto con todas sus ecuaciones diferenciales parciales hasta el orden n en la curva Γ .

Para la mayoría de las curvas, existe una solución única $u(t, x)$ a la ecuación diferencial parcial que alcanza los valores especificados a lo largo de Γ . Más rigurosamente, si estamos en la categoría analítica, lo que significa que la ecuación diferencial parcial, la curva y el Cauchy.

Todos los datos están especificados por funciones analíticas, entonces el Teorema fundamental de Cauchy-Kovalevskaya garantiza la existencia de una solución analítica $u(t, x)$ al problema de Cauchy cerca de cualquier punto de la curva inicial. El enunciado de la prueba de este importante teorema, debido a Cauchy y, en forma general, al influyente matemático ruso del siglo XIX Sofía Kovalevskaya, se basa en la construcción de series de potencias convergentes para la solución deseada y nos llevaría demasiado lejos. Las curvas excepcionales, para las que no se aplica el teorema de existencia de Cauchy-Kovalevskaya, se denominan las características de las ecuaciones diferenciales parciales subyacentes.

Más prosaicamente, una curva Γ se llamará no característica para la ecuación diferencial parcial dada si se pueden determinar los valores de todas las derivadas de u a lo largo de Γ a partir de los datos de Cauchy especificados. De hecho, la determinación de los valores de las derivadas de orden superior a lo largo de la curva es un paso preliminar necesario para establecer el resultado de existencia de Cauchy-Kovalevskaya. Como mostraremos ahora, este requisito sirve para distinguir las curvas características y no características de los ejemplos que ya hemos encontrado y, por lo tanto, para llevar a su caracterización en contextos mucho más generales.

Para ilustrar el requisito anterior, comencemos con una ecuación diferencial lineal parcial de primer orden de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x) \quad (112)$$

Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva suave parametrizada por $x(s) = t(s), x(s)^T$, donde la suavidad requiere que su vector tangente no desaparezca: $x'(s) = (dt/ds, dx/ds)^T \neq 0$. Dado que la ecuación es de orden $n = 1$, los datos de Cauchy requieren especificar los valores de la variable dependiente u solo a lo largo de Γ en otras palabras, la función

$$h(s) = u(t(s), x(s))$$

La curva no será característica de entonces podemos determinar los valores de las derivadas de u a lo largo de Γ , comenzando con

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t(s), x(s)), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t(s), x(s)) \quad (113)$$

Para ello, diferenciemos los datos de Cauchy (4.141): aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$h'(s) = \frac{d}{ds} u(t(s), x(s)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t(s), x(s)) \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}(t(s), x(s)) \frac{dx}{ds}$$

Por otro lado, suponemos que $u(t, x)$ resuelve la ecuación diferencial parcial (4.140) en todos los puntos de su dominio de definición. En particular, en los puntos de la curva Γ , la ecuación diferencial

parcial requiere

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t(s), x(s)) + c(t(s), x(s)) \frac{\partial u}{\partial x}(t(s), x(s)) = f(t(s), x(s)) \quad (114)$$

Podemos considerar (4.143-144) como un par de ecuaciones algebraicas lineales no homogéneas, que pueden resolverse de manera única para las cantidades aún desconocidas (4.142), a menos que el determinante de su matriz de coeficientes desaparezca:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & c(t(s), x(s)) \\ dt/ds & dx/ds \end{pmatrix} = \frac{dx}{ds} - c(t(s), x(s)) \frac{dt}{ds} = 0 \quad (115)$$

Esta condición sirve para definir una curva característica para la ecuación diferencial parcial de primer orden (4.140). En particular, si la curva está parametrizada por $s = t$, es decir, puede identificarse con la gráfica de una función $x = g(t)$, entonces la condición característica (4.145) se reduce a

$$\frac{dx}{dt} = c(t, x)$$

reproduciendo así nuestra definición original de curva característica, como en (2.18) y, de manera más general, en el ejercicio 2.2.26. Por otro lado, si el determinante (4.145) es distinto de cero, entonces se pueden resolver (4.143-144) los valores de las derivadas de primer orden (4.142) a lo largo de Γ .

Una mayor diferenciación de estas condiciones demuestra que, de hecho, se pueden determinar los valores de todas las derivadas de orden superior de la solución u a lo largo de la curva, lo que, por tanto, no es característico.

A continuación, considere una ecuación diferencial parcial lineal no singular de segundo orden de la forma (4.134). Dado que la ecuación tiene orden $n = 2$, los datos de Cauchy a lo largo de una curva Γ parametrizada como arriba constan de los valores de la función y sus primeras derivadas

$$u(t(s), x(s)), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t(s), x(s)) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t(s), x(s)) \quad (116)$$

Sin embargo, este último no se puede especificar de forma independiente. De hecho, dado el valor de la variable dependiente, $h(s) = u(t(s), x(s))$, A lo largo de Γ , su derivada

$$h'(s) = \frac{d}{ds} u(t(s), x(s)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t(s), x(s)) \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x}(t(s), x(s)) \frac{dx}{ds} \quad (117)$$

prescribe una combinación particular de las dos derivadas de primer orden. Por tanto, una vez que se conoce el valor de una derivada de u sobre Γ , la otra se fija automáticamente mediante la relación (4.148). Por ejemplo, si $\frac{dx}{ds} \neq 0$, podemos usar (4.148) para determinar $u_x(t(s), x(s))$, conociendo $u(t(s), x(s))$ y $u_t(t(s), x(s))$.

De manera similar, si diferenciamos los valores de primer orden derivadas con respecto al parámetro de la curva, podemos determinar dos combinaciones de derivadas de segundo orden a lo largo de la curva Γ :

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial u}{\partial t}(t(s), x(s)) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t(s), x(s)) \frac{dt}{ds} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t(s), x(s)) \frac{dx}{ds} \quad (118)$$

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial u}{\partial x}(t(s), x(s)) = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t(s), x(s)) \frac{dt}{ds} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t(s), x(s)) \frac{dx}{ds} \quad (119)$$

Por otro lado, la ecuación diferencial parcial (4.134) induce una tercera relación entre las derivadas parciales de segundo orden u_{tt} , u_{tx} , u_{xx} . Estas tres ecuaciones lineales se pueden resolver de forma única para los valores de estas derivadas en Γ si y solo si el determinante de su matriz de coeficientes es distinto de cero:

Concluimos que una curva suave $x(s) = (t(s), x(s))^T \subset \mathbb{R}^2$ es una curva característica para la ecuación diferencial parcial lineal no singular de segundo orden (4.134) siempre que su vector tangente $x'(s) = (dt/ds, dx/ds)^T \neq 0$ satisface la ecuación característica cuadrática (4.150). Por el contrario, si la curva no es característica, lo que significa que su tangente no satisface (4.150) en ninguna parte, entonces, con un poco de trabajo adicional, se pueden determinar todas las derivadas de orden superior de la solución $u(t, x)$ a lo largo de Γ , y luego, al menos en la categoría analítica, probar la existencia de una solución al problema de Cauchy, [35].

Según el ejercicio 4.4.20, el estado de una curva como característica o no depende de la elección de la parametrización. En particular, si la curva está dada por la gráfica de la función $x = x(t)$, que parametrizamos mediante $s = t$, entonces la ecuación característica (4.150) toma la forma de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden cuadráticamente no lineal

$$A(t, x) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - B(t, x) \frac{dx}{dt} + C(t, x) = 0$$

cuyas soluciones son curvas características de la ecuación diferencial parcial de segundo orden.

Advertencia: Si $A(t, x) = 0$, entonces la ecuación diferencial parcial admite curvas características con tangentes verticales que no pueden ser parametrizadas por $s = t$. Por ejemplo, si $A(t, x) \equiv 0$, entonces las líneas verticales, por ejemplo, $t = \text{constante}$, $x = s$, son características, satisfacen (4.150), pero no aparecen como soluciones para (4.151).

Por ejemplo, considere la ecuación de onda hiperbólica

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

De acuerdo con (4.151), cualquier curva característica que viene dada por la gráfica de $x(t)$ debe resolver

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - c^2 = 0$$

lo que implica que

$$\frac{dx}{dt} = \pm c$$

Así, de acuerdo con nuestro análisis anterior, las curvas características son las rectas de pendiente $\pm c$, y hay dos curvas características que pasan por cada punto del plano (t, x) . Por otro lado, la ecuación elíptica de Laplace

$$u_{tt} + u_{xx} = 0$$

no tiene curvas características (reales), ya que la ecuación característica (4.150) se reduce a

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

y no se permite que t_s y x_s desaparezcan simultáneamente. Finalmente, para la ecuación de calor parabólico

$$u_{xx} - u_t = 0$$

la ecuación de la curva característica (4.150) es simplemente

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

(dado que el término de la primera derivada no juega ningún papel), por lo que solo hay una curva característica que pasa por cada punto, a saber, la línea vertical $t = \text{constante}$. Observe que el problema de valor inicial estándar $u(0, x) = f(x)$ para la ecuación de calor tiene lugar en una curva característica, el eje x , pero no toma la forma de un problema de Cauchy, que también requeriría especificar las derivadas de primer orden $u_t(0, x), u_x(0, x)$ allí. Y de hecho, el problema del valor inicial estándar no está bien planteado cerca del eje x característico para negativo $t < 0$.

En general, el número de soluciones reales a la ecuación de la curva característica cuadrática no degenerada (4.150) depende de su discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$: En el caso hiperbólico, $\Delta > 0$, y hay dos curvas características reales que pasan por cada punto; en el caso parabólico, $\Delta = 0$, y solo hay una curva característica real que pasa por cada punto; en el caso elíptico, $\Delta < 0$, y no existen curvas características reales.

De esta manera, las ecuaciones diferenciales parciales elípticas, parabólicas e hiperbólicas se distinguen por el número de curvas características (reales) que pasan por un punto, a saber, cero, uno

y dos, respectivamente. Las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden también se consideran hiperbólicas, ya que siempre admiten curvas características reales.

Con un análisis más detallado [35, 70, 122], se puede demostrar que, al igual que con la ecuación de onda, las señales y las perturbaciones se propagan a lo largo de curvas características. Por lo tanto, las ecuaciones hiperbólicas comparten muchas propiedades cualitativas con la ecuación de onda, con señales que se mueven en dos direcciones diferentes.

Por ejemplo, los rayos de luz se mueven a lo largo de curvas características y, por lo tanto, están sujetos a los fenómenos ópticos de refracción y enfoque. De manera similar, dado que las curvas características de la ecuación de calor parabólico son las líneas verticales, esto indica que el efecto de una perturbación en un punto $(t, x) = (t_0, x_0)$ se siente simultáneamente a lo largo de toda la línea vertical contemporánea $t = t_0$. Esto tiene la implicación de que las perturbaciones en la ecuación del calor se propagan a una velocidad infinita, un hecho contrario a la intuición que se explicará con más detalle en la sección 8.1.

Las ecuaciones elípticas no tienen características y, como consecuencia, no admiten la propagación de señales; de hecho, el efecto de una perturbación localizada se siente inmediatamente en todo el dominio. Por ejemplo, incluso cuando una fuerza externa se concentra cerca de un solo punto, desplaza toda la membrana.

12. Capítulo III: Aplicaciones de las EDP

Este espacio presenta temas seleccionados de ciencia e ingeniería desde el punto de vista de las matemáticas aplicadas. Los fenómenos naturales, socioeconómicos y de ingeniería descritos se modelan mediante ecuaciones diferenciales parciales que relacionan variables de estado como la masa, la velocidad y la energía con sus variaciones espaciales y temporales. Por lo general, estas ecuaciones son altamente no lineales; en muchos casos son sistemas, y representan desafíos incluso para las más modernas y sofisticadas técnicas matemáticas y numérico-analíticas.

Los temas seleccionados reflejan los intereses científicos del autor desde hace mucho tiempo. Incluyen flujos de fluidos y gases, flujos de materiales granulares, procesos biológicos como la formación de patrones en pieles de animales, cinética de gases enrarecidos, límites libres, dispositivos semiconductores y procesos socioeconómicos.

Cada tema se introduce brevemente en su contexto científico o de ingeniería, seguido de una presentación de los modelos matemáticos en forma de ecuaciones diferenciales parciales con una discusión de sus propiedades matemáticas básicas. Se ilustra cada tópico con una serie de sus propias fotografías, que demuestran que las ecuaciones diferenciales parciales son herramientas poderosas para modelar una gran variedad de fenómenos que influyen en nuestra vida diaria.

12.1. Ecuaciones cinéticas: de Newton a Boltzmann

Para comprender la jerarquía de modelado, considere un transbordador espacial que orbita el tierra fuera de su capa atmosférica, es decir, en el vacío. Obviamente, el transbordador se mueve allí en movimiento balístico libre de interacciones. Luego, cuando el transbordador comienza su fase de reingreso, interacciones del casco del transbordador con las moléculas de la atmósfera superior comenzará a tener lugar. Desde la atmósfera superior es altamente enrarecido, solo unas pocas interacciones ocurrirán dentro de una unidad de tiempo dada.

Después de un corto tiempo, cuando el transbordador entre más profundamente en la capa atmosférica de la tierra, el efecto de estas colisiones entre la molécula de gas y el casco del transbordador será equilibrar dinámicamente el movimiento del transbordador de transmisión libre. Más profundo en el atmósfera, cerca de la superficie de la tierra, el aire se vuelve aún menos enrarecido, de modo que habrá muchas colisiones de partículas de aire con el transbordador casco (y muchas colisiones de moléculas de aire con moléculas de aire) dentro de una unidad dada de tiempo tal que empiezan a dominar el movimiento del transbordador.

Luego, la célebre ecuación de Boltzmann, llamada así por el físico vienés Ludwig Boltzmann¹ (1844–1906) que describe la evolución temporal de la densidad de masa del espacio de fase f de un gas enrarecido de una sola partícula con idénticas, perfectamente moléculas esféricas que colisionan elásticamente dice:

$$\partial_t f(m, t) = \frac{1}{2} \int_0^m K(m - m', m') f(m - m', t) f(m', t) dm' - \int_0^\infty K(m, m') f(m', t) f(m, t) dm'$$

La ecuación de Boltzmann ha sido un gran desafío para los matemáticos (una larga lista comienza con David Hilbert) pero aún faltan algunos resultados analíticos importantes. Por ejemplo, la existencia de soluciones, globalmente definidas para tiempo, para todos los datos iniciales arbitrariamente grandes no negativos con masa finita, energía, momento de inercia y entropía ha sido probado sólo en 1989 en un importante artículo de Ron DiPerna y Pierre-Louis Lions².

Estas soluciones se obtienen mediante el llamado procedimiento de renormalización de la ecuación de Boltzmann que trata efectivamente con la naturaleza cuadrática de la integral de colisión. Son bastante débiles, de modo que ni su singularidad ni determina su conservación de la energía. La falta de suavidad de las soluciones renormalizadas de la ecuación de Boltzmann es también un obstáculo importante en la búsqueda de la justificación matemáticamente rigurosa de su pequeño Knudsen límites numéricos, aunque en los últimos años se ha avanzado mucho en este.

Claramente, la ecuación de Boltzmann de dinámica de gases todavía está en el centro de la teoría cinética moderna. Sin embargo, recientemente han surgido otras aplicaciones de las ecuaciones de tipo Boltzmann, a saber, en la física del estado sólido, bosónica y Transporte fermiónico, flujos granulares, modelado de tráfico, movimiento de células quimiotácticas, solo por nombrar algunos.



¹<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Boltzmann.html>

²<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lions.html> <http://www.dma.ens.fr/~golse/Publications/pul>

for a list of references

12.2. Las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler - Dinámica de fluidos y gases

La dinámica de fluidos y gases tiene un impacto decisivo en nuestra vida diaria. Allí están las finas gotitas de agua que salpican en nuestra ducha matinal, las olas al que nos enfrentamos nadando o surfando en el océano, el río que se adapta a la topografía formando una cascada, las turbulentas corrientes de aire que a menudo perturban nuestro vuelo transatlántico en un avión a reacción, el tsunami que puede arruinar toda región de nuestro mundo, los flujos atmosféricos crean tornados y huracanes, el flujo vivificante de la sangre en nuestras arterias y venas. Todos estos flujos tienen una gran complejidad desde lo geométrico, (bio)físico y (bio)mecánico puntos de vista y su modelado matemático es una tarea muy desafiante.

Claramente, la dinámica de fluidos y gases está gobernada por la interacción de sus átomos/moléculas, que teóricamente pueden modelarse microscópicamente, es decir, por la dinámica de partículas individuales, basándose en una gran función hamiltoniana dependiendo de las coordenadas espaciales $3N$ y las coordenadas de momento $3N$, donde N es el número de partículas en el fluido/gas. Tenga en cuenta que el conjunto newtoniano las trayectorias viven en el espacio de fase dimensional $6N$. Para la mayoría de los propósitos prácticos, este es prohibitivo y es imprescindible realizar la termodinámica de Límite Boltzmann–Grad, que, bajo ciertas hipótesis sobre las interacciones de las partículas, da la ecuación de Boltzmann de la dinámica de los gases para la evolución de la función de densidad de masa efectiva en fase de 6 dimensiones espacio.

Bajo el supuesto de un camino libre medio de partícula pequeña (es decir, en la colisión régimen dominado) es posible una mayor aproximación, lo que lleva a ecuaciones macroscópicas en el espacio de posición R^3 , referido como Sistemas de Navier–Stokes y Euler. Estos sistemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales son absolutamente centrales en el modelado de flujos de fluidos y gases.

Para obtener más información (precisa) sobre esta jerarquía de modelado. El sistema de Navier-Stokes fue escrito en el siglo XIX. Se llama en honor al ingeniero y físico francés Claude-Louis Navier y el matemático irlandés y el físico George Gabriel Stokes³.

³<http://www.tsunami.org/>

<http://www.spc.noaa.gov/faq/tornado/>

<http://www.nhc.noaa.gov/>

<http://iacs.epfl.ch/cmcs/NewResearch/vascular.php3>

<http://www.navier-stokes.net/>

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \text{grad})u + \text{grad} p = \nu \Delta u + f$$

$$\text{div} u = 0$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes y Euler tuvieron un tremendo impacto en la matemáticas en el siglo XX, p. han dado lugar a la de Prandtl Perímetro teoría de capas que está en el origen de la moderna teoría de perturbaciones singulares. Sin embargo, la comprensión analítica de las ecuaciones de Navier-Stokes aún es algo limitado: en tres dimensiones espaciales, con suave descomposición (en el lejano campo) datum inicial y campo de fuerza, se sabe que una solución débil global en el tiempo existe (solución de Leray), sin embargo, no se sabe si esta solución débil es único y la existencia/unicidad de soluciones suaves globales en el tiempo también es desconocido para flujos tridimensionales con datos iniciales uniformes arbitrariamente grandes y campos forzados, decayendo en el campo lejano. De hecho, este es precisamente el contenido de un Problema del Milenio del Clay Institute con un premio de \$1000000.

Un teorema muy profundo prueba que posibles conjuntos de singularidad de las soluciones de las ecuaciones tridimensionales de Navier-Stokes son "pequeñas"(pero no pueden contener una curva de espacio-tiempo) pero no se ha demostrado que sean vacío.

Observamos que la teoría de los flujos incompresibles bidimensionales es mucho más simples, de hecho, existen soluciones $2 - d$ globales suaves para arbitrariamente grandes datos en el caso viscoso y no viscoso. La teoría de la hidrología matemática es una importante consecuencia directa de las ecuaciones de Navier-Stokes o, respectivamente, de Euler. El flujo de los ríos en general y en particular en cascadas como las famosas del Río Iguazú.



Espectaculares simulaciones de la la rotura de una presa y la crecida de un río utilizando los sistemas de Saint-Venant pueden encontrado en la página web de Saint-Venant⁴. Muchos flujos de

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Navier.html>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Stokes.html>

⁴<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Saint-Venant.html>

<http://www.dma.ens.fr/users/perthame/>

gas no pueden considerarse genéricamente incompresibles, particularmente a velocidades suficientemente grandes.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hu) = 0$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \operatorname{div}(hu \otimes u) + \operatorname{grad}\left(\frac{g}{2}h^2\right) + gh \operatorname{grad} Z = 0$$

12.3. Flujo de material granular

La página web del grupo de investigación de flujos granulares de la California Instituto de Tecnología enuncia:

Un flujo de material granular es una forma de flujo de dos fases que consta de partículas y un fluido intersticial. Cuando se cortan, las partículas pueden fluir de manera similar a un fluido, o resistir el corte como un sólido. El La naturaleza dual de este tipo de flujos los hace muy difíciles de analizar.

Los materiales granulares están a nuestro alrededor; los ejemplos incluyen productos alimenticios como copos de arroz, maíz y cereales para el desayuno, materiales de construcción como arena, grava y suelo, productos químicos como plásticos y píldoras farmacéuticas. Otro ejemplo importante de flujo granular es el movimiento de las dunas de arena. James Jenkins de la Universidad de Cornell dice:

Las dunas de arena en movimiento son un ejemplo de flujo granular, un sistema mal entendido. se situó rama de la física,⁵ y el objetivo es caracterizar flujos laminares y avalanchas utilizando ecuaciones diferenciales que modelan el movimiento de los granos de arena como si eran partículas en un fluido. Estas ecuaciones deben contener dentro de ellas la forma en que las avalanchas escalan con la viscosidad, la velocidad del viento turbulento, el grano diámetro y gravedad.

Una característica distintiva entre los flujos de materiales granulares y otros sólidos mezclas de fluidos es que en los flujos granulares la interacción directa de las partículas conduce a la disipación de energía que juega un papel importante en la mecánica de flujo. Para ejemplo, tome un guijarro y déjelo caer sobre la arena de una playa.

El guijarro clavarse inmediatamente en la arena sin rebotar (como ocurriría en un contacto elástico). La razón de esto es que una fracción significativa de la energía La disipación y la transferencia

⁵<http://www-dimat.unipv.it/toscani/>

<http://www.its.caltech.edu/~granflow/>

see, e.g., http://science.nasa.gov/headlines/y2002/06dec_dunes.htm

<http://www.tam.cornell.edu/Jim.html>

de cantidad de movimiento en flujos granulares ocurren cuando las partículas son en contacto entre sí o con un límite. Además, cuando se quita el guijarro de la arena, entonces sólo una parte del hoyo se llenará de arena otra vez, pero no todo el agujero, por lo general quedará una abolladura. Las fluctuaciones térmicas no son lo suficientemente fuerte como para llevar la disposición de arena granular de vuelta a una energía global estado de minimización, en su lugar se asienta en (uno de los muchos posibles) equilibrios locales.

Siguiendo los procedimientos estándar de la teoría cinética, la evolución de la función de distribución se puede describir mediante la ecuación de Boltzmann-Enskog para esferas duras inelásticas:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \text{grad}_x f = G(\rho) \bar{Q}(f, f)(x, v, t)$$

Dónde \bar{Q} es el llamado operador de colisión granular, que describe el cambio en la función de densidad debido a la creación y aniquilación de partículas en binario colisiones:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(f, f)(v) &= 4\sigma^2 \int_{R^3} \int_{S_+} q \cdot n \{ \chi f(v^{**}) f(w^{**}) - f(v)f(w) \} dw dn \\ \rho(x, t) &= \int_{R^3} f(x, v, t) dv \end{aligned}$$

es la densidad de grano del espacio de posición en el tiempo t , y la función $G(\rho)$ es la estadística función de correlación entre partículas, que explica el aumento frecuencia de colisión debido a los efectos de volumen excluidos.

Dado que el operador disipativo I es tal que $\Psi = 1$, v son invariantes de colisión, sustituyendo $f = M$, se obtiene la siguiente sistema PDE macroscópico de tipo Euler:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \text{grad})u + \frac{1}{\rho} \text{grad} p &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (u \cdot \text{grad})T + \frac{2}{3} T \text{div} u &= -\frac{\beta}{\varepsilon} C g(\rho) \rho T^{3/2} \end{aligned}$$



Comentarios sobre las imágenes. La formación de dunas de arena involucra varios mecanismos geofísicos complicados: transporte de sedimentos, avalanchas, viento transporte eólico impulsado por el campo, por supuesto, teniendo en cuenta que la arena es un material granular, con el transporte dominado por colisiones inelásticas localizadas entre los granos de arena y por saltación (movimiento de salto de los granos sobre la superficie), impulsado por el flujo de viento turbulento.

Claramente, estos dos tipos de grano de arena movimiento requieren diferentes modelos matemáticos: el primero se describe por interacciones de corto alcance modeladas por el material granular tipo ecuación Boltzmann, esta última por convección que representa el viento del campo junto con colisiones inelásticas cuando los granos golpean la superficie de la arena después de la saltación. Además, remarcamos que las propiedades microscópicas (forma, tamaño, etc.) de granos de arena puede variar sustancialmente. Para más información sobre la dinámica de las dunas y su modelado matemático.

12.4. Movimiento celular quimiotáctico y formación de patrones biológicos

Uno de los principios más importantes que gobiernan el movimiento de los las células está representada por la quimiotaxis, que se refiere al movimiento celular en la dirección de la gradiente de una sustancia química. En algunos casos, el producto químico se produce externamente, en otros, las propias células generan la sustancia química para facilitar agregación celular. En ciertos procesos biológicos, más de un químico es en realidad responsable del movimiento celular quimiotáctico. Ejemplos típicos de quimiotaxis ocurren en embriología, inmunología, biología tumoral, agregación de bacterias o ameba, etc

El modelo matemático más básico y más famoso para la quimiotaxis fue derivado originalmente en 1953 por C.S. Patlak y luego en 1970 por E. Keller y LA Segel Mientras tanto, este llamado modelo Keller-Segel se ha convertido en uno de los los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mejor analizados en matemáticas biológicas, dando muchas ideas sobre la biología celular, así como en el análisis de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Las principales incógnitas del sistema de Keller-Segel son la celda no negativa densidad $r = r(x, t)$ y la concentración química $S = S(x, t)$, donde x denota la variable espacial unidimensional, bidimensional o tridimensional y $t > 0$ la variable temporal. Luego, con base en la hipótesis de que el movimiento celular es impulsado por la difusión en un lado y por el gradiente del químico como

fuerza motriz por otro lado, la densidad celular satisface la ecuación diferencial parcial (parabólica) de convección-difusión o tipo Fokker/Planck:

$$r_t = \text{div}(D_0 \text{grad } r - cr \text{grad } S)$$

Donde D_0 es la difusividad celular positiva y c la sensibilidad quimiotáctica positiva. En muchas situaciones de modelado realistas, D y c se debe permitir que dependan de la densidad celular r y en la concentración química S . Weremark que la difusión corresponde al movimiento aleatorio no dirigido (Browniano) de las células, mientras que el convección por el quimio-atrayente se deriva de la fase de reorientación de la movimiento celular, en la dirección del gradiente de la concentración química. Se han observado muy bien dos fases en el movimiento celular para el moho mucilaginoso *dictyostelium discoideum*.



Murray y la piel de los animales

Murray, basándose en ecuaciones de Reacción–Difusión, atribuye la formación de rayas o puntos en los distintos animales, según la geometría del dominio y la etapa embriogénica en que el proceso es activado.

Es así capaz de simular patrones de pigmentación de distintos mamíferos, dependiendo de la geometría del cuerpo. Sus simulaciones en las patas y colas de algunos felinos coinciden de manera excelente con los observados en la naturaleza. Lo sorprendente del modelo es que tanto los procesos de Difusión como los de Reacción, tomados independientemente son homogeneizadores, pero considerándolos juntos y bajo determinadas circunstancias podían generar patrones estables.

12.5. Modelado de semiconductores

En términos de física de estado sólido peatonal, semiconductores (por ejemplo, silicio, germanio, arseniuro de galio...) son materiales cuyas propiedades de conductividad eléctrica se encuentran entre las de un conductor (es decir, un metal) y las de un aislante (p. ej., vidrio). Esto es precisamente lo que permite controlar las propiedades eléctricas del material mediante modificaciones sistemáticas y apropiadas desde el exterior.

Este la modificación generalmente se realiza mediante la implantación de átomos de impurezas en el semiconductor, que, una vez insertados en la red de cristal semiconductor, se convierten ionizado ya sea donando un electrón de banda de conducción (creando un adicional carga negativa libre) o absorbiendo un electrón de la banda de valencia (creando un carga positiva libre, un llamado agujero). El proceso de implantación es llamado dopaje del semiconductor. Por lo general, un semiconductor tiene una conducción densidad de banda de 10^{11} electrones libres por cm^3 , dopando este número puede ser elevado a 10^{20} .

El proceso de dopaje, normalmente llevado a cabo a través de la difusión procesos en salas limpias de alta tecnología de las empresas productoras de chips y laboratorios, controla las propiedades eléctricas de los dispositivos semiconductores. Más precisamente, las densidades de posición de los dopantes, para donantes de electrones y para los aceptores de electrones, determine el funcionamiento eléctrico de los dispositivo. Para la discusión matemática subsiguiente denotamos por $C = C(x)$ la densidad de posición de dopante firmada, es decir, la diferencia de las densidades de donante y aceptor. Aquí x denota la variable de posición como elemento de la (tridimensional) dominio D que representa el dispositivo semiconductor.

El uso principal de los dispositivos semiconductores producidos industrialmente está en VLSI (Integración a muy gran escala), donde se fabrican millones de dispositivos en un solo chip semiconductor con un uso específico, es decir, un procesador o una memoria RAM módulo de una computadora moderna o un sensor de imagen CCD o CMOS en un digital cámara. Las imágenes muestran una placa base con dos ranuras para procesador, un chip controlador ATA, un procesador Celeron 1 una matriz de módulos RAM y chips en una tarjeta gráfica.

El dispositivo semiconductor más importante, que constituye al menos el 95% del producción general de dispositivos semiconductores, es el transistor, más específicamente el Transistor MOS (metal-óxido-semiconductor), que actúa como un interruptor, lo que permite corriente fluya entre su fuente y los contactos de drenaje cuando el voltaje entre la puerta y el contacto de la base están encendidos. cuando fluye corriente y 0 cuando no fluye corriente. Es el principal dispositivo 'lógico' en conjuntos de chips VLSI.



$$\begin{aligned}
n_t &= \operatorname{div} (D_n(\operatorname{grad} n - n \operatorname{grad} V)) + R(n, p) \\
p_t &= \operatorname{div} (D_p(\operatorname{grad} p + p \operatorname{grad} V)) + R(n, p) \\
\lambda^2 \Delta V &= n - p - C(x).
\end{aligned}$$

Las ecuaciones para las densidades n y p son parabólicas (asumiendo por un momento que se conoce V) y la ecuación para el potencial es elíptica. Tenga en cuenta que el potencial V depende linealmente pero de manera no local de las densidades n y p y que el perfil de dopaje C , que determina las características eléctricas del dispositivo bajo consideración, solo entra en la ecuación de Poisson para el potencial. Observamos que esta ecuación de Poisson modela la interacción eléctrica repulsiva entre partículas igualmente cargadas.

Un atractivo correspondiente (gravitacional) El modelo se obtiene invirtiendo el signo de ΔV en la ecuación de Poisson⁶ como se usa, por ejemplo, en el modelado del movimiento celular biológico por quimiotaxis en el tema anterior.

12.6. Problemas de límite libre y transiciones de fase

Problemas de valor inicial y de frontera inicial para sistemas de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) tienen funciones o, más generalmente, distribuciones en el escalar caso y campos vectoriales de funciones o distribuciones en el caso de valores vectoriales como soluciones. Por lo general, el dominio d -dimensional, en el que se plantean las PDE, se da y la formulación del problema se basa en una geometría fija.

Obviamente, tiene que haber compatibilidades entre el operador diferencial, particularmente su orden diferencial y ciertas propiedades geométricas, y el lado (límite inicial) condiciones y la geometría del dominio sobre el que se plantea el problema. planteados con el fin de garantizar el buen planteamiento del problema en consideración.

En particular, para un operador diferencial dado, el número de límites iniciales las condiciones y la geometría del límite del dominio son cruciales para la solución, unicidad y dependencia continua de los datos. Los problemas de frontera libre para PDE tienen una característica totalmente diferente, a saber, que la información geométrica es una parte inherente de la solución. Normalmente, la solución de un problema de frontera libre consiste en una o más funciones o distribuciones.

⁶<http://homepage.univie.ac.at/peter.markowich/publications.html>

Y un conjunto (el llamado límite libre, subconjunto de R^d), en el que se prescriben ciertas condiciones sobre la(s) función(es) desconocida(s). el límite libre es fijo, entonces, típicamente, el problema estaría sobredeterminado.

Entonces, de hecho, las condiciones adicionales son necesarias para determinar el límite libre sí mismo. La regularidad (suavidad) es un tema importante en la teoría PDE. Por lo general, un cierto grado de regularidad (diferenciabilidad en el sentido clásico o débil) de las soluciones de los problemas de valor en la frontera inicial son necesarias para probar su unicidad, su continua dependencia de los datos, para realizar determinados escalados límites, como se hace en la teoría de perturbaciones singulares, y para diseñar técnicas de discretización.

Para problemas de frontera libre la situación es definitivamente más complejo. No sólo es importante la regularidad de las funciones desconocidas, pero también la regularidad del conjunto desconocido, el límite libre. preguntas típicas, que surgen, son: ¿el límite libre tiene un interior topológico vacío? Qué Cuáles son sus propiedades teóricas de medida? ¿Es una (unión finita de) variedades suaves? ¿Cuál es la regularidad óptima del límite libre? En muchos casos el estudio de la regularidad óptima del límite libre es de suma importancia para comprender la solución del problema de frontera libre bajo consideración, para probar la unicidad, la estabilidad, etc.

Hay una reformulación conveniente del problema de Stefan en términos de generar una ecuación parabólica, haciendo uso de la formulación de la entalpía del calor. La entalpía física e está relacionada con la temperatura θ por:

$$\theta = \beta(e), \quad \beta(e) = \begin{cases} e + \frac{L}{2}, & \text{para } e < 0 \\ 0, & \text{para } -\frac{L}{2} < e < \frac{L}{2} \\ e - \frac{L}{2}, & \text{para } e > 0 \end{cases}$$



Las Imágenes muestran icebergs en Patagonianos. Claramente, el límite libre de Stefan no es visible en sí mismo, ya que es el transición de fase hielo-agua bajo la superficie del agua. pero lo que vemos en las otras imágenes es, al menos, en parte – la intersección del límite libre (Stefan) con el límite fijo (superficie del agua). Tenga en cuenta que alrededor de 7/8 de la masa de un iceberg típico está bajo agua. También la interfaz aire-hielo de los icebergs, que es muy bien visible en la mayoría están determinadas por un problema de límite libre, sin embargo, de mucho naturaleza más complicada que el Problema de Stefan que determina el agua helada transición de fase. Claramente, varios mecanismos intervienen en la formación de la superficie sobre el agua de un iceberg: el proceso de formación del propio iceberg (principalmente a través del parto de un glaciar) dando la condición inicial, el viento patrón, erosión por olas, ablación (a través de la radiación solar), derretimiento.⁷

12.7. Ecuaciones de reacción-difusión en Entornos homogéneos y heterogéneos

Muchos procesos físicos, químicos, biológicos, ambientales e incluso sociológicos son impulsados por dos mecanismos diferentes: por un lado hay difusión, una partícula aleatoria (= molécula química, célula biológica o muestra biológica) movimiento descrito microscópicamente por el movimiento browniano⁸, y por otro lado hay reacciones químicas, biológicas o sociológicas que representan instantáneas interacciones, que dependen de las propias variables de estado y posiblemente también explícitamente en la posición de las partículas.

Los ejemplos típicos son la llama propagación, movimiento de células biológicas en plantas y animales sobre la quimiotaxis y la formación de patrones biológicos), la propagación de especies biológicas en ambientes homogéneos o heterogéneos (por ejemplo en los tres arrozales en terrazas dimensionales en la provincia de Guanxi, en el sur de China.

La solución exacta del problema de valor inicial para el llamado problema logístico ecuación diferencial ordinaria (EDO).

Una forma diferente de derivar ecuaciones de reacción-difusión procede por local balance de masa. Por lo tanto, denote por V un subdominio arbitrario del dominio G , con límite S . Claramente, la

⁷<http://www.wordplay.com/tourism/icebergs>

<http://www.wordplay.com/tourism/icebergs>

⁸see, e.g., the excellent out-of-print book downloadable from

<http://www.math.princeton.edu/~nelson/books/bmotion.pdf>

tasa de cambio (temporal) de la masa de las partículas en V es igual a la masa creada en V más el flujo neto de material en V a S .

Los sistemas de reacción-difusión han sido introducidos por Fisher en el año 1937 y al mismo tiempo por Kolmogorov et al⁹. Ejemplos clásicos de sistemas de reacción-difusión son los llamados depredadores y modelos, a menudo denominados ecuaciones Lotka –Volterra. Asumiendo que hay una especie de presa, cuya concentración se denota por u , y una especie de depredador con concentración v (aquí u y v son variables escalares, nótese el cambio de notación), su dinámica de interacción está modelada por:

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + au - buv - fu^2 \\ v_t &= d_2 \Delta v - dv + cuv - ev^2 \end{aligned}$$



Comentarios sobre las Imágenes: muestran tridimensionalmente arrozales en terrazas en la provincia china de Guanxi, cerca de la ciudad de Guilin. Claramente, estos son excelentes ejemplos para ambientes biológicos heterogéneos, donde se introduce heterogeneidad a través de la topografía de la ladera sobre que se encuentra el arrozal y a través de las paredes que separan los arrozales, que inhibir la propagación global de ciertas especies (invasoras o introducidas intencionalmente). Se expone en parques nacionales de Sudáfrica y Namibia.

Tenga en cuenta que la dinámica de la población en los parques nacionales tiene que tomar varios efectos en cuenta. A menudo, los parques en África están cercados, lo que da lugar a un flujo de salida cero. condiciones de contorno (condiciones de contorno de Neumann homogéneas) para el densidades de población de vida silvestre que satisfacen las ecuaciones depredador-presa (idealizando un situación de penetración/escape, que a menudo es poco realista como en el caso de los leones

⁹<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fisher.html>
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Kolmogorov.html>
<http://users.pandora.be/ronald.rousseau/html/lotka.html>
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Volterra.html>

estapando agujeros en la valla del Parque Nacional de Etosha en el norte de Namibia). Además, en algunos parques se sacrifican determinadas especies animales para contrarrestar las restricciones de roaming impuestas por las cercas (como se hizo con los elefantes en parques sudafricanos) y en muchos casos los animales son introducidos en los parques por los biólogos del parque nacional. Estos procesos tienen que ser descritos por aniquilación/generación términos en las ecuaciones de reacción-difusión.

Las sabanas también llevan características típicas de la heterogeneidad. Las estadísticas de interacciones con animales varían según a las características geográficas y los encuentros depredador-presa tienen diferentes estadísticas resultados en diferentes lugares (por ejemplo, en un pozo de agua en comparación con una sabana abierta) pastizales), los animales tienden a dispersarse más en su hábitat preferido (a menudo vegetación dependiente), etc., de modo que los coeficientes de encuentro y difusión en el Los sistemas Lotka-Volterra dependen en gran medida de la posición.

Las Imágenes (Laguna en portugués) Rodrigo de Freitas en la ciudad de Río de Janeiro en Brasil. Obviamente, el manejo ecológico de esta laguna es de gran importancia para la economía y la ecología general de la ciudad. lagunas en ambientes urbanos o semiurbanos (piense en la laguna de la ciudad de Venecia en Italia, por ejemplo).

12.8. Transporte óptimo y ecuaciones de Monge-Ampère

Suponga que un empresario de la construcción se enfrenta al siguiente problema: hay un montón de tierra, arena o escombros (deblais) que tiene que ser movido dentro de un hoyo o llenar (remblais) de igual volumen. O imagina un granjero que tiene que mover una pila de grano en un silo. Eso sí, por simples razones económicas, en ambos casos, el transporte de los materiales debe realizarse lo menos posible costo de transporte o mano de obra.

Por lo general, este costo está relacionado con la distancia, que las masas (puntuales) tienen que viajar durante el proceso de transporte e intuitivamente Está claro que el plan de transporte óptimo (si existe) dependerá decisivamente en las geometrías de la pila de material y el volumen a ser llenado por ella, o más generalmente, de las densidades de masa locales del pilote y de su asignación deseada, si Se consideran distribuciones de masa no uniformes.

Este problema fue originalmente formulado y analizado por la sociedad civil francesa. ingeniero Gaspard Monge en el año 1781, iniciando un profundo proceso matemático teórico, que conecta las áreas aparentemente diferentes de geometría diferencial, programación lineal, ecuaciones diferenciales parciales no lineales y teoría de probabilidad.

En este punto ya comentamos que muchas otras aplicaciones del llamado transporte masivo óptimo de Monge-Kantorovich teoría (veremos en un momento cómo el premio Nobel L.V. Kantorovich¹⁰ entró en este campo) y existen sus variantes, muchas de ellas dentro del ámbito de nuestra vida cotidiana y de la naturaleza que nos rodea.

Aquí mencionamos óptimo distribución de agua en sistemas de canales de riego, planificación urbana óptima (asignación de lugares de vivienda, servicios y oficinas en las ciudades), red de tráfico planificación en ciudades, optimización del tráfico de Internet, ramificación de vasos sanguíneos en el sistema arterial/venoso humano, ramificación óptima en el crecimiento de los árboles, estructuración de arterias en hojas, ramificación de sistemas de ríos, optimización de formas, dinámica de fluidos meteorológicos (ecuaciones semigeostróficas).

Para una descripción general de estas (y otras) aplicaciones nos remitimos a la encuesta y a las referencias,. Tenga en cuenta que todas estas aplicaciones tienen una característica común: tratar con el transporte de una medida de suministro (que representa, por ejemplo, una densidad de masa, densidad de áreas residenciales en una ciudad, densidad de bits, etc.) en una medida de demanda bajo la condición de minimizar un costo asociado o trabajo funcional.

En algunos casos hay un problema de minimización adicional involucrado, típicamente determinando alguna geometría óptima a lo largo de la cual se ve afectado el transporte o una gráfico óptimo, p. un sistema de transporte urbano o nodos de internet. Las fotografías asociados con este capítulo ilustran algunas aplicaciones de modelado de la teoría de Monge-Kantorovich, como se analiza con más detalle en los comentarios.

Antes de discutir las matemáticas del transporte masivo óptimo Monge-Kantorovich problema y su vínculo con las otras áreas mencionadas anteriormente de la matemáticas moderna. El costo total de transportación está definido:

$$C_c(f, g, S) = \int_X c(x, S(x)) df$$

L.V.Kantorovich dio un gran paso adelante en los años 40. Introdujo la siguiente versión relajada del problema de Monge: Considere el funcional:

$$R_c(f, g, \pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) \pi(dx, dy)$$

¹⁰<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Monge.html>
<http://nobelprize.org/economics/laureates/1975/kantorovich-autobio.html>

donde π es una medida de Borel no negativa acotada en $X \times Y$ con marginales f y g , i.e. en términos generales

$$\int_X \pi(dx, y) = g(y)$$

$$\int_Y \pi(x, dy) = f(x)$$



Comentarios sobre las Imágenes: muestran imágenes clásicas y aplicaciones modernas de la teoría del transporte masivo de Monge-Kantorovich. podemos ver montones de material de construcción ('deblais') para ser movido, muy probablemente a un relleno ('remblais') en el mismo o en un diferente sitio de construcción. Esta es la aplicación que G. Monge tenía en mente en el 1780, cuando dio la ahora clásica (original) formulación de Monge del Problema de transporte masivo de Monge-Kantorovich.

Claramente, los medios para realizar el mapa de transporte y la importancia para minimizar el costo de transporte es bastante evidente, particularmente en la Imagen. Ejemplos de ramificación y flujo de riego, redes, en particular ramificación de ríos. Estos ejemplos y muchos otros pueden ser considerados como sistemas de oferta y demanda, donde los bienes (nutrientes fluidos o agua de río) se transportan desde el lugar de suministro (por ejemplo, la base de la hoja o una ubicación aguas arriba en el lecho del río) a la demanda locación (por ejemplo, el perímetro de la hoja o una ubicación aguas abajo en el lecho del río).



Está claro que las versiones originales de la masa óptima de Monge-Kantorovich transporte no se puede aplicar directamente, sobre todo porque sus soluciones son planes de transferencia de mínimo

costo, que no toman posibles infraestructuras y 'costos de infraestructura' en cuenta, es decir, no hay sesgo de transporte trayectorias en el problema de Monge-Kantorovich.¹¹

12.9. Ecuaciones de onda

Las ondas ocurren en muchos aspectos de nuestra vida diaria y en la naturaleza que nos rodea a nosotros. Simplemente tome una piedra y tírela a una superficie de agua en reposo: observar una onda superficial, extendiéndose en círculos concéntricos alrededor del punto de impacto en el agua. O piensa en las altas olas rompiendo en el océano que son tan muy deseable para los campeones de surf. Menos placenteramente, están las ondas de energía generados por potentes maremotos, que viajan bajo la superficie del océano con la velocidad de unos mil kilómetros por hora y convertirse en un tsunami mortal olas de agua cerca de las playas. Otros ejemplos son las ondas sonoras, generadas por nuestro habla, propagándose en el aire al compañero de nuestra conversación, electromagnético ondas descritas por Maxwell¹² ecuaciones, la luz que se propaga en ondas esféricas de una fuente y, aún más fundamentalmente, según lo establecido por mecánica cuántica, hay una dualidad onda-materia que básicamente establece que incluso las partículas con masa positiva (digamos, electrones) tienen características de onda (por ejemplo, deslocalización).

Entonces, ¿cómo se caracteriza el movimiento ondulatorio? El diccionario Webster da la siguiente definición: una perturbación o variación que transfiere energía progresivamente desde el punto apuntar en un medio y que puede tomar la forma de una deformación elástica o de una variación de presión, intensidad eléctrica o magnética, eléctrica potencial o temperatura.

Claramente, esto se refiere al transporte dependiente del tiempo de algunas cantidades físicas.(por ejemplo, energía) en ciertas direcciones espaciales de un medio, tal que las características de la cantidad se mantienen durante el proceso de transporte. Observamos que el transporte de, digamos, energía típicamente se ve afectado sin transporte significativo de partículas del medio.

Para los movimientos ondulatorios generales, la matriz de coeficientes de valor real es simétrica y no negativa definida, de modo que la energía total de la onda:

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^n} (u_t^2 + (\nabla u)^T A(\nabla u)) dx$$

¹¹downloadable from the Preprint Server - <http://cvgmt.sns.it/papers/gbuest03/>

downloadable from <http://www.math.berkeley.edu/~evans/>

¹²<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Maxwell.html>

see <http://www.kfunigraz.ac.at/imawww/vqm/> for a visualisation attempt

For enlightening animations of wave motion we refer to the webpage [http://](http://www.kettering.edu/~drussell/demos.html)

www.kettering.edu/~drussell/demos.html

es una cantidad conservada en el tiempo, con dos contribuciones no negativas derivadas de las energías cinética y potencial. Las ecuaciones de la forma modelan, por ejemplo, el movimiento de cuerdas elásticas delgadas (en una dimensión), de membranas delgadas (dos dimensiones) y de objetos elásticos tridimensionales bajo el supuesto de pequeñas amplitudes de oscilación (lo que permite utilizar modelos). En estas aplicaciones la solución u representa el desplazamiento y la velocidad u_t .

Claramente, deben imponerse condiciones de contorno iniciales apropiadas. Otras aplicaciones incluyen la propagación de ondas sonoras de pequeña amplitud en gases y fluidos.

Entonces, una aplicación directa de la fórmula da la solución de el problema del valor inicial, es decir, la masa delta inicial se divide en dos partes iguales, cada una de las cuales se transporta a lo largo de una característica en x , espacio t . En particular, esto significa que todo punto x en R 'siente' el efecto de la fuente puntual en un solo momento en el tiempo. En dos y más dimensiones, la solución correspondiente no se admite de forma compacta más, pero decae a cero como $|x|$ tiende a infinito, en particular como $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ en dos dimensiones y como $\frac{1}{|x|}$ en tres dimensiones.

Tenga en cuenta que en una dimensión mundo, un sonido emitido por una fuente solo puede escucharse en un instante de tiempo, no 'continuamente' (con el volumen decayendo con la distancia desde la fuente y con el tiempo) como en nuestro mundo tridimensional. Un simple cálculo muestra que la función

$$u_k(x, t) = \exp \left(ik \cdot \left(x \pm v \frac{k}{|k|} t \right) \right)$$

es una solución de onda plana especial de la ecuación de onda n -dimensional

$$u_{tt} = v^2 \Delta u, \quad x \in R^n, t \in R$$

donde v denota nuevamente un parámetro positivo real. Claramente, la velocidad de propagación de esta onda plana es $\pm v \frac{k}{|k|}$. Por lo tanto, en más de una dimensión las velocidades de propagación de las soluciones de onda plana de la ecuación de onda se encuentran en el esfera con radio v , pero sus direcciones dependen del vector de onda. Esto es un débil efecto de dispersión. La mecánica cuántica¹³ se rige por una ecuación de onda muy particular, lleva el nombre del físico teórico austriaco ganador del premio Nobel Erwin Schrödinger.

La ecuación de Schrödinger, en su forma más básica que modela la transporte cuántico de una partícula elemental (digamos, un electrón) con positivo masa m , es una ecuación diferencial parcial

¹³<http://nobelprize.org/physics/laureates/1933/schrodinger-bio.html>

<http://scienceworld.wolfram.com/physics/PlancksConstant.html>

lineal para una función de valor complejo u , la llamada función de onda de la partícula. La ecuación dice:

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + V(x)u, \quad x \in R^n, t \in R$$

donde \hbar es la llamada constante de Planck normalizada y $V(x)$ el campo de potencial eléctrico de valor real que impulsa el movimiento del electrón. La función de onda u es una cantidad auxiliar, los observables físicos importantes se calculan a partir de u mediante un "procesamiento posterior". Son cuadráticos en la función de onda, por ejemplo:

$$\rho(x, t) = |u(x, t)|^2$$

es la densidad de posición (probabilística) de la partícula,

$$j(x, t) = \hbar \operatorname{Im} (u(x, t) \operatorname{grad} u^*(x, t))$$

su densidad de corriente (* denota conjugación compleja) y

$$e(x, t) = \frac{\hbar^2}{2m} |\operatorname{grad} u(x, t)|^2 + V(x)|u(x, t)|^2$$

su densidad de energía. Tenga en cuenta que la masa total

$$M := \int_{R^n} \rho dx$$

y la energía total es

$$E := \int_{R^n} e dx$$

Están conservados en el tiempo por la ecuación de Schrödinger.

Para muchos propósitos matemáticos, es conveniente escalar la ecuación de Schrödinger introduciendo coordenadas espacio-temporales macroscópicas. Denotando por ε la relación de aspecto microscópico/macroscópico, obtenemos:

$$i\varepsilon u_t = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u + V(x)u, \quad x \in R^n, t \in R$$

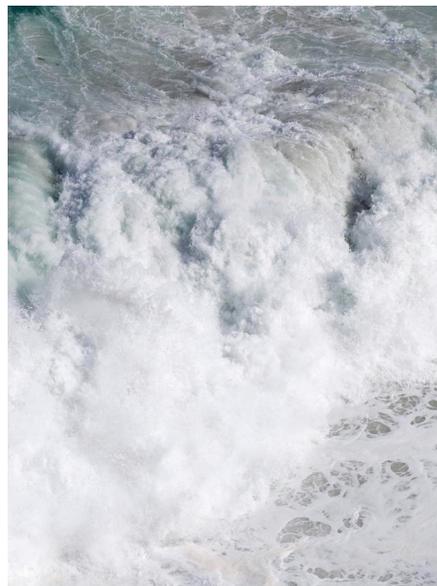
Dos problemas son evidentes:

1. Las oscilaciones espaciales iniciales con frecuencia del orden de $1/\varepsilon$ se propagan en el espacio y se generan oscilaciones en el tiempo con frecuencia del mismo orden. Esta es una propiedad típica de las ecuaciones de onda lineales.

2. La velocidad de la onda con vector de onda inicial k/ε es igual a k/ε con diferentes vectores de onda se mueven con diferentes vectores de velocidad y las posibles velocidades de onda no están restringidas. Esta es una propiedad de dispersión, mucho más fuerte que en el caso de la ecuación de onda lineal de segundo orden discutida anteriormente.

De particular interés es el llamado límite clásico de la ecuación de Schrödinger $\varepsilon \rightarrow 0$, que corresponde a la observación del movimiento de partículas en escalas cada vez mayores. Intuitivamente, los efectos cuánticos deberían disminuir en este proceso y el movimiento debería ser dominado por la mecánica clásica, es decir, por la segunda ley de Newton.

Así lo expresó el físico alemán ganador del Premio Nobel Max Planck¹⁴, quien afirmó en el año 1900: La mecánica clásica es el límite de la mecánica cuántica en la medida en que \hbar tiende a cero.



Comentarios a las Imágenes: Muestran las olas del mar. El movimiento de las olas en los océanos obviamente está influenciado por muchos factores, como la topografía del fondo y de la costa, el viento y otras perturbaciones de la superficie (como barcos en el océano), mareas, etc. Nos referimos a la página web¹⁵ como referencia en el modelado físico-matemático. Un fenómeno no lineal particularmente interesante es el rompimiento de las olas del mar cerca de la playa. Para comprender el mecanismo básico del movimiento de las olas, que en términos matemáticos se puede considerar como una atastrofia plegable de la función de altura de la ola U (superficie libre de aire y agua), considere el problema de valor inicial clásico para la ecuación de Burgers unidimensional

¹⁴<http://www.colorado.edu/physics/2000/bec/>

<http://www.dhm.de/lemo/html/biografien/PlanckMax/>

¹⁵http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean_surface_wave

no viscosa como un modelo básico:

$$U_t + \left(\frac{U^2}{2}\right)_x = 0, \quad x \in R, \quad t > 0$$

$$U(x, t = 0) = U_0(x), \quad x \in R.$$

12.10. Procesamiento y análisis de imágenes digitales – PDE y herramientas variacionales

La mayoría de las cámaras fotográficas digitales tienen CCD (Dispositivo acoplado de carga) o sensores de captura de imágenes CMOS (Complementary-Metal-Oxide-Semiconductor). Por lo general, estos chips semiconductores cuentan con una matriz rectangular de dispositivos – los llamados fotositos – cada uno de los cuales es sensible al rojo (R), verde (G) o luz azul (B). Técnicamente, la sensibilidad a solo uno de los colores RGB se logra filtrando, de modo que solo los fotones de un cierto rango de frecuencia pasan a través del filtro (correspondiente a R, G o B). Así, cada individuo la fotosita actúa como un contador de fotones correspondientes al color rojo, verde o azul luz. Estos sitios están organizados en la llamada matriz RGB Bayer:

...RGRGRGRGRG...
...GBGBGBGBGB...
...RGRGRGRGRG...
...GBGBGBGBGB...
...RGRGRGRGRG...
...GBGBGBGBGB...

Tenga en cuenta que hay más sitios "verdes" (en realidad, la mitad del número total) en Bayer matriz, que explica la mayor sensibilidad del ojo humano con respecto a el color verde. La Imagen 10.1 muestra un patrón de difracción del sensor CCD del P25 respaldo digital (22 millones de fotositos, producido por PhaseOne¹⁶), que se adjunta en una cámara Hasselblad de formato medio H1 o H2. Esta fue la gama alta de tecnología de sensor comercialmente disponible hasta diciembre de 2005, cuando 39 megapíxeles los sensores estuvieron disponibles.

Después de capturar la imagen, los datos de la matriz de Bayer se leen directamente en el motor de procesamiento de imágenes, el llamado generador de imágenes, de la cámara (tenga en cuenta

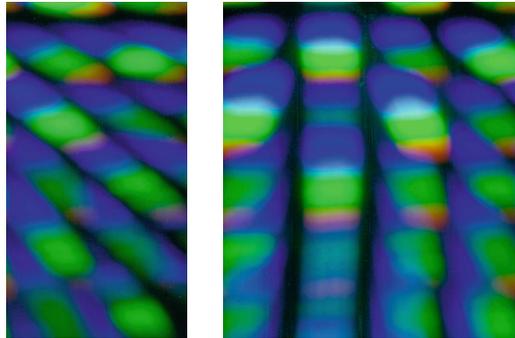
¹⁶<http://www.phaseone.com>

<http://www.hasselblad.com>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Bayer-Sensor>

que el el método de lectura es precisamente donde los sensores de imágenes CCD y CMOS difieren). Luego, el procedimiento varía según el formato de imagen elegido. Si el usuario ha optado por una imagen jpg, luego los tres colores se interpolan primero por el llamado algoritmo de Bayer tal que finalmente, después de la interpolación, se obtienen los datos RGB completos. disponible en cada píxel (correspondiente a un sitio de fotos).

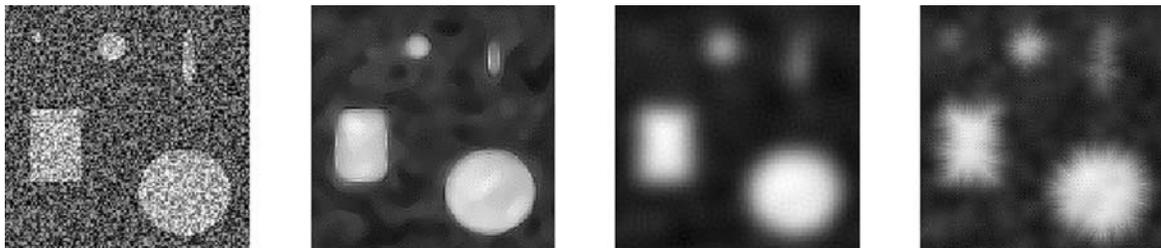
Posteriormente, el reproductor de imágenes realiza ciertas tareas de procesamiento, generalmente una estimación del balance de grises.



Según la teoría estándar de las EDP de primer orden, las soluciones uniformes u son constantes a lo largo de las curvas características, que satisfacen las EDO:

$$\frac{dx}{dt} = \kappa(x, t) \circ(x, t)$$

Por lo tanto, la velocidad del movimiento es igual a la curvatura local y la dirección del vector de velocidad es ortogonal a las curvas de nivel, apuntando hacia la dirección de decaimiento de u . El efecto de suavizado de la ecuación de curvatura es basado en equilibrar la curvatura de los conjuntos de niveles de la solución.



La imagen arriba muestra el efecto de diferentes suavizados difusivos. Desde el de izquierda a derecha podemos ver: La imagen ruidosa original con equidistribuido ruido, suavizado de imagen por la ecuación de curvatura, por la ecuación de calor y por difusión direccional a lo largo de las ortogonales a las curvas de nivel. Todas las difusiones fueron realizado hasta el mismo tiempo final. Claramente, la ecuación de curvatura mantiene la nitidez de los bordes, mientras que la ecuación de calor destruye la nitidez de los bordes completamente.

La difusión isotrópica se puede ver muy bien en este último caso. Es, sin embargo, interesante notar que la ecuación de calor crea un algo uniforme fondo fuera del ruido equidistribuido mientras el flujo de curvatura intenta extraer información del ruido. Difusión a lo largo de las ortogonales del nivel. curvas (la peor posibilidad...) crea artefactos muy visibles en forma de picos procedente de los bordes. Un enfoque algo diferente está representado por suavizar Fatemi–Tipo Rudin-Osher. Consideran la variación total de la función de intensidad como determinantes para el estado de una imagen y proponer minimizar los siguientes funcional, sobre el espacio de funciones con variación total acotada:

$$T(u) := \int_G \left(|\text{grad } u| + \frac{\lambda}{2} (u - u_0)^2 \right) dx$$

donde λ es un parámetro positivo. Claramente, el segundo término bajo la integral penaliza las imágenes suavizadas u que están demasiado alejadas de la imagen original u_0 es decir, decide la importancia relativa de mantener la variación total de la imagen pequeña y de sin alejarse demasiado de la imagen original. La ecuación de Euler-Lagrange (que es una condición necesaria para el minimizador) del funcional lee:

$$-\text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} \right) + \lambda(u - u_0) = 0, \quad x \in G$$

sujeto a la condición de contorno de Neumann homogénea:

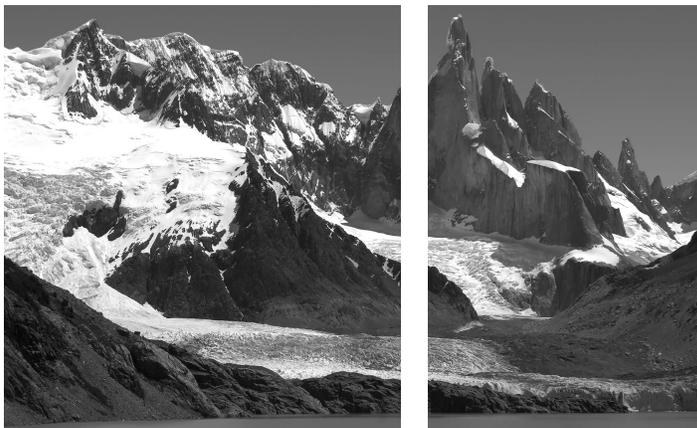
$$\text{grad } u \cdot \gamma = 0 \text{ en } \partial G,$$

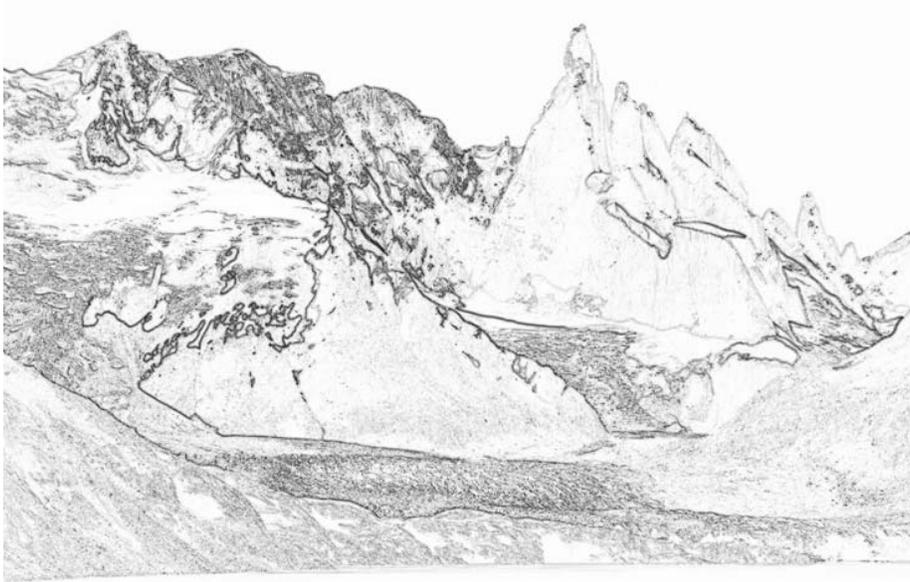
donde γ es el vector normal exterior unitario de ∂G .

El flujo de gradiente correspondiente (método de descenso más pronunciado) viene dado por la ecuación parabólica:

$$u_t = \text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} \right) - \lambda(u - u_0)$$

de nuevo sujeto a condiciones de frontera homogéneas de Neumann. para apropiado datos iniciales esperamos que las soluciones converjan al minimizador.





Comentarios sobre las imágenes La fotografía digital ha llegado a una fase de madurez No solo en el mercado de consumo, donde la fotografía analógica basada en películas básicamente ha desaparecido, pero también en el mercado de prosumidores, donde 6-10 Cámaras de megapíxeles (a menudo, cámaras réflex digitales de lente única, denominadas DSLR) han alcanzado una cuota de mercado significativa y también en el mercado profesional, con DSLR de 12 a 16 megapíxeles basadas en formato completo de 35 mm en el denominado sensor DX tecnología y, en el extremo superior, con respaldos digitales que se adhieren a cámaras de formato medio y hoy en día cuentan con sensores de 22 a 39 megapíxeles.

Las cámaras digitales de gama alta de hoy en día ofrecen una calidad fotográfica que era desconocido en los días analógicos, con imágenes suaves como la seda y la posibilidad de hacer grandes impresiones de alta resolución, con base química o incluso utilizando tecnología de inyección de tinta en el 'cuarto oscuro digital' por el propio fotógrafo. Digital las imágenes, sin embargo, requieren un procesamiento posterior por parte de un software sofisticado. Las imágenes tienen para ser balanceado en blanco, corrección de contraste, los artefactos digitales tienen que ser eliminados, se debe realizar la reducción de ruido y la nitidez y, a menudo, las imágenes tienen para ser comprimido a formato jpg para enviar por correo electrónico y almacenamiento.

Todos estos procesos requieren matemáticas sofisticadas, que en gran medida se basan en ecuaciones diferenciales y técnicas variacionales. Está claro que - con el conteo de megapíxeles crece constantemente: la necesidad requerida de sofisticación de la tecnología digital el procesamiento de imágenes también aumenta (solo piense en reducir los tiempos de procesamiento, que siguen siendo una gran molestia para los usuarios de cámaras de gran cantidad de megapíxeles).

Además, la mayoría del software de procesamiento de imágenes disponible comercialmente en la actualidad se basa en herramientas PDE lineales (ecuación de calor) mientras que es bien conocido en imagen científica círculos de procesamiento que los métodos no lineales (ecuación de Perona-Malik, curvatura ecuación, pintura de Cahn-Hillard, etc.) dan resultados muy superiores. Esperamos un 'salto cuántico' en el software comercial de procesamiento de imágenes pronto, que sacudir la comunidad fotográfica típicamente muy conservadora. Hay otras aplicaciones importantes del procesamiento de imágenes digitales además de fotografía, también con gran exigencia de sofisticación matemática.

Solo piensa de aplicaciones de seguridad basadas en reconocimiento digital o imágenes médicas. Para ejemplo, el reconocimiento automatizado de tumores en técnicas de exploración médica se basa en la segmentación de imágenes (a menudo usando el funcional de Mumford-Shah)! Tenga en cuenta que en imágenes médicas y de seguridad no solo imágenes fijas sino también secuencias de video deben ser procesados y analizados.¹⁷

12.11. Modelado socioeconómico

Un análisis empírico y estadístico comparativo de los fenómenos sociales y económicos describir el comportamiento colectivo de los seres humanos en diferentes países y los mercados conduce a un número sorprendentemente grande de similitudes. esto motiva la idea básica de que el comportamiento colectivo de una sociedad compuesta de suficientemente muchos individuos (agentes) se pueden modelar utilizando el enfoque de la mecánica estadística, que fue desarrollado originalmente para la descripción de sistemas físicos que consta de muchas partículas que interactúan. Los detalles de las interacciones entre Luego, los agentes caracterizan los fenómenos estadísticos emergentes

En particular, la evolución de la riqueza en una economía de mercado simple ha sido estudiado extensamente. Un punto de vista muy interesante en la representación de mercados es el cinético, que conduce a ecuaciones tipo Boltzmann para el evolución de la distribución de la riqueza.

En estos modelos, el mercado es representado por un gas de partículas físicas, donde cada partícula se identifica con un agente, y cada evento comercial entre dos agentes se considera un binario evento de colisión de partículas, con reglas de colisión determinadas por las propiedades de el mercado subyacente. El conocimiento del comportamiento de gran riqueza de la constante la densidad del estado es de primordial importancia, ya que caracteriza el número de ricos individuos

¹⁷Descargable desde: <http://citeseer.ist.psu.edu/guichard01image.html>

en la sociedad y puede usarse fácilmente para determinar a posteriori si el el modelo se ajusta a datos conocidos de economías reales.

Hace más de cien años, el economista italiano Vilfredo Pareto Cuantificó por primera vez el comportamiento de la distribución del ingreso de la riqueza en una sociedad y concluyó que obedece a una ley de potencia. Más precisamente si $f = f(w)$ es el función de densidad de probabilidad de agentes con riqueza w , y w es lo suficientemente grande, entonces la fracción de individuos en la sociedad con una riqueza mayor que w es:

$$F(w) = \int_w^\infty f(w_*) dw_* \sim w^{-\mu}$$

Pareto creía erróneamente que la función de distribución en toda la gama de riqueza (eje real positivo) para ser una ley de potencia con un exponente universal μ aproximadamente igual a 1.5. Diversas investigaciones estadísticas con datos reales durante los últimos diez años reveló que las colas de las distribuciones de ingresos de hecho siguen el comportamiento de la ley de potencia mencionado anteriormente. El valor numérico del llamado índice de Pareto μ generalmente varía entre 1 y 2,5 según el mercado considerado (EE. UU. $\sim 1,6$, Japón $\sim 1,8-2,2$).

También se sabe por estudios estadísticos que típicamente menos del 20% de la población de cualquier país posee alrededor del 80% del total riqueza de ese país. El grupo de ingresos más altos obedece la ley de Pareto anterior, mientras que el resto de la población de bajos ingresos, de hecho la mayoría (80% o más), sigue una distribución diferente, que suele ser Gibbs] o log-normal. Los modelos cinéticos de la evolución temporal de las distribuciones de riqueza se pueden describir en términos de una ecuación tipo Boltzmann que dice:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Q(f, f)$$

donde $f = f(v, t)$ es la densidad de probabilidad de los agentes de riqueza $v \in R$ en el momento $t \geq 0$, y Q es un operador bilineal que describe el cambio de f debido a binarios eventos comerciales entre agentes. Nos referiremos a esta ecuación en lo que sigue como ecuación cinética de *Pareto-Boltzmann*.

Las transacciones binarias involucradas se describen mediante las reglas:

$$v^* = p_1v + q_1w; \quad w^* = p_2v + q_2w$$

donde (v, w) denotan los dineros (positivos) de dos individuos arbitrarios antes del comercio y (v^*, w^*) los dineros después del comercio. Los coeficientes de transacción $pi, qi, i = 1, 2$ son

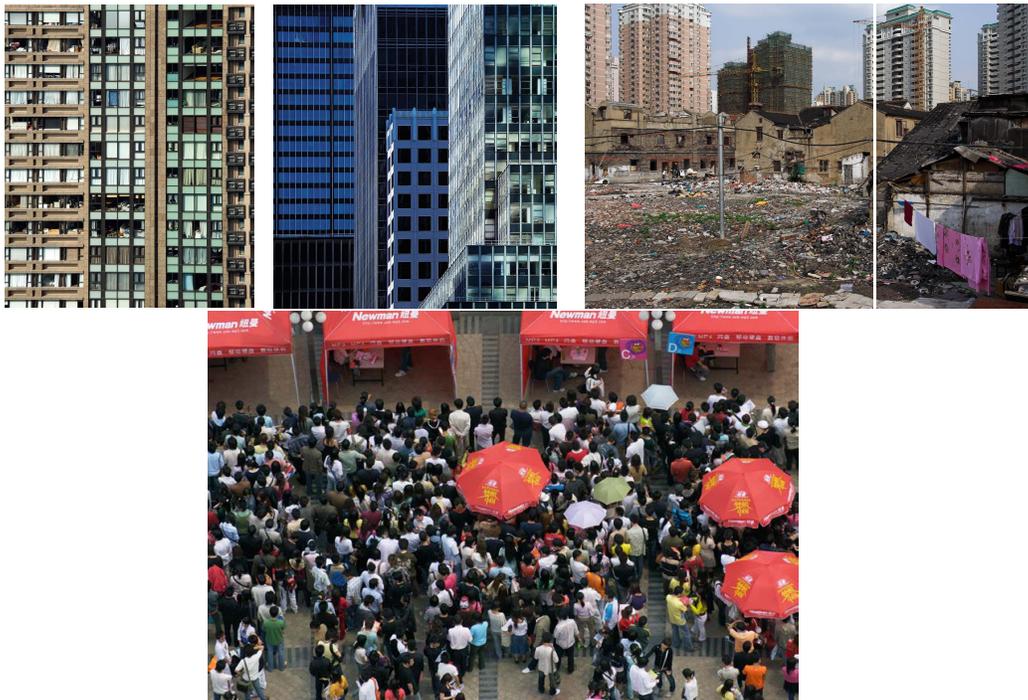
constantes dadas o variables aleatorias, con la restricción obvia de no negatividad. Además, deben ser tales que la transformación de los estados monetarios antes y después de la negociación no sea singular. Entre todos los modelos cinéticos posibles los modelos conservativos son caracterizado por la propiedad

$$\langle p_1 + p_2 \rangle = 1, \quad \langle q_1 + q_2 \rangle = 1,$$

donde $\langle \cdot \rangle$ denota la expectativa probabilística. Esto garantiza la conservación de la riqueza total esperada del mercado (que es el momento de primer orden de la función de distribución, multiplicada por el número total de individuos). En forma débil, el operador de colisión $Q(f, f)$ está definido por:

$$\int_{R_+} Q(f, f)(v)\phi(v)dv = \frac{1}{2} \left\langle \int_{R_+} \int_{R_+} (\phi(v^*) + \phi(w^*) - \phi(v) - \phi(w))f(v)f(w)dv dw \right\rangle$$

Aquí ϕ es una función de prueba suave con soporte compacto en los reales no negativos. Tenga en cuenta que se supone que el operador de colisión es del tipo llamado Maxwelliano, es decir, el núcleo de dispersión no depende de la riqueza relativa de colisiones y por lo tanto, puede tenerse en cuenta en el cálculo de la expectativa estadística eligiendo el espacio de probabilidad apropiadamente.



Comentarios a las Imágenes: El economista político italiano Vilfredo Pareto (1848-1923) es el creador de la llamada ley empírica de Pareto¹⁸ cual en forma simplificada establece que, en cualquier país dado, menos del 20% de la población posee el 80% de la riqueza total. Aunque esto no se consideraba una moraleja cuestión del propio Pareto, es muy difícil no pensar en la moralidad

¹⁸<http://cepa.newschool.edu/het/profiles/pareto.htm>

<http://www.it-cortex.com/Pareto-law.htm>

cuando se viaja a través de países del tercer mundo y estar en contacto indirecto con el gran número de personas, que no forman parte de la cola de Pareto de grandes ingresos.

Matemáticamente hablando, una forma más general de la ley de Pareto está representada por el hecho de que las grandes colas de riqueza, que corresponden a la densidad de los individuos ricos, de los estados asintóticos a largo plazo de la ecuación cinética de Pareto-Boltzmann (al menos después de un límite de escala apropiado) decae solo algebraicamente a medida que la riqueza la variable w tiende a infinito, dando lugar a las denominadas colas pesadas o gordas. el preciso la tasa de descomposición depende de las propiedades del mercado bajo consideración.

De forma estadística, los datos confirman que la regla de distribución de la riqueza 80-20 es sorprendentemente universal. resultado, consistente con la ley de descomposición algebraica. También destacamos que el trabajo de Pareto sobre la eficiencia y la optimización de la economía sistemas tiene implicaciones profundas en la teoría de juegos matemáticos, que fue convertido en una teoría matemática precisa en la primera mitad del siglo XX, principalmente por Jhon von Neumann y John Nash¹⁹.

Modelos matemáticos de formación de opinión se basan en cuantificar el resultado de las interacciones sociales en la sociedad bajo consideración. Evidentemente, deben tener en cuenta los diversos factores que hacen constituyen el tejido social de la sociedad, que se derivan de los valores históricos, religiosos, antecedentes socioeconómicos, políticos, etc. Mucha investigación en esta dirección ha realizados en los últimos años, y el lector interesado puede encontrar información sobre el tema en la página web de la Materia Condensada ArXiv²⁰.

12.12. Otras ecuaciones

A continuación hay una lista de otras ecuaciones diferenciales parciales lineales que ocurren en modelos matemáticos importantes. Su clasificación en parabólica, hiperbólica o elíptica.

12.12.1. Movimiento browniano

La función $u(x, t)$ que especifica la probabilidad de que una partícula que experimenta un movimiento unidimensional en un fluido se encuentra en el punto x en el tiempo t satisface la PDE parabólica

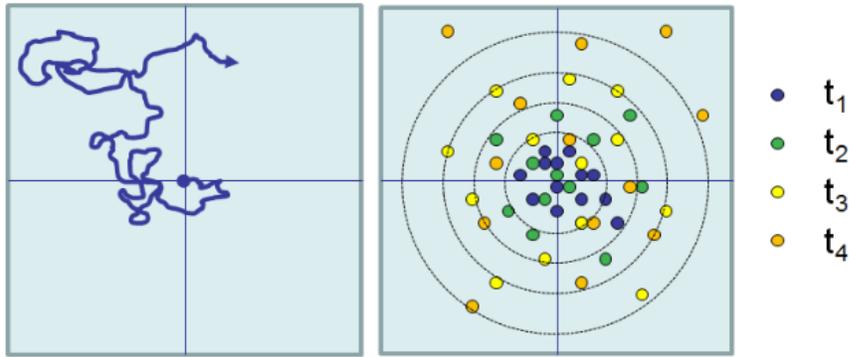
¹⁹<http://en.wikipedia.org/wiki/Pareto-efficiency>

<http://en.wikipedia.org/wiki/Game-theory>

<http://en.wikipedia.org/wiki/John-von-Neumann>

<http://nobelprize.org/economics/laureates/1994/nash-autobio.html>

²⁰<http://xxx.lanl.gov/find/cond-mat>



de segundo orden

$$u_t(x, t) = au_{xx}(x, t) - bu_x(x, t)$$

donde los coeficientes $a, b > 0$ están relacionados con el desplazamiento medio del partícula por unidad de tiempo y la varianza del desplazamiento observado alrededor de la media. El movimiento browniano se refiere a los movimientos aleatorios de pequeñas partículas bajo excitación térmica en solución descritos por primera vez por Robert Brown ²¹(1827), 1 quien con su microscopio observó el movimiento espacial aleatorio y nervioso de los granos de polen en el agua.

Este fenómeno está intrínsecamente vinculado con la difusión. La difusión es la realización macroscópica del movimiento browniano de las moléculas dentro de los gradientes de concentración. La base teórica para esta relación fue descrita por Einstein en 1905, 2 y Jean Perrin 3 proporcionó los experimentos detallados que confirmaron sus predicciones. Dado que el movimiento de cualquier partícula es único, el movimiento browniano debe describirse estadísticamente. Observamos que el desplazamiento cuadrático medio de una partícula promediada en muchas mediciones crece linealmente con el tiempo, al igual que con la difusión.

12.12.2. Problemas de difusión-convección

El caso unidimensional se describe por la PDE parabólica de segundo orden

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t) - au_x(x, t) + bu(x, t)$$

donde $u(x, t)$ es la temperatura y los coeficientes $k, a > 0$ y b son expresado en términos de las propiedades físicas del medio, el flujo de calor tasa y la fuerza de la fuente. Cuando $a = 0$ y $b > 0$, la ecuación anterior describe un proceso de difusión con una reacción en cadena.

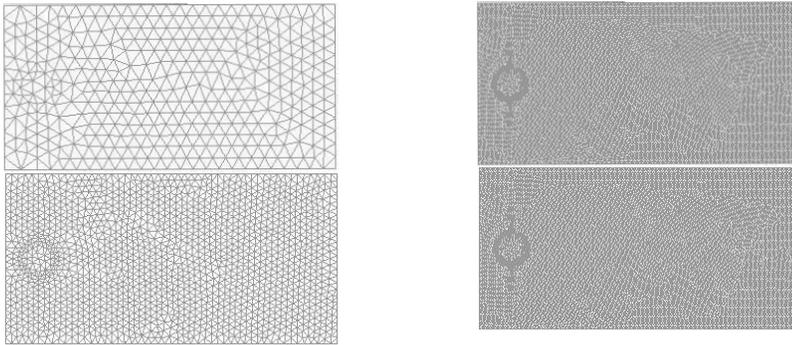
²¹R. Brown, “Sobre las partículas contenidas en el polen de las plantas; y sobre la existencia general de moléculas activas en cuerpos orgánicos e inorgánicos” en *The Miscellaneous Botanical Works of Robert Brown*, editado por J. J. Bennett (R. Hardwicke, Londres, 1866), Vol. 1, pp. 463-486.

A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Phys.* 322, 549—560 (1905).

J. Perrin, *Movimiento Browniano y Realidad Molecular*. (Taylor y Francis, Londres, 1910).

La Ecuación de Convección - Difusión, también llamada Ecuación de Transporte, es una ecuación diferencial parcial que modela el transporte de un campo escalar (e.g. temperatura o concentración), debido a procesos de transporte conocidos como convección (también llamada advección) y difusión. Esta ecuación surge en diversos problemas de ingeniería, como en contaminación de acuíferos y del medio ambiente para transporte de masa, así como en sistemas de enfriamiento en plantas de energía nuclear y fósil, para transporte de calor.

Existen diversas maneras de formular esta ecuación, dependiendo del tipo de problema que se requiera resolver (e.g. transporte de masa o de calor). Los resultados presentados a continuación corresponden a la aplicación de la Ecuación de Convección - Difusión a un problema de transporte de calor.



La formulación de modelos matemáticos se basa en la traducción de los principios de conservación de energía, masa y momento a expresiones matemáticas (Mercer y Faust 1980). Posteriormente, la incorporación de información científica y tecnológica, usualmente en términos de ecuaciones constitutivas, permite establecer relaciones entre las variables involucradas en el modelo, para obtener una expresión que permita predecir el comportamiento de un sistema físico.

La Ecuación de Convección - Difusión describe el transporte de un campo escalar (como el calor o la masa) debido a procesos de transporte conocidos como advección y difusión. En esta tesis se desarrolló esta ecuación mediante la descripción del modelo matemático de transporte de soluto en fluidos libres, mismo que se obtuvo a partir de una formulación axiomática basada en el balance de propiedades extensivas e intensivas involucradas en el sistema físico.

La resolución del modelo matemático se llevó a cabo empleando un método numérico conocido como Cálculo Exterior Discreto (DEC), basado en, como su nombre lo indica, la discretización de la teoría del Cálculo Diferencial Exterior. Debido a que DEC es un método numérico relativamente nuevo, es necesario investigar su desempeño al resolver una variedad de ecuaciones diferenciales, así como proponer métodos de discretización de los términos involucrados.

La discretización con DEC del término difusivo, cuando el medio es homogéneo e isotrópico, está bien entendido y documentado. Sin embargo, esto no sucede así con el término convectivo. En esta

tesis, se propuso una discretización local de este término, para flujo compresible e incompresible, considerando la velocidad de partícula discretizada en los nodos, en un problema 2-dimensional en el plano. La importancia de esta propuesta radica en el manejo de campos vectoriales, que suelen ser calculados en los nodos mediante modelos matemáticos como el de Flujo de Fluidos en Medios Porosos.

12.12.3. Precios del mercado de valores

El precio $V(S, t)$ de un derivado en bolsa es la solución de la PDE parabólica de segundo orden

$$V_t(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}(S, t) + rSV_S(S, t) - rV(S, t) = 0$$

donde S es el precio de la acción, σ es la volatilidad de la acción, r es el interés libre de riesgo compuesto por año, y el tiempo t se mide en años. Esto se conoce como la ecuación de *Black-Scholes*.

Usted tiene algunos ahorros y quiere invertirlos. Si no es un emprendedor, puede comprar acciones en el mercado de valores, pero necesitará encontrar un buen agente de inversiones. Es alguien que ha hecho una investigación exhaustiva y ha estudiado detenidamente en qué compañías es bueno invertir. Pero para ahorrarse la jugosa comisión de este agente, puede hacer otra cosa que resulta igual o mejor: escogerlas usted mismo al azar.

Por 14 años, desde 1988 a 2002, el Wall Street Journal hizo un ejercicio. Colgaban todo el catálogo de acciones de la bolsa en una pared y tiraban dardos al azar. La compañía donde caía el dardo, la incluían en un portafolio. Consistentemente estos portafolios aleatorios superaban la eficiencia de aquellos armados por expertos. David Harding, dueño del importante fondo de inversiones Winton Capital, asegura que armar portafolios aleatorios con acciones del S&P 500 funciona mejor el 99.99 % de las veces.

Esto se sabía desde la década de 1930 y aunque los agentes de bolsa se enfurecieron con estas afirmaciones, los académicos se emocionaron. Comenzaron a utilizar técnicas sofisticadas ya existentes para otros fenómenos aleatorios, como el crecimiento poblacional o el clima. En la década de los 50's, en una biblioteca parisina, alguien encontró una empolvada tesis de principios de siglo por un tal Louis Bachelier, que modelaba los mercados inspirándose en la forma en que se mueven las partículas suspendidas en un líquido.

Aunque Bachelier no había encontrado una forma de predecir precios, había descubierto algo igual o mejor: como eliminar el riesgo.

Proponía las “opciones de compra/venta”, un artificio ya usado por los japoneses desde el siglo 17 para vender o comprar arroz a futuro. Aplicado al mercado de valores, esta idea podía revolucionar su modelado matemático. Sin embargo murió sin resolver el problema crucial: ¿cuál debe ser el precio adecuado para una “opción”? Economistas idearon formulaciones que incluían todo tipo de términos subjetivos como aversión, disponibilidad o experiencia. Nada funcionaba... las fórmulas más bien parecían un ejercicio de psicoterapia.

En 1968 eso iba a cambiar. Myron Scholes y Fisher Black decidieron crear un modelo que tuviera sólo factores cuantificables y objetivos. Y lo lograron. Pero su fórmula era muy complicada para resolverse en cada instante de tiempo. Entonces otro profesor, Robert Merton, se inspiró en los cohetes. Adaptando la forma en que se calcula la posición de un cohete en cada instante de su vuelo, finalmente encontró cómo calcular el precio de una “opción” en cada instante también.

El excepcional resultado de estos intelectuales es el Modelo Black-Scholes y les ganaría el premio Nobel de Economía en 1997:

El precio (C) de la opción depende solo de factores objetivos como el interés r , el strike price (K), duración del contrato (T) y el precio de stock (S). Unos años después de su publicación, fondos de inversiones veían sus ingresos multiplicados gracias a esta magia matemática. Increíblemente, con esta fórmula podían armar portafolios donde el riesgo efectivamente podía eliminarse. ¡¿Cómo?!

La genialidad está en percatarse que en cada momento uno puede crear “opciones” que contrarresten el movimiento de precios de una acción bursátil. Esto se llama “cobertura dinámica” (dynamic hedging). Un fondo puede estar emitiendo opciones constantemente que balanceen el movimiento del mercado.

Los fondos empezaron a apostar más y más con esta fórmula hasta que enfrentaron eventos totalmente inesperados que sus cálculos no consideraban. El colapso de Tailandia en 1997 y el impago de Rusia en 1998 hizo tambalear las bolsas globales. El fondo LTCM, que usaba estas técnicas, tenía apostado casi un trillón de dólares y de no haber sido rescatado, hubiera colapsado la economía mundial.

El modelo Black-Scholes sigue siendo el estándar para apreciar derivados financieros. Es un grandioso ejemplo de cómo diversas áreas del conocimiento humano convergen para crear avances matemáticos poderosos. Pero la crisis de finales de los 90 nos enseña también que estos modelos, como la mayoría, son representaciones limitadas de la realidad.

Un gran número de trabajos se han dedicado a estudiar el modelo de Black-Scholes desde diferentes puntos de vista, por ejemplo resuelven la ecuación aplicando un método numérico al momento de calcular la transformada inversa de Laplace, dan un método directo para hallar una representación integral de la solución, en la cual utilizan la transformada de Mellin, se muestra como obtener la solución a partir de la función de Green de la ecuación de difusión. Por otro lado, algunos autores han generalizado éste modelo, reemplazando el movimiento Browniano geométrico por el movimiento Browniano fraccionario, en la deducción de la ecuación de Black-Scholes.

En las últimas décadas el cálculo fraccionario ha despertado un gran interés en la comunidad científica, debido a sus aplicaciones en diferentes áreas de investigación, tales como la economía, física, mecánica, química, entre otras. En comparación con las derivadas estándar de orden entero respecto al tiempo, las derivadas de orden fraccionario se caracterizan por tener memoria; es decir, la tasa de cambio de una función cerca de un punto es afectada por el pasado en el dominio de definición, en lugar de sólo una vecindad del punto. Existen algunos trabajos, que al igual que nosotros, han estudiado una generalización de la ecuación de Black-Scholes, la cual se obtiene al cambiar la derivada parcial en el tiempo por una derivada fraccionaria.

12.12.4. Evolución de un estado cuántico

En mecánica cuántica, la función de onda $\psi(x, t)$ que caracteriza el movimiento unidimensional de una partícula bajo la influencia de un potencial $V(x)$ satisface la *ecuación de Schrödinger*

$$i\hbar\psi_t(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx}(x, t) + V(x)\psi(x, t)$$

Esta es una PDE parabólica de segundo orden donde \hbar es la constante de Planck reducida, m es la masa de la partícula, e $i^2 = -1$.

La ecuación de Schrödinger fue desarrollada por el físico austriaco Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger en 1925. Describe la evolución temporal de una partícula masiva no relativista. Es de importancia central en la teoría de la mecánica cuántica, donde representa para las partículas microscópicas un papel análogo a la segunda ley de Newton en la mecánica clásica. Las partículas microscópicas incluyen a las partículas elementales, tales como electrones, así como sistemas de partículas, tales como núcleos atómicos. Limitaciones de la ecuación: La ecuación de Schrödinger es una ecuación no relativista que sólo puede describir partículas cuyo momento lineal sea pequeño comparada con la energía en reposo dividida de la velocidad de la luz.

Además la ecuación de Schrödinger no incorpora el espín de las partículas adecuadamente.

Pauli generalizó ligeramente la ecuación de Schrödinger al introducir en ella términos que precedían correctamente el efecto del espín, la ecuación resultante es la ecuación de Pauli.

Más tarde Dirac, proporcionó la ahora llamada ecuación de Dirac que no sólo incorporaba el espín para fermiones de espín 1/2, sino que introducía los efectos relativistas.

12.12.5. Movimiento de un campo escalar cuántico

La función de onda $\psi(x, y, z, t)$ de una partícula en movimiento libre en la mecánica cuántica relativista es la solución de la (hiperbólica de segundo orden) ecuación de *Klein-Gordon*.

$$\psi_{tt}(x, y, z, t) = c^2 \Delta \psi(x, y, z, t) - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \psi(x, y, z, t)$$

donde c es la velocidad de la luz.

La versión unidimensional de esta ecuación es de la forma:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) - au(x, t)$$

donde $a = cte > 0$.

La teoría cuántica de campos (TQC) surge al combinar la relatividad especial y la mecánica cuántica. Es posible escribir una versión relativista de la ecuación de Schrödinger. De hecho fue él el primero en encontrar lo que hoy se conoce como ecuación de Klein-Gordon, pero la desechó por no describir correctamente la estructura fina del átomo de hidrógeno, así que se quedó con su límite no relativista.

Sin embargo, las ecuaciones de ondas (sean o no relativistas) no pueden explicar procesos en los que cambia el número de partículas. Además las ecuaciones de ondas relativistas sufren patologías, como la aparición de densidades de probabilidad negativa, la existencia soluciones de energía negativa y la violación de causalidad (probabilidad no nula de encontrar partículas propagándose fuera del cono de luz).

La TQC proporciona un marco natural para manejar estados con un número arbitrario de partículas (espacio de Fock), da sentido a las soluciones de energía negativa (antipartículas), resuelve el problema de la causalidad (la propagación de un partícula fuera del cono de luz es indistinguible de la de su antipartícula viajando en dirección opuesta, y sus amplitudes se cancelan), explica la relación entre espín y estadística, y permite calcular observables (secciones eficaces, vidas medias, momentos magnéticos) con elevadísima precisión y de acuerdo con el experimento.

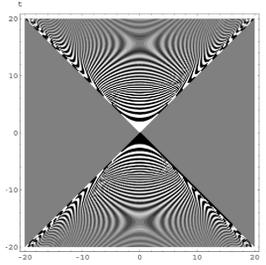
¿Qué estados crea el campo de KG? Veamos ahora ¿Qué interpretación tiene el campo de KG? Hagamoslo actuar sobre el vacío

$$\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} e^{ip \cdot x} |\vec{p}\rangle$$

Efectivamente

$$\begin{aligned} & \langle 0|\phi(x)|\vec{p}\rangle \\ &= \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3 2E_{p'}} \left(a(\vec{p}') e^{-ip' \cdot x} + a^\dagger(\vec{p}') e^{ip' \cdot x} \right) a^\dagger(\vec{p}) \right| 0 \right\rangle \\ &= e^{-ip \cdot x} = e^{-iE_p t} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \equiv \langle \vec{x}, t | \vec{p} \rangle, \end{aligned}$$

que es una onda plana y confirma, en principio, la interpretación de que el campo $\phi(x)$ actuando sobre el vacío crea una partícula en el punto \vec{x} en el tiempo t .



12.12.6. Pérdida de línea de transmisión

La corriente y el voltaje en la propagación de las señales en una línea de telégrafo satisfacen la PDE hiperbólica de segundo orden

$$au_{tt}(x, t) + bu_t(x, t) + cu(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

donde los coeficientes $a, b > 0$ y $c \geq 0$ se expresan en términos de resistencia, inductancia, capacitancia y conductancia que caracterizan la línea. Esto se conoce como la ecuación del telégrafo (o del telegrafista). Este ejemplo ilustra el comportamiento de la solución de la Ecuación del Telégrafo en lo que constituye el "problema del telegrafista". Para ello, consideraremos el problema siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (a + b) \frac{\partial u}{\partial t} + abu = e^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < L, t > 0 \\ & u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x); \quad 0 \leq x \leq L; \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0; \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

en el caso en que la velocidad de propagación de la señal a lo largo del cable ($c = 1$) y la longitud del cable sea $L = 10$. Inicialmente la señal es una onda triangular centrada en el punto $x = 3$, y su velocidad inicial es $g(x) = -cf'(x) - df(x)$, siendo $d = (a + b)/2$. Como se ha explicado en clase,

los valores a, b, c de la ecuación del telégrafo se relacionan con la resistencia eléctrica del cable por unidad de longitud R , la inductancia del cable por unidad de longitud L , la capacitancia del cable por unidad de longitud C y una conductancia a tierra del cable por unidad de longitud G del modo siguiente:

$$a = \frac{G}{C}, \quad b = \frac{R}{L}, \quad c^2 = \frac{1}{LC}$$

El programa muestra simultáneamente en trazo gris la solución de la Ecuación de Ondas ($a = 0, b = 0$), y en trazo negro la solución de la Ecuación del Telégrafo desde el instante de tiempo inicial hasta $t = 20$. Una vez que termina la ejecución pueden variarse los valores de los parámetros. Esta variación requiere que los valores de $a \geq 0, b \geq 0$ y $(a + b) \leq 0,6$ para que todos los modos de la solución sean subamortiguados. Dado que la solución analítica de este problema está afectada de un término de la forma e^{-dt} que provoca el decaimiento en función del tiempo de la señal que se va propagando, el programa permite 'desactivar' este decaimiento (pulsando "decay off"); es decir, se representa $e^{+dt}u(x, t)$ en lugar de $u(x, t)$.

Un siglo de T.S.H. (telegrafía sin hilos) o radiotelegrafía a bordo de los buques mercantes; o bien "Oficial Radiotelegrafista de la Marina Mercante, una profesión de vida breve". Los oficiales radiotelegrafistas de la M.M. también llamados telegrafistas, radios, chispas u otros epítetos más o menos cariñosos, eran una especie profesional, hoy en día prácticamente extinguida, habitual a bordo de todos los buques mercantes del mundo de más de 1.600 TRB (toneladas de Registro Bruto) entre los años 60 y 90 del siglo pasado.

Alfred Vail y Samuel Morse crearon el alfabeto o código que lleva el nombre de éste último. En 1837 Morse, con la ayuda de Joseph Henry, desarrolló y patentó un telégrafo eléctrico, el primer sistema para transmitir información a distancia mediante impulsos eléctricos a través de alambres de cobre²².



²²Leer más: <https://www.navegar-es-preciso.com/news/un-siglo-de-t-s-h-telegrafia-sin-hilos-o-radiotelegrafia-a-bordo-de-los-buques-mercantes-o-bien-oficial-radiotelegrafista-de-la-marina-mercante-una-profesion-de-vida-breve/>

12.13. Ondas disipativas

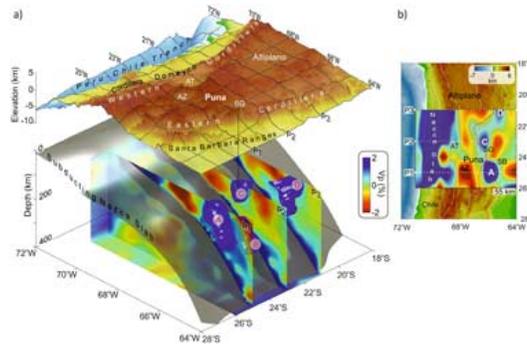
En el caso unidimensional, la propagación de tales ondas está gobernada por una PDE hiperbólica de segundo orden de la forma

$$u_{tt}(x, t) + au_t(x, t) + bu(x, t) = c^2u_{xx}(x, t) - du_x(x, t)$$

donde los coeficientes $a, b, d \geq 0$ no son todos cero y $c > 0$.

12.13.1. Una aplicación geofísica: Sismogramas Sintéticos

Los resultados de este capítulo encuentran aplicación inmediata en exploración sísmica. Si consideramos un modelo geológico constituido por estratos horizontales homogéneos y ondas que inciden perpendicularmente a las interfaces entre dichos estratos (incidencia normal) es posible dar una descripción muy simplificada de las ondas reflejadas por las interfaces (reflectores sísmicos) en términos de coeficientes de reflexión y transmisión. En efecto, de acuerdo a nuestro modelo simplificado, cada capa es homogénea y la propagación de ondas es vertical (unidimensional), en consecuencia, en cada capa las ondas acústicas.



A: Vista en 3D de la estructura litosférica y del manto superior, B: Vista de cortes de tomografía a 55 km de profundidad. Cuenca de Atacama (AT), Arizaro (AZ) y Salinas Grandes (SG). Principales anomalías A, B, C y D. Tomada de (Andersen et al., 2022)²³.

12.14. Vibraciones transversales de una varilla

La deflexión $u(x, t)$ de un punto genérico en la barra satisface la PDE de cuarto orden

$$u_{tt}(x, t) + c^2u_{xxxx}(x, t) = 0$$

donde c es una constante física relacionada con la rigidez del material de la varilla.

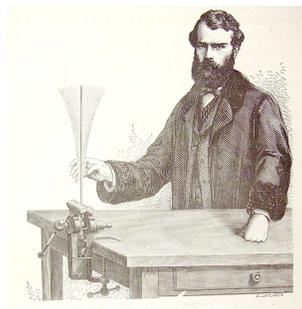
²³<https://www.acggp.org/boletin-5-agosto/>

Los sistemas mecánicos en general, consisten en un conjunto de componentes estructurales, que poseen elasticidad y masa distribuida. Ejemplos de estos componentes son las barras y vigas. Las vibraciones de sistemas mecánicos con masas puntuales y elementos elásticos discretos están gobernadas por una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

Las barras, vigas y otros componentes estructurales, sin embargo, están considerados como sistemas continuos que poseen infinitos grados de libertad; las vibraciones de estos sistemas están gobernadas por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que involucran variables que dependen tanto del tiempo como de coordenadas espaciales. En este trabajo se recoge un estudio riguroso y minucioso de las vibraciones en sistemas simples, barras y vigas, de materiales elásticos. El estudio de las vibraciones ha adquirido una gran importancia en el proceso de diseño de numerosos elementos, tanto en el ámbito industrial como fuera de éste, ya que la existencia de vibraciones puede acarrear múltiples problemas, tales como la aparición de ruido, funcionamiento incorrecto e incluso el colapso del elemento en cuestión, al favorecerse la propagación de defectos debido a procesos de fatiga.

Como ejemplo de sistemas reales en los que las vibraciones son un problema importante se pueden citar los sistemas de transporte de viajeros: ferrocarriles, automóviles... en los que se deben evitar determinados valores en la frecuencia de vibración del sistema, ya que ésta puede afectar al confort, provocando malestar y mareos en los ocupantes.

Existen determinados problemas cuyas condiciones de contorno son dependientes del tiempo, y la forma convencional y habitual de resolver las ecuaciones diferenciales que los definen es aplicando condiciones de contorno que no dependen del tiempo. Es importante conocer si se está cometiendo un error al resolver estos problemas como se hace habitualmente, y en caso afirmativo, cuantificar dicho error. Por este motivo, los problemas recogidos en este trabajo se van a resolver siguiendo dos métodos, por un lado el método convencional y por otro, aplicando un método de resolución en el que sí se imponen dichas condiciones de contorno como dependientes del tiempo.



12.15. Ondas dispersas

La ecuación de *Helmholtz*.

$$\Delta u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0$$

donde $k = cte$, juega un papel importante en el estudio de la dispersión de ondas acústicas, electromagnéticas y elásticas. Es una PDE elíptica de segundo orden. La ecuación

$$\Delta u(x, y, z) - k^2 u(x, y, z) = 0$$

se llama ecuación de *Helmholtz* modificada.

En radiofísica contemporánea, óptica atmosférica, comunicación inalámbrica y, en general, teoría de comunicación, el estudio de propagación de ondas electromagnéticas en la atmósfera se ha incrementado en las últimas décadas considerablemente, esto a raíz de las nuevas tecnologías computacionales y los modernos laboratorios que nos permiten analizar y experimentar el comportamiento turbulento que se presenta en la atmósfera.

Como consecuencia de este desarrollo, herramientas matemáticas más sofisticadas se deben introducir en el estudio y tratamiento de estos fenómenos, tales como ecuaciones en derivadas parciales, teoría de distribuciones, desigualdades variacionales, funciones de Green y métodos de aproximación y numéricos, sin los cuales sería imposible resolver las ecuaciones que modelan dichos fenómenos físicos.

En los últimos 30 años la astronomía de emisiones electromagnéticas de altas energías (ultravioleta, X y gamma), la radioastronomía y el sondeo de regiones espaciales in situ con medidores de partículas y de campos nos han mostrado una imagen del Sistema Solar muy diferente de la que se tenía anteriormente, haciéndonos ver que estamos rodeados de plasmas por todas partes. Hemos descubierto que esta presencia del plasma es universal y el universo de plasma, en muchos aspectos muy distinto del que se había descrito anteriormente, está apenas empezando a definirse. Uno de los propósitos principales de este libro es mostrar la gran abundancia de los plasmas naturales y describir las características generales de esos plasmas que llenan el espacio o que componen o rodean los cuerpos que lo pueblan.

En los siguientes capítulos realizaremos un viaje hacia el exterior para ir descubriendo los plasmas que nos encontramos al alejarnos de la superficie de la Tierra. Empezaremos por los entornos plasmáticos de nuestro planeta y los demás planetas, describiremos después el plasma solar y el

interplanetario y finalmente mencionaremos las estructuras de plasma que se encuentran fuera de nuestro sistema planetario y los plasmas que llenan los espacios interestelar e intergaláctico.

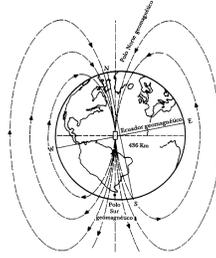
Las observaciones directas de los plasmas cercanos a la Tierra son un excelente laboratorio para conocer el comportamiento de los plasmas más distantes, pues los plasmas del Sistema solar no sólo cubren un amplio rango de densidades, temperaturas y magnetizaciones, sino que presentan también una rica variedad de fenómenos desde sencillos hasta muy complejos. Por otra parte, estas observaciones constituyen también la única forma de apreciar ciertos fenómenos en los plasmas espaciales que no son reproducibles en un laboratorio terrestre.

12.15.1. Las auroras

La más cercana manifestación visible de los plasmas en la naturaleza es la aurora, los hermosos despliegues de luces danzarinas que se presentan en gran variedad de formas y que adornan la alta atmósfera en las regiones cercanas a los polos. Estas luces, que generalmente son de color amarillo verdoso, se ven casi todas las noches claras y su intensidad es suficiente como para poder leer. Por lo general, a través de los despliegues aurorales se transparentan las estrellas, pero cuando son muy brillantes ocultan la presencia de la Vía Láctea en el cielo. Aunque durante el día no se distinguen, el resplandor del cielo permanece en realidad todo el tiempo.



Aunque aquí no puede apreciarse, todas las luces de una aurora están en continuo movimiento. Las auroras ocurren típicamente en dos regiones anulares, casi circulares, de pequeña extensión latitudinal, alrededor de cada polo geomagnético. Estos polos geomagnéticos, que podríamos considerar como las intersecciones del eje del campo magnético dipolar terrestre con la superficie de la Tierra, son cercanos a los polos geográficos pero no coinciden con ellos. El polo norte geomagnético (que en realidad es el polo sur de un imán) se localiza cerca del extremo noroeste de Groenlandia y el polo sur (que es un polo norte magnético) cerca de la estación soviética Vostok en la Antártida.



El campo magnético de la tierra es semejante al de un imán, pero no está alineado con el eje de rotación. Los polos geomagnéticos no coinciden con los polos geográficos.

12.16. Calor convectivo en estado estacionario

En el caso bidimensional, la distribución de temperatura $u(x, y)$ que gobierna este proceso satisface una PDE elíptica de segundo orden de la forma

$$\Delta u(x, y) - au_x(x, y) - bu_y(x, y) + cu(x, y) = 0,$$

donde los coeficientes $a, b \geq 0$, no ambos cero, y c están relacionados con las propiedades térmicas del medio, las tasas de flujo de calor en las direcciones x e y , y la fuerza de la fuente de calor.

La energía calorífica se transmite desde las zonas de alta temperatura a las de baja temperatura, en un proceso que va acompañado de un cambio de entropía hasta que se alcanza, si es posible, el estado de equilibrio térmico caracterizado por una distribución uniforme de temperaturas.

Denominamos calor a la transferencia de energía que tiene lugar sin un movimiento ordenado del sistema, en contraposición a la transferencia de energía que tiene lugar con un movimiento ordenado durante la realización de un trabajo mecánico.

La Termodinámica de los procesos reversibles estudia la transferencia de energía en éstos, pero siempre a lo largo de una sucesión de estados de equilibrio. Sin embargo, en un proceso de intercambio de calor entre cuerpos a distintas temperaturas, en tanto se mantenga una diferencia finita de temperaturas entre los mismos habrá un flujo irreversible de calor entre dichos cuerpos y no tendremos estados de equilibrio.

Sin embargo, sí podemos tener estados en los que las variables macroscópicas del sistema no cambian con el tiempo, pero que no corresponden a estados de equilibrio sino a estados estacionarios en los que se mantienen constantes las temperaturas de los distintos cuerpos involucrados y el flujo de calor entre ellos. También podemos tener situaciones en las que el sistema está evolucionando con el tiempo y ni siquiera tenemos estados estacionarios.

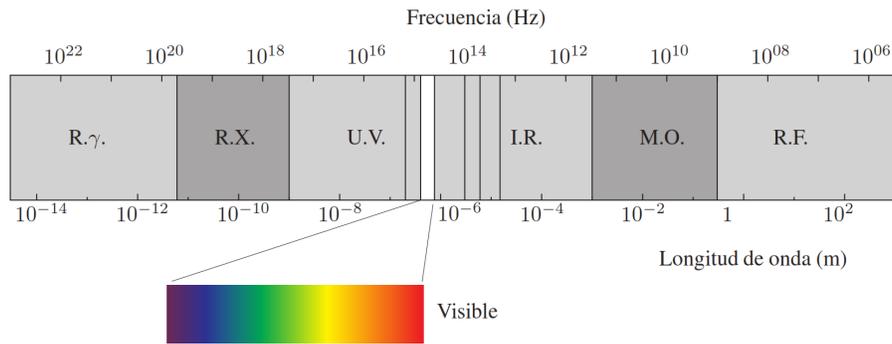
12.16.1. La transmisión del calor tiene lugar por tres mecanismos básicos

- **Conducción:** La energía calorífica se transmite durante el contacto directo entre cuerpos (o partes de los mismos) a distintas temperaturas y tiene lugar mediante choques o acoplamientos entre las moléculas del sistema (unas en zonas más calientes, con mayor energía térmica y otras en las zonas más frías, con menor energía térmica), aunque no haya un movimiento macroscópico de las moléculas, o el material sea transparente a la radiación. Este proceso es de gran importancia en sólidos, pero de menor importancia en líquidos y gases, donde normalmente aparece combinado con la convección y es prácticamente enmascarado por ésta.
- **Convección:** La energía calorífica se transmite por el movimiento físico de moléculas “calientes” de las zonas de alta temperatura a las zonas de baja temperatura y viceversa, equilibrándose las temperaturas. Este proceso tiene gran importancia en fluidos y también es denominado conducción superficial, ya que el flujo de calor entre la superficie de un material y un fluido está relacionado con la conducción a través de una fina capa del fluido que se encuentra junto a la superficie. Además, es este proceso de conducción superficial el que provoca, en un fluido inicialmente en reposo en contacto con una superficie a distinta temperatura, una diferencia de temperaturas en el fluido, originándose diferencias de densidad en el mismo que producirán a su vez un desplazamiento físico de materia a distintas temperaturas de unas zonas a otras, teniéndose convección (en este caso natural). La transferencia de calor por convección puede ser forzada cuando está ayudada por el movimiento de las superficies en contacto con el fluido o libre (llamada también natural) cuando se produce únicamente en virtud de una diferencia de densidades causada por una diferencia de temperaturas. También puede venir acompañada de un cambio de fase, como ocurre durante la condensación o la ebullición, con unos intercambios de calor muy intensos.
- **Radiación:** La energía calorífica se transmite en forma de energía de la radiación electromagnética, emitida por todos los cuerpos por el hecho de encontrarse a una temperatura T , y que se propaga a la velocidad de la luz (porque es luz de distintas longitudes de onda) y puede ser absorbida por los cuerpos, aumentando su temperatura. La radiación es el único medio de transmisión del calor cuando ésta tiene lugar a través del vacío, y puede ser muy importante para altas temperaturas.

Estos mecanismos básicos actuarán de forma combinada, no sólo para dar la temperatura final del recinto que estamos estudiando, sino en combinación con otros elementos como la humedad del aire, para dar el grado de comodidad o confort del ser humano en el espacio considerado. Así,

mayores o menores grados de humedad darán lugar a una sensación de comodidad mayor o menor para una misma temperatura. La acción del viento y de la radiación son también elementos a considerar. Por una parte, el viento favorece los procesos de convección y evaporación.

Por otra parte, para una misma temperatura en un lugar, el hecho de que éste esté soleado puede hacer más agradable la estancia en el mismo en invierno, no sólo por la luz sino por la radiación térmica que incide sobre la persona. De la misma forma, para una misma temperatura en una habitación la sensación térmica es más baja si paredes y suelo están aún fríos que si los mismos están ya calientes o incluso más calientes que el aire de la habitación.



12.17. Problemas planos en mecánica de medios continuos

La función de tensión de *Airy* en la elasticidad plana y la función de corriente en el flujo lento de un fluido viscoso incompresible son soluciones de la elíptica biarmónica de cuarto orden ecuación

$$\Delta\Delta u(x, y) = u_{xxxx}(x, y) + 2u_{xxyy}(x, y) + u_{yyyy}(x, y) = 0.$$

La ecuación de *Airy* desempeña un papel importante en la física. Las soluciones fundamentales de la ecuación de Airy homogénea denominadas funciones de Airy se usan en muchos campos de la física (óptica, mecánica de fluidos, física molecular, física de superficies, física cuántica).

El método de la función de Green se aplica a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales lineales inhomogéneas, en particular, cuando se resuelven sistemas descritos mediante dichas ecuaciones con condiciones de frontera lineales o condiciones iniciales lineales. El método de las funciones de Green desde su aparición en 1825 se ha convertido en una herramienta alternativa para abordar temas con ecuaciones diferenciales no homogéneas bajo ciertas condiciones de contorno, esta técnica ha demostrado ser útil en diversas áreas de la física. La importancia de este método radica en su simplicidad para aplicarse a sistemas físicos gobernados por ecuaciones diferenciales.

En el desarrollo de estructuras y elementos de funcionamiento se desea siempre garantizar el adecuado tan metodologías de diseño con las cuales se pueda calcular un valor de carga a aplicar, que se pueda comparar con un valor límite (definido por el material y la geometría), asegurando el diseño realizado.

A principios del siglo pasado se pensaba que el diseño basado en los esfuerzos de operación de los elementos, comparado con los esfuerzos límite de los materiales, era condición suficiente para su operación satisfactoria. Sin embargo, han ocurrido diversos accidentes (fallas prematuras) con elementos que se pensaban bien diseñados. Este es el caso del buque Titanic (1912), un tanque de melaza en Boston que estalló por la presión de la melaza (1919), muchos barcos de la época de la Segunda Guerra Mundial que se partieron en dos (1940s) y tres aviones Comet británicos que se desintegraron en el aire en menos de un año (1953-1954s).

En muchos casos, las fallas ocurrían en presencia de pequeñas deformaciones y poca fluencia en las zonas de falla, es decir, tenían comportamiento frágil. Éstos y muchos otros incidentes motivaron el desarrollo de lo que hoy se conoce como mecánica de fractura. En muchos casos, la fractura total puede ocurrir con una pequeñísima deformación plástica, la cual se presenta en las cercanías a la punta de la grieta. Por tanto, el material parece tener una fractura frágil.

Los métodos analíticos son importantes, ya que han sido la base de la mecánica de fractura y suministran las ecuaciones para calcular los campos de esfuerzos y desplazamientos. En estos métodos, se trata de determinar las denominadas funciones de esfuerzo de Airy para hallar K .

Westergaard realizó uno de los primeros acercamientos al problema, utilizando las funciones de Airy, en las cuales se dice que, para que se cumplan las ecuaciones de equilibrio, se tiene que cumplir la ecuación de compatibilidad:

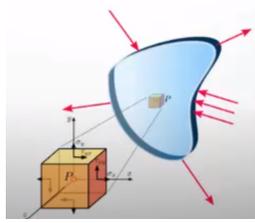
$$\frac{d^4\psi}{dx^4} + 2\frac{d^4\psi}{dx^2dy^2} + \frac{d^4\psi}{dy^4} = 0$$

ó

$$\nabla^2(\nabla^2\psi) = 0$$

La función se llama la función de esfuerzo de Airy. A partir de ésta se pueden determinar los valores de esfuerzos y deformaciones mediante derivaciones parciales. Por ejemplo, para esfuerzo plano:

$$\sigma_x = \frac{d^2\psi}{dy^2}, \quad \sigma_y = \frac{d^2\psi}{dx^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{d^2\psi}{dxdy}$$



12.18. Flujo transónico plano

El flujo transónico de un gas comprimible se describe mediante la ecuación de *Euler-Tricomi*

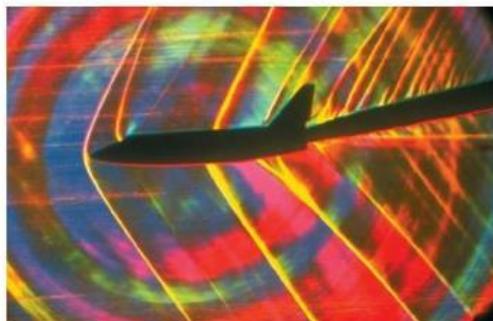
$$u_{xx}(x, y) = xu_{yy}(x, y)$$

donde $u(x, y)$ es una función de la velocidad. Esta es una PDE de segundo orden de tipo mixto: es hiperbólica para $x > 0$, elíptica para $x < 0$ y parabólica para $x = 0$.



Flujo transónico

Flujo supersónico



13. Capítulo IV: Funciones Generalizadas

El análisis asintótico es una antigua materia que tiene aplicaciones en varios campos de la matemática pura y aplicada, en física e ingeniería. Las técnicas asintóticas son usadas para aproximar expresiones integrales complicadas que resultan de distintas transformaciones en el análisis. También la solución de algunas ecuaciones diferenciales son calculadas con mayor precisión usando técnicas asintóticas.

Una característica importante en la teoría de expansiones asintóticas es que juega un papel importante con la experiencia y la intuición al resolver problemas particulares vinculados con la naturaleza.

El objetivo de este estudio es presentar aproximaciones de esta teoría usando funciones generalizadas.

La teoría de funciones generalizadas es otra área importante dentro de la matemática, en la cual se han encontrado aplicaciones para la física e ingeniería. Recientemente se ha encontrado diversas relaciones entre las técnicas asintóticas y la teoría de distribuciones.

El objetivo de este capítulo es presentar la teoría de distribuciones de expansiones asintóticas para funciones de una variable. Se estudia el comportamiento asintótico de $f(\lambda x)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ en los espacios distribucionales $E'(R)$, $P'(R)$, $O_\gamma'(R)$.

A manera de ejemplo, sabemos que la expansión asintótica del momento está dada por :

$$f(\lambda x) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n \mu_n \delta^{(n)}(x)}{n! \lambda^{n+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+2}}\right)$$

donde μ_k son los momentos de la función generalizada $f(x)$ dada por :

$$\mu_n = \langle f(x), x^n \rangle$$

referenciada en [6], [7].

La investigación se orienta a saber en que espacios de distribuciones tales como $E'(R)$, $P'(R)$, $O_\gamma'(R)$, $S'(R)$ la expansión es válida.

La técnica del momento de la expansión asintótica es válida para muchas variedades de núcleos, tales como funciones generalizada de rápido decrecimiento y de rápidas oscilaciones. También la expansión asintótica proporciona desarrollo de muchas integrales y series. Algunas series pueden

ser convergentes y asintótica, sin embargo, existen series divergentes que son asintótica, es por esta razón que las series asintótica están referida a series divergentes.

Las distribuciones de rápido decaimiento en el infinito son de fundamental importancia en el estudio de las expansiones asintótica de funciones generalizada.

Estas expansiones inmediatamente da el desarrollo clásico de varias integrales y series. El momento de la expansión asintótica está referido con la expansión de los núcleos distribucionales del tipo $f(\lambda x)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

El momento de la expansión asintótica está dada en términos de las funciones Delta de Dirac concentrada en el origen, mientras que las expansiones generales en términos de funciones generalizadas homogéneas. Una aproximación directa de esta expansión asintótica, permite resolver muchos problemas no solo en el uni-dimensional espacio, sino también aplicarlo a integrales y núcleos oscilatorios en espacio n-dimensionales.

El multi-dimensional momento de la expansión asintótica encuentra aplicaciones de los desarrollos de las integrales tipo Laplace y Fourier, éstas generalizaciones permiten estudiar la expansión de los núcleos distribucionales del tipo $f(\lambda x, y)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$. La serie de las funciones Delta de Dirac del tipo $\sum a_n \delta^{(n)}(x)$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ permiten estudiar las relaciones entre las soluciones formales del clásico desarrollo asintótico y las soluciones distribucionales de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las expansiones asintóticas de funciones generalizadas depende de la selección de los espacios de pruebas y usando la teoría del producto tensorial topológico se obtienen expansiones vectoriales de distribuciones.

Por otra parte, dentro de esta teoría es conocida la expansión asintótica de la transformada de Laplace, en este trabajo también se le da un sentido distribucional a tal expansión.

13.1. Definiciones Básicas

Definición 5 *El espacio D de funciones de pruebas consiste de todas las funciones de valores complejos $\phi(t)$ que son infinitamente diferenciable y a soporte compacto.*

Definición 6 El soporte de una función continua $\phi(t)$ es la clausura del conjunto donde $\phi(t) \neq 0$. Los puntos del soporte de una función generalizada son llamados puntos esenciales.

Definición 7 Una sucesión de funciones de pruebas $\{\phi_n\}$ convergen en D si :

1. $\phi_n(x) \in D$
2. El soporte de cada $\phi_n(x)$ está contenido en algún dominio fijo K independiente de n .
3. La sucesión $\{\phi_n^k(x)\}$ converge uniformemente para $-\infty < x < \infty$ y k es un entero positivo fijo

Observación 2 : El hecho de que $\phi_n^k(x)$ converga uniformemente para cada k , afirma que $\phi^k(x)$ es continua y es el límite de $\{\phi_n^k(x)\}$, por tanto, D es un espacio completo.

Definición 8 Una funcional f lineal continua del espacio D , es una función generalizada. El espacio de todas las funciones generalizada se denotará por D' . D' es el dual o conjugado del espacio D . Esa funcional debe satisfacer :

1. Linealidad

$$\langle f, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle = \alpha \langle f, \phi_1 \rangle + \beta \langle f, \phi_2 \rangle$$

2. Continuidad:

$$\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \phi(x) \in D \text{ entonces } \{\langle f, \phi_n(x) \rangle\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \langle f, \phi(x) \rangle$$

El valor de f en la función de prueba ϕ se denotará por

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x) dx$$

Las distribuciones más simples están dadas por funciones localmente integrable, es decir, si f es una función definida en U (conjunto abierto de R^n), entonces es localmente integrable, por ejemplo satisface $\int_K |f(x)| dx < \infty$ para cada compacto $K \subseteq U$, entonces podemos construir una distribución en U por la fórmula

$$\langle f, \phi \rangle = \int_U f(x)\phi(x) dx$$

la cual está bien definida en $D(U)$ debido a que la integral es evaluada sobre el soporte de $\phi(x)$ que es compacto y la continuidad sigue del hecho de que si $\{\phi_\eta\} \rightarrow 0$ en D , entonces existe un compacto fijo K con $\text{sopp } \phi_\eta \subseteq K$, para $\eta \geq \eta_0$ y entonces

$$\left| \int_U f(x)\phi_\eta(x) dx \right| \leq \int_K |f(x)| dx \max\{|\phi_\eta| : x \in U\} \rightarrow 0$$

debido a la convergencia uniforme de $\{\phi_\eta\} \rightarrow 0$

Ejemplo 32 Si $y \in U$, la funcional delta de Dirac concentrada en y , es la distribución $\delta(x-y)$ dada por

$$\langle \delta(x-y), \phi(x) \rangle = \phi(y)$$

donde la evaluación es con respecto a x donde y es un elemento fijo de U .

Observación: Las distribuciones que se obtienen de una función localmente integrable son llamadas distribuciones regulares, en casos contrarios, distribuciones singulares.

13.2. Operaciones con Funciones Generalizadas

Sean f, g funciones generalizadas, $\alpha \in C$, $x \in R^n$, $t \in R^n$, $\phi \in D$

1. Suma

$$\langle f+g, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle + \langle g, \phi \rangle$$

2. Producto de una distribución por una constante

$$\langle \alpha f, \phi \rangle = \langle f, \alpha \phi \rangle$$

3. Traslación

$$\langle f(t-x), \phi(t) \rangle = \langle f(t), \phi(t+x) \rangle$$

4. Trasposición

$$\langle f(-t), \phi(t) \rangle = \langle f(t), \phi(t) \rangle$$

5. Multiplicación de la variable independiente por una constante positiva

$$\langle f(at), \phi(t) \rangle = \langle f(t), \frac{1}{a^n} \phi\left(\frac{t}{a}\right) \rangle$$

6. Si f, g son localmente integrables entonces, $\langle fg, \phi \rangle = \int f(t)g(t)\phi(t) dt$

Teorema 33 Sea φ una función infinitamente diferenciable, f una función generalizada y ϕ una función de prueba del espacio D , entonces:

$$\langle \varphi f, \phi \rangle = \langle f, \varphi \phi \rangle = \int f(x)[\varphi(x)\phi(x)] dx = \int [\varphi(x)f(x)]\phi(x) dx$$

Demostración 5 Para cada $\phi \in D$, $\varphi \phi \in D$ y $\varphi \phi$ es cero cuando ϕ es cero, esto significa que $\varphi \phi \in D$.

Sean ϕ_1 y $\phi_2 \in D$, $\alpha, \beta \in C$

$$\begin{aligned} \langle \varphi f, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle &= \langle f, \alpha\varphi\phi_1 + \beta\varphi\phi_2 \rangle = \langle f, \alpha\varphi\phi_1 \rangle + \langle f, \beta\varphi\phi_2 \rangle \\ &= \alpha \langle \varphi f, \phi_1 \rangle + \beta \langle \varphi f, \phi_2 \rangle \end{aligned}$$

Sea $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$ entonces hay que probar que $\{\varphi\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$

$$|\varphi\phi_n - \varphi\phi_k| = |\varphi(\phi_n - \phi_k)| = |\varphi| |(\phi_n - \phi_k)|$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} |\varphi| |(\phi_n - \phi_k)| = 0$$

de aquí se deduce que

$$\langle \varphi f, \phi_n \rangle = \langle f, \varphi\phi_n \rangle \rightarrow 0$$

Por tanto φf es una funcional lineal continua.

Definición 9 Una sucesión de funciones generalizadas $\{f_n\}$ converge en D' , si para cada $\phi \in D$, la sucesión numérica $\langle f_n, \phi \rangle$ converge.

Teorema 34 Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones localmente integrable que convergen puntualmente en casi todo punto a la función $f(x)$ y $|f_n(x)| \leq g(x)$, $g(x)$ es una función localmente integrable, entonces $f(x)$ es localmente integrable y la correspondiente sucesión de funciones generalizadas $\{f_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ en D' .

Demostración 6 Por el teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue se asegura que $f(x)$ es localmente integrable, también para una función fija $\phi \in D$, la sucesión $\{f_n\phi\} \rightarrow f\phi$ y todo elemento de ésta sucesión es cero fuera de un compacto y entonces es integrable sobre R^n , por teorema general de convergencia de Lebesgue se obtiene :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \phi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{R^n} f_k(x)\phi(x) dx = \int_{R^n} f(x)\phi(x) dx = \langle f, \phi \rangle$$

Observacion:

1. El teorema anterior es válido si la sucesión $\{f_n\}$ de funciones localmente integrable convergen uniformemente en un dominio acotado de R^n a la función $f(x)$.
2. D es un subespacio de D' .

3. La convergencia en D implica convergencia en D' .
4. La operación de pasaje al límite es lineal, es decir, si $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ y $\alpha \in C$ o es una función infinitamente diferenciable entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha f_k = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \alpha f$$

5. Toda funcional singular es el límite de una sucesión de funcionales regulares.
6. Toda función generalizada es el límite de funciones generalizadas concentrada en conjuntos compactos.

13.3. Diferenciación e Integración de Funciones Generalizadas

Primeramente consideraremos una función ordinaria de una variable. Sea $f(x)$ una función continua con primera derivada continua (en el sentido usual) y consideremos el funcional

$$\langle f' \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x) dx$$

Integrando por parte, se obtiene :

$$\langle f' \phi \rangle = f(x)\phi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x) dx = \langle f, -\phi' \rangle$$

usaremos esta ecuación para definir la derivada de una función generalizada.

Sea f una funcional lineal continua en D , entonces la funcional g definida por

$$\langle g, \phi \rangle = \langle f, -\phi' \rangle$$

es llamada la derivada de f y es denotada por f' o $\frac{df}{dx}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x) dx$$

Para mostrar la consistencia de esta definición, se debe probar que g es una funcional lineal continua en D .

$$\langle g, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle = \langle g, \alpha\phi_1 \rangle + \langle g, \beta\phi_2 \rangle = \alpha \langle g, \phi_1 \rangle + \beta \langle g, \phi_2 \rangle$$

$$= \alpha \langle f, -\phi_1' \rangle + \beta \langle f, -\phi_2' \rangle = \langle f, -\alpha\phi_1' \rangle + \langle f, -\beta\phi_2' \rangle$$

$$= \langle f, -\alpha\phi'_1 - \beta\phi'_2 \rangle = \langle g, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle$$

Esto muestra que g es lineal, para ver la continuidad, haremos:

Sea una sucesión de funciones $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$ en D , de acuerdo a la definición de convergencia, la sucesión $\{-\phi'_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$ en D . El hecho de que f es continua implica que

$$\langle g, \phi_n \rangle = \langle f, -\phi'_n \rangle \rightarrow 0$$

Ejemplo:

Sea $H(x)$ la función de Heaviside, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

entonces, su primer derivada es

$$\langle H'(x), \phi(x) \rangle = - \langle H(x), \phi'(x) \rangle = - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx = \phi(0)$$

en conclusión, tenemos que

$$H'(x) = \delta(x)$$

Definición 10 La derivada parcial de primer orden $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) de una función generalizada f definida sobre R^n son las funcionales en D dada por:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \phi \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\rangle \quad (i = 1, 2, \dots, n), \phi \in D$$

La derivada parcial de primer orden de una función generalizada es también una función generalizada.

Demostración 7

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \right\rangle &= \left\langle f, -\alpha\frac{\partial \phi_1}{\partial t_i} - \beta\frac{\partial \phi_2}{\partial t_i} \right\rangle = \left\langle f, -\alpha\frac{\partial \phi_1}{\partial t_i} \right\rangle + \left\langle f, -\beta\frac{\partial \phi_2}{\partial t_i} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \alpha\phi_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \beta\phi_2 \right\rangle \end{aligned}$$

Sea $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$ en D , esto significa que $\left\{\frac{\partial \phi_n}{\partial t_i}\right\}_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ en D . Como f es continua se tiene

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \phi_n \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial \phi_n}{\partial t_i} \right\rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Teorema 35 Las derivadas mixtas de funciones generalizadas son independiente del orden de diferenciación, es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i}$$

Demostración 8

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, \phi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_j}, -\frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\rangle = \left\langle f, \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_j \partial t_i} \right\rangle = \left\langle f, \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_i \partial t_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, -\frac{\partial \phi}{\partial t_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i}, \phi \right\rangle \end{aligned}$$

Teorema 36 Sea φ una función infinitamente diferenciable y f una función generalizada, entonces :

$$\frac{\partial}{\partial t_i} (\varphi f) = \varphi \frac{\partial f}{\partial t_i} + f \frac{\partial \varphi}{\partial t_i}$$

Demostración 9

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t_i} (\varphi f), \phi \right\rangle &= \left\langle \varphi f, -\frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\rangle = - \left\langle f, \varphi \frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\rangle \\ &= - \left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial t_i} (\varphi \phi) - \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \phi \right) \right\rangle = - \left\langle f, \frac{\partial}{\partial t_i} (\varphi \phi) \right\rangle + \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \phi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \varphi \phi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} f, \phi \right\rangle = \left\langle \varphi \frac{\partial f}{\partial t_i}, \phi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} f, \phi \right\rangle \end{aligned}$$

Definición 11 Sea $D^k = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{k_i}$ entonces $\langle D^k f, \phi \rangle = \langle f, (-1)^k D^k \phi \rangle$

Teorema 37 La diferenciación es una operación lineal continua en el espacio D' en el siguiente sentido :

1. Linealidad : Sean f, g funciones generalizadas y $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$D^k (f + g) = D^k f + D^k g$$

$$D^k (\alpha f) = \alpha D^k f$$

2. Continuidad : La sucesión $\{f_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ en D y $\{D^k f_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D^k f$ en D' .

Demostración 10

$$\begin{aligned}\langle D^k(f+g), \phi \rangle &= \langle f+g, (-1)^k D^k \phi \rangle \\ &= \langle f, (-1)^k D^k \phi \rangle + \langle g, (-1)^k D^k \phi \rangle \\ &= \langle D^k f, \phi \rangle + \langle D^k g, \phi \rangle\end{aligned}$$

$$\langle D^k(\alpha f), \phi \rangle = \langle \alpha f, (-1)^k D^k \phi \rangle = \alpha \langle f, (-1)^k D^k \phi \rangle = \alpha \langle D^k f, \phi \rangle$$

Sea $\phi \in D$, entonces $D^k \phi \in D$

$$\langle D^k f_n, \phi \rangle = \langle f_n, (-1)^k D^k \phi \rangle \rightarrow \langle f, (-1)^k D^k \phi \rangle = \langle D^k f, \phi \rangle$$

Observación:

1. Toda función generalizada tiene derivada de todo orden
2. La independencia del orden de diferenciación de las funciones generalizadas con derivadas mixtas, constituye un fenómeno de mayor alcance que el que se efectúa en el análisis clásico.
3. Toda función localmente integrable tiene derivada de todo orden en el sentido de funciones generalizadas.
4. La derivada ordinaria de una función f no tiene por que coincidir con la derivada en el sentido de funciones generalizadas.

13.4. Convolución de Funciones Generalizadas

13.4.1. Teoremas de Convolución

Sean f, g funciones absolutamente integrables y $h(x) = f(x) * g(x)$ su convolución, entonces

$$\begin{aligned}\langle h(x), \phi(x) \rangle &= \int h(x) \phi(x) dx \\ &= \int dx \int f(y) g(t-y) \phi(x) dy \\ &= \iint f(x) g(y) \phi(x+y) dx dy\end{aligned}$$

Teorema 38 Sean f, g funciones generalizadas, su convolución definido por $\langle f * g, \phi \rangle = \langle f(x) \times g(y), \phi(x+y) \rangle$ tiene sentido, si satisface al menos una de las dos condiciones :

1. $f \circ g$ tiene soporte acotado

2. En R^1 , el soporte de f y g están acotado en el mismo lado. ($f = 0$ para $x < a$ y $g = 0$ para $y < b$)

Demostración 11 Caso (1) :

Supongamos que f tiene soporte acotado y g una funcional

$$\langle f * g, \phi \rangle = \langle \langle f(x) \times g(y), \phi(x + y) \rangle \rangle = \langle g(y), (f(x), \phi(x + y)) \rangle$$

$\langle f(x), \phi(x + y) \rangle$ es una función infinitamente diferenciable que se anula para $|y| \rightarrow \infty$, esto implica que el soporte de $f(x)$ y $\phi(x + y)$ no se intersecan, entonces este soporte está en Y_m (Espacio de funciones de pruebas de m variables independientes y_1, y_2, \dots, y_m) y por tanto $g(y)$ tiene soporte acotado y se puede aplicar al funcional $\langle f(x), \phi(x + y) \rangle$ que en general no tiene soporte acotado.

Caso (2) :

Asumamos que los soportes de f, g están acotados a la izquierda. $\langle f(x), \phi(x + y) \rangle$ es una función infinitamente diferenciable de y , que se anula para $|y| \rightarrow \infty$, el soporte de $f(x)$ y $\phi(x + y)$ no se intersecan, entonces para cada y la función $(f(x), \phi(x + y))$ se anula y su soporte está acotado a la derecha, pero el de $g(y)$ está acotado a la izquierda, entonces la intersección de los soportes está acotado y por tanto la expresión simbólica tiene sentido.

Teorema 39 Sean f, g funciones generalizadas, entonces $f * g = g * f$

Demostración 12

$$\begin{aligned} \langle f * g, \phi \rangle &= \langle f(x) \times g(y), \phi(x + y) \rangle \\ &= \langle g(y) \times f(x), \phi(x + y) \rangle \\ &= \langle g(y), (f(x), \phi(x + y)) \rangle \\ &= \langle g * f, \phi \rangle \end{aligned}$$

Teorema 40 Sean f, g funciones generalizadas. El soporte de $f * g$ es la suma de los soportes de f y g .

Sea Ω el complemento de $\Omega_f + \Omega_g$, entonces Ω es abierto

$$\langle f * g, \phi \rangle = \langle f(x) \times g(y), \phi(x+y) \rangle = 0$$

cuando el soporte de $\phi(x+y)$ está contenido en Ω . El soporte de $f(x) \times g(y)$ es el conjunto cerrado $\Omega_f \times \Omega_g$, si $(x, y) \in \Omega_f \times \Omega_g$, $x+y \in \Omega_f + \Omega_g$, es decir, el soporte de $\phi(x+y) \in \Omega$ que no se interseca con $\Omega_f + \Omega_g$, entonces el soporte de $\phi(x+y)$ está definido en un conjunto $x+y \in \Omega$, por tanto, el soporte de $\phi(x+y)$ es el conjunto nulo de $f(x) \times g(y)$.

Teorema 41 Sean f, g funciones generalizadas, entonces $D(f * g) = Df * g = f * Dg$

Sea

$$\frac{d\phi(x+y)}{d(x+y)} = \frac{\partial\phi(x+y)}{\partial y} \quad \text{para } \phi \in D$$

$$\begin{aligned} \langle D(f * g), \phi \rangle &= \langle f * g, -\frac{d\phi}{dx} \rangle = \langle f(x) \times g(y), -\frac{d\phi}{dx} \rangle \\ &= \langle f(x), (g(y), -\frac{d\phi(x+y)}{d(x+y)}) \rangle = \langle f(x), (\frac{dg(y)}{dy}, \phi(x+y)) \rangle \\ &= \langle f(x) * \frac{dg(y)}{dy}, \phi(x+y) \rangle \end{aligned}$$

Por el hecho de que la convolución es conmutativa se verifica que $Df * g = f * Dg$

Teorema 42 Sean f, g funciones generalizadas, entonces

$$h(t-a) = f(t-a) * g(t) = f(t) * g(t-a)$$

Demostración 13 Sea $\phi \in D$, entonces

$$\begin{aligned} \langle h(t-a), \phi(t) \rangle &= \langle h(t), \phi(t+a) \rangle = \langle f(t) * g(t), \phi(t+a) \rangle \\ &= \langle f(t) \times g(x), \phi(t+x+a) \rangle = \langle f(t), (g(x), \phi(t+x+a)) \rangle \\ &= \langle f(t), (g(x-a), \phi(t+x)) \rangle = \langle f(t) * g(x-at), \phi(t+x) \rangle \end{aligned}$$

donde usando conmutatividad se completa la prueba.

Ejemplo 43

$$\delta(t - a) * f(t) = f(t - a)$$

más generalmente, obtenemos

$$\delta^{(m)}(t - a) * f(t) = f^{(m)}(t - a)$$

porque para cualquier $\phi \in D$ tenemos

$$\begin{aligned} & \langle \delta^{(m)}(t - a) * f(t), \phi(t) \rangle = \langle f(t), \langle \delta^{(m)}(\tau - a), \phi(t + \tau) \rangle \rangle \\ & = \langle f(t), \langle \delta^{(m)}(\tau), \phi(t + \tau + a) \rangle \rangle = \langle f(t), (-1)^m \phi^{(m)}(t + a) \rangle \\ & = \langle f^{(m)}(t), \phi(t + a) \rangle = \langle f^{(m)}(t - a), \phi(t) \rangle \end{aligned}$$

1. El producto directo de funciones generalizadas es también una función generalizada.
2. Si f, g son funciones generalizada sobre R^1 , entonces $f * g$ es también una distribución generalizada sobre R^1 .
3. El proceso de convolución no es en general asociativos (a menos que se asuma que los soportes de dos de las tres funcionales estén acotados a ambos lados o que los tres esten acotados al mismo lado)
4. $\frac{d^m}{dt^m} (f * g) = \frac{d^p f}{dt^p} * \frac{d^q f}{dt^q}$ con $p + q = m$, $p, q = 0, 1, 2, \dots$
5. El producto directo es conmutativo y asociativo.

Teorema 44 (*Regularización de una Distribución*)

Sea f una función generalizada, $\phi \in D$. Entonces $h = f * g$ es una función ordinaria dada por:

1. $h(t) = (f(x), \phi(t - x))$ y si $h(t)$ es infinitamente derivable
2. $\frac{d^k}{dt^k} h(t) = \langle f(x), \frac{d^k}{dt^k} \phi(t - x) \rangle$

Demostración 14 $(f(x), \phi(t - x))$ es una función infinitamente derivable tal que

$$\frac{d^k}{dt^k} \langle f(x), \phi(t - x) \rangle = \langle f(x), \frac{d^k}{dt^k} \phi(t - x) \rangle$$

por tanto, si (1) es válido entonces (2) también lo es.

Sea θ una función arbitraria de D , entonces

$$\begin{aligned}
 \langle h * \theta \rangle &= \langle f(x) * \phi(y), \theta(x+y) \rangle \\
 &= \langle f(x) \times \phi(y), \theta(x+y) \rangle \\
 &= \langle f(x), (\phi(y), \theta(x+y)) \rangle \\
 &= \langle f(x), (\theta(y), \phi(y-x)) \rangle \\
 &= \langle f(x) \times \theta(y), \theta(y-x) \rangle
 \end{aligned}$$

Ahora el soporte de $f(x) \times \phi(y)$ con $\theta(y-x)$ está acotado y por la conmutatividad del producto directo, se obtiene :

$$\begin{aligned}
 \langle h * \theta \rangle &= \langle \theta(y) \times f(x), \phi(y-x) \rangle \\
 &= \langle \theta(y), (f(x), \phi(y-x)) \rangle \\
 &= \langle (f(x), \phi(y-x)), \theta(y) \rangle
 \end{aligned}$$

13.5. Símbolos de Orden

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones definidas en un entorno de x_0 . Decimos que $f(x)$ es "O" grande que $g(x)$ cuando $x \rightarrow x_0$ y escribimos $f(x) = O(g(x))$ cuando $x \rightarrow x_0$ si existe un entorno V de x_0 y una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M |g(x)|$, $x \in V$.

Si $g(x)$ no se anula cerca de x_0 , entonces la relación $f(x) = O(g(x))$ cuando $x \rightarrow x_0$ es equivalente a la condición $\limsup_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones definidas en un entorno de x_0 . Decimos que $f(x)$ es "o" pequeño que $g(x)$ cuando $x \rightarrow x_0$ y escribimos $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \rightarrow x_0$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entorno $V = V(x_0)$ de x_0 , tal que $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$, $x \in V$.

Si $g(x)$ no se anula cerca de x_0 , entonces la relación $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \rightarrow x_0$ es equivalente a la condición $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Ejemplo 45

$$\text{sen } x = O(x)$$

$$\text{sen } x = O(x)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = o(1)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son llamadas asintóticamente equivalentes cuando $x \rightarrow x_0$ si $f(x) - g(x) = o(g(x))$, cuando $x \rightarrow x_0$, en este caso escribimos $f(x) \sim g(x)$, cuando $x \rightarrow x_0$.

La relación \sim es simétrica, si y solo si en un entorno de x_0 los ceros de f y g coincide y $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

La notación $\varepsilon \ll 1$ significa que $\varepsilon \rightarrow 0$, mientras que $\lambda \gg 1$ significa que $\lambda \rightarrow \infty$.

Similarmente la notación $f(x) \ll g(x)$ es equivalente a la expresión $f(x) = o(g(x))$.

Ejemplo 46 Si $f(x)$ es diferenciable en $x = x_0$ entonces

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(|x - x_0|), \quad x \rightarrow x_0$$

En el caso de que $f'(x) \neq 0$ esto puede ser reescrito como

$$f(x) - f(x_0) \sim (x - x_0)f'(x_0), \quad x \rightarrow x_0$$

13.6. Serie Asintótica

Una sucesión finita o infinita de funciones $\{\phi_n(x)\}$ definida en un entorno de x_0 es llamada una sucesión asintótica cuando $x \rightarrow x_0$ si las siguientes dos condiciones son satisfechas:

1. $\phi_n(x) \neq 0$, para $x \neq x_0$ y $n = 1, 2, 3, \dots$
2. $\phi_{n+1}(x) = o(\phi_n(x))$, cuando $x \rightarrow x_0$

Ejemplo 47 Si $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $\{(x - x_0)^n\}$ es una sucesión asintótica cuando $x \rightarrow x_0$

Sea $\{\phi_n(x)\}$ una sucesión asintótica cuando $x \rightarrow x_0$. Una función $f(x)$ tiene un desarrollo asintótico de N términos con respecto a la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ si existen constantes c_1, c_2, \dots, c_N tal que

$$f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots + c_N\phi_N(x) + o(\phi_N(x)), \text{ cuando } x \rightarrow x_0.$$

En el caso de que $f(x)$ tenga una expansión para cualquier valor de N , decimos que $f(x)$ tiene una expansión asintótica en términos de la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ y escribimos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x), \text{ cuando } x \rightarrow x_0$$

Ejemplo 48 Consideremos la función integral exponencial

$$E(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy, \quad x > 0$$

tenemos

$$E(x) = o(x^{-n}), \quad x \rightarrow \infty$$

para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, que sigue de la aplicación de la regla de L'Hopital, entonces la expansión de $E(x)$ en términos de la sucesión $\{x^{-n}\}$ proporciona

$$E(x) \sim O(1) + O(x^{-1}) + O(x^{-2}) + \dots, \quad x \rightarrow \infty$$

Otra aproximación es obtenida en términos de la sucesión $e^{-x}x^{-n}$, usando nuevamente integración por parte, obtenemos

$$E(x) \sim e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \right) + (-1)^n \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y^{n+1}} dy$$

Por el uso de la regla de L'Hopital, tenemos

$$(-1)^n n! \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y^{n+1}} dy = o\left(\frac{e^{-x}}{x^n}\right), \quad x \rightarrow \infty$$

Hemos obtenidos la expansión infinita

$$E(x) \sim e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \quad x \rightarrow \infty$$

cuya serie es divergente para todo x .

Observación 49 Si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$, cuando $x \rightarrow x_0$ es una representación asintótica de

$f(x)$ en $x = x_0$, entonces en general, la sumas parciales $T_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x)$ puede no converger a $f(x)$, entonces para cada valor de x existe un valor optimal N tal que $|f(x) - T_N(x)|$ sea de magnitud pequeña.

Sea $\{\phi_n(x)\}$ una sucesión asintótica cuando $x \rightarrow x_0$. Una función $f(x)$ definida en un entorno de x_0 tiene un desarrollo asintótico extendido con respecto a la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ si podemos encontrar funciones f_1, f_2, \dots con $f_n(x) = O(\phi_n(x))$, tal que

$$f(x) = f_1\phi_1(x) + f_2\phi_2(x) + \dots + f_N\phi_N(x) + o(\phi_N(x)) , \text{ cuando } x \rightarrow x_0 .$$

para cada N . En este caso escribimos

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x) , \text{ cuando } x \rightarrow x_0$$

Ejemplo 50 Sea

$$S(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } t}{t} dt$$

además

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

escribamos ahora

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt$$

aplicando reiteradamente integraciones por partes, obtenemos :

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} + \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\text{sen } x}{x^2} + 2 \int_x^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t^3} dt$$

más generalmente, obtenemos :

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \cos x \left(-\frac{1}{x} + \frac{2!}{x^3} - \frac{4!}{x^5} + \dots + \frac{(2n)!(-1)^{n-1}}{x^{2n+1}} \right)$$

$$+ \text{sen } x \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3!}{x^4} - \frac{5!}{x^6} + \dots + \frac{(2n-1)!(-1)^n}{x^{2n}} \right)$$

$$+ (2n + 1)!(-1)^n \int_x^\infty \frac{\cos t}{t^{2n+2}} dt$$

y

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \cos x \left(-\frac{1}{x} + \frac{2!}{x^3} - \frac{4!}{x^5} + \dots + \frac{(2n)!(-1)^{n-1}}{x^{2n+1}} \right)$$

$$+ \operatorname{sen} x \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3!}{x^4} - \frac{5!}{x^6} + \dots + \frac{(2n+1)!(-1)^{n+1}}{x^{2n+2}} \right)$$

$$+ (2n + 2)!(-1)^n \int_x^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t^{2n+3}} dt$$

además, los restos :

$$\int_x^\infty \frac{\cos t}{t^n} dt = O\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad \int_x^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t^n} dt = O\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad x \rightarrow \infty$$

13.7. Operaciones Algebraicas y Analíticas

Consideraremos algunas operaciones básicas que pueden ser aplicadas a expansiones asintóticas y mostraremos el método considerando algunas expansiones asintóticas particulares.

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen desarrollo asintótico de N términos

$$f(x) \sim \sum a_n \phi_n(x), \quad g(x) \sim \sum b_n \phi_n(x), \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0.$$

Entonces para algunas constantes λ, μ la función $\lambda f(x) + \mu g(x)$ tiene desarrollo asintótico de N términos expresado por :

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum (\lambda a_n + \mu b_n) \phi_n(x), \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0.$$

Demostración 15

$$\text{Si } f(x) \sim \sum a_n \phi_n(x), \quad \text{entonces } \lambda f(x) \sim \sum \lambda a_n \phi_n(x), \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0$$

$$\text{Si } g(x) \sim \sum b_n \phi_n(x), \quad \text{entonces } \mu g(x) \sim \sum \mu b_n \phi_n(x), \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0$$

entonces

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \sim \sum (\lambda a_n + \mu b_n) \phi_n(x), \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0$$

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen desarrollo asintótico

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad , \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \quad , \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0 .$$

$$\text{Entonces } f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \quad , \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0$$

$$\text{donde } c_n = \sum_{j+i=n} a_j b_i$$

Prueba :

Para cada N tenemos :

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^N)$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^N b_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^N)$$

$$\text{Entonces } f(x)g(x) = \left(\sum_{n=0}^N a_n(x-x_0)^n \right) \left(\sum_{n=0}^N b_n(x-x_0)^n \right) + o((x-x_0)^N)$$

$$= \sum_{n=0}^N c_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^N)$$

Ejemplo 51 Si

$$f(x) \sim a_1 e^{-x} + a_2 e^{-2x} + a_3 e^{-3x} + \dots, \quad x \rightarrow \infty$$

$$g(x) \sim b_1 e^{-x} + b_2 e^{-2x} + b_3 e^{-3x} + \dots, \quad x \rightarrow \infty$$

entonces

$$f(x)g(x) \sim a_1 b_1 e^{-2x} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e^{-3x} + \dots, \quad x \rightarrow \infty$$

Si la función $f(x)$ tiene desarrollo asintótico

$$f(x) \sim a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots, \quad , \quad x \rightarrow \infty$$

con $a_0 \neq 0$, entonces $f(x) \neq 0$ para x cercano a x_0 , por tanto,

$$\frac{1}{f(x)} \sim b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots, \quad , \quad x \rightarrow \infty$$

donde los b_i son obtenidos resolviendo la ecuación

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n \right) = 1$$

esto es,

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_1 = \frac{-a_1}{a_0^2}, \quad b_2 = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^3}, \quad etc.$$

Prueba :

Para $n = 0$ se obtiene $b_0 = \frac{1}{a_0}$

Para $n = 1$ obtenemos :

$$(a_0(x - x_0)^0 + a_1(x - x_0)^1) (b_0(x - x_0)^0 + b_1(x - x_0)^1) = 1$$

$$(a_0 + a_1(x - x_0)) (b_0 + b_1(x - x_0)) = 1$$

$$a_0 b_0 + a_0 b_1(x - x_0) + a_1 b_0(x - x_0) + a_1 b_1(x - x_0)^2 = 1$$

$$a_0 b_0 + [a_0 b_1 + a_1 b_0] (x - x_0) + a_1 b_1(x - x_0)^2 = 1$$

formando el sistema de ecuaciones, obtenemos

$$a_0 b_0 = 1$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$$

$$a_1 b_1 = 0$$

de acá, tenemos

$$a_0 b_1 = -a_1 b_0$$

$$b_1 = -\frac{a_1}{a_0} \frac{1}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0^2}$$

Para $n = 2$ obtenemos :

$$(a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2) (b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2) = 1$$

$$a_0b_0 + a_0b_1(x - x_0) + a_0b_2(x - x_0)^2 + a_1b_0(x - x_0) + a_1b_1(x - x_0)^2 +$$

$$a_1b_2(x - x_0)^3 + a_2b_0(x - x_0)^2 + a_2b_1(x - x_0)^3 + a_2b_2(x - x_0)^4 = 1$$

formando el sistema de ecuaciones, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} a_0b_0 &= 1 \\ a_0b_1 + a_1b_0 &= 0 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0 \\ a_1b_2 + a_2b_1 &= 0 \\ a_2b_2 &= 0 \end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{-a_1b_1 - a_2b_0}{a_0} \\ &= \frac{-a_1 \left(-\frac{a_1}{a_0^2} \right) - a_2 \frac{1}{a_0}}{a_0} \\ &= \frac{\frac{a_1^2}{a_0^2} - a_2 \frac{1}{a_0}}{a_0} \\ &= \frac{a_1^2 - a_2a_0}{a_0^3} \end{aligned}$$

continuando de esta forma y realizando inducción, se completa la demostración.

Ejemplo 52 *Supongamos que*

$$f(x) \sim \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots, \quad x \rightarrow \infty$$

entonces

$$\frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots} \sim \frac{x}{a_1} - \frac{a_2}{a_1^2} + \dots \left(\frac{a_1^2 - a_1a_3}{a_1^3} \right) \frac{1}{x} + \dots, \quad x \rightarrow \infty$$

13.8. Existencia de Funciones dada una Expansión Asintótica

La expansión asintótica de una función en términos de una sucesión dada, si existe, es única. Estudiaremos el problema de existencia, es decir, dada una sucesión asintótica $\{\phi_n(x)\}$ y constantes c_1, c_2, c_3, \dots hay una función con expansión asintótica

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad , \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0 \quad ?$$

Lo mostraremos con el siguiente ejemplo:

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! x^n$$

es llamada la serie de Stieltjes que diverge $\forall x \neq 0$, examinaremos su expansión asintótica cuando $x \rightarrow 0^+$ de alguna función, para este propósito apelamos a la definición de la función gamma

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt$$

para reescribir la expresión anterior por

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (-xt)^n dt$$

pero

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-xt)^n = \frac{1}{1+xt} \quad \text{para } |xt| < 1$$

estamos interesados en la situación cuando $x \ll 1$ entonces nos queda

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

cuya integral converge para todo $x \geq 0$.

Ahora mostraremos que la función $f(x)$ tiene desarrollo asintótico cuando $x \rightarrow 0^+$. Repetida integración por partes nos proporciona :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} (1+xt)^{-1} e^{-t} dt = 1 - x \int_0^{\infty} (1+xt)^{-2} e^{-t} dt \\ &= 1 - x + 2x^2 \int_0^{\infty} (1+xt)^{-3} e^{-t} dt \end{aligned}$$

$$= 1 - x + 2!x^2 - 3!x^3 + \dots + (-1)^n n!x^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} (n+1)! x^{n+1} \int_0^\infty (1+xt)^{-n-2} e^{-t} dt = O(x^{n+1}), \text{ cuando } x \rightarrow 0^+.$$

Este ejemplo nos muestra que una serie puede ser divergente, pero es posible encontrar su expansión asintótica

Sea X un espacio métrico y $\{\phi_n(x)\}$ una sucesión asintótica de funciones continuas cuando $x \rightarrow x_0$. Entonces si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de funciones continuas en $X \setminus \{x_0\}$ que satisface $f_n(x) = O(\phi_n(x))$ cuando $x \rightarrow x_0$, existe una función continua $f(x)$ tal que

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \phi(x), \text{ cuando } x \rightarrow x_0$$

Prueba :

Construyamos una sucesión de entornos abiertos $\{V_n\}$ de x_0 tal que :

a) $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$

b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{x_0\}$

c) Si $x \in V \setminus \{x_0\}$ entonces

$$|f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2} |\phi_n(x)| \quad y \quad |\phi_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2} |\phi_n(x)|$$

Sea p_n funciones continuas con $0 \leq p_n \leq 1$, $p_n = 1$ si $x \in V_{n+1}$, $p_n = 0$ si $x \notin V_n$

Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) f_n(x)$, $f(x)$ está bien definida para los $x \neq x_0$ pues esta suma consta de solo un número finito de términos no cero, la continuidad sigue del hecho de que para $x \neq x_0$, hay un entorno donde $f(x)$ es suma finita de funciones continuas $p_n(x) f_n(x)$.

Para mostrar que $f(x) \sim \sum f_n(x) \phi(x)$, cuando $x \rightarrow x_0$, sea N fijo. Entonces si $x \in V_{n+1}$

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| &\leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n(x) f_n(x) \right| \leq \left\{ |f_{N+1}(x)| + \left(\sum_{n=N+2}^{\infty} 2^{N-2-n} \right) |\phi_{N+1}(x)| \right\} \\ &= o(\phi_N(x)), \text{ cuando } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

13.9. Aproximación Asintótica de Sumas Parciales

Sea $g(t)$ una función diferenciable y positiva para $t > a$. Supongamos que :

$$\frac{g'(t)}{g(t)} \sim \frac{\alpha}{t} \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \alpha \neq 0, -1$$

a) Si $\alpha > -1$ entonces $\int_a^\infty g(t) dt$ diverge y $\int_a^x g(t) dt \sim \frac{xg(x)}{\alpha + 1}, x \rightarrow \infty$

b) Si $\alpha < -1$ entonces $\int_a^\infty g(t) dt$ converge y $\int_x^\infty g(t) dt \sim \frac{-xg(x)}{\alpha + 1}, x \rightarrow \infty$

Prueba :

Caso (a) :

Integrando la relación inicial, obtenemos $\ln g(x) \sim \alpha \ln x, x \rightarrow \infty$. Si $\varepsilon > 0$ es un valor arbitrario, tenemos

$$g(x) \geq x^{\alpha-\varepsilon}, x \gg 1,$$

esto muestra que

$$\int_a^\infty g(t) dt \text{ diverge}$$

Usando la fórmula elemental $g(t) = (tg(t))' - tg'(t)$ obtenemos

$$\int_a^x g(t) dt = xg(x) - ag(a) - \int_a^x tg'(t) dt$$

o bien

$$\int_a^x g(t) dt + \int_a^x tg'(t) dt = xg(x) - ag(a)$$

pero $tg'(t) \sim \alpha g(t)$ y entonces

$$\int_a^x g(t) dt + \int_a^x tg'(t) dt \sim (1 + \alpha) \int_a^x g(t) dt$$

Caso (b) :

Usando $\ln g(x) \sim \alpha \ln x, x \rightarrow \infty$ y habiendo encontrado que para cada $\varepsilon > 0$ tenemos

$$g(x) \geq x^{\alpha-\varepsilon}, x \gg 1,$$

y esto muestra que

$$\int_a^\infty g(t) dt \text{ converge.}$$

Aplicando el mismo argumento obtenemos :

$$\int_x^\infty g(t) dt \sim \frac{1}{\alpha + 1} \int_x^\infty (g(t) + tg'(t)) dt = \frac{-xg(x)}{\alpha + 1}, x \rightarrow \infty$$

Ejemplo 53 Consideremos la integral $\int_0^x \sqrt{t^4+1} dt$, donde $g(t) = \sqrt{t^4+1}$, entonces obtenemos

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{2t^3}{t^4+1} \sim \frac{2}{t}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

además

$$\int_0^x \sqrt{t^4+1} dt \sim \frac{1}{3}x\sqrt{x^4+1}, \quad x \rightarrow \infty$$

El teorema requiere que $\alpha \neq 0, 1$. Para $\alpha = 0$ tenemos el siguiente resultado : Si

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = o\left(\frac{1}{t}\right), \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

entonces

$$\int_a^x g(t) dt \sim xg(x), \quad x \rightarrow \infty$$

observemos el caso

$$\int_a^x tg'(t) dt = o\left(\int_a^x g(t)\right), \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

para la integral

$$\int_a^x \frac{dt}{\ln t}, \quad a > 1,$$

tenemos

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{-1}{t \ln t} = o\left(\frac{1}{t}\right)$$

entonces

$$\int_a^x \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}, \quad x \rightarrow \infty$$

La idea básica del teorema anterior es encontrar una función h tal que $g(t) \sim h'(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$, donde $h(t) = \frac{tg(t)}{1+\alpha}$, muchas veces el teorema no es aplicable debido a que la función buscada no puede ser encontrada por simple inspección.

Para evaluar $\int_0^x e^{t^2} dt$, observemos que $e^{t^2} = \left(\frac{e^{t^2}}{2t}\right)'$, por tanto,

$$\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}, \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

similarmente, para aproximar la integral

$$\int_x^\infty e^{-\sqrt{t^2+1}} dt \text{ donde } g(t) = e^{-\sqrt{t^2+1}}$$

y realizando su derivada, obtenemos

$$g'(t) = \frac{-t}{\sqrt{t^2+1}} e^{-\sqrt{t^2+1}} \sim g(t)$$

entonces

$$\int_x^\infty e^{-\sqrt{t^2+1}} dt \sim e^{-\sqrt{t^2+1}}, \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

Sea $\sum_{n=1}^\infty a_n$ una serie de términos positivos. Supongamos que :

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \alpha \neq -1$$

a) Si $\alpha > -1$ la serie diverge y $\sum_{n=1}^\infty a_n \sim \frac{Na_N}{\alpha + 1}, N \rightarrow \infty$

b) Si $\alpha < -1$ la serie converge y $\sum_{n=N}^\infty a_n \sim \frac{-Na_N}{\alpha + 1}, N \rightarrow \infty$

Prueba :

Escribiendo la analogía con $g(t) = (tg(t))' - tg'(t)$, obtenemos :

$$a_n = [(n + 1)a_n - na_{n-1}] - n(a_n - a_{n-1})$$

Caso (a) :

Si $\alpha > -1$ la sucesión $(n + 1)a_n$ se incrementa para un valor grande de n y la divergencia de $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es inmediata. Usando la hipótesis y $a_n = [(n + 1)a_n - na_{n-1}] - n(a_n - a_{n-1})$ tenemos:

$$(1 + \alpha) \sum_{n=1}^N a_n \sim \sum_{n=1}^N [a_n + n(a_n - a_{n-1})] = (N + 1)a_N$$

Caso (b) :

Cuando $\alpha < -1$, la serie $\sum_{n=1}^N a_n$ es mayorada por la serie convergente

$$\frac{-1}{1 + \alpha} \sum [(n + 1)a_n - na_{n-1}]$$

Usando nuevamente la hipótesis y $a_n = [(n + 1)a_n - na_{n-1}] - n(a_n - a_{n-1})$ tenemos:

$$(1 + \alpha) \sum_{n=N}^\infty a_n \sim \sum_{n=N}^\infty [a_n + n(a_n - a_{n-1})] = \sum_{n=N}^\infty [(n + 1)a_n - na_{n-1}] = -Na_{N-1}$$

Ejemplo 54 Consideremos la serie $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, vamos a aproximar $\frac{1}{n^2}$ por la sucesión telescópica

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

entonces

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2(n+1)}$$

de acá, obtenemos

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \text{ cuando } N \rightarrow \infty$$

luego

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \sim \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^3} = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Continuando con este proceso, podemos escribir

$$\frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{2}{n^2(n+1)(n+2)}$$

observemos que

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2N(N+1)}$$

entonces

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{N} + \frac{1}{2N(N+1)} + O\left(\frac{1}{N^3}\right), \text{ cuando } N \rightarrow \infty$$

Repetiendo este proceso, obtenemos la expansión infinita

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{N} + \frac{1}{2N(N+1)} + \frac{2!}{3N(N+1)(N+2)} + \frac{3!}{4N(N+1)(N+2)(N+3)} + \dots,$$

cuando $N \rightarrow \infty$

13.10. Expansión de Taylor de Distribuciones

Es bien conocido que una función suave con $x \in R$ admite una expansión de Taylor dada por:

$$\phi(x + \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(x)}{n!} \varepsilon^n, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Por dualidad, si $f(x)$ es una función generalizada de algunos de los espacios distribucionales D' , E' , S' , etc. Entonces su expansión de Taylor sería:

$$f(x + \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \varepsilon^n, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

cuya interpretación en el sentido distribucional será, dada una función de prueba $\phi(x)$ tenemos

$$\langle f(x + \varepsilon), \phi(x) \rangle = \sum_{n=0}^N \frac{\langle f^{(n)}(x), \phi(x) \rangle}{n!} \varepsilon^n + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Ejemplo 55 Si $\alpha \notin Z$, sea $f(x) = x_+^\alpha$, entonces $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - k + 1)x_+^{\alpha-k}$, además

$$(x - \varepsilon)_+^\alpha \sim \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k x_+^{\alpha-k} \varepsilon^k, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

donde

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - k + 1)}{k!}$$

esto significa que si $\phi \in D(R)$ entonces

$$F.p. \int_{\varepsilon}^{\infty} (x - \varepsilon)^\alpha \phi(x) dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{k} (-1)^k F.p. \int_0^{\infty} x^{\alpha-k} \phi(x) dx \right] \varepsilon^k, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

donde *F.p* significa Parte Finita.

13.11. Expansión Asintótica de Momentos

Consideraremos el comportamiento asintótico de $f(\lambda x)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$, en cierto sentido estudiaremos el comportamiento asintótico de la distribución en el infinito. La expansión asintótica de momento de una función generalizada que decae en infinito rápidamente está dada por:

$$f(\lambda x) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n \mu_n \delta^{(n)}(x)}{n! \lambda^{n+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+2}}\right)$$

donde μ_k son los momentos de la función generalizada $f(x)$ dada por:

$$\mu_n = \langle f(x), x^n \rangle$$

referenciada en [6], [7].

E es el subespacio de funciones suaves en todo \mathbb{R} , por ejemplo, $C^\infty(\mathbb{R})$, con la topología de la convergencia uniforme de todas las derivadas sobre compactos. Su dual es E' , el espacio de distribuciones de soporte compacto.

Observación 3 Si U es un conjunto abierto de \mathbb{R}^n entonces $E'(U)$ es un subespacio propio de $D'(U)$ sin embargo, estos dos espacios coinciden si U es una variedad compacta. En particular $E'(S) = D'(S)$ si S es una esfera, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$

S es el espacio de funciones de pruebas que satisfacen $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^k \phi^{(j)}(x) = 0$ para todos los $k, j \in \mathbb{N}$, es decir, S consiste de funciones suaves $\phi(x)$ de rápido decaimiento en el infinito, esto es, $D^j \phi(x) = o(|x|^{-\infty})$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, para cada $j \in \mathbb{N}^n$. La topología en S es definida en términos de las seminormas

$$\|\phi\|_{k,j} = \sup\{|x^k \phi^{(j)}(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$$

donde $k, j \in \mathbb{N}^n$. Su dual es S' , el espacio de distribuciones temperadas.

Observación 56 :

1. Cualquier función de D pertenece a S .
2. D es denso en S .
3. S' es un subespacio de D' .

En el espacio $E'(\mathbb{R})$ consideraremos las seminormas

$$\|\phi\|_{n,R} = \max\left\{\left|\phi^{(n)}(x)\right| : |x| \leq R\right\} \text{ para } n \in \mathbb{N}, R > 0.$$

Estas seminormas genera la topología de $E(\mathbb{R})$. Si $q = 0, 1, 2, \dots$ obtenemos el conjunto

$$X_q = \{\phi \in E(\mathbb{R}) : \phi^{(n)}(0) = 0 \text{ para } n < q\}$$

Sea $\phi \in X_q$. Entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$, Se tiene :

$$\|\phi\|_{n,R} = \max\left\{\left|\phi^{(n)}(x)\right| : |x| \leq R\right\}$$

Prueba :

Si $\phi \in X_q$, podemos encontrar una constante K tal que

$$|\phi(x)| \leq K |x|^q , |x| \leq 1.$$

Entonces si $\lambda > R$ obtenemos

$$\|\phi\|_{0,R} = \max \left\{ \left| \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right| : |x| \leq R \right\} \leq \frac{K}{\lambda^q}$$

Si $n \leq q$ y $\phi \in X_q$, entonces $\phi^{(n)}(x) \in X_{q-n}$ y entonces

$$\left\| \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_{n,R} = \left\| \frac{1}{\lambda^n} \phi^{(n)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_{0,R} = \frac{1}{\lambda^n} O\left(\frac{1}{\lambda^{q-n}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^q}\right)$$

mientras si $n \geq q$ y $\phi^{(n)} \in X_0$ entonces

$$\left\| \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_{n,R} = O\left(\frac{1}{\lambda^n}\right)$$

A continuación se mostrará el teorema que asegura la validez de la expansión asintótica del momento en el espacio distribucional $E'(R)$. El mismo razonamiento en la demostración es usado también para demostrar la validez de la expansión asintótica del momento en los espacios distribucionales $P'(R)$, $O'_\gamma(R)$, $O'_C(R)$, $S'(R)$.

Sea $f \in E'(R)$ y sea $\{\mu_n\}$ una sucesión de momentos. Entonces

$$f(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n \delta^{(n)}(x)}{n! \lambda^{n+1}} , \lambda \rightarrow \infty$$

en el sentido de que alguna $\phi \in E(R)$ se tiene :

$$\langle f(\lambda x) , \phi(x) \rangle = \sum_{n=0}^N \frac{\mu_n \phi^{(n)}(0)}{n! \lambda^{n+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+2}}\right) , \lambda \rightarrow \infty$$

Prueba :

Sea $P_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} x^n$ el polinomio de Taylor de orden N de la función ϕ . Entonces,

$$\langle f(\lambda x) , \phi(x) \rangle = \langle f(\lambda x) , P_N(x) \rangle + \langle f(\lambda x) , \phi(x) - P_N(x) \rangle$$

$$= \sum_{n=0}^N \frac{\mu_n \phi^{(n)}(0)}{n! \lambda^{n+1}} + R_N(x)$$

donde el residuo está dado por

$$R_N(x) = \langle f(\lambda x), \phi(x) - P_N(x) \rangle$$

donde

$$\phi_N = \phi - P_N(x) \in X_{N+1},$$

obtenemos :

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &= |\langle f(\lambda x), \phi_N(x) \rangle| = \frac{1}{\lambda} \left| \left\langle f(\lambda x), \phi_N\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\rangle \right| \leq \frac{M}{\lambda} \sum_{j=0}^q \left\| \phi_N\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_{j,R} \\ &= O\left(\frac{1}{\lambda^{N+2}}\right) \end{aligned}$$

donde la existencia de M, q y R están garantizada por la continuidad de f.

Ejemplo 57 Sea $f(x)$ de medida positiva definida por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \delta(x - 2^n)$$

entonces $f \in S'$. También $f(2x) = f(x)$, entonces $f(x) = F(\ln x)$, donde F es periódica de periodo $\ln 2$, siendo su media sobre un intervalo de longitud $\ln 2$ igual a $\frac{1}{\ln 2}$:

$$\frac{1}{\ln 2} \int_{\alpha}^{\alpha + \ln 2} F(u) du = \frac{1}{\ln 2} \int_{\varepsilon^{-\alpha}}^{2\varepsilon^{-\alpha}} f(x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{\ln 2}$$

entonces, podemos escribir

$$f(x) = \frac{H(x)}{\ln 2} + g(x)$$

donde $H(x)$ es la función de Heaviside y g es una función periódica de $\ln x$ de periodo $\ln 2$ y media cero, por tanto, si $\phi \in S$ entonces

$$\varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \phi(\varepsilon 2^n) = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{\infty} \phi(x) dx + \varphi(\varepsilon)$$

donde la componente oscilatoria $\varphi(\varepsilon) = \varphi(\phi; \varepsilon)$ es una función periódica de $\ln \varepsilon$ de periodo $\ln 2$ y media cero.

Ahora escribamos

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x)$$

donde

$$f_+(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \delta(x - 2^n)$$

$$f_-(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \delta(x - 2^n)$$

la distribución $f_-(x)$ tiene soporte compacto y entonces $f_-(x)$ admite la expansión asintótica de momentos cuando $\lambda \rightarrow \infty$. Estos momentos son:

$$\mu_k = \langle f_-(x), x^k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} 2^{-nk} = \frac{1}{2^{k+1} - 1}$$

luego

$$f_-(\lambda x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \delta^{(k)}(x)}{k!(2^{k+1} - 1)\lambda^{k+1}}, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

el desarrollo de $f_+(x)$ toma la forma,

$$f_+(\lambda x) \sim \frac{H(x)}{\ln 2} + g(\lambda x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \delta^{(k)}(x)}{k!(2^{k+1} - 1)\lambda^{k+1}}, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (120)$$

Sea $\phi \in S$, $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$, entonces evaluando la expresión (120), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \phi(\varepsilon 2^n) \sim \frac{1}{\varepsilon(\ln 2)} \int_0^{\infty} \phi(x) dx + \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{(k)}(0)\varepsilon^k}{k!(2^{k+1} - 1)\lambda^{k+1}}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

13.12. Expansión en el Espacio P'

Una función suave $\phi(x) \in P = P(R^n)$ si $D^k \phi(x) = o(e^{\gamma|x|})$, cuando $|x| \rightarrow \infty$, para cada $\gamma > 0$ y cada $k \in N^n$.

En el espacio $P(R)$ vamos a considerar las seminormas :

$$\|\phi\|_{\gamma,j} = \sup \left\{ \left| e^{-\gamma|x|} \phi^{(j)}(x) \right| : x \in R \right\} \quad \text{para } j \in N, \gamma > 0.$$

Estas seminormas genera la topología de este espacio. Si

$$\phi \in X_q = \{ \psi \in P(R) : \psi^{(j)}(0) = 0 \text{ para } j < q \},$$

entonces para algún $\gamma > 0$ podemos encontrar una constante K tal que :

$$|\phi(x)| \leq K |x|^q e^{\frac{\gamma|x|}{2}}$$

entonces si $\lambda > 1$

$$e^{-\gamma|x|} \left| \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right| \leq \frac{K}{\lambda^q} e^{-\frac{\gamma|x|}{2}} |x|^q \leq \frac{K'}{\lambda^q}$$

y entonces :

$$\left\| \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_{\gamma,0} = O\left(\frac{1}{\lambda^q}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad y \quad \phi \in X_q$$

Empleando un lema anterior y el teorema de la expansión asintótica de momento para el espacio E' se obtiene de manera similar, la demostración del siguiente teorema

Si $\| \cdot \|$ es una seminorma continua en $P(\mathbb{R})$ entonces :

$$\| \phi(\frac{x}{\lambda}) \| = O(\frac{1}{\lambda^q}), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad y \quad \phi \in X_q$$

Si $f(x)$ es una distribución del espacio $P'(\mathbb{R})$ entonces

$$f(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n \delta^{(n)}(x)}{n! \lambda^{n+1}}, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

en el espacio $P(\mathbb{R})$ donde $\mu_n = \langle f(x), x^n \rangle$ son los momentos de la función generalizada $f(x)$.

13.13. Fórmula Asintótica de Laplace

Consideraremos aproximaciones asintóticas de integrales de la forma

$$\int_a^b e^{-\lambda h(x)} \phi(x) dx, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad h(x) \text{ es real.} \quad (121)$$

Fue observado por Laplace que si $\lambda \gg 1$ la principal contribución a la expresión (121) parte de un entorno del mínimo de $h(x)$, esta idea nos va a guiar para aproximar

$$\int_a^b e^{-\lambda h(x)} \phi(x) dx \sim e^{-\lambda h(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{h''(x_0)\lambda}} \phi(x_0)$$

En el caso donde el mínimo ocurre en un punto interior x_0 donde $h''(x_0) > 0$

Vamos a discutir la expansión anterior y obtener distintas variantes, podemos escribir esta expansión en su forma distribucional dada por :

$$e^{-\lambda h(x)} \sim e^{-\lambda h(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{h''(x_0)\lambda}} \delta(x - x_0)$$

Procederemos a la derivación de la fórmula de Laplace.

Supongamos que la función suave $h(x)$ tiene un mínimo en $x = x_0$ donde $h''(x_0) > 0$. Sea

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda h(x)} \phi(x) dx$$

donde el soporte de ϕ es el más pequeño entorno de x_0 , esto es que no contiene otro punto crítico de h .

Sobre estas premisas, podemos encontrar un función suave creciente $\psi(x)$ que satisface $\psi(0) = 0$, $\psi'(x) > 0$, $\forall x \in R$ tal que $h(x) = h(x_0) + \psi(x)^2$ en el soporte de $\phi(x)$.

Por cambio de variable $u = \psi(x)$ obtenemos:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(h(x_0)+u^2)} \phi_1(u) du \sim e^{-\lambda h(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{2n+1}{2}) \phi^{(2n)}(0)}{(2n)! \lambda^{\frac{2n+1}{2}}}, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

donde

$$\phi_1(x) = \frac{\phi(x)}{\psi'(x)} \quad y \quad e^{-\lambda x^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{2n+1}{2}) \delta^{(2n)}(x)}{(2n)! \lambda^{\frac{2n+1}{2}}}, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (122)$$

haciendo nuevamente el cambio de variable en la función generalizada, obtenemos :

$$e^{-\lambda h(x)} = e^{-\lambda(h(x_0)+\psi(x)^2)} \sim e^{-\lambda h(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{2n+1}{2}) \phi^{(2n)}(0)}{(2n)! \lambda^{\frac{2n+1}{2}}}, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (123)$$

En el espacio $D(U)$, U es el más pequeño entorno de x_0 . Observemos que la expresión (123) sigue directamente de la expresión (122) por una sustitución directa de $\psi(x)$ por x . Observemos también que :

$$\delta(\psi(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{\psi'(x_0)} \sqrt{\frac{2}{h''(x_0)}} \delta(x - x_0)$$

con lo cual obtenemos:

$$e^{-\lambda h(x)} = e^{-\lambda h(x_0)} \left[\sqrt{\frac{2\pi}{h''(x_0)\lambda}} \delta(x - x_0) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right], \quad \lambda \rightarrow \infty$$

que es la fórmula distribucional de Laplace.

Similarmente, de la expansión:

$$e^{-\lambda x^{2k}} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2k}\right) \delta^{(2n)}(x)}{k(2n)! \lambda^{\frac{2n+1}{2k}}}, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

podemos obtener la fórmula de Laplace para un mínimo x_0 , donde $h^{(j)}(x_0) = 0$, $0 \leq j \leq 2k - 1$, $h^{(2k)}(x_0) > 0$ como:

$$e^{-\lambda h(x)} \sim e^{-\lambda h(x_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2k}\right) \phi^{(2n)}(0)}{k(2n)! \lambda^{\frac{2n+1}{2k}}}$$

$$\sim e^{-\lambda h(x_0)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)}{k} \left(\frac{h^{(2k)}(x_0)}{(2k)!\lambda} \right)^{\frac{1}{2k}} + \delta(x - x_0) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/k}}\right) \right], \quad \lambda \rightarrow \infty$$

En el espacio $D(U)$, U es el más pequeño entorno de x_0 y $\psi(x) = (h(x) - h(x_0))^{\frac{1}{2k}}$

Para obtener la expansión asintótica de $e^{-\lambda h(x)}$ cuando el mínimo de $h(x)$ es localizado en un punto extremo del intervalo de integración, supongamos que cerca del punto extremo $x = a$ tenemos que $h(x) = h(a) + \psi(x)^\alpha$ donde $\psi(x)$ es una función suave, $\psi(x) > 0$, $x \geq a$, $\alpha > 0$. Entonces de la expansión

$$H(x)e^{-\lambda x^\alpha} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right) \delta^{(n)}(x)}{\alpha n! \lambda^{\frac{n+1}{\alpha}}}, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} H(x-a)e^{-\lambda h(x)} &\sim e^{-\lambda h(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right) \delta^{(n)}(\psi(x))}{\alpha n! \lambda^{\frac{n+1}{\alpha}}} \\ &\sim e^{-\lambda h(a)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha \psi'(a) \lambda^{1/\alpha}} \delta(x-a) + O\left(\frac{1}{\lambda^{2/\alpha}}\right) \right], \quad \lambda \rightarrow \infty \end{aligned}$$

válida en $D(U)$, U es un pequeño entorno de $x = a$, Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} e^{-\lambda h(x)} \phi(x) dx &\sim e^{-\lambda h(a)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \phi(a)}{\alpha \psi'(a)} \right) \lambda^{-1/\alpha} \\ &+ \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\alpha} \left(\frac{\psi''(a) \phi(a)}{(\psi'(a))^3} - \frac{\phi'(a)}{(\psi'(a))^2} \right) \lambda^{-2/\alpha} + O(\lambda^{-3/\alpha}) \end{aligned}$$

Si el soporte de ϕ no contiene otros puntos críticos de h .

Entonces, la evaluación asintótica de integrales del tipo

$$I(\lambda) = \int_a^b f^\lambda(x) \phi(x) dx, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

pueden ser obtenida usando la fórmula de Laplace, mediante $h(x) = -\ln f(x)$. En particular, si $f(x)$ tiene un máximo en el punto interior $x = x_0$ y $f''(x) < 0$ entonces

$$\int_a^b f^\lambda(x) \phi(x) dx \sim f(x_0)^{\lambda+1/2} \left(\frac{-2\pi}{\lambda f''(x_0)} \right)^{1/2} \phi(x_0), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (124)$$

Ejemplo 58 Utilizaremos la fórmula de Laplace para aproximar la fórmula de Stirling's

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt$$

haciendo el cambio de variable $t = nx$ obtenemos

$$n! = n^{n+1} \int_0^{\infty} e^{-n(x-\ln x)} dx$$

el mínimo de la función $h(x) = x - \ln x$ está localizado en $x_0 = 1$, además $h''(1) = 1$ entonces

$$n! \sim n^{n+1} e^{-n} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{1/2} \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}$$

Ejemplo 59 Si n es un entero, tenemos la fórmula

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^{2n} x dx = \frac{1,3,\dots,(2n-1)}{2,4,\dots,2n} \pi$$

si usamos la fórmula (124) con $f(x) = \text{sen}^2 x$ y $x_0 = \frac{\pi}{2}$ obtenemos

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^{2n} x dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

entonces

$$\frac{1,3,\dots,(2n-1)}{2,4,\dots,2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

13.14. Expansión de Núcleos Oscilatorios

Consideremos la expansión asintótica de momento de distribuciones en los espacios distribucionales O'_γ y $O'_C = \bigcap_{\gamma \in R} O'_\gamma$. La expansión asintótica de momento es válida en el espacio O'_C mientras que una versión de orden finito es válida en O'_γ . El espacio O'_C contiene no solo núcleos de rápido decaimiento, sino también rápido núcleos oscilatorios, de los cuales se obtienen importantes casos particulares.

Una función de prueba $\phi(x) \in O_\gamma(R)$ si es suave y si $\phi^{(j)}(x) = O(|x|^{-\gamma})$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ para cualquier $j \in N$. La familia de seminormas

$$\|\phi\|_{\gamma,j} = \sup \left\{ p_\gamma(|x|) \left| \phi^{(j)}(x) \right| : x \in R \right\},$$

donde

$$p_\gamma(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq 1 \\ r^{-\gamma} & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Estas seminormas genera la topología de este espacio.

Sea $X_q = \{\phi \in O_\gamma : \phi^{(j)}(0) = 0 \text{ para } j < q\}$. Entonces si $q \leq \gamma$, para cualquier seminormas continua $\|\cdot\|_1$ existe otra seminormas continua $\|\cdot\|_2$ tal que si $\phi \in X_q$,

$$\left\| \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_1 \leq \left\| \phi(x) \right\|_2 \lambda^{-q} \text{ para } \lambda > \lambda_0$$

En particular

$$\left\| \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_1 = O(\lambda^{-q}) \text{ cuando } \lambda \rightarrow \infty$$

Prueba :

Sea $\phi \in X_q$. Entonces existe una constante K tal que

$$|\phi(x)| \leq K |x|^q, \quad |x| \leq 1$$

$$|\phi(x)| \leq K |x|^\gamma, \quad |x| \geq 1$$

como $q \leq \gamma$ se tiene que si $\lambda > 1$ entonces

$$\left\| \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_{0,\gamma} \leq \frac{K}{\lambda^q}$$

Observemos que

$$\left\| \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_{j,\gamma} = \lambda^{-j} \left\| \phi^{(j)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_{0,\gamma} \text{ y que } \phi^{(j)} \in X_{q-j} \text{ si } j \leq q,$$

mientras que $\phi^{(j)} \in X_0$ si $j > q$, por tanto, obtenemos :

$$\left\| \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_{j,\gamma} = O(\lambda^{-q}) \text{ si } j \leq q$$

$$\left\| \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right\|_{j,\gamma} = O(\lambda^{-j}) \text{ si } j > q$$

Las demostraciones de los próximos dos teoremas, están basada con el mismo argumento con que se demostró la validez de la expansión asintótica de momentos para una funcional en el espacio distribucional $E'(R)$.

Sea $f \in O_\gamma(R)$ y $N = \|\gamma\| - 1$, entonces

$$f(\lambda x) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n \mu_n \delta^{(n)}(x)}{n! \lambda^{n+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+2}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

en el espacio $O_\gamma(R)$. Como $O'_C = \bigcap_{\gamma \in R} O'_\gamma$ tenemos el siguiente

Sea $f \in O'_C(R)$, entonces

$$f(\lambda x) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n \mu_n \delta^{(n)}(x)}{n! \lambda^{n+1}}, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

en el espacio $O_C(R)$

13.15. Expansión de $f(\lambda x)$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$ en otros casos

Sea $f \in S'(R)$ con soporte acotado a la izquierda, tal que $f(x) = O(x^\beta)$ cuando $x \rightarrow \infty$ donde $\beta > -1$. Entonces

$$f(\lambda x) = O(\lambda^\beta), \text{ cuando } \lambda \rightarrow \infty \text{ en } S'(R).$$

Prueba :

Es posible encontrar una constante M tal que podamos escribir $f = f_0 + f_1$, donde el soporte de f_0 es compacto y donde f_1 es una función ordinaria con soporte en $[0, \infty)$ y con $|f_1(x)| \leq Mx^\beta$, $x \geq 0$. Como f_0 tiene soporte compacto, tenemos:

$$f_0(\lambda x) \sim \frac{\mu_0 \delta(x)}{\lambda} - \frac{\mu_1 \delta'(x)}{\lambda^2} + \dots$$

Luego

$$f_0(\lambda x) = O(\lambda^{-1}) \text{ y } \beta > -1, \quad f_0(\lambda x) = O(\lambda^\beta) \text{ cuando } \lambda \rightarrow \infty$$

Dicho de otra manera, si $\phi \in S$, tenemos

$$|\langle f_1(\lambda x), \phi(x) \rangle| \leq \int_0^\infty |f_1(\lambda x)| |\phi(x)| dx \leq \left[M \int_0^\infty x^\beta |\phi(x)| dx \right] \lambda^\beta$$

entonces

$$f_1(\lambda x) = O(\lambda^\beta) \text{ cuando } \lambda \rightarrow \infty$$

Sea $f \in S'(R)$ con soporte acotado a la izquierda, tal que $f(x) = O(x^\beta)$ cuando $x \rightarrow \infty$ donde $-(k+1) > \beta > -(k+2)$ para algún $k \in N$. Entonces

$$f(\lambda x) = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j \mu_j \delta^{(j)}(x)}{j! \lambda^{j+1}} + O(\lambda^\beta), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (125)$$

Prueba :

Es posible encontrar una constante M tal que podamos escribir $f = f_0 + f_1$, donde f_0 tiene soporte compacto y donde f_1 es una función ordinaria con soporte en $[0, \infty)$ y con $|f_1(x)| \leq Mx^\beta$, $x \geq 0$. Como f_0 tiene soporte compacto, $f_0(\lambda x)$ admite la expansión de momento

$$f_0(\lambda x) = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j \mu_j(f_0) \delta^{(j)}(x)}{j! \lambda^{j+1}} + O(\lambda^{-(k+2)}) \quad , \quad \lambda \rightarrow \infty$$

para algún $k \in \mathbb{N}$. Es suficiente mostrar que la fórmula 125 es válida para f_1 .

Sea $\phi \in S(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} & \left\langle f_1(\lambda x) - \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j \mu_j(f_0) \delta^{(j)}(x)}{j! \lambda^{j+1}} \quad , \quad \phi(x) \right\rangle \\ &= \langle f_1(\lambda x) \quad , \quad \phi(x) \rangle - \sum_{j=0}^k \frac{\phi^{(j)}(0)}{j! \lambda^{j+1}} \int_0^\infty f_1(x) x^j dx \\ &= \int_0^\infty f_1(\lambda x) \left[\phi(x) - \sum_{j=0}^k \frac{\phi^{(j)}(0)}{j!} x^j \right] dx \end{aligned}$$

Como $\phi \in S(\mathbb{R})$ podemos encontrar una constante K tal que :

$$\begin{aligned} \left| \phi(x) - \sum_{j=0}^k \frac{\phi^{(j)}(0)}{j!} x^j \right| &\leq K x^{k+1} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \left| \phi(x) - \sum_{j=0}^k \frac{\phi^{(j)}(0)}{j!} x^j \right| &\leq K x^k \quad , \quad x \geq 1 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle f_1(\lambda x) - \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j \mu_j(f_1) \delta^{(j)}(x)}{j! \lambda^{j+1}} \quad , \quad \phi(x) \right\rangle \right| \\ &\leq \int_0^1 MK \lambda^B x^\beta x^{k+1} dx + \int_1^\infty MK \lambda^B x^\beta x^k dx \\ &\leq MK \left[\frac{1}{K+2+B} - \frac{1}{K+1+B} \right] \lambda^B \end{aligned}$$

14. Capítulo V: Transformada de Fourier

Justo antes de 1800, el matemático, físico e ingeniero francés Jean Baptiste Joseph Fourier hizo un descubrimiento asombroso, . a través de sus profundas investigaciones analíticas sobre las ecuaciones diferenciales parciales que modelan la propagación del calor en los cuerpos, Fourier llegó a afirmar que "todas" las funciones podrían representarse como una serie infinita de funciones trigonométricas elementales: senos y cosenos. Por ejemplo, considere el sonido producido por un instrumento musical, por ejemplo, piano, violín, trompeta o tambor.

La descomposición de la señal en sus componentes trigonométricos revela las frecuencias fundamentales (tonos, armónicos, etc.) que se combinan para producir el timbre distintivo del instrumento. Esta descomposición de Fourier se encuentra en el corazón de la música electrónica moderna; un sintetizador combina tonos puros de seno y coseno para reproducir los diversos sonidos de los instrumentos, tanto naturales como artificiales, según la prescripción general de Fourier.

La afirmación de Fourier era tan notable y contradictoria que la mayoría de los principales matemáticos de la época no le creyeron. Sin embargo, no pasó mucho tiempo antes de que los científicos llegaran a apreciar el poder y la aplicabilidad de amplio alcance del método de Fourier, abriendo así vastas nuevas esferas de las matemáticas, la física, la ingeniería y más.

De hecho, el descubrimiento de Fourier se ubica fácilmente entre los diez primeros avances matemáticos de todos los tiempos, una lista que también incluiría la invención del cálculo por Newton, y la geometría diferencial de Gauss y Riemann, que, 70 años después, se convirtió en la base de la relatividad general de Einstein. El análisis de Fourier es un componente esencial de gran parte de las matemáticas aplicadas (y puras) modernas.

Constituye una herramienta analítica excepcionalmente poderosa para resolver una amplia gama de ecuaciones diferenciales parciales lineales. Las aplicaciones en física, ingeniería, biología, finanzas, etc., son casi demasiado numerosas para catalogarlas: escribir la palabra "Fourier" en el índice de materias de una biblioteca científica moderna demostrará dramáticamente cuán omnipresentes son estos métodos. El análisis de Fourier se encuentra en el corazón del procesamiento de señales, incluido el audio, el habla, las imágenes, los videos, los datos sísmicos, las transmisiones de radio, etc. Muchos avances tecnológicos modernos, incluidos la televisión, los CD y DVD de música, los teléfonos móviles, las películas, los gráficos por ordenador, el procesamiento de imágenes y el análisis y almacenamiento de huellas dactilares, se basan, de una forma u otra, en las múltiples ramificaciones de la teoría de Fourier.

En su carrera como matemático, científico o ingeniero, encontrará que la teoría de Fourier, como el cálculo y el álgebra lineal, es una de las armas más básicas de su arsenal matemático. El dominio del tema es fundamental. Además, una fracción sorprendentemente grande de las matemáticas modernas se basa en intentos posteriores de colocar las series de Fourier sobre una base matemática firme. Por lo tanto, muchos de los conceptos más básicos del análisis moderno, incluida la definición de una función, la definición $\varepsilon - \sigma$ de límite y continuidad, propiedades de convergencia en el espacio funcional, la teoría moderna de integración y medida, funciones generalizadas como la función delta, y muchos otros, todos tienen una profunda deuda con la prolongada lucha por establecer un marco riguroso para el análisis de Fourier.

Aún más notable, la teoría de conjuntos moderna y, por lo tanto, los fundamentos de la lógica y las matemáticas modernas, se remontan directamente a los intentos del matemático alemán del siglo *XIX* Georg Cantor de comprender los conjuntos en los que convergen las series de Fourier.

Comenzamos nuestro desarrollo de los métodos de Fourier explicando por qué las series de Fourier aparecen naturalmente cuando intentamos resolver la ecuación de calor unidimensional. El lector que no esté interesado en tales motivaciones puede omitir con seguridad esta sección inicial, ya que el mismo material reaparece donde aplicamos los métodos de Fourier para resolver varias ecuaciones diferenciales parciales lineales importantes.

Eigensoluciones de ecuaciones de evolución lineal

Siguiendo nuestros estudios de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden en el capítulo anterior, el siguiente ejemplo importante que merece ser investigado es la ecuación lineal de segundo orden.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

conocida como la ecuación del calor, ya que modela (entre otros procesos de difusión) el flujo de calor en un medio unidimensional, por ejemplo, una barra de metal. Para simplificar, hemos establecido los parámetros físicos iguales a 1 con el fin de centrarnos en las técnicas de solución.

A diferencia de la ecuación de onda considerada en un capítulo anterior, no existe una fórmula elemental comparable para la solución general de la ecuación del calor. En cambio, escribiremos soluciones como series infinitas en ciertas soluciones simples y explícitas. Este método de solución, iniciado por Fourier, nos llevará inmediatamente a la definición de una serie de Fourier. El resto de este capítulo se dedicará a desarrollar las propiedades básicas y el cálculo de las series de Fourier.

Comencemos por escribir la ecuación del calor en una forma evolutiva lineal más abstracta, pero sugerente.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L[u]$$

en el cual

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

es un operador diferencial lineal de segundo orden. La linealidad impone dos requisitos al operador L :

1. $L[u + v] = L[u] + L[v]$
2. $L[cu] = cL[u]$

para cualquier función u, v y cualquier constante c . Además, dado que L implica diferenciación solo con respecto a x , también satisface

$$L[c(t)u] = c(t)L[u]$$

para cualquier función $c(t)$ que no dependa de x .

Por supuesto, hay muchos otros operadores diferenciales lineales posibles, por lo que nuestra ecuación de evolución lineal abstracta puede representar una amplia gama de ecuaciones diferenciales parciales lineales. Por ejemplo, si

$$L[u] = -c(x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

donde $c(x)$ es una función que representa la velocidad de la onda en un medio no uniforme, entonces se convierte en la ecuación de transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c(x)\frac{\partial u}{\partial x}$$

que estudiamos en el otro capítulo. Si

$$L[u] = \frac{1}{\sigma(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

donde $\sigma(x) > 0$ representa la capacidad calorífica y $k(x) > 0$ conductividad térmica, entonces se convierte en la ecuación de calor generalizada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sigma(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

que gobierna la difusión de calor en una barra no uniforme. Si

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u$$

donde $\gamma > 0$ es una constante positiva, entonces se convierte en la ecuación de calor amortiguado

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u$$

que modela la temperatura de una barra que se está enfriando debido a la radiación de energía térmica. Incluso podemos tomar u como una función de más de una variable espacial, por ejemplo, $u(t, x, y)$ o $u(t, x, y, z)$, en cuyo caso se incluye versiones de dimensiones superiores de la ecuación de calor para placas y cuerpos sólidos, que estudiaremos a su debido tiempo. En todos los casos, los requisitos clave del operador L son (a) linealidad y (b) solo se permite la diferenciación con respecto a las variables espaciales.

La idea inspirada de Fourier para resolver tales ecuaciones de evolución lineal es una adaptación directa del método de resolución propia para sistemas lineales de primer orden de ecuaciones diferenciales ordinarias, El punto de partida es la ecuación diferencial ordinaria escalar elemental

$$\frac{du}{dt} = \lambda u$$

La solución general es una función exponencial

$$u(t) = ce^{\lambda t}$$

cuyo coeficiente c es una constante arbitraria. Esta observación elemental motiva el método de solución para un sistema lineal homogéneo de primer orden de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\frac{du}{dt} = Au$$

en el que A es una matriz constante $n \times n$. Trabajando por analogía, buscaremos soluciones de forma exponencial

$$u(t) = e^{\lambda t} v$$

donde $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante. Sustituimos en la ecuación

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{\lambda t} v) = \lambda e^{\lambda t} v$$

Por otro lado, dado que $e^{\lambda t}$ es un escalar, conmuta con la multiplicación de matrices, por lo que

$$Au = Ae^{\lambda t} v = e^{\lambda t} Av$$

Por lo tanto, $u(t)$ resolverá el sistema si y solo si v satisfice

$$Av = \lambda v$$

Reconocemos esto como la ecuación propia que determina los valores propios de la matriz A . Es decir, tiene una solución distinta de cero $v \neq 0$ si y sólo si λ es un valor propio y un vector propio correspondiente. Cada valor propio λ y vector propio v produce una resolución propia distinta de cero que varía exponencialmente para el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Cualquier múltiplo escalar distinto de cero de un vector propio $v = cv$, para $c \neq 0$, es automáticamente otro vector propio para el mismo valor propio λ . Sin embargo, el único efecto es multiplicar la resolución propia por el escalar c . Por lo tanto, para obtener un sistema completo de soluciones independientes, solo necesitamos los vectores propios independientes.

Por simplicidad, y también porque todas las ecuaciones diferenciales parciales lineales que trataremos tendrán la propiedad análoga, suponga que la matriz A tiene un sistema completo de valores propios reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y los correspondientes vectores propios reales, linealmente independientes v_1, \dots, v_n , que por lo tanto forman una base de vector propio del espacio subyacente R_n . (Permitimos la posibilidad de auto valores repetidos, pero requerimos que todos los auto vectores sean independientes para evitar soluciones superfluas.)

Los valores propios complejos conducen a soluciones exponenciales complejas, cuyas partes reales e imaginarias se pueden utilizar para construir las soluciones reales asociadas. Las matrices incompletas, que tienen un número insuficiente de auto vectores, son más complicadas, y la solución al sistema lineal correspondiente requiere el uso de la forma canónica de Jordan.

Usando nuestro supuesto de completitud, podemos producir n soluciones propias exponenciales reales independientes

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 \quad \dots \quad u_n(t) = e^{\lambda_n t} v_n$$

sistema lineal. El principio de superposición lineal nos dice que, para cualquier elección de escalares c_1, \dots, c_n , la combinación lineal

$$c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

también es una solución. Los teoremas básicos de existencia y unicidad para sistemas de primer orden de ecuaciones diferenciales ordinarias, implican que forma la solución general del sistema lineal original, por lo que las soluciones propias forman una base para el espacio de solución.

Adaptemos ahora esta idea fundamental para construir soluciones que varíen exponencialmente a la ecuación de calor o, para el caso, cualquier ecuación de evolución lineal en la forma. Para ello, introducimos un *ansatz* exponencial análogo:

$$u(t, x) = e^{\lambda t} v(x)$$

en la que reemplazamos el vector v por una función $v(x)$. Sustituimos la expresión anterior en las ecuaciones dinámicas. Primero, la derivada del tiempo de tal función es

$$\frac{\partial}{\partial t}[e^{\lambda t} v(x)] = \lambda e^{\lambda t} v(x)$$

Por otro lado, en vista del operador L

$$L[u] = L[e^{\lambda t} v(x)] = e^{\lambda t} L(v)$$

Al igualar estas dos expresiones y cancelar el factor exponencial común, llegamos a la conclusión de que $v(x)$ debe satisfacer la ecuación

$$L[v] = \lambda v$$

para el operador diferencial lineal L , en el que λ es el valor propio, mientras que $v(x)$ es la función propia correspondiente. Cada par de valores propios y funciones propias producirá una resolución propia que varía exponencialmente a la ecuación diferencial parcial. Luego apelaremos a la superposición lineal para combinar las soluciones propias resultantes para formar soluciones adicionales.

La complicación clave es que las ecuaciones diferenciales parciales admiten un número infinito de soluciones propias independientes y, por lo tanto, no se puede esperar escribir la solución general como una combinación lineal finita de las mismas. Más bien, uno se ve llevado a intentar construir soluciones como series infinitas en las soluciones propias. Sin embargo, la justificación de tales fórmulas de solución en serie requiere habilidades analíticas y sofisticación adicionales. No todas las series infinitas convergen en una función auténtica.

Además, una serie convergente de funciones diferenciables no necesita converger a una función diferenciable y, por lo tanto, la serie puede no representar una solución (clásica) de la ecuación diferencial parcial. Se nos recuerda, una vez más, que las ecuaciones diferenciales parciales son criaturas mucho más salvajes que sus primas relativamente dóciles, las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para mayor especificidad, centremos nuestra atención en la ecuación de calor, Si $v(x)$ es una función de x , entonces

$$L[v] = v''(x)$$

Por tanto, nuestra ecuación se convierte en

$$v'' = \lambda v$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden para $v(x)$, por lo que tiene dos soluciones linealmente independientes. Las fórmulas de solución explícita dependen del signo del valor propio λ , y se pueden encontrar en cualquier texto básico sobre ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por lo tanto, en ausencia de condiciones de contorno, cada número real λ califica como un valor propio del operador diferencial lineal, que posee dos funciones propias linealmente independientes y, por lo tanto, dos soluciones propias linealmente independientes a la ecuación de calor. Al igual que con los vectores propios, cualquier combinación lineal (distinta de cero) de funciones propias (soluciones propias) con el mismo valor propio es también una función propia (resolución propia). Por lo tanto, la tabla anterior enumera solo funciones propias y soluciones propias independientes. Como se señaló anteriormente, cualquier combinación lineal finita de estas soluciones propias básicas es automáticamente una solución. Así, por ejemplo,

$$u(t, x) = c_1 e^{-t} \cos x + c_2 e^{-4t} \sin 2x + c_3 x + c_4$$

es una solución a la ecuación de calor para cualquier elección de constantes c_1, c_2, c_3, c_4 , como se puede comprobar fácilmente. Pero, dado que hay infinitas soluciones propias independientes, no podemos esperar poder representar cada solución de la ecuación de calor como una combinación lineal finita de soluciones propias. Por tanto, debemos aprender a tratar con series infinitas de soluciones propias.

Las soluciones propias en la primera clase, donde $\lambda < 0$, están decayendo exponencialmente, lo que está de acuerdo con nuestra intuición física sobre cómo debe comportarse la temperatura de un cuerpo. Los de la segunda clase son constantes en el tiempo, también físicamente razonables. Sin embargo, los de la tercera clase, correspondientes a valores propios positivos $\lambda > 0$, están creciendo exponencialmente en el tiempo. ¡En ausencia de fuentes de calor externas, los cuerpos físicos deberían acercarse a algún tipo de equilibrio térmico, y ciertamente no a una temperatura que crece exponencialmente!

Sin embargo, observe que las últimas soluciones propias (así como la solución x) no están limitadas en el espacio, por lo que incluyen una cantidad infinita de energía térmica que se suministra al sistema desde infinito. Como pronto llegaremos a apreciar, las condiciones de contorno físicamente relevantes planteadas ya sea en un intervalo acotado o especificando las asintóticas de las soluciones a grandes distancias separarán las soluciones físicamente razonables de las matemáticamente válidas, pero físicamente irrelevantes.

En consecuencia, las funciones trigonométricas básicas

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \cos 3x, \dots$$

Forman un sistema de funciones propias independientes para el problema de valores en la frontera periódicos. Las correspondientes soluciones propias que varían exponencialmente son

$$u_k(x) = e^{-k^2 t} \cos kx \quad \tilde{u}_k(x) = e^{-k^2 t} \sin kx \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

cada uno de los cuales, por diseño, es una solución a la ecuación de calor y satisface las condiciones de contorno periódicas. Tenga en cuenta que asumimos el caso $\lambda_0 = 0$, teniendo en cuenta que, cuando $k = 0$, la función seno es trivial y, por lo tanto, $u_0(x) \neq 0$ no es necesaria. Entonces, el valor propio nulo $\lambda_0 = 0$ proporciona (hasta un múltiplo constante) solo una resolución propia, mientras que los valores propios estrictamente negativos $\lambda_k = -k^2 < 0$ proporcionan cada uno dos soluciones propias independientes.

Para completar, también se debe considerar la posibilidad de valores propios complejos. Si $\lambda = \omega^2 \neq 0$, donde ahora se permite que ω sea complejo, entonces todas las soluciones de la ecuación diferencial son de la forma

$$v(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$$

Las condiciones de contorno periódicas requieren

$$ae^{-\omega\pi} + be^{\omega\pi} = ae^{\omega\pi} + be^{-\omega\pi}, \quad a\omega e^{-\omega\pi} - b\omega e^{\omega\pi} = a\omega e^{\omega\pi} - b\omega e^{-\omega\pi}$$

si $e^{\omega\pi} \neq e^{-\omega\pi}$, o, de manera equivalente, $e^{2\omega\pi} = 1$, entonces la primera condición implica $a = b$, pero luego la segunda implica $a = b = 0$, por lo que $\lambda = \omega^2$ no es un valor propio. Por lo tanto, los valores propios solo ocurren cuando $e^{2\omega\pi} = 1$. Esto implica $\omega = ki$ donde k es un número entero, y entonces $\lambda = -k^2$, lo que lleva de regreso a las soluciones trigonométricas conocidas. Más adelante, aprenderemos que la estructura “autoadjunta” del problema de valores en la frontera subyacente implica, a priori, que todos sus valores propios son necesariamente reales y no positivos.

Concluimos que hay un número infinito de soluciones propias independientes para la ecuación de calor periódica. La superposición lineal, como se describe en el teorema anterior, nos dice que cualquier combinación lineal finita de las soluciones propias es automáticamente una solución de la ecuación de calor periódica.

Sin embargo, solo las soluciones cuyos datos iniciales $u(0, x) = f(x)$ resultan ser una combinación lineal finita de las funciones propias trigonométricas (un polinomio trigonométrico) pueden representarse así. La brillante idea de Fourier fue proponer tomar combinaciones lineales infinitas de las soluciones propias en un intento de resolver el problema general del valor inicial. Por lo tanto, intentamos representar una solución general de la ecuación de calor periódica como una serie infinita de la forma

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{-k^2 t} \cos kx + b_k^{-k^2 t} \sin kx]$$

Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$, son constantes que se fijarán mediante la condición inicial. De hecho, sustituyendo nuestra fórmula de solución propuesta, obtenemos

$$f(x) = u(0, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{-k^2 t} \cos kx + b_k^{-k^2 t} \sin kx]$$

Por lo tanto, debemos representar la distribución de temperatura inicial $f(x)$ como una serie infinita de Fourier en las funciones propias trigonométricas elementales. Una vez prescritos los coeficientes de Fourier $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$, esperamos que la correspondiente serie de soluciones propias (3.27) proporcione una fórmula explícita para la solución del problema de valor de frontera inicial periódico para la ecuación de calor.

Sin embargo, las series infinitas son mucho más delicadas que las sumas finitas, por lo que esta construcción formal requiere un análisis matemático serio para colocarla sobre una base rigurosa. Las preguntas clave son:

- ¿Cuándo converge una serie de Fourier trigonométrica infinita?
- ¿Qué tipos de funciones $f(x)$ se pueden representar mediante una serie de Fourier convergente?

14.1. Serie de Fourier

La sección anterior sirvió para motivar el desarrollo de series de Fourier como herramienta para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Nuestro objetivo inmediato es representar una función dada $f(x)$ como una serie convergente en las funciones trigonométricas elementales:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

El primer orden del día es determinar la fórmula para los coeficientes de Fourier a_k, b_k ; sólo entonces trataremos los problemas de convergencia.

La llave que abre el cofre del tesoro de Fourier es la ortogonalidad. Recuerde que dos vectores en el espacio euclidiano se llaman ortogonales si se encuentran en ángulo recto. Más explícitamente, v, w son ortogonales si y solo si su producto escalar es cero: $v \cdot w = 0$. La ortogonalidad, y en particular las bases ortogonales, tiene profundas consecuencias que sustentan muchos algoritmos computacionales modernos. En el espacio funcional de dimensión infinita, si no fuera por la ortogonalidad, la teoría de Fourier sería mucho más complicada, si no completamente impracticable para las aplicaciones. El punto de partida es la introducción de un producto interno adecuado en el espacio funcional, para asumir el papel que juega el producto escalar en el contexto de dimensión finita. Para la serie clásica de Fourier, utilizamos el producto interno L^2 reescalado

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

en el espacio de funciones continuas definidas en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Se puede mostrar que dicha ecuación satisface los axiomas básicos del producto interno. La norma asociada es

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx}$$

Bajo el producto interno de L^2 reescalado, las funciones trigonométricas $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$, satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad:

1. $\langle \cos kx, \cos lx \rangle = \langle \sin kx, \sin lx \rangle = 0$ para $k \neq l$
2. $\langle \cos kx, \cos lx \rangle = 0$ para toda k, l $\|1\| = \sqrt{2}$ $\|\cos kx\| = \|\sin kx\| = 1$ para $k \neq 0$,
donde k y l indican números enteros no negativos.

Esto nos indica que las funciones trigonométricas elementales forman un sistema ortogonal, lo que significa que cualquier par distinto es ortogonal bajo el producto interno elegido. Si reemplazáramos la función constante 1 por $\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces las funciones resultantes formarían $\frac{1}{\sqrt{2}}$ un sistema ortonormal, lo que significa que, además, todas tienen la norma 1. Sin embargo, el $\sqrt{2}$ adicional es completamente molesto y es mejor omitirlo.

Como ocurre con todos los hechos matemáticos esenciales, la ortogonalidad de las funciones trigonométricas no es un accidente, sino que indica que algo más profundo está sucediendo. De hecho, la ortogonalidad es una consecuencia del hecho de que las funciones trigonométricas son las

funciones propias para el problema del valor límite autoadjunto, que es la contraparte del espacio funcional de la ortogonalidad de los vectores propios de matrices simétricas.

Si ignoramos los problemas de convergencia, entonces las relaciones de ortogonalidad trigonométricas sirven para prescribir los coeficientes de Fourier: tomando el producto interno de ambos lados con $\cos(lx)$ para $l > 0$, e invocando la linealidad del producto interno, se obtiene

$$\begin{aligned}\langle f, \cos lx \rangle &= \frac{a_0}{2} \langle 1, \cos lx \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \langle \cos kx, \cos lx \rangle + b_k \langle \sin kx, \cos lx \rangle] \\ &= a_l \langle \cos lx, \cos lx \rangle = a_l\end{aligned}$$

ya que, por las relaciones de ortogonalidad, todos los términos menos el l -ésimo se desvanecen. Esto sirve para prescribir el coeficiente de Fourier a_l . Una manipulación similar con $\sin(lx)$ fija $b_l = \langle f, \sin(lx) \rangle$, mientras que tomando el producto interno con la función constante 1 da

$$\langle f, 1 \rangle = \frac{a_0}{2} \langle 1, 1 \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \langle \cos kx, 1 \rangle + b_k \langle \sin kx, 1 \rangle] = \frac{a_0}{2} \|1\|^2 = a_0$$

lo que concuerda con la fórmula anterior para a_l cuando $l = 0$, y explica por qué incluimos el factor adicional $1/2$ en el término constante. Por tanto, si la serie de Fourier converge a la función $f(x)$, entonces sus coeficientes se prescriben tomando productos internos con las funciones trigonométricas básicas.

Definición:

La serie de Fourier de una función $f(x)$ definida en $-\pi \leq x \leq \pi$ es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

cuyos coeficientes vienen dados por la fórmula del producto interno

$$a_k = \langle f, \cos kx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_k = \langle f, \sin kx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La función $f(x)$ no puede ser completamente arbitraria, ya que, como mínimo, las integrales en las fórmulas de coeficientes deben estar bien definidas y finitas. Incluso si los coeficientes son finitos, no hay garantía de que la serie infinita resultante converja y, incluso si converge, no hay garantía de que converja a la función original $f(x)$. Por estas razones, tendemos a usar el símbolo \sim en lugar

de un signo igual al escribir una serie de Fourier. Antes de abordar estos temas críticos, trabajemos con un ejemplo elemental.

Ejemplo:

Considere la función $f(x) = x$. Podemos calcular sus coeficientes de Fourier directamente, empleando la integración por partes para evaluar las integrales:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right] \Big|_{x=-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right] \Big|_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{2}{k} (-1)^{k+1}$$

La serie de Fourier resultante es

$$x \sim 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right)$$

Establecer la convergencia de esta serie infinita está lejos de ser elemental. Los criterios de cálculo estándar, incluidas las pruebas de razón y raíz, no son concluyentes. Incluso si sabemos que la serie converge (lo que sucede, para todo x), ciertamente no es obvio a qué función converge. De hecho, ¡no puede converger a la función $f(x) = x$ en todas partes. Por ejemplo, si $x = \pi$, entonces todos los términos de la serie de Fourier son cero y, por lo tanto, convergen a 0, que no es lo mismo que $f(\pi) = \pi$.

Recuerde que la convergencia de una serie infinita se basa en la convergencia de su secuencia de sumas parciales, que, en este caso, son

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

Por definición, la serie de Fourier converge en un punto x si y solo si sus sumas parciales tienen un límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \tilde{f}(x)$$

que puede ser igual o no al valor de la función original $f(x)$. Por lo tanto, un requisito clave es encontrar condiciones en la función $f(x)$ que garanticen que la serie de Fourier converge y, lo que es más importante, que la suma límite reproduce la función original: $\tilde{f}(x) = f(x)$. Todo esto se hará en detalle a continuación.

Una suma finita de Fourier, también se conoce como polinomio trigonométrico. Esto se debe a que, mediante identidades trigonométricas, se puede reexpresar como un polinomio $P(\cos x, \sin x)$

en las funciones coseno y seno; viceversa, cada polinomio de este tipo puede escribirse de forma única como tal suma; consulte [33] para obtener más detalles.

El paso de polinomios trigonométricos a series de Fourier podría considerarse análogo al paso de polinomios a series de potencias. Recuerde que la serie de Taylor de una función infinitamente diferenciable $f(x)$ en el punto $x = 0$ es

$$f(x) \sim c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$$

donde, según la fórmula de Taylor, los coeficientes $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ se expresan en términos $k!$ de sus derivados en el origen, no por un producto interno. Las sumas parciales

$$s_n(x) \sim c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$$

de una serie de potencias son polinomios ordinarios, y surgen los mismos problemas básicos de convergencia.

Aunque superficialmente similares, en realidad las dos teorías son profundamente diferentes. De hecho, aunque la teoría de las series de potencia estaba bien establecida en los primeros días del cálculo, aún quedan cuestiones fundamentales sin resolver en la teoría de Fourier.

La serie de potencias en una variable real x converge en todas partes, o en un intervalo centrado en 0, o en ninguna parte excepto en 0. Por otro lado, una serie de Fourier puede converger en conjuntos bastante extraños. En segundo lugar, cuando una serie de potencias converge, converge a una función analítica, cuyas derivadas están representadas por la serie de potencias diferenciadas. Las series de Fourier pueden converger, no solo en funciones continuas, sino también en una amplia variedad de funciones discontinuas e incluso en objetos más generales. Por lo tanto, la diferenciación por términos de una serie de Fourier no es un tema trivial.

Una vez que uno aprecia cuán radicalmente diferentes son los dos temas, uno comienza a comprender por qué las asombrosas afirmaciones de Fourier fueron inicialmente poco creídas. Antes de ese momento, todas las funciones se consideraban analíticas. El hecho de que las series de Fourier pudieran converger en una función no analítica, incluso discontinua, era extremadamente desconcertante, lo que resultó en una reevaluación profunda de los fundamentos de la teoría de funciones y el cálculo, que culminó en las definiciones modernas de función y convergencia que ahora aprende en su primeros cursos de análisis.

Sólo gracias a los esfuerzos combinados de muchos de los principales matemáticos del siglo XIX se estableció firmemente una teoría rigurosa de las series de Fourier.

14.2. Extensiones periódicas

Los constituyentes trigonométricos de una serie de Fourier son todas funciones periódicas del período 2π . Por lo tanto, si la serie converge, la función límite $f(x)$ también debe ser periódica del período 2π :

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) \text{ para toda } x \in \mathbb{R}$$

Una serie de Fourier sólo puede converger a una función periódica de 2π . Por tanto, no era razonable esperar que la serie de Fourier convergiera a la función aperiódica $f(x) = x$ en todas partes. Más bien, debería converger a su extensión periódica, que ahora definimos.

Si $f(x)$ es cualquier función definida para $-\pi < x \leq \pi$, entonces hay una función periódica $\tilde{f}(x)$ de periodo 2π única, conocida como la extensión periódica 2π de f , que satisface $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $-\pi < x \leq \pi$.

La gráfica de la extensión periódica de una función $f(x)$ se obtiene copiando repetidamente la parte de su gráfica entre $-\pi$ y π a intervalos adyacentes de longitud 2π . La periodicidad de \tilde{f} nos lleva a definir

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x - 2m\pi) = f(x - 2m\pi)$$

En particular, si $-\pi < x \leq \pi$, entonces $m = 0$, y por lo tanto $\tilde{f}(x) = f(x)$ para tal x .

La construcción de la extensión periódica usa el valor $f(\pi)$ en el extremo derecho y requiere $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi) = f(\pi)$. Alternativamente, se podría requerir $\tilde{f}(\pi) = \tilde{f}(-\pi) = f(-\pi)$, que, si $f(-\pi) \neq f(\pi)$, conduce a un 2π periódico ligeramente diferente extensión de la función. No hay ninguna razón a priori para preferir una sobre la otra. De hecho, como descubriremos, la extensión periódica de Fourier preferida $\tilde{f}(x)$ toma el promedio de los dos valores:

$$\tilde{f}(\pi) = \tilde{f}(-\pi) = \frac{1}{2}[f(\pi) + f(-\pi)]$$

que luego fija sus valores en los múltiplos impares de π .

Ejemplo 60 La extensión periódica de 2π de $f(x) = x$ es la función “diente de sierra” $\tilde{f}(x)$. Coincide con x entre $-\pi$ y π . Dado que $f(\pi) = \pi$, $f(-\pi) = -\pi$, la extensión de Fourier (3.41) establece $\tilde{f}(k\pi) = 0$ para cualquier entero impar k . Explícitamente,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x - 2m\pi & (2m - 1)\pi < x < (2m + 1)\pi \\ 0 & x = (2m - 1)\pi \end{cases} \quad \text{donde } m \in \mathbb{Z}$$

Con esta convención, se puede probar que la serie de Fourier (3.37) converge en todas partes a la extensión periódica $2\pi \tilde{f}(x)$. En particular,

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k} = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = \pm\pi \end{cases}$$

Incluso este ejemplo muy simple tiene consecuencias notables y no triviales. Por ejemplo, si sustituimos $x = \frac{1}{2}\pi$ en la serie anterior y dividimos por 2, obtenemos la serie de Gregory

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Si bien esta sorprendente fórmula es anterior a la teoría de Fourier (de hecho, fue descubierta por primera vez por Leibniz), una prueba directa no es fácil.

Si bien es numerológicamente fascinante, la serie de Gregory es de escaso uso práctico para calcular realmente π , ya que su tasa de convergencia es dolorosamente lenta. Es posible que el lector desee intentar sumar términos para ver qué tan lejos se necesita llegar para calcular con precisión incluso los dos primeros dígitos decimales de π . Los errores de redondeo eventualmente interferirán con cualquier intento de calcular numéricamente la suma con un grado razonable de precisión.

14.3. Funciones continuas por partes

Como veremos, todas las funciones periódicas 2π continuamente diferenciables se pueden representar como series de Fourier convergentes. De manera más general, podemos permitir funciones que tengan discontinuidades simples.

Definición:

Se dice que una función $f(x)$ es continua por partes en un intervalo $[a, b]$ si está definida y es continua, excepto posiblemente en un número finito de puntos $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$. Además, en cada punto de discontinuidad, requerimos que los límites izquierdo y derecho

$$f(x_k^-) = \lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x) \quad f(x_k^+) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x)$$

existe. (En los puntos extremos a, b , se requiere la existencia de sólo uno de los límites, a saber, $f(a^+)$ y $f(b^-)$.) Tenga en cuenta que no requerimos que $f(x)$ se defina en x_k . Incluso si se define $f(x_k)$, no necesariamente es igual al límite izquierdo o derecho. Los puntos x_k se conocen como discontinuidades de salto de $f(x)$, y la diferencia

$$\beta_k = f(x_k^+) - f(x_k^-) = \lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x)$$

entre los límites izquierdo y derecho está la magnitud del salto. Tenga en cuenta que el valor de la función en la discontinuidad, a saber, $f(x_k)$, que puede ni siquiera estar definido, no juega ningún papel en la especificación de la magnitud del salto. La magnitud del salto es positiva si la función salta hacia arriba (cuando se mueve de izquierda a derecha) en x_k y negativa si salta hacia abajo. Si la magnitud del salto desaparece, $\beta_k = 0$, los límites izquierdo y derecho concuerdan y la discontinuidad es removible, ya que redefinir $f(x_k) = f(x_k^+) = f(x_k^-)$ hace $f(x)$ continuo en $x = x_k$. Dado que las discontinuidades removibles no tienen efecto ni en la teoría ni en las aplicaciones, siempre pueden eliminarse sin penalización.

El ejemplo más simple de una función continua por partes es la función de paso unitario

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Tiene una discontinuidad de un solo salto en $x = 0$ de magnitud 1:

$$\sigma(0^+) - \sigma(0^-) = 1 - 0 = 1$$

y es continuo de hecho, localmente constante en todas partes. Si traducimos y escalamos la función escalonada, obtenemos una función

$$h(x) = \beta\sigma(x - \xi) = \begin{cases} \beta, & x > \xi \\ 0, & x < \xi \end{cases}$$

con una discontinuidad de un solo salto de magnitud β en el punto $x = \xi$.

Si $f(x)$ es cualquier función continua por partes en $[-\pi, \pi]$, entonces sus coeficientes de Fourier están bien definidos: las integrales existen y son finitas. Sin embargo, la continuidad no es suficiente para asegurar la convergencia de la serie de Fourier asociada.

Definición:

Una función $f(x)$ se llama C^1 a trozos en un intervalo $[a, b]$ si está definida, es continua y continuamente diferenciable, excepto en un número finito de puntos. definidos de todas sus derivadas hasta el orden n .

Finalmente, una función $f(x)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ es continua por partes (C^1 o C^m) siempre que sea continua en cualquier intervalo acotado. Por tanto, una función continua por partes en \mathbb{R} puede tener un número infinito de discontinuidades, pero no se permite que se acumulen en ningún punto límite finito. En particular, una función periódica de 2π , $f(x)$ es continua por partes si y solo si es continua por partes en el intervalo $[-\pi, \pi]$

14.4. El teorema de la convergencia

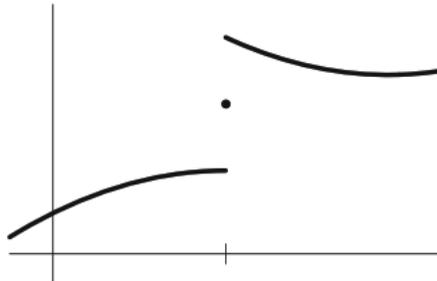
Ahora podemos enunciar el teorema de convergencia fundamental para las series de Fourier.

Teorema:

Si $f(x)$ es una función C^1 a trozos periódica de 2π , entonces, en cualquier $x \in \mathbb{R}$, su serie de Fourier converge a $\tilde{f}(x)$ si \tilde{f} es continua en x ,

$$\frac{1}{2}[\tilde{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)]$$

si x es una discontinuidad de salto.



Por tanto, la serie de Fourier converge, como se esperaba, a $\tilde{f}(x)$ en todos los puntos de continuidad. En las discontinuidades, aparentemente no puede decidir si converger al límite izquierdo o derecho, por lo que termina dividiendo la diferencia al converger a su promedio; Si redefinimos $\tilde{f}(x)$ en sus discontinuidades de salto para tener el valor límite promedio, entonces

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)]$$

una ecuación que se cumple automáticamente en todos los puntos de continuidad, entonces la serie de Fourier converge a la función C^1 periódica por partes de 2π $\tilde{f}(x)$ en todas partes.

Ejemplo:

Sea $\sigma(x)$ la función escalón unitario. Sus coeficientes de Fourier se calculan fácilmente:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1 \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx = 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \begin{cases} \frac{2}{k\pi}, & k = 2l + 1 \\ 0, & k = 2l \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier para la función escalonada es

$$\sigma \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$$

luego la serie de Fourier convergerá a su extensión periódica de 2π ,

14.5. Funciones pares e impares

Ya notamos que los coeficientes del coseno de Fourier de la función $f(x) = x$ son todos 0. Esto no es un accidente, sino más bien una consecuencia del hecho de que x es una función extraña.

Definición:

1. Se llama a una función par si

$$f(-x) = f(x).$$

2. Una función se llama impar si

$$f(-x) = -f(x)$$

Propiedades:

1. La suma, $f(x) + g(x)$, de dos funciones pares es par
2. La suma de dos funciones impares es impar.
3. El producto $f(x)g(x)$ de dos funciones pares, o de dos funciones impares, es una función par.
4. El producto de una función par y una impar es impar.
5. Si $f(x)$ es impar e integrable en el intervalo simétrico $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

6. Si $f(x)$ es par e integrable, entonces

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de las propiedades anteriores de las integrales de Fourier.

Teorema:

Si $f(x)$ es par, entonces todos sus coeficientes de seno de Fourier desaparecen, $b_k = 0$, por lo que $f(x)$ se puede representar mediante una serie de coseno de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

donde

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx dx \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

Si $f(x)$ es impar, entonces sus coeficientes de coseno de Fourier desaparecen, $a_k = 0$, y de $f(x)$ se puede representar mediante una serie de senos de Fourier.

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

donde

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx dx \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

Por el contrario, una serie de coseno de Fourier convergente siempre representa una función par, mientras que una serie de seno convergente siempre representa una función impar.

Ejemplo:

El valor absoluto $f(x) = |x|$ es una función par y, por tanto, tiene una serie de coseno de Fourier.

Los coeficientes son

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2} \right]_{x=0}^\pi = \begin{cases} 0 & 0 \neq k \\ -\frac{4}{k^2\pi} & k \end{cases}$$

por lo tanto

$$|x| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \dots \right)$$

La función más famosa en la teoría de números, y la fuente del problema más destacado en matemáticas, la hipótesis de Riemann, es la función zeta de Riemann.

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

Serie compleja de Fourier:

Un enfoque alternativo, y a menudo más conveniente, para las series de Fourier es usar exponenciales complejas en lugar de senos y cosenos. De hecho, la fórmula de Euler

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx \quad e^{-ikx} = \cos kx - i \sin kx$$

muestra cómo escribir las funciones trigonométricas

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

en términos de exponenciales complejos, por lo que podemos ir y venir fácilmente entre las dos representaciones.

Al igual que sus antecedentes trigonométricos, los exponenciales complejos también están dotados de una ortogonalidad subyacente. Pero aquí, dado que estamos tratando con el espacio vectorial de funciones con valor complejo en el intervalo $[-\pi, \pi]$, necesitamos usar el producto interno hermitiano L^2 reescalado

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

en el que la segunda función adquiere un conjugado complejo, como lo indica la barra superior. Esto es necesario para garantizar que la norma hermitiana L^2 asociada

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$$

es real y positivo para todas las funciones complejas distintas de cero: $\|f\| > 0$ cuando $f \neq 0$. La ortonormalidad de las exponenciales complejas se demuestra mediante cálculo directo

$$\langle e^{ikx}, e^{ilx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} dx = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

$$\|e^{ikx}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ikx}|^2 dx = 1$$

La serie compleja de Fourier para una función real o compleja (continua por partes) f es la serie doblemente infinita

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \dots + c_{-2} e^{-2ix} + c_{-1} e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + \dots$$

La fórmula de ortonormalidad (3.63) implica que los coeficientes de Fourier complejos se obtienen tomando los productos internos

$$c_k = \langle f, e^{ikx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Preste especial atención al signo menos que aparece en el exponencial integrado, lo que ocurre porque el segundo argumento en el producto interno hermitiano (3.61) requiere un conjugado complejo.

También encontramos que los coeficientes de Fourier reales y complejos están relacionados por

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

Ejemplo:

Encontremos la serie de Fourier para la función exponencial e^{ax} . Es mucho más fácil evaluar las integrales para los coeficientes complejos de Fourier, por lo que

$$\begin{aligned} c_k &= \langle e^{ax}, e^{ikx} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-ik)x} dx \\ &= \frac{e^{(a-ik)x}}{2\pi(a-ik)} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{(a-ik)\pi} - e^{-(a-ik)\pi}}{2\pi(a-ik)} \\ &= (-1)^k \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2\pi(a-ik)} \\ &= \frac{(-1)^2 (a+ik) \sinh a\pi}{\pi(a^2+k^2)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier deseada es

$$e^{ax} \sim \frac{\sinh a\pi}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k (a+ik)}{a^2+k^2} e^{ikx}$$

14.6. Diferenciación e integración

Bajo hipótesis apropiadas, si una serie de funciones converge, entonces se podrá integrar o diferenciar término por término, y la serie resultante debería converger a la integral o derivada de la suma original. Por ejemplo, integración y diferenciación de series de potencias siempre es válida dentro del rango de convergencia y se usa ampliamente en la construcción de soluciones en serie de ecuaciones diferenciales, series para integrales de funciones no elementales.

La convergencia de las series de Fourier es considerablemente más delicada, por lo que se debe tener el debido cuidado al diferenciar o integrar. Sin embargo, en situaciones favorables, ambas operaciones conducen a resultados válidos y son bastante útiles para construir series de Fourier de funciones más complejas.

Integración de la serie Fourier La integración es una operación de suavizado: la función integrada es siempre mejor que la original. Por tanto, deberíamos anticiparnos a poder integrar series de Fourier sin dificultad. Sin embargo, existe una complicación: la integral de una función periódica no es necesariamente periódica. El ejemplo más simple es la función constante 1, que ciertamente es periódica, pero su integral, a saber, x , no lo es. Por otro lado, las integrales de todas las demás funciones de seno y coseno periódicas que aparecen en la serie de Fourier son periódicas. Por lo tanto, solo el término constante

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

podría causarnos dificultades cuando intentamos integrar una serie de Fourier. Tenga en cuenta que es la media, o promedio, de la función $f(x)$ sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$, por lo que una función no tiene un término constante en su serie de Fourier, es decir, $a_0 = 0$, si y solo si tiene una media de cero. Se muestra fácilmente, que las funciones de media cero son precisamente las que permanecen periódicas tras la integración. En particular, implica que todas las funciones impares tienen automáticamente una media cero y, por tanto, tienen integrales periódicas.

En consecuencia si $f(x)$ es 2π periódica, entonces su integral $g(x) = \int_0^x f(y) dy$ es 2π periódica si y solo si $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ de modo que f tiene una media de cero en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

En vista de la fórmula de integración elemental

$$\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k}, \quad \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k}$$

La integración temporal de una serie de Fourier sin término constante es sencilla. Si f es continua por partes y tiene una media de cero en el intervalo $[-\pi, \pi]$, entonces su serie de Fourier

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

se puede integrar término por término, para producir la serie de Fourier

$$g(x) = \int_0^x f(y) dy \sim m + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx \right]$$

el termino constante

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$$

es la media de la función integrada. La función $f(x) = x$ es impar, por lo que tiene una media de cero: $\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$. Integremos su serie Fourier

$$x \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx$$

que encontramos en un ejemplo anterior. El resultado es la serie de Fourier

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &\sim \frac{\pi^2}{6} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cos kx \\ &\sim \frac{\pi^2}{6} - 2\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} - \frac{\cos 4x}{16} + \dots\right) \end{aligned}$$

cuyo término constante es la media del lado izquierdo:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

Repasemos la derivación de la serie integrada de Fourier desde un punto de vista ligeramente diferente. Si integramos cada sumando trigonométrico en una serie de Fourier de 0 a x , obtendríamos

$$\int_0^x \cos ky \, dy = \frac{\sin kx}{k} \quad \text{cuando} \quad \int_0^x \sin ky \, dy = \frac{1}{k} - \frac{\cos kx}{k}$$

Los términos $1/k$ adicionales que provienen de las integrales sinusoidales definidas no aparecieron explícitamente en nuestra expresión anterior para la serie de Fourier integrada, por lo que deben ocultarse en el término constante m . Deducimos que el valor medio de la función integrada puede ser calculado usando los coeficientes del seno de Fourier de f mediante la fórmula

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$$

Por ejemplo, la integración de ambos lados de la serie de Fourier (3.73) para $f(x) = x$ de 0 a x produce

$$\frac{x^2}{2} \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} (1 - \cos kx)$$

Los términos constantes se suman para producir el valor medio de la función integrada:

$$2\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots\right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

que reproduce una fórmula establecida en uno de los ejercicios anteriores.

De manera más general, si $f(x)$ no tiene media cero, su serie de Fourier contiene un término constante distinto de cero,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

en este caso, el resultado de la integración será

$$g(x) = \int_0^x f(y) dy \sim \frac{a_0}{2}x + m + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx\right]$$

La diferenciación tiene el efecto contrario: empeora una función. Por lo tanto, para justificar la derivada de una serie de Fourier, necesitamos saber que la función derivada sigue siendo razonablemente buena. Dado que necesitamos que la derivada $f'(x)$ sea C^1 a trozos para la convergencia, requerimos que $f(x)$ sea continua y C^2 por partes.

Si $f(x)$ es C^2 a trozos y una extensión periódica continua de 2π , entonces su serie de Fourier se puede diferenciar término por término, para producir la serie de Fourier para su derivada.

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} [kb_k \cos kx - ka_k \sin kx] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikx}$$

Ejemplo:

La derivada de la función de valor absoluto $f(x) = |x|$ es la función signo:

$$\frac{d}{dx}|x| = \text{sign}x = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Por tanto, si diferenciamos su serie de Fourier (3.55), obtenemos la serie de Fourier

$$\text{sign}x \sim \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right)$$

Otros contenidos a desarrollar son: Serie de Fourier, Transformadas de Fourier, Transformada de Fourier inversa, Derivada e Integrales, Funciones y convolución de Green, Circunvolución, La transformada de Fourier en el espacio de Hilbert y Principio de Heisenberg.

14.7. Transformadas de Fourier

Las series de Fourier y similares están diseñadas para resolver problemas de valores límite en intervalos acotados. La extensión del cálculo de Fourier a toda la línea real conduce naturalmente a la transformada de Fourier, una poderosa herramienta matemática para el análisis de funciones aperiódicas.

La transformada de Fourier es de fundamental importancia en una gama notablemente amplia de aplicaciones, que incluyen ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias, probabilidad, mecánica cuántica, procesamiento de señales e imágenes y teoría de control, por nombrar solo algunas.

En este capítulo, motivamos la construcción investigando cómo se comportan las series de Fourier (reescaladas) a medida que la longitud del intervalo llega al infinito. La transformada de Fourier resultante mapea una función definida en el espacio físico con una función definida en el espacio

de frecuencias, cuyos valores cuantifican la cantidad de cada frecuencia periódica contenida en la función original.

La transformada de Fourier inversa luego reconstruye la función original a partir de sus componentes de frecuencia transformados. Las integrales que definen la transformada de Fourier y su inversa son, sorprendentemente, casi idénticas, y esta simetría a menudo se explota, por ejemplo, al ensamblar tablas de transformadas de Fourier.

Una de las propiedades más importantes de la transformada de Fourier es que convierte el cálculo (diferenciación e integración) en álgebra (multiplicación y división). Esto subyace a su aplicación a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y, en los siguientes capítulos, ecuaciones diferenciales parciales. En aplicaciones de ingeniería, la transformada de Fourier a veces se ve eclipsada por la transformada de Laplace, que es un subcaso particular. La transformada de Fourier se utiliza para analizar problemas de valor límite en toda la línea. La transformada de Laplace es más adecuada para resolver problemas de valores iniciales, [23], pero no se desarrollará en este texto.

La transformada de Fourier es, como la serie de Fourier, completamente compatible con el cálculo de funciones generalizadas, [68]. La sección final contiene una breve introducción a la analítica fundamentos de la asignatura, incluidos los fundamentos del espacio de Hilbert. Sin embargo, un desarrollo completo y riguroso requiere herramientas analíticas más poderosas, incluido el análisis integral y complejo de Lebesgue, por lo que se remite al lector interesado a textos más avanzados, incluidos [37, 68, 98, 117].

Comenzamos motivando la transformada de Fourier como un caso límite de la serie de Fourier. Aunque los detalles rigurosos son sutiles, la idea subyacente se puede explicar sin rodeos. Sea $f(x)$ una función definida para todo $-\infty < x < \infty$. El objetivo es construir una expansión de Fourier para $f(x)$ en términos de funciones trigonométricas básicas. Un enfoque evidente es construir su serie de Fourier en intervalos cada vez más largos, y luego tomar el límite a medida que sus longitudes llegan al infinito. Este proceso de limitación convierte las sumas de Fourier en integrales, y la representación resultante de una función pasa a llamarse transformada de Fourier.

Dado que se trata de un intervalo infinito, ya no hay requisitos de periodicidad en la función $f(x)$. Además, las frecuencias representadas en la transformada de Fourier ya no están limitadas por la longitud del intervalo, por lo que estamos descomponiendo efectivamente una función aperiódica bastante general en una superposición continua de funciones trigonométricas de todas las frecuencias posibles.

Presentemos los detalles de una forma más concreta. Los cálculos serán significativamente más simples si trabajamos con la versión compleja de la serie de Fourier desde el principio. Nuestro punto de partida es la serie de Fourier reescalada (3.86) en un intervalo simétrico $[-\ell, \ell]$ de longitud 2ℓ , que reescribimos en la forma adaptada

$$f(x) \sim \sum_{v=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\hat{f}_\ell(k_v)}{\ell} e^{ik_v x} \quad (126)$$

La suma está por encima de la colección discreta de frecuencias.

$$k_v = \frac{\pi v}{\ell}, \quad v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (127)$$

correspondiente a aquellas funciones trigonométricas que tienen período 2ℓ . Por razones que pronto se harán evidentes, los coeficientes de Fourier de f ahora se denotan como

$$c_v \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-ik_v x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\hat{f}_\ell(k_v)}{\ell} \quad (128)$$

así que eso

$$\hat{f}_\ell(k_v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-ik_v x} dx \quad (129)$$

Esta reformulación de la fórmula básica de la serie de Fourier nos permite pasar fácilmente al límite cuando la longitud del intervalo $\ell \rightarrow \infty$.

En un intervalo de longitud 2 , las frecuencias (7.2) necesarias para representar una función en forma de serie de Fourier están distribuidas equitativamente, con espaciado entre frecuencias

$$\Delta k = k_{v+1} - k_v = \frac{\pi}{\ell}$$

Cuando $\ell \rightarrow \infty$, el espaciado $\Delta k \rightarrow 0$, por lo que las frecuencias relevantes se empaquetan cada vez más densamente en la línea $-\infty < k < \infty$. En el límite, anticipamos que todas las frecuencias posibles estarán representadas. De hecho, si $k_v = k$ sea arbitrario en (7.4) y enviando $\ell \rightarrow \infty$, se obtiene la integral infinita

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (130)$$

conocida como la transformada de Fourier de la función $f(x)$. Si $f(x)$ es una función suficientemente agradable, por ejemplo, continua a trozos y decayendo a 0 razonablemente rápido como $|x| \rightarrow \infty$, su transformada de Fourier $\hat{f}(k)$ se define para todas las frecuencias posibles $k \in \mathbb{R}$. La fórmula anterior a veces se abrevia convenientemente como

$$\hat{f}(k) = F[f(x)] \quad (131)$$

donde F es el operador de la transformada de Fourier, que asigna cada función (suficientemente buena) de la variable espacial x a una función de la variable de frecuencia k . Para reconstruir la función a partir de su transformada de Fourier, aplicamos un procedimiento de limitación similar a la serie de Fourier (7.1), que primero reescribimos en una forma más sugerente

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \hat{f}_\ell(k_v) e^{ik_v x} \Delta k \quad (132)$$

usando (7.5). Para cada valor fijo de x , el lado derecho tiene la forma de una suma de Riemann que se aproxima a la integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_\ell(k) e^{ikx} dk$$

Como $\ell \rightarrow \infty$, las funciones (7.4) convergen a la transformada de Fourier: $\hat{f}_\ell(k) \rightarrow \hat{f}(k)$; además, el espaciado entre frecuencias $\Delta k = \pi/\ell \rightarrow 0$, por lo que se espera que las sumas de Riemann converjan a la integral límite

$$f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$$

La fórmula resultante sirve para definir la transformada de Fourier inversa, que se utiliza para recuperar la señal original de su transformada de Fourier. De esta manera, la serie de Fourier se ha convertido en una integral de Fourier que reconstruye la función $f(x)$ como una superposición (continua) de exponenciales complejas e^{ikx} de todas las frecuencias posibles, con $\hat{f}(k)/\sqrt{2\pi}$ cuantificando la cantidad aportada por el exponencial complejo de frecuencia k . En forma abreviada, la fórmula (7.9) se puede escribir

$$f(x) = F^{-1}[\hat{f}(k)] \quad (133)$$

definiendo así la inversa del operador de la transformada de Fourier (7.7). Vale la pena señalar que tanto la transformada de Fourier (7.7) como su inversa (7.10) definen operadores lineales en el espacio funcional. Esto significa que la transformada de Fourier de la suma de dos funciones es la suma de sus transformadas individuales, mientras que multiplicar una función por una constante multiplica su transformada de Fourier por el mismo factor:

$$F[f(x) + g(x)] = F[f(x)] + F[g(x)] = \hat{f}(k) + \hat{g}(k)$$

$$F[cf(x)] = cF[f(x)] = c\hat{f}(k)$$

Una afirmación similar es válida para la transformada de Fourier inversa F^{-1} . Recapitulando, dejando que la longitud del intervalo vaya a ∞ , la serie discreta de Fourier se ha convertido en una integral de Fourier continua, mientras que los coeficientes de Fourier, que se definieron sólo en una

colección discreta de frecuencias posibles, se han convertido en una función completa $f(k)$ de finido en todo el espacio de frecuencias. La reconstrucción de $f(x)$ a partir de su transformada de Fourier $f(k)$ a través de (7.9) puede justificarse rigurosamente bajo hipótesis adecuadas.

Por ejemplo, si $f(x)$ es C^1 a trozos en todo \mathbb{R} y decae razonablemente rápido, $f(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, de modo que su integral de Fourier (7.6) converja absolutamente, entonces se puede demostrar, [37, 117], que la integral de Fourier inversa (7.9) convergerá a $f(x)$ en todos los puntos de continuidad, y al punto medio

$$1/2(f(x-) + f(x+))$$

en discontinuidades de salto, como una serie de Fourier. En particular, su transformada de Fourier $f(k) \rightarrow 0$ también debe decaer cuando $|k| \rightarrow \infty$, lo que implica que (como con las series de Fourier) los modos de frecuencia muy alta hacen contribuciones insignificantes a la

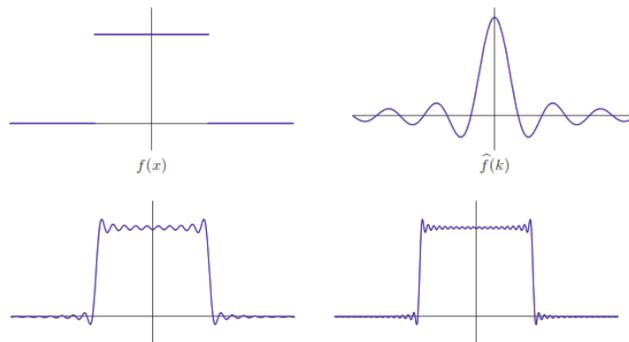


Figura 7.1. Transformada de Fourier de un pulso rectangular

reconstrucción de dicha señal. En el teorema 7.15 siguiente se formulará un resultado más preciso.

Ejemplo 61 La transformada de Fourier del pulso rectangular

$$f(x) = \sigma(x+a) - \sigma(x-a) = \begin{cases} 1, & -a < x < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (134)$$

de ancho $2a$, se calcula fácilmente:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{\sqrt{2\pi}ik} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ak}{k} \quad (135)$$

Por otro lado, la reconstrucción del pulso mediante la transformada inversa (7.9) nos dice que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ika} - \sin ak}{k} dk = f(x) \begin{cases} 1, & -a < x < a \\ \frac{1}{2}, & x = \pm a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (136)$$

Note la convergencia al medio de las discontinuidades del salto en $x = \pm a$.

La parte real de esta integral compleja produce una sorprendente identidad integral trigonométrica:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ika} - \sin ak}{k} dk = \begin{cases} 1, & -a < x < a \\ \frac{1}{2}, & x = \pm a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (137)$$

Así como muchas series de Fourier producen fórmulas de suma no triviales, la reconstrucción de una función a partir de su transformada de Fourier a menudo conduce a fórmulas de integración no triviales.

No se puede calcular la integral (7.14) mediante el Teorema fundamental del cálculo, ya que no existe una función elemental cuya derivada sea igual al integrando. En la figura 7.1 mostramos la función de caja con $a = 1$, su transformada de Fourier, junto con una reconstrucción obtenida mediante la integración numérica (7.15).

Dado que estamos tratando con una integral infinita, debemos romper el integrador numérico restringiéndolo a un intervalo finito. El primer gráfico de la segunda fila se obtiene integrando de $5 \leq k \leq 5$, mientras que el segundo es de $-10 \leq k \leq 10$. La convergencia no uniforme de la integral conduce a la aparición de un fenómeno de Gibbs en las dos discontinuidades, similar a lo que observamos en la convergencia no uniforme de una serie de Fourier. Por otro lado, la identidad resultante de la parte imaginaria,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx \sin ak}{k} dx = 0$$

es, en la superficie, no sorprendente, porque el integrando es impar. Sin embargo, está lejos de ser obvio que cualquiera de las integrales converja; de hecho, la amplitud del integrando oscilatorio decae como $1/|k|$, pero la última función no tiene una integral convergente, por lo que la prueba de comparación habitual para integrales infinitas, [8, 97], no se aplica. Su convergencia es marginal en el mejor de los casos, y las oscilaciones trigonométricas de alguna manera logran mejorar la lenta tasa de desintegración de $1/k$.

Ejemplo 62 Considere un pulso diestro que decae exponencialmente

$$f_r(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

donde $a > 0$. Calculamos su transformada de Fourier directamente a partir de la definición:

$$\hat{f}_r(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-ikx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(a+ik)x}}{a+ik} \Big|_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+ik)}$$

Como en el ejemplo anterior, la transformada de Fourier inversa produce una identidad integral no trivial:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{a+ik} dx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x=0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (138)$$

Del mismo modo, un pulso que decae hacia la izquierda,

$$f_t(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

donde $a > 0$ sigue siendo positivo, tiene transformada de Fourier

$$\hat{f}_t(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a-ik)}$$

Esto también se sigue del hecho general de que la transformada de Fourier de $f(x)$ es $f(k)$; consulte el ejercicio 7.1.10. El pulso incluso exponencialmente decadente

$$f_e(x) = e^{-a|x|} \quad (139)$$

es simplemente la suma de los pulsos izquierdo y derecho: $f = f_r + f_l$. Así, por linealidad,

$$\hat{f}_e(k) = \hat{f}_r(k) + \hat{f}_l(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+ik)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a-ik)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k^2 + a^2}$$

La transformada de Fourier resultante es real e incluso porque $f_e(x)$ es una función par de valor real; consulte el ejercicio 7.1.12. La transformada de Fourier inversa (7.9) produce otra no trivial identidad integral:

$$e^{-a|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ae^{ikx}}{k^2 + a^2} dx = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + a^2} dx$$

(La parte imaginaria de la integral se desvanece, porque su integrando es impar.) Por otro lado mano, el extraño pulso que decae exponencialmente,

$$f_o(x) = (\text{sign} x) e^{-a|x|} = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ -e^{ax}, & x < 0 \end{cases}$$

es la diferencia de los pulsos derecho e izquierdo, $f_o = f_r - f_l$, y tiene transformada de Fourier puramente imaginaria e impar

$$\hat{f}_o(k) = \hat{f}_r(k) - \hat{f}_l(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+ik)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a-ik)} = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k}{k^2 + a^2} \quad (140)$$

La transformada inversa es

$$(\text{sin} x) e^{-a|x|} = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{ikx}}{k^2 + a^2} dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^2 + a^2} dk$$

Como ejemplo final, considere la función racional

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a > 0$$

Su transformada de Fourier requiere integrar

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + a^2} dx$$

La integral indefinida (anti-derivada) no aparece en las tablas de integración básica y, en de hecho, no se puede hacer en términos de funciones elementales. Sin embargo, nos las hemos arreglado para evaluar esta integral en particular! Mira (7.22). Si cambiamos x a k y k a x , entonces nosotros recuperar exactamente la integral (7.27) hasta un factor de a $2/\pi$. Concluimos que el Fourier transformada de (7.26) es

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2^{-a|k|}}{a} \quad (141)$$

Este último ejemplo es indicativo de un hecho general importante. Sin duda, el lector ya ha notado la notable similitud entre la transformada de Fourier (7,6) y su inversa (7,9). De hecho, la única diferencia es que el primero tiene un signo menos en la exponencial. Esto implica el siguiente principio de simetría que relaciona las transformadas de Fourier directa e inversa.

Si la transformada de Fourier de la función $f(x)$ es $\hat{f}(k)$, entonces la transformada de Fourier de $\hat{f}(x)$ es $f(-k)$. El principio de simetría nos permite reducir a la mitad la tabulación de las transformadas de Fourier. Por ejemplo, volviendo al ejemplo 7.1, deducimos que la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}$$

es

$$\begin{aligned} f(k) &= \sigma(-k+a) - \sigma(-k-a) \\ &= \sigma(k+a) - \sigma(k-a) \\ &= \begin{cases} 1 & -a < k < a \\ \frac{1}{2} & k = \pm a \\ 0 & |k| > a \end{cases} \end{aligned} \quad (142)$$

Tenga en cuenta que, por linealidad, podemos dividir tanto $f(x)$ como $\hat{f}(k)$ por $\sqrt{2/\pi}$ para deducir la transformada de Fourier de $\frac{\sin ax}{x}$

Advertencia: algunos autores omiten el factor $\sqrt{2\pi}$ en la definición (7.6) de la transformada de Fourier $f(k)$. Esta convención alternativa tiene una ligera ventaja de eliminar muchos factores $\sqrt{2\pi}$

en las expresiones de la transformada de Fourier. Sin embargo, esto requiere un factor adicional de este tipo en la fórmula de reconstrucción (7.9), que se logra reemplazando $\sqrt{2\pi}$ por 2π . Una desventaja importante es que las fórmulas resultantes para la transformada de Fourier y su inversa son menos similares, por lo que el principio de simetría del teorema 7.3 requiere algunas modificaciones. (Por otro lado, la convolución, que se analizará a continuación, es un poco más fácil sin el factor adicional). En el ejercicio 7.1.18 se puede encontrar otra convención más reciente. Al consultar cualquier referencia en particular, el lector siempre debe verificar qué versión de la transformada de Fourier se está utilizando.

Todas las funciones del ejemplo 7.2 requerían $a > 0$ para que las integrales de Fourier convergan.

Las funciones que emergen en el límite cuando a va a 0 son de especial interés. Comencemos con el pulso exponencial impar (7.23). Cuando $a \rightarrow 0$, la función $f_o(x)$ converge a la función de signo

$$f(x) = \text{sign}x = \sigma(x) - \sigma(-x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (143)$$

Tomar el límite de la transformada de Fourier (7.24) conduce a

$$f(k) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \quad (144)$$

La singularidad no integrable de $f(k)$ en $k = 0$ es indicativa del hecho de que la función de signo no decae cuando $|x| \rightarrow \infty$. En este caso, ni la integral de la transformada de Fourier ni su inversa están bien definidas como integrales estándar (de Riemann o incluso de Lebesgue). Sin embargo, es posible justificar rigurosamente estos resultados en el marco de funciones generalizadas.

Más interesantes son las funciones de pulso par $f_e(x)$, que, en el límite $a \rightarrow 0$, se convierten en la función constante

$$f(x) \equiv 1 \quad (145)$$

El límite de la transformada de Fourier (7.21) es

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2a}{k^2 + a^2} = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ \infty, & k=0 \end{cases} \quad (146)$$

Este comportamiento limitante debería recordarle al lector nuestra construcción (6.10) del delta función como el límite de las funciones

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{\pi(a^2x^2)}$$

Comparando con (7.33), concluimos que la transformada de Fourier de la función constante (7.32) es un múltiplo de la función delta en la variable de frecuencia:

$$\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi}\delta(k)$$

La integral de transformación directa

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx$$

estrictamente hablando, no está definido, porque las integrales infinitas del seno oscilatorio y las funciones de coseno no convergen! Sin embargo, esta identidad se puede interpretar válidamente dentro de el marco de convergencia débil y funciones generalizadas. Por otro lado, fórmula de transformada inversa (7.9) produce

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k)e^{ikx} dx = e^{ik0} = 1$$

que está de acuerdo con la definición básica (6.16) de la función delta. Como en el anterior caso, la singularidad de la función delta en $k = 0$ manifiesta la falta de decaimiento de la constante función.

Por el contrario, la función delta $\delta(k)$ tiene transformada de Fourier constante

$$\hat{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ik0}}{\sqrt{2\pi}} \equiv \frac{1}{2\pi}$$

un resultado que también se sigue del principio de simetría del teorema 7.3. Para determinar la transformada de Fourier de un pico delta $\delta_\xi(x) = \delta(x-\xi)$ concentrado en la posición $x = \xi$, calculamos

$$\hat{\delta}_\xi(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi)e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ik\xi}}{\sqrt{2\pi}}$$

El resultado es un exponencial puro en el espacio de frecuencias. Aplicar la transformada de Fourier inversa (7.9) conduce, al menos en un nivel formal, a la notable identidad

$$\delta_\xi(x) = \delta(x-\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx(x-\xi)} dx = \frac{1}{2\pi} \langle e^{ikx}, e^{ik\xi} \rangle \quad (147)$$

Producto interno hermitiano de funciones de valor complejo de $k \in \mathbb{R}$. Dado que la función delta desaparece para x donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota $L^2 = \xi$, esta identidad nos dice que las exponenciales completas de frecuencias diferentes son mutuamente ortogonales. Sin embargo, al igual que con (7.35), esto sólo tiene sentido dentro del lenguaje de funciones generalizadas. Por otro lado, multiplicar ambos lados de (7.38) por $f(\xi)$ y luego integrar con respecto a ξ produce

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{ik(x-\xi)} dx dk \quad (148)$$

Esta es una fórmula perfectamente válida, ya que es una reformulación (o más bien una combinación) de las fórmulas básicas (7.6) y (7.9) que conectan las transformadas de Fourier directa e inversa de la función $f(x)$.

Por el contrario, el principio de simetría nos dice que la transformada de Fourier de una exponencial compleja será un pico delta desplazado $\sqrt{2\pi}\delta(k-\kappa)$, concentrado en la frecuencia $k = \kappa$. Ambos resultados son casos particulares del Teorema de cambio, cuyo enunciado dice:

Si $f(x)$ tiene la transformada de Fourier $f(k)$, entonces la transformada de Fourier de la función desplazada $f(x\xi)$ es $e^{-ik\xi}f(k)$. De manera similar, la transformada de la función producto $e^{i\kappa x}f(x)$, para κ real, es la transformada desplazada $\hat{f}(k - \kappa)$.

De manera similar, el teorema de la dilatación da el efecto de una transformación de escala en la transformada de Fourier.

Ejemplo 63 *Determinemos la transformada de Fourier de la función gaussiana $g(x) = e^{-x^2}$. Para evaluar su integral de Fourier, primero completamos el cuadrado del exponente:*

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 - ikx/2) - k^2/4} dx \\ &= \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

La penúltima igualdad empleó el cambio de variables $y = x - 1/2ik$, mientras que el paso final utilizó la fórmula (2.100).

De manera más general, para encontrar la transformada de Fourier de $g_a(x) = e^{-ax^2}$, donde $a > 0$, invocamos el Teorema de dilatación 7.5 con $c = \sqrt{a}$ para deducir que $g_a(k) = e^{-k^2/(4a)}/\sqrt{2a}$. Dado que la transformada de Fourier asocia de manera única una función $f(k)$ en el espacio de frecuencias con cada función (razonable) $f(x)$ en el espacio físico, se pueden caracterizar las funciones por sus transformadas. Muchas aplicaciones prácticas se basan en tablas (o, mejor aún, en computadoras sistemas de álgebra como Mathematica y Maple) que reconocen una amplia variedad de transformaciones de funciones básicas de importancia en aplicaciones. La tabla adjunta enumera algunos de los ejemplos más importantes de funciones y sus transformadas de Fourier, basados en nuestra convención (7.6).

Tenga en cuenta que, al aplicar el principio de simetría del teorema 7.3, cada entrada se puede usar para deducir dos transformadas de Fourier diferentes. En [82] se puede encontrar una colección más extensa de transformadas de Fourier.

14.8. Derivadas e Integrales

Una de las características más significativas de la transformada de Fourier es que convierte el cálculo en álgebra! Más específicamente, las dos operaciones básicas en cálculo: diferenciación y integración de funciones - se realizan como operaciones algebraicas en sus transformadas de Fourier. (La desventaja es que las operaciones algebraicas se vuelven más complicadas en la frecuencia dominio.)

Comencemos con las derivadas. Si diferenciamos la transformada de Fourier inversa básica fórmula

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dx$$

con respecto a x , obtenemos

$$f'(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ik\hat{f}(k)e^{ikx} dx$$

La integral resultante tiene la forma de una transformada de Fourier inversa, a saber, de $ikf(k)$, que inmediatamente implica el siguiente resultado clave.

La transformada de Fourier de la derivada $f'(x)$ de una función se obtiene multiplicando su transformada de Fourier por ik :

$$F[f'(x)] = ik\hat{f}(k) \tag{149}$$

De manera similar, la transformada de Fourier de la función producto $xf(x)$ se obtiene diferenciando la transformada de Fourier de $f(x)$:

$$F[xf(x)] = i\frac{df}{dk} \tag{150}$$

El segundo enunciado se sigue fácilmente del primero a través del principio de simetría del teorema 7.3. Si bien el resultado se establece para funciones ordinarias, como se señaló anteriormente, la transformada de Fourier, al igual que la serie de Fourier, es totalmente compatible con el cálculo de funciones generalizadas.

Ejemplo 64 La derivada del pulso incluso exponencial $f_e(x) = e^{-a|x|}$ es un múltiplo del impulso exponencial impar $f_o(x) = (\text{sign } x)e^{-ax}$

$$f_e'(x) = -a(\text{sign } x)e^{-a|x|} = -af_o(x)$$

La proposición anterior dice que sus transformadas de Fourier están relacionadas por

$$ik\hat{f}_e(k) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ka}{k^2 + a^2} P - a\hat{f}_o(k)$$

como se señaló anteriormente en (7.21, 24). Por otro lado, el pulso exponencial impar tiene un salto discontinuidad de magnitud 2 en $x = 0$, por lo que su derivada contiene una función delta:

$$f'_o(x) = -ae^{-a|x|} + 2\delta(x) = -af_e(x) + 2\delta(x)$$

Esto se refleja en la relación entre sus transformadas de Fourier. Si multiplicamos (7.24) por ik , obtenemos

$$ik\hat{f}_o(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k^2}{k^2 + a^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^2}{k^2 + a^2} = 2\hat{\delta}(k) - a\hat{f}_e(k)$$

Las derivadas de orden superior se manejan iterando la fórmula de primer orden (7.43).

Corolario: La transformada de Fourier de $f^{(n)}(x)$ es $(ik)^n \hat{f}(k)$.

La integración es la operación inversa a la diferenciación, por lo que debería corresponder a la división por ik en el espacio de frecuencias. Como ocurre con las series de Fourier, esto no es del todo correcto; hay una constante adicional involucrada, que aporta una función delta adicional.

De acuerdo a la proposición siguiente, si $f(x)$ tiene transformada de Fourier de su integral $\hat{f}(k)$ luego la transformada de Fourier de su integral $g(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$ es

$$\hat{g}(k) = -\frac{i}{k} \hat{f}(k) + \pi \hat{f}(0) \delta(k) \quad (151)$$

Por otro lado

$$h'(x) = f(x) - \sqrt{2\pi} \hat{f}(0) \delta(x)$$

Desde $h(x) \rightarrow 0$ es $|x| \rightarrow \infty$, podemos aplicar nuestra regla de diferenciación (7.43) y concluir que

$$ik\hat{h}(k) = \hat{f}(k) - \hat{f}(0) \quad (152)$$

La combinación de (7.46) y (7.47) establece la fórmula deseada (7.45).

Ejemplo 65 La transformada de Fourier de la función tangente inversa

$$f(x) = \tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dy}{1+y^2} = \int_{-\infty}^x \frac{dy}{1+y^2} - \frac{\pi}{2}$$

se puede calcular combinando la Proposición 7.10 con (7.28, 34):

$$f(k) = \left(-\frac{i}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|k|}}{k} + \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \delta(k) \right) - \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \delta(k) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|k|}}{k}$$

La singularidad en $k = 0$ refleja la falta de desintegración de la tangente inversa cuando $|x| \rightarrow \infty$.

14.9. Funciones y convolución de Green

El hecho de que la transformada de Fourier convierta la diferenciación en el dominio físico en la multiplicación en el dominio de la frecuencia es una de sus características más convincentes. Una consecuencia importante es que transforma eficazmente ecuaciones diferenciales en algebraicas ecuaciones y, por lo tanto, facilita su solución mediante álgebra elemental. Uno comienza aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación diferencial en consideración. Resolver la ecuación algebraica resultante producirá una fórmula para la transformada de Fourier de la solución deseada, que luego se puede reconstruir inmediatamente a través de la inversa de Fourier

14.10. Solución de problemas de valores en la frontera

La transformada de Fourier está particularmente bien adaptada a los problemas de valores de frontera en el línea real completa. En lugar de las condiciones de contorno utilizadas en intervalos finitos, buscamos soluciones que decaigan a cero con la suficiente rapidez como $|x| \rightarrow \infty$ para que su transformada de Fourier esté bien definida (en el contexto de funciones ordinarias). En mecánica cuántica, [66, 72], estas soluciones se conocen como estados ligados y corresponden a sub atómicas partículas que están atrapadas o localizadas en una región del espacio. Por ejemplo, los electrones en un átomo son estados ligados localizados por la atracción electrostática del núcleo.

Como ejemplo específico, considere el problema del valor en la frontera

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + \omega^2 u = h(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (153)$$

donde $\omega > 0$ es una constante positiva. Las condiciones de contorno requieren que la solución decaimiento: $u(x) \rightarrow 0$, como $|x| \rightarrow \infty$. Resolveremos este problema aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación diferencial. Teniendo en cuenta el Corolario 7.9, el resultado es la ecuación algebraica lineal

$$k^2 \hat{u}(k) + \omega^2 \hat{u}(k) = \hat{h}(k)$$

relacionando las transformadas de Fourier de u y h . A diferencia de la ecuación diferencial, la ecuación transformada se puede resolver inmediatamente para

$$\hat{u}(k) = \frac{\hat{h}(k)}{k^2 + \omega^2}$$

Por lo tanto, podemos reconstruir la solución aplicando la fórmula de la transformada de Fourier inversa (7.9):

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{h}(k) e^{ikx}}{k^2 + \omega^2} dk$$

Por ejemplo, si la función de fuerza es un pulso exponencial par,

$$h(x) = e^{-|x|} \quad \text{con} \quad \hat{h}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2 + 1}$$

luego (7.50) escribe la solución como una integral de Fourier:

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(k^2 + \omega^2)(k^2 + 1)} dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{(k^2 + \omega^2)(k^2 + 1)} dk$$

donde notamos que la parte imaginaria de la integral compleja se desvanece porque la integral es una función extraña. (De hecho, si la función de forzamiento es real, la solución también debe ser real.) La integral de Fourier se puede evaluar explícitamente usando fracciones parciales para reescribir

$$\hat{u}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(k^2 + \omega^2)(k^2 + 1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2 - 1} \left(\frac{1}{k^2 + 1} - \frac{1}{k^2 + \omega^2} \right), \omega^2 \neq 1$$

Por lo tanto, de acuerdo con nuestra tabla de transformada de Fourier, la solución a este problema de valor en la frontera es

$$u(x) = \frac{e^{-|x|} - \frac{1}{\omega} e^{-\omega|x|}}{\omega^2 - 1} \quad \text{cuando } \omega^2 \neq 1 \quad (154)$$

El lector puede querer verificar que esta función es realmente una solución, lo que significa que es dos veces continuamente diferenciable (lo que no es tan evidente de inmediato en la fórmula), decae a 0 cuando $|x| \rightarrow \infty$, y satisface la ecuación diferencial en todas partes.

Observación 4 *El método de las fracciones parciales que aprendió en el cálculo de primer año es a menudo una herramienta eficaz para evaluar las transformadas de Fourier (inversas) de tales funciones racionales.*

Un caso particularmente importante es aquel en el que la función de forzamiento

$$h(x) = \delta_\xi(x) = \delta(x - \xi)$$

representa un impulso unitario concentrado en $x = \xi$. La solución resultante es la función de Green $G(x; \xi)$ para el problema del valor en la frontera. Según (7.49), su transformada de Fourier con respecto a x es

$$\hat{G}(k; \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ik\xi}}{k^2 + \omega^2}$$

que es el producto de un factor exponencial $e^{-ik\xi}$, que representa la transformada de Fourier de $\delta\xi(x)$, por un múltiplo de la transformada de Fourier del pulso exponencial par $e^{-\omega|x|}$. Aplicamos el teorema de desplazamiento 7.4 y concluimos que la función de Green para este problema de valor de frontera es un pulso exponencial centrado en ξ , a saber

$$G(x; \xi) = \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|x-\xi|} = g(x - \xi), \quad \text{dónde } g(x) = G(x; 0) = \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|x|}$$

Observe que, al igual que con otros problemas de valores de frontera autoadjuntos, la función de Green es simétrica bajo el intercambio de x y ξ , por lo que $G(x; \xi) = G(\xi; x)$. Como función de x , satisface la ecuación diferencial homogénea $-u' + \varpi^2 u = 0$, excepto en el punto $x = \xi$, donde su derivada tiene una discontinuidad de salto de magnitud unitaria. También decae como $|x| \rightarrow \infty$, según lo requieran las condiciones de contorno. El hecho de que $G(x; \xi) = g(x; \xi)$ dependa solo de la diferencia $x - \xi$ es una consecuencia de la invariancia de traslación del problema del valor en la frontera. El principio de superposición basado en la función de Green nos dice que la solución al problema del valor en la frontera no homogéneo (7.48) bajo un forzamiento general se puede representar en la forma integral

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x; \xi) h(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \xi) h(\xi) d\xi = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega|x-\xi|} h(\xi) d\xi$$

El lector puede disfrutar recuperando la solución exponencial particular (7.51) de esta fórmula integral.

14.11. Circunvolución

En nuestra solución al problema del valor en la frontera (7.48), terminamos derivando una fórmula para su transformada de Fourier (7.49) como el producto de dos transformadas de Fourier conocidas. La fórmula final de la función de Green (7.53), obtenida aplicando la transformada de Fourier inversa, es indicativa de una propiedad general, ya que está dada por un producto de convolución.

Definición 12 *La convolución de las funciones escalares $f(x)$ y $g(x)$ es la función escalar $h = f * g$ definida por la fórmula*

$$h(x) = f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) g(\xi) d\xi \quad (155)$$

Enumeramos las propiedades básicas del producto de convolución, dejando su verificación como ejercicios para el lector. Todos estos suponen que las integrales de convolución implícitas convergen.

1. Simetría: $f * g = g * f$,
2. Bilinealidad: $\begin{cases} f*(ag+bh)=a(f*g)+b(f*h) \\ (af+bg)*h=a(f*h)+b(g*h) \end{cases}$, $a, b \in C$,
3. Asociatividad: $f * (g * h) = (f * g) * h$,
4. Función cero: $f * 0 = 0$,
5. Función delta: $f * \delta = f$

Una característica complicada es que la función constante 1 no es una unidad para el producto de convolución; Por supuesto,

$$f * 1 = 1 * f = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi$$

es una función constante, es decir, la integral total de f, y no la función original f (x). De hecho, según la propiedad final, la función delta desempeña el papel de unidad de convolución"

$$f * \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)\delta(\xi)d\xi = f(x)$$

En particular, nuestra solución (7.52) tiene la forma de un producto de convolución entre un pulso exponencial par $g(x) = (2\omega)^{-1}e^{-\omega|x|}$ y la función de forzar:

$$u(x) = g * h(x).$$

Por otro lado, su transformada de Fourier (7.49) es, hasta un factor, el multiplicativo ordinario producto

$$\hat{u}(k) = \sqrt{2\pi}\hat{g}(k)\hat{h}(k)$$

de las transformadas de Fourier de g y h . De hecho, esta es una propiedad general de la transformada de Fourier: la convolución en el dominio físico corresponde a la multiplicación en el dominio de la frecuencia y viceversa.

La transformada de Fourier de la convolución $h(x) = f * g(x)$ de dos funciones es un múltiplo del producto de sus transformadas de Fourier:

$$\hat{h}(k) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(k)\hat{g}(k)$$

Por el contrario, la transformada de Fourier de su producto $h(x) = f(x)g(x)$ es, hasta un múltiplo, la convolución de sus transformadas de Fourier:

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f} * \hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(K - k)\hat{g}(k)dk \quad (156)$$

Demostración 16 *Combinando la definición de la transformada de Fourier con la fórmula de convolución (7.54), obtenemos*

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)g(\xi)e^{-ikx} dx d\xi$$

Aplicando el cambio de variables $\eta = x - \xi$ en la integral interior produce

$$\begin{aligned} \hat{h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(\xi)e^{-ikx} d\xi d\eta \\ &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)e^{-ik\eta} d\eta \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-ik\xi} d\xi \right) \\ &= \sqrt{2\pi}\hat{f}(k)\hat{g}(k) \end{aligned}$$

probando (7.55). La segunda fórmula puede demostrarse de manera similar, o simplemente observando que se sigue directamente del principio de simetría del teorema 7.3.

Ejemplo 66 Ya sabemos, (7.29), que la transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

es la función de la caja

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}[\sigma(k+1) - \sigma(k-1)] = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & -1 < k < 1 \\ 0, & |k| > 1 \end{cases}$$

También sabemos que la transformada de Fourier de

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ es } \hat{g}(k) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sign} k$$

Por tanto, la transformada de Fourier de su producto

$$h(x) = f(x)g(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

se puede obtener por convolución.

14.12. La transformada de Fourier en el espacio de Hilbert

Si bien no poseemos todas las herramientas analíticas para embarcarnos en un tratamiento completamente riguroso de la teoría matemática subyacente a la transformada de Fourier, vale la pena esbozar algunas de las características más importantes. Ya hemos señalado que la transformada de Fourier, cuando se define, es un operador lineal, que lleva las funciones $f(x)$ en el espacio físico a funciones $f(k)$ en el espacio de frecuencias.

Una pregunta crítica es la siguiente: ¿a qué espacio funcional precisamente debería aplicarse la teoría? No todas las funciones admiten una transformada de Fourier en el sentido clásico.

Se requiere que la integral de Fourier converja, y esto impone restricciones a la función y sus asíntotas a grandes distancias.

Resulta que el escenario adecuado para la teoría rigurosa es el espacio de Hilbert de funciones cuadradas integrables con valores complejos, el mismo espacio vectorial de dimensión infinita que se encuentra en el corazón de la mecánica cuántica moderna. En la sección 3.5, ya presentamos el espacio de Hilbert $L^2[a, b]$ en un intervalo finito; aquí adaptamos la Definición 3.34 a toda la línea real. Por lo tanto, el espacio de Hilbert $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de dimensión infinita que

consiste de todas las funciones de valor complejo $f(x)$ que se definen para todo $x \in \mathbb{R}$ y tienen una norma L^2 finita:

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Por ejemplo, cualquier función continua por partes que satisfaga el criterio de disminución

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x|^{1/2+\delta}}$$

Para todas lo suficientemente grandes $|x| \gg 0$ y para algunos $M > 0$ y $\delta > 0$, pertenece a L^2 .

Sin embargo, el espacio de Hilbert contiene muchas más funciones, y las definiciones e identificaciones precisas de sus elementos son bastante sutiles. Por otro lado, la mayoría de las funciones que no decaen no pertenecen a L^2 , incluida la función constante $f(x) \equiv 1$ así como todas las exponenciales complejas oscilatorias, e^{ikx} para $k \in \mathbb{R}$. El producto interno hermitiano en el complejo espacio de Hilbert L^2 se prescribe de la manera habitual,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{g}(x) dx \quad (157)$$

de modo que $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$. La desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

asegura que la integral del producto interno sea finita siempre que $f, g \in L^2$. Observe que la transformada de Fourier (7.6) se puede considerar como un múltiplo del producto interno de la función $f(x)$ con las funciones exponenciales complejas:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f(x), e^{ikx} \rangle$$

Sin embargo, al interpretar esta fórmula, hay que tener en cuenta que las exponenciales no son en sí mismas elementos de L^2 .

Enunciemos el resultado fundamental que gobierna el efecto de la transformada de Fourier en funciones en el espacio de Hilbert. Puede considerarse como un análogo directo del Teorema 3.8 de convergencia puntual para la serie de Fourier.

Teorema 67 *Si $f(x) \in L^2$ es integrable al cuadrado, entonces su transformada de Fourier $\hat{f}(k) \in L^2$ es una función integrable al cuadrado bien definida de la variable de frecuencia k . Si $f(x)$ es continuamente diferenciable en un punto x , entonces la integral de la transformada de Fourier inversa (7.9) es igual a su valor $f(x)$. De manera más general, si existen los límites izquierdo y derecho $f(x^-), f(x^+), f(x^-), f(x^+)$, entonces la integral de la transformada de Fourier inversa converge al valor promedio $1/2 f(x^-) + f(x^+)$.*

Por tanto, la transformada de Fourier $f = F[f]$ define una transformación lineal de L^2 funciones de x a L^2 funciones de k . De hecho, la transformada de Fourier conserva los productos internos. Este importante resultado se conoce como fórmula de Parseval, cuya contraparte de la serie de Fourier apareció en (3.122).

Teorema 68 Si $\hat{f}(k) = F[f(x)]$ y $\hat{g}(k) = F[g(x)]$, luego

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \text{ i.e., } \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \hat{g}(k) dk \quad (7.63)$$

Demostración 17 Esbozemos una prueba formal que sirva para motivar por qué este resultado es válido. Usamos la definición (7.6) de la transformada de Fourier para evaluar

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)} dk - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(y)} e^{iky} dy \right) dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(y)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-y)} dk \right) dx dy \end{aligned}$$

Ahora, la integral k interna se puede reemplazar por la función delta $\delta(x - y)$, y por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(y)} \delta(x - y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Esto completa nuestra "prueba"; ver [37, 68, 117] para una versión rigurosa.

En particular, las funciones ortogonales, que satisfacen $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 0$ tendrán transformadas de Fourier ortogonales, $\langle f, g \rangle = 0$. Elegir $f = g$ en la fórmula de Parseval (7.63) produce la fórmula de Plancherel

$$\|f^2\| = \|\hat{f}\|^2$$

o explícitamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk \quad (158)$$

Así, la transformada de Fourier $F : L^2 \rightarrow L^2$ define una transformación lineal unitaria o que preserva la norma en el espacio de Hilbert, mapeando las funciones L^2 de la variable física x a las funciones L^2 de la variable de frecuencia k .

14.13. Mecánica cuántica y el principio de incertidumbre

La mecánica cuántica y el principio de incertidumbre En su forma popularizada, el principio de incertidumbre de Heisenberg es un concepto filosófico ya familiar. Formulado por primera vez en la

década de 1920 por el físico alemán Werner Heisenberg, uno de los fundadores de la mecánica cuántica moderna, afirma que, en un sistema físico, ciertas cantidades no pueden medirse simultáneamente con total precisión.

Por ejemplo, cuanto más precisamente se mide la posición de una partícula, menos precisión habrá en la medición de su momento; a la inversa, cuanto mayor sea la precisión en el impulso, menor será la certeza en su posición. Una incertidumbre similar une energía y tiempo. La verificación experimental del principio de incertidumbre se puede encontrar incluso en situaciones bastante simples. Considere un rayo de luz que pasa a través de un pequeño orificio.

La posición de los fotones está limitada por el agujero; el efecto de sus momentos se observa en el patrón de luz difusa en una pantalla colocada más allá del agujero. Cuanto más pequeño es el orificio, más restringida es la posición del fotón a su paso, por lo que, de acuerdo con el principio de incertidumbre, menos certeza hay en el momento observado y, en consecuencia, más amplia y difusa es la imagen resultante en la pantalla.

Este no es el lugar para discutir las consecuencias filosóficas y experimentales del Principio de Heisenberg. ¡Lo que mostraremos es que el principio de incertidumbre es, de hecho, una propiedad matemática de la transformada de Fourier! En la teoría cuántica, cada una de las cantidades emparejadas, por ejemplo, la posición y el momento, están interrelacionadas por la transformada de Fourier. En efecto, la proposición 7.7 dice que la transformada de Fourier del operador de diferenciación que representa momentum es un operador de multiplicación que representa la posición y viceversa. Este Fouriertransform basado dualidad entre posición e impulso, es decir, entre multiplicación y la diferenciación, se encuentra en el corazón del Principio de Incertidumbre.

En mecánica cuántica, las funciones de onda de un sistema cuántico se caracterizan como los elementos de la norma unitaria, $\varphi = 1$, que pertenecen al espacio de estados subyacente, que, en un modelo unidimensional de una sola partícula, es el espacio de Hilbert. $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ que consiste de funciones de valor complejo integrables en cuadrado de x . Como ya notamos en la sección 3.5, el módulo al cuadrado de la función de onda, $|\varphi(x)|^2$, representa la densidad de probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición x . En consecuencia, la media o el valor esperado de cualquier la función $f(x)$ de la variable de posición está dada por su integral contra la probabilidad del sistema densidad y denotado por

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\varphi(x)|^2 dx \quad (159)$$

en particular

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\varphi(x)|^2 dx \quad (160)$$

es la posición medida esperada de la partícula, mientras que Δx , definida por

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad (161)$$

es la varianza, es decir, la desviación estadística de la posición medida de la partícula de el significado. Observamos que el penúltimo término es igual a

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi(x)|^2 dx = \|x\varphi(x)\|^2$$

Por otro lado, la variable de momento p está relacionada con la transformada de Fourier frecuencia a través de la relación de De Broglie $p = \hbar k$, donde

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,055 \times 10^{-34}$$

segundos joule es la constante de Planck, cuyo valor gobierna la cuantificación de cantidades físicas. Por lo tanto, la media, o valor esperado, de cualquier función de la cantidad de movimiento $g(p)$ está dada por su integral contra el módulo al cuadrado de la función de onda transformada de Fourier:

$$\langle g(p) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\hbar k) |\hat{\varphi}(k)|^2 dk \quad (162)$$

En particular, la media de las medidas del momento de la partícula es

$$\langle p \rangle = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} k |\hat{\varphi}(k)|^2 dk = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \overline{\varphi(x)} dx = -i\hbar \langle \varphi', \varphi \rangle$$

donde usamos la fórmula de Parseval (7.63) para convertir a una integral sobre la posición, y (7.43) para inferir que $k\hat{\varphi}(k)$ es la transformada de Fourier de $-i\varphi(x)$. similar

$$(\Delta p)^2 = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

es la varianza al cuadrado de la cantidad de movimiento, donde, según la fórmula de Plancherel (7.64) y (7.43),

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\hat{\varphi}(k)|^2 dk \\ &= \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} |ik\hat{\varphi}(k)|^2 dk \\ &= \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x)|^2 dx \\ &= \hbar^2 \| \varphi'(x) \|^2 \end{aligned}$$

Con esta interpretación, se puede establecer el principio de incertidumbre para las mediciones de posición y momento.

Teorema 7.17. Si $\varphi(x)$ es una función de onda, entonces $\|\varphi\| = 1$, entonces las varianzas observadas en la posición y el momento satisfacen la desigualdad

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$$

Ahora, cuanto menor sea la varianza de una cantidad como la posición o el impulso, más precisa será su medida. Por tanto, la desigualdad de Heisenberg (7.74) cuantifica efectivamente la afirmación de que cuanto más exactamente podamos medir el impulso p , el menos precisa será cualquier medida de su posición x , y viceversa. Para más detalles, junto con las consecuencias físicas y experimentales, debe consultar una introducción texto sobre mecánica cuántica matemática, por ejemplo, [66, 72].

Demostración 18 Para cualquier valor del parámetro real t ,

$$0 \leq \|tx\varphi(x) + \varphi'(x)\|^2$$

$$-t^2 \|x\varphi(x)\|^2 + t[\langle \varphi'(x), x\varphi(x) \rangle + \langle x\varphi(x), \varphi'(x) \rangle] + \|\varphi'(x)\|^2$$

El término medio de la expresión final se puede evaluar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle \varphi'(x), x\varphi(x) \rangle + \langle x\varphi(x), \varphi'(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} [x\varphi'(x)\overline{\varphi(x)} + x\varphi(x)\overline{\varphi'(x)}] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = -1 \end{aligned}$$

mediante una integración por partes, observando que los términos de frontera desaparecen, siempre que $\varphi(x)$ satisfaga el criterio de desintegración L^2 (7.59). Por lo tanto, en vista de (7.68) y (7.73), la desigualdad en (7.75) es

$$\langle x^2 \rangle t^2 - t + \frac{\langle p^2 \rangle}{\hbar^2} \geq 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

El valor mínimo del lado izquierdo se produce en $t_* = 1/(2\langle x^2 \rangle)$, donde su valor es

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{\hbar^2} - \frac{1}{4\langle x^2 \rangle} \geq 0$$

lo que implica

$$\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \hbar^2$$

Para obtener la relación de incertidumbre (7.74), se realiza el mismo cálculo, pero con $p - \langle p \rangle$ reemplazando x y $p - \langle p \rangle$ reemplazando p . El resultado es

$$\langle (x - \langle x \rangle) \rangle t^2 - t + \frac{\langle (p - \langle p \rangle) \rangle}{\hbar^2} = (\Delta x)^2 t^2 - t + \frac{(\Delta p)^2}{\hbar^2} \geq 0 \quad (163)$$

Sustituyendo $t = 1/(2(\Delta x)^2)$ produce la desigualdad de Heisenberg.

15. Capítulo VI: Principales Ecuaciones Diferenciales Parciales

15.1. Ecuación de calor

La ecuación de calor modela una gran variedad de fenómenos. Modela no solo el proceso físico de transmisión de calor por conducción, sino también el fenómeno químico de difusión, por ejemplo, la difusión de un contaminante que reacciona con un medio líquido en movimiento en el cual se halla inmerso. Además, la ecuación de calor sirve también para modelar el movimiento browniano [Ecuación de Einstein-Kolmogorov]. Sin embargo, a lo largo de capítulo le llamaremos ecuación de calor a la ecuación asociada con todos los procesos mencionados.

Como se verá, la ecuación de calor expresa el equilibrio entre ciertas cantidades, equilibrio sustentado en el principio de conservación de energía térmica y en la ley de Fourier.

La temperatura u de un cuerpo Ω el cual ocupa una región de \mathbb{R}^3 depende de cada punto $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$ y del tiempo t , es decir, u es una función $u = u(\mathbf{x}, t)$. La forma explícita de esta función depende entre otras cosas de la forma del cuerpo, las características térmicas del material, la distribución inicial de la temperatura y las condiciones de frontera.

Para describir el flujo de calor en Ω se requiere de una función $\phi : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, es decir, se requiere de un campo vectorial (función de densidad de flujo) $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$. La ley de Fourier de conducción de calor establece que en un medio isotrópico el calor fluye en la dirección en la cual la temperatura del cuerpo decrece más rápidamente y la cantidad de calor que fluye en tal dirección es proporcional al gradiente de temperatura. En forma matemática, la ley de Fourier se expresa como

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -K(u_x, u_y, u_z) = -K\nabla u$$

donde $K > 0$, es llamada conductividad térmica y, con el fin de simplificar, se supondrá 1 "Isotropía" significa que ciertas magnitudes al medirse dan resultados idénticos independientemente de la dirección escogida constante. Sea $\partial\Omega$ la frontera de la región Ω la cual se considera una superficie suave, orientable con normal exterior \mathbf{n} . Se recuerda del curso de cálculo que el flujo de ϕ a través de $\partial\Omega$ está dado por la integral de superficie

$$\iint_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS$$

por lo que el total del flujo de ϕ a través de $\partial\Omega$ en el intervalo $[t_1, t_2]$, está dado por

$$\iint_{t_1}^{t_2} \iint_{\partial} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\phi) dV dt$$

donde la última igualdad se cumple por el teorema de la divergencia de Gauss (teorema A.1, p. 190). La densidad de energía por unidad de volumen en el tiempo t en la región Ω está dada por $c\rho u$ donde c denota el calor específico del cuerpo Ω ; ρ , la densidad de masa (ρ, c se suponen constantes) y $u = u(\mathbf{x}, t)$ es la temperatura en \mathbf{x} en el tiempo t . Por lo que la energía total en Ω en el intervalo $[t_1, t_2]$ está dada por

$$\iiint_{\Omega} c\rho u(\mathbf{x}, t_2) dV - \iiint_{\Omega} c\rho u(\mathbf{x}, t_1) dV = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt.$$

Donde para que se cumpla la igualdad se ha supuesto que u tiene derivada parcial continua con respecto a t en Ω y se ha hecho uso del teorema fundamental del cálculo para escribir

$$u(\mathbf{x}, t_2) - u(\mathbf{x}, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) dt$$

y, finalmente, se ha hecho uso del teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración. Se considera además una función escalar $f = f(\mathbf{x}, t)$ que proporciona la densidad de energía por unidad de volumen producida (o disminuida) por una fuente (o por un pozo) por lo que el total de energía producida (o reducida) por una fuente en Ω en el intervalo $[t_1, t_2]$ es

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) dV dt$$

El principio de conservación de la energía establece que la energía total en Ω en el intervalo $[t_1, t_2]$ es igual al flujo de calor a través de $\partial\Omega$, más el total de energía producida por una fuente en el mismo intervalo de tiempo, lo cual se traduce en la ecuación

$$\iiint_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt = K \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}) dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} f dV dt$$

o bien

$$\iiint_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - K \operatorname{div}(\nabla u) - f \right) dV dt = 0.$$

Esta ecuación se denomina ecuación de calor en la forma integral o forma global de la ecuación de calor. Si suponemos continuidad en el integrando sobre la región Ω y observamos que la integral se cumple sobre cualquier subregión $\Omega_B \subset \Omega$ y sobre cualquier subintervalo $[t_1, t_2]$ contenido en $[0, T]$, obtenemos la ecuación de calor en su forma diferencial o local

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = \alpha^2 \operatorname{div}(\nabla u(\mathbf{x}, t)) + F(\mathbf{x}, t)$$

donde $\alpha^2 = \frac{K}{c\rho}$ es llamada difusividad térmica y $F = f/(c\rho)$. Por último, recordando que el laplaciano de u en coordenadas cartesianas está dado por:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \operatorname{div}(\nabla u),$$

se tiene la forma equivalente de la ecuación de calor:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x}, t) = \alpha^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t)$$

Las ecuaciones (3.2) y (3.4) son casos particulares de un esquema general discutido en el Capítulo 2, el cual abarca una gran cantidad de fenómenos, físicos, químicos, etc, los cuales evolucionan con el transcurso del tiempo. En la siguiente sección analizaremos como usar los esquemas de conservación estudiados en las ecuaciones de primer orden, para modelar fenómenos de difusión.

15.1.1. Fenómenos de difusión

Conocida la ecuación (2.4) se puede deducir la ecuación de difusión. La ley constitutiva que determina el proceso de difusión es la segunda ley de difusión de Fick y es el equivalente a la ley de Fourier en el proceso de conducción de calor. Análogamente a la ley de Fourier, la ley de difusión de Fick es una ley establecida experimentalmente y describe el hecho de que las moléculas tienden a moverse de lugares con mayor concentración a lugares de menor concentración. En términos matemáticos la ley de Fick establece que el campo vectorial de flujo está dado por:

$$\phi = -k \nabla u$$

la constante $k > 0$ es llamada coeficiente de difusión. Una vez que se establece que el proceso de difusión, por ejemplo de un gas, obedece el esquema general de las leyes de conservación evolutivas, tendremos que el proceso de difusión es modelado por la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x}, t) - k \operatorname{div}(\nabla u(\mathbf{x}, t)) - f(\mathbf{x}, t) = 0$$

o bien,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x}, t) = k \Delta u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t)$$

la cual tiene la misma forma que la ecuación de calor.

15.1.2. Ecuación de calor en una dimensión

Se considera un alambre de longitud l el cual se encuentra aislado lateralmente excepto en los extremos. Se coloca el origen de coordenadas en el extremo izquierdo del alambre y el resto del alambre en la dirección positiva del eje x . Para simplificar se supone que la temperatura es constante en cada sección transversal (ver la Figura 3.1) del alambre, así la temperatura solo depende de x y no de ninguna otra variable espacial.

Sea $u = u(x, t)$ la temperatura en el punto x al instante t . Entonces la ecuación de calor (3.4) se escribe simplemente

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + F(x, t).$$

En este caso, la función F se interpreta como una fuente de calor interna, por ejemplo, una corriente eléctrica (o una reacción química en caso de la ecuación de difusión). Si no existen fuentes de calor internas, entonces $F \equiv 0$ y tendremos simplemente

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

Supóngase que en el instante $t = 0$, se conoce la temperatura en cada punto de la barra, es decir, $u(x, 0) = g(x)$, donde g es una función conocida, a esta condición se le conoce como temperatura inicial y más generalmente como condición inicial (ci).

Supongase además que se tiene algún tipo de control de la temperatura en los extremos de la barra, por ejemplo, supongase que con un termostato se regula la temperatura en los puntos $x = 0, x = l$ y que dichas temperaturas son conocidas, concretamente $u(0, t) = h_1(t)$, $u(l, t) = h_2(t)$, $t > 0$, con h_1, h_2 funciones dadas, a estas condiciones se les llama condiciones de frontera (cf). Así para encontrar la temperatura de un cuerpo hay que determinar la función incógnita $u(x, t)$ para $t > 0$ que satisface la ecuación (3.5) (o bien (3.6)) y las condiciones inicial y de frontera. Se desea entonces resolver el siguiente problema:

$$(PC) \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + F, 0 < x < l, 0 < t < \infty, \\ (ci) \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = g(x), 0 \leq x \leq l, \\ \\ \end{array} \right. \\ (cf) \left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = h_1(t) \\ u(l, t) = h_2(t), t > 0. \end{array} \right. \end{cases}$$

Generalmente, por lo menos g es continua a trozos.

15.1.3. Condiciones de frontera para la ecuación de calor

El problema de calor descrito en la sección anterior contiene algunas condiciones de frontera (cf) que pueden ocurrir, pero existen otras condiciones que surgen en diferentes situaciones físicas las cuales se describen a continuación.

1. En uno de los extremos se conoce el valor de la temperatura en cada instante t , por ejemplo

$$u(0, t) = h_1(t)$$

donde h_1 es una función dada. A este tipo de condición se le conoce como condición de frontera de tipo Dirichlet.

2. En uno de los extremos se da el valor de la derivada normal de u , por ejemplo

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = h_2(t)$$

donde h_2 es una función dada. A este tipo de condiciones se les conoce como condiciones de frontera de tipo Neumann.

3. En uno de los extremos está dada una relación entre u y su derivada, por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -ku(l, t) + f_1(t)$$

esta situación corresponde a un intercambio térmico entre un cuerpo y el medio ambiente cuya temperatura $f_1(t)$ es conocida en cada tiempo t . La expresión matemática de esta condición de frontera corresponde a la ley de Newton de intercambio de temperatura. A este tipo de condiciones se les conoce como condiciones de frontera de tipo Robin o Newton.

Observese que las condiciones de frontera anteriores son un caso particular de las siguientes condiciones, las cuales llamaremos condiciones de fronteras generales

$$\begin{aligned} a_{11}u(0, t) + a_{12}\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= h_1(t) \\ a_{21}u(l, t) + a_{22}\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) &= h_2(t). \end{aligned}$$

15.2. Descripción intuitiva de la ecuación de calor en una dimensión

Para dar una descripción de la ecuación de calor en una dimensión en términos intuitivos, se necesita primero recordar algunos conceptos del cálculo diferencial. Uno de estos conceptos importantes es el de convexidad. Recordemos los siguientes hechos:

- Una función dos veces derivable f es cóncava hacia arriba en un intervalo (a, b) si $f''(x) > 0$ para toda x en (a, b) . En este caso se cumple para cualquiera $x, y \in (a, b)$ que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

es decir, si $f'' > 0$ entonces f evaluada en el punto medio de x y y , es menor que el promedio de f en los puntos x, y .

- Si $f'' < 0$, entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b)

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

es decir, f evaluada en el punto medio de x y y , es mayor que el promedio de f en los puntos x, y .

Otro concepto que necesitamos, es la interpretación de la derivada como razón de cambio. En el caso en el que una función derivable, $f = f(t)$, dependa del tiempo, si su derivada es positiva, es decir, si $\frac{df(t)}{dt} > 0$ en un intervalo, la función crece conforme el tiempo avanza y si $\frac{df(t)}{dt} < 0$, en dicho intervalo la función decrece.

Con la interpretación geométrica de la segunda derivada y la interpretación de la primera derivada como razón de cambio se puede dar una idea intuitiva del porque la ecuación $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ modela el proceso de conducción de calor para el caso en que $u = u(x, t)$ es la temperatura de una barra, por ejemplo, dada la ecuación de calor sin fuentes internas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

estudiemos el cambio de temperatura en un punto fijo x_o para una función que satisface la ecuación de calor. Supongamos que $\frac{\partial^2 u(x_o, t)}{\partial x^2} > 0$ y que estas segundas derivadas son continuas.

Por una parte, esto quiere decir que en una vecindad de x_o el perfil de temperatura es cóncavo hacia arriba, es decir, la temperatura en tal punto es menor que el promedio de la temperatura de sus vecinos. Por otra parte la ecuación (3.7) indica que $\frac{\partial u(x_o, t)}{\partial t} > 0$, de esta forma $u(x_o, t)$ es una función creciente, lo cual quiere decir que la temperatura aumentará en el punto x_o , a medida que t crece. Resumiendo, si en un punto x_o la temperatura es menor que el promedio de sus vecinos en una vecindad de x_o entonces la temperatura aumentará mientras $\frac{\partial^2 u(x_o, t)}{\partial x^2} > 0$. Si hacemos un análisis similar para el caso en el que $\frac{\partial^2 u(x_o, t)}{\partial x^2} < 0$, observamos que la ecuación de calor simplemente modela con precisión el fenómeno familiar a todos de que el calor fluye de los lugares más calientes a lo más fríos.

15.2.1. Probabilidad y la ecuación de difusión

Consideramos la recta real. Supongamos que en el tiempo t , algunas partículas ocupan los puntos $x = 0, \pm k, \pm 2k, \dots$ para algún $k > 0$. Se define la concentración $c(x, t)$ como el valor esperado de partículas en el sitio x en el tiempo t . En otro tiempo digamos $t + h$ una partícula puede moverse hacia la derecha o hacia la izquierda con probabilidad $p \in (0, 1/2]$ o mantenerse en su posición con probabilidad $1 - 2p$. El nuevo valor esperado en x es

$$c(x, t + h) = pc(x - k, t) + (1 - 2p)c(x, t) + pc(x + k, t).$$

De esta forma

$$c(x, t + h) - c(x, t) = p(c(x - k, t) - 2c(x, t) + c(x + k, t))$$

y así- obtenemos,

$$\frac{c(x, t + h) - c(x, t)}{h} = D \frac{c(x - k, t) - 2c(x, t) + c(x + k, t)}{k^2},$$

donde $D = k^2 p/h$.

En una de las secciones anteriores se muestra que tomando k suficientemente pequeña, el lado derecho de la fórmula anterior nos da una aproximación de la segunda derivada, por lo que al tomar el límite cuando $(h, k) \rightarrow 0$ se tiene la ecuación de difusión

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

En [23], capítulo 6, de donde fue tomado el ejemplo anterior puede consultarse una deducción de la ecuación de Black-Scholes para los derivados financieros, la cual también es una ecuación de difusión.

15.2.2. El principio del máximo para la ecuación de calor

La descripción intuitiva de la ecuación de calor muestra que la temperatura u alcanza su un valor máximo o su valor mínimo, ya sea en $t = 0$ o en $x = 0$ o $x = l$ si $t > 0$. Esto sugiere el siguiente teorema.

Teorema: Principio del máximo. Sea $u = u(x, t)$, continua en la región $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T_o$ y solución de la ecuación

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

en la región $0 < x < l, 0 < t \leq T_o$ entonces la función u alcanza sus valores máximo y mínimo ya sea en $t = 0$, o bien en los puntos $x = 0$ o $x = l$, si $0 < t \leq T_o$.

Demostración: Como u es continua en $[0, l] \times [0, T_o]$, el cual es un conjunto compacto, entonces u alcanza su valor máximo y mínimo en tal conjunto. Se quiere demostrar que u no alcanza los valores máximo ni mínimo en el conjunto $0 < x < l, 0 < t \leq T_o$. Por reducción al absurdo, supongase que u alcanza un valor máximo en un punto $(x_1, t_1) \in (0, l) \times (0, T_o]$. Definimos $v(x, t) = u(x, t) + k(t_1 - t)$ donde $k > 0$ es un número cualquiera.

Tenemos, $v(x_1, t_1) = u(x_1, t_1)$. Dado que v es continua en $[0, l] \times [0, T_o]$, la función v alcanza su valor máximo en un punto (x_2, t_2) el cual suponemos pertenece al conjunto $0 < x < l, 0 <$

$t \leq T_o$. Tenemos dos casos: a) $0 < x_2 < l, 0 < t_2 < T_o$, es decir, (x_2, t_2) es un punto interior, o b) $0 < x_2 < l, t_2 = T_o$.

a) Si (x_2, t_2) es un punto interior se tiene

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_2, t_2) &= v_{xx}(x_2, t_2) \leq 0, \\ u_t(x_2, t_2) &= v_t(x_2, t_2) + k \geq k > 0. \end{aligned}$$

La desigualdad en (3.8) se cumple dado que $v(x_2, t_2)$ es un máximo. La desigualdad (3.9) se cumple dado que en un máximo el gradiente de v se anula si (x_2, t_2) es un punto interior de $0 < x < l, 0 < t < T_o$, así por la definición de v tenemos $0 = u_t(x_2, t_2) - k$ de donde se sigue (3.9).

b) Para $t_2 = T_o$, se tiene $v_t(x_2, T_o) \geq 0$ por lo que también se cumple (3.9).

Por lo tanto en cualquiera de los casos a) o b) se cumple que

$$u_t(x_2, t_2) - \alpha^2 u_{xx}(x_2, t_2) = v_t(x_2, t_2) + k - \alpha^2 v_{xx}(x_2, t_2) \geq k > 0,$$

es decir, la ecuación $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ no se cumple en (x_2, t_2) , lo cual es una contradicción. Por lo tanto el máximo de u se alcanza en la frontera.

15.2.3. Unicidad de soluciones de la ecuación de calor

Establecido el principio del máximo se puede demostrar la unicidad de soluciones para algunos problemas asociados a la ecuación de calor como, por ejemplo, en el siguiente teorema.

Teorema: Unicidad de soluciones. Suponga que u y v son soluciones del problema

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t), 0 < x < l, 0 < t \leq T_o$$

y que u, v son continuas en $[0, l] \times [0, T_o]$. Suponga que u, v además satisfacen las condiciones de frontera $u(0, t) = v(0, t) = g_1(t), u(l, t) = v(l, t) = g_2(t), 0 \leq t \leq T_o$ y la condición inicial $u(x, 0) = v(x, 0) = h(x), 0 \leq x \leq l$. Entonces $u \equiv v$.

Demostración: Sea $w = u - v$. Entonces w es continua en $[0, l] \times [0, T_o]$ y es solución del problema

$$w_t = \alpha^2 w_{xx}, 0 < x < l, 0 < t \leq T_o$$

con condiciones de frontera e inicial nulas, es decir, $w(0, t) = 0, w(l, t) = 0, 0 \leq t \leq T_o, w(x, 0) = 0$, para $0 \leq x \leq l$. Entonces por el principio del máximo $w \equiv 0$.

El teorema de unicidad no es solamente un resultado teórico sin mayores consecuencias, se usa extensamente, por ejemplo, en la aplicación del principio de Duhamel donde se obtienen, por una parte una solución por el método de series de Fourier y otra más, por el método de la transformada de Laplace. La igualdad nada obvia de ambas soluciones es consecuencia del teorema 3.2.

15.3. La ecuación de Laplace

Sea $\phi(x), x \in \mathbb{R}^N$ un campo vectorial con primeras derivadas continuas el cual representa la densidad de flujo por unidad de volumen de cierta sustancia. Sea $P_o = (x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \dots, x_n^{(o)})$ un punto en la sustancia y B_ε una bola con centro en P_o y radio ε . Dada la continuidad de $\text{div } \phi$, al aplicar el teorema de la divergencia de Gauss ¹ y el teorema del valor medio para las integrales de volumen se tiene que

$$\text{div } \phi(P_o) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(B_\varepsilon)} \int_{\partial B_\varepsilon} \phi \cdot dS$$

donde $\text{Vol}(B_\varepsilon)$ es el volumen de la bola con centro en P_o y radio ε . Supongamos que $\text{div } \phi(P_o) > 0$ entonces existe una bola B_ε para ε suficientemente pequeño con $\int_{\partial B_\varepsilon} \phi \cdot dS > 0$. Por lo tanto, dado que la integral de superficie representa el flujo de ϕ a través de ∂B_ε , el flujo neto promedio cerca de P_o es hacia afuera de la frontera de B_ε en tal caso al punto P_o se le conoce como fuente, y si $\text{div } \phi(P_o) < 0$, el flujo neto es hacia adentro de la frontera de B_ε y en tal caso a P_o se le conoce como sumidero.

Considerese el caso en el que $\phi = -\nabla u$ entonces $\text{div}(-\nabla u) = -\Delta u$. Si $\Delta u(P_o) > 0$, entonces $\text{div } \phi(P_o) < 0$, de esta forma, P_o es un punto sumidero. De esta manera, la temperatura en P_o (el cual es el centro de la bola) debe ser menor que el promedio de sus vecinos. Si $\Delta u(P_o) < 0$, entonces $\text{div } \phi(P_o) > 0$, y el punto P_o es una fuente y por lo tanto $u(P_o)$ es mayor que el promedio de sus vecinos. Finalmente, si $\Delta u(P_o) = 0$, no hay flujo y u es igual al promedio de sus vecinos en una vecindad de P_o . Resumiendo:

- Si $\Delta u(P_o) > 0, u(P_o)$ es menor que el promedio de sus vecinos en una bola B_ε con centro en P_o y radio suficientemente pequeño ε .
- Si $\Delta u(P_o) < 0, u(P_o)$ es mayor que el promedio de sus vecinos en una bola B_ε con centro en P_o y radio suficientemente pequeño ε .
- Si $\Delta u(P_o) = 0, u(P_o)$ es igual al promedio de sus vecinos en una bola B_ε con centro en P_o y radio suficientemente pequeño ε .

Una buena ilustración de las consideraciones anteriores resulta al tomar el caso de $u = u(x, y)$.

La descripción de esta sección ilustra la importancia del laplaciano en la modelación matemática ya que está asociado con los procesos en los que ocurre una difusión, es decir el paso de una mayor concentración a una menor concentración de una sustancia dada, pero eso no es todo, el laplaciano tiene una gran cantidad de aplicaciones en la matemática teórica, por ejemplo, en el estudio de funciones armónicas en la variable compleja.

Podemos ahora dar una descripción de la ecuación de calor o de difusión en $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$, la cual generaliza la interpretación para una sola variable espacial. Sea $u : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto y acotado. Supongamos que u tiene segundas derivadas continuas en $\Omega \times (0, T]$ y que satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u$$

Entonces si $\Delta u(P_o, t_o) > 0$, tenemos $\frac{\partial u}{\partial t}(P_o, t_o) > 0$ es decir u tiende a crecer en una vecindad de P_o para $t > t_o$. Por otro lado, si $\Delta u(P_o, t_o) < 0$, entonces u tiende a decrecer en una vecindad de P_o para $t > t_o$. Si u representa la concentración de una sustancia en el punto P_o al tiempo t entonces la ecuación representa la tendencia de la sustancia a pasar de una concentración mayor a una menor.

Para la ecuación de onda, en \mathbb{R}^2 , si U representa la altura de una membrana definida en Ω , se tiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u$$

si $\Delta u(P_o, t_o) > 0$, tenemos $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_o, t_o) > 0$, es decir, la fuerza de tensión en la membrana tiene componente en el eje $z = u(x, t)$ que apunta en la dirección positiva y su magnitud es menor en cuanto menor es la curvatura del perfil u en promedio, en una vecindad de P_o . Si $\Delta u(P_o, t_o) < 0$, tenemos $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_o, t_o) < 0$, y en este caso, la componente en el eje z de la tensión tiene dirección negativa en una vecindad de P_o .

15.3.1. Principio del máximo para la ecuación de Laplace

Finalmente, para la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, la cual puede interpretarse como una ecuación de calor estacionaria, la interpretación intuitiva del laplaciano invita a formular el criterio del máximo para soluciones de la ecuación de Laplace, principio que indica que el perfil de temperatura estacionario u alcanza sus valores máximo y mínimo en $\partial\Omega$.

Teorema 4.1 - Principio del máximo para la ecuación de Laplace.. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, conexo y acotado. Sea $u = u(x, y, z)$ una función armónica en Ω , es decir, una función que satisface $\Delta u = 0$ en Ω , la cual suponemos que es continua en $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces los valores máximos y mínimos de u se alcanzan en la frontera $\partial\Omega$.

Demostración: Sea $x = (x, y, z)$ y defínase $v(x) = u(x) + \varepsilon(x^2 + y^2 + z^2)$, donde $\varepsilon > 0$ es un número cualquiera. Se tiene

$$\Delta v(\mathbf{x}) = \Delta u(x) + \Delta(\varepsilon(x^2 + y^2 + z^2)) = 0 + 6\varepsilon > 0$$

en Ω . Como v es continua en el compacto $\bar{\Omega}$ alcanza su valor máximo. Si v alcanzara el máximo en Ω se tendría en dicho punto $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} \leq 0$, lo cual contradice la desigualdad (4.3). Así el máximo de v debe alcanzarse en la frontera. Sea $x_o \in \partial\Omega$ un punto donde v alcanza el máximo. La demostración de que u alcanza su máximo en $\partial\Omega$, es una consecuencia de las siguientes desigualdades que se cumplen para todo punto de $\bar{\Omega}$

$$u(x) \leq v(x) \leq v(x_o) = u(x_o) + \varepsilon \|x_o\|^2 \leq \max_{\mathbf{x}' \in \partial\Omega} u(x') + \varepsilon \|x_o\|^2$$

Aplicando el límite cuando ε tiende a cero en la última desigualdad se tiene

$$u(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x}' \in \partial\Omega} u(x'), \quad \forall x \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega.$$

Para el mínimo se toma $-u$ y dado que $\max_{\mathbf{x}' \in \partial\Omega} (-u(x')) = -\min_{\mathbf{x}' \in \partial\Omega} (u(x'))$, al sustituir en la desigualdad anterior, la demostración queda terminada.

Una vez que queda establecido el principio del máximo la unicidad de soluciones para el problema de Dirichlet asociado a la ecuación de Poisson se sigue fácilmente.

Teorema 4.2 Unicidad para la ecuación de Poisson. Sean u, v soluciones respectivas en Ω de

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ en } \Omega \\ u = h \text{ en } \partial\Omega, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta v = f \text{ en } \Omega \\ v = h \text{ en } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces $u = v$ en $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Demostración: Sea $w = u - v$ entonces $\Delta w = 0$ en Ω y $w = 0$ en $\partial\Omega$. El Teorema 4.1 implica que $w \equiv 0$ en $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, de donde se sigue la unicidad.

$$-u''(x) = 1$$

para $x \in (0, 1), u(0) = u(1) = 0$

15.3.2. Invariabilidad del operador de Laplace respecto a rotaciones

El operador de laplace es invariante respecto a las rotaciones tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3 como se mostrará. Se recuerda que una rotación en \mathbb{R}^N está dada por la fórmula de cambio de coordenadas

$$x' = Bx$$

donde $x = (x_1, \dots, x_N)$ y $B = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, N$ es una matriz ortogonal, es decir una matriz tal que $BB^t = B^tB = I$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$ y cuyo determinante es uno. Concretamente, en \mathbb{R}^2 una matriz ortogonal tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

donde θ es el ángulo de rotación.

Al usar las fórmulas (1.5) para un cambio de coordenadas arbitrario se obtiene que

$$u_{xx} + u_{yy} = (a_{11}^2 + a_{12}^2) u_{\xi\xi} + 2(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}) u_{\xi\eta} + (a_{21}^2 + a_{22}^2) u_{\eta\eta}$$

al sustituir $a_{11} = \cos \theta$, $a_{12} = -\operatorname{sen} \theta$, $a_{21} = \operatorname{sen} \theta$, $a_{22} = \cos \theta$, en la ecuación anterior se obtiene la invarianza del operador de laplace, i. e.,

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}.$$

de manera similar se obtiene la invarianza del Laplaciano en \mathbb{R}^3 .

15.3.3. El laplaciano en coordenadas polares y esféricas

Las fórmulas para las coordenadas polares están dadas por

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \operatorname{sen} \theta; \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Al usar la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x = u_r \cos \theta - u_\theta \frac{\operatorname{sen} \theta}{r}, \\ u_y &= u_r r_y + u_\theta \theta_y = u_r \operatorname{sen} \theta + u_\theta \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned}$$

Al usar nuevamente la regla de la cadena se llega a

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

Para las coordenadas esféricas:

$$x = r \cos \theta \sin \phi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi;$$

$$z = r \cos \phi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x},$$

$$\phi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

se puede demostrar que

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} + \frac{\cot \theta}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi}u_{\theta\theta}.$$

15.4. La ecuación de onda

El prototipo de las ecuaciones hiperbólicas es la ecuación de onda la cual modela diversos fenómenos físicos, ya sea el movimiento de una cuerda o de una membrana en un instrumento musical, o bien el comportamiento de la luz. Se presentará una deducción de la ecuación de onda a partir de las ecuaciones de Maxwell y otra a partir de un modelo simplificado del movimiento de una cuerda. Comenzamos con este último.

15.4.1. Las vibraciones de una cuerda

Se considera una cuerda de material flexible, por ejemplo la cuerda de un instrumento musical. Para simplificar, supondremos que la cuerda solamente se mueve en dirección vertical y que no ocurre desplazamiento en la dirección horizontal, lo que en la práctica resulta ser una buena aproximación. Supondremos para simplificar que el desplazamiento vertical es pequeño comparado con la longitud total l de la cuerda.

El origen de coordenadas se coloca en un extremo de la cuerda. El desplazamiento en el punto x y en el tiempo t se denota por $u = u(x, t)$ la cual se supone al menos dos veces diferenciable. La densidad lineal de la cuerda se denota por $\rho(x)$ y la tensión interna por τ la cual supondremos constante. Supondremos además, que la tensión actúa en la dirección tangente al perfil de la cuerda

en el punto x . Consideramos por el momento, un segmento arbitrario de la cuerda entre los puntos $x = a$ y $x = b$. Se denota por $\theta(x, t)$ el ángulo mostrado en la figura 5.1 en los puntos a y b , respectivamente lo cual implica que, (si recordamos el significado geométrico de la derivada)

$$\tan(\theta(x, t)) = u_x(x, t)$$

La ecuación que describe el movimiento de la cuerda se deriva a partir del esquema de conservación (2.2) en una dimensión, con $\Omega = (a, b)$, $\partial\Omega = \{a, b\}$, tomando el momento mv como la cantidad que se conserva y $\int_{\partial\Omega} \phi(x, t) dx$ como la componente vertical de la fuerza de tensión, es decir

$$\int_{\partial\Omega} \phi(x, t) dx = \int_a^b \phi(x, t) dx = \tau(\sin(\theta(b, t)) - \sin(\theta(a, t))).$$

No se consideran los efectos de la fuerza de gravedad ni la fricción en este primer modelo por lo que $f(x, t) \equiv 0$ en la ecuación (2.2). Finalmente, el elemento de masa en una hipotética cuerda unidimensional está dada por el producto de la densidad $\rho(x)$ por el elemento de longitud de arco dado por $\sqrt{1 + (u_x(x, t))^2} dx$ y sabiendo que la velocidad es $u_t(x, t)$, el esquema de conservación (2.2) se convierte en

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (u_x(x, t))^2} u_t(x, t) dx = \tau(\sin(\theta(b, t)) - \sin(\theta(a, t))).$$

Para simplificar escribimos $\rho_o(x) = \rho(x) \sqrt{1 + (u_x(x))^2}$, de esta forma (5.3) se convierte en

$$\int_a^b \rho_o(x) u_{tt}(x, t) dx = \tau(\sin(\theta(b, t)) - \sin(\theta(a, t)))$$

La hipótesis de que la tensión no produce movimiento horizontal se traduce matemáticamente en la igualdad de las componentes de esta fuerza en la dirección del eje x en los extremos del intervalo $[a, b]$, es decir:

$$\tau \cos(\theta(a, t)) = \tau \cos(\theta(b, t)).$$

Lo cual implica que $T = \tau \cos(\theta(x, t))$ en realidad no depende de x , de tal manera que, si se consideran las ecuaciones (5.1), (5.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \tau[\cos(\theta(b, t)) \tan(\theta(b, t)) - \cos(\theta(a, t)) \tan(\theta(a, t))] &= \\ &= T(t) (u_x(b, t) - u_x(a, t)) = \\ &= T(t) \int_a^b u_{xx}(x, t) dx. \end{aligned}$$

Donde la última integral es consecuencia del teorema fundamental del cálculo. Tomando en cuenta la ecuación (5.4) se llega a

$$\int_a^b \rho_o(x) u_{tt}(x, t) dx = T(t) \int_a^b u_{xx}(x, t) dx.$$

Dado que el intervalo $[a, b]$ es arbitrario, se tiene que:

$$u_{tt} = \frac{T(t)}{\rho_o(x)} u_{xx}(x, t)$$

En el caso especial en que $\rho_o(x), T(t)$ son constantes, suele escribirse $\sqrt{\frac{T(t)}{\rho_o(x)}} = c$. de esta forma se obtiene la ecuación de onda,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}(x, t)$$

La ecuación (5.9) puede modificarse para incluir los efectos de la fricción εu_t , la respuesta elástica del medio ku así- como la presencia de una fuerza externa $f(x, t)$ con lo cual puede obtenerse el siguiente modelo dado para el movimiento de una cuerda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx}(x, t) + \varepsilon u_t(x, t) + ku(x, t) = f(x, t).$$

15.4.2. Descripción intuitiva de la ecuación de onda

Si bien la deducción de la ecuación de onda desde el punto de vista formal es adecuada, no suele ser lo más aplicable durante el proceso de modelación matemática. Lo que ocurre con frecuencia es que se utiliza cierta intuición asociada con los conceptos básicos de derivada, ya sea como razón de cambio o ya sea por medio de las interpretaciones geométricas de la primera y segunda derivadas (o bien, del laplaciano). Por ejemplo, para seguir con el modelo de una cuerda de algún instrumento musical, con las mismas condiciones de la sección anterior, consideramos una cuerda de longitud l . Llamemos u al desplazamiento de la cuerda en cada punto x , es decir, $y = u(x, t)$.

Supongamos que en el tiempo $t = 0$ la cuerda adopta la forma de la gráfica de una función conocida $y = f(x)$, es decir, $y = u(x, 0) = f(x)$. Dado que la cuerda está tensa, al soltarla comenzará a moverse, así el desplazamiento $u(x, t)$ variará con el tiempo. Cada punto sobre la cuerda se moverá con una velocidad $v = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ y una aceleración $a = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$. Con esta notación usamos la segunda ley de Newton $F = ma$ donde F es la fuerza que actúa en cada punto x de la cuerda en el instante t .

Por otra parte, la fuerza de tensión en cada punto es proporcional a la curvatura de la cuerda, es decir, entre más curvada este, mayor será la tensión. Recordemos que en cada tiempo la curvatura está determinada por $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$, para $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ pequeña. Se puede intuir que si no se toman en cuenta fuerzas de fricción ni las fuerzas externas, u satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Donde α es una constante que depende del material del cual esta hecha la cuerda.

15.4.3. Las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de onda

Los campos electromagnéticos que satisfacen las ecuaciones de Maxwell satisfacen también la ecuación de onda como veremos a continuación. Sea $E = (E_x, E_y, E_z)$ un campo eléctrico y $B = (B_x, B_y, B_z)$ un campo magnético los cuales satisfacen las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial:

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_o}, \quad \text{ley de Gauss}$$

$$\operatorname{div} B = \mathbf{0}, \quad \text{ley de Gauss para campos magnéticos}$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{ley de Faraday}$$

$$\operatorname{rot} B = \mu_o \left(\mathbf{J} + \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} \right), \quad \text{ley de Ampere-Maxwell,}$$

donde μ_o es la permitividad magnética del vacío, ε_o es la permitividad eléctrica del vacío, J la densidad de corriente y ρ la densidad de carga. Para ver que el campo magnético B satisface la ecuación de onda se toma el rotacional en ambos lados de la ecuación de Ampere-Maxwell (5,15) :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} B) = \mu_o \operatorname{rot} \left(\mathbf{J} + \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

Ejemplo: Comprobar que $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} B) = \nabla(\operatorname{div} B) - \Delta B$, donde el laplaciano ΔB del campo vectorial B se define como:

$$\Delta B = (\Delta B_x, \Delta B_y, \Delta B_z)$$

Dado que se cumple la ecuación (5.13) de (5.16) se obtiene,

$$-\Delta B = \mu_o \operatorname{rot} \mathbf{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} E)$$

Si consideramos la ecuación (5.14) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} E) = -\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Además en una región libre de corriente

$$\mathbf{J} = \mathbf{0}$$

Si se sustituyen en la ecuación (5.17) las ecuaciones (5.18) y (5.19) se llega a la ecuación:

$$\Delta B = \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Si se define $c^2 = 1/\mu_o \varepsilon_o$ se obtiene la ecuación de onda en forma estandar

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \Delta B$$

el valor de c se puede calcular a partir de los valores de μ_o y ε_o :

$$c = \left[(4\pi \times 10^{-7} \text{ mkg/C}^2) (8,8541878 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ s}^2 / (\text{kgm}^3)) \right]^{-1/2} = 2,9979 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

Como puede verse, el valor de c coincide con la velocidad de propagación de la luz en el vacío como era de esperarse.

De manera similar, puede obtenerse la ecuación de onda para el campo E :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \Delta E$$

para ello se toma el rotacional en ambos miembros de la ley de Faraday y se considera una región libre de carga, es decir, una región con $\rho = 0$.

15.5. Solución de D'Alembert

Para el problema de movimiento de una cuerda infinita se tiene una solución especial obtenida por el método de D'Alembert. Consideramos el problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty$$

$$(ci) \quad \begin{cases} u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) = g(x), \end{cases}$$

donde las funciones f, g se suponen conocidas.

El primer paso en el método de D'Alembert consiste en escribir la ecuación (5.20) en su forma canónica (ver sección 1.3.1) mediante el cambio de variables:

$$\xi = x + ct$$

$$\eta = x - ct.$$

La velocidad de la luz c actualmente no es una magnitud medida, sino que se ha establecido un valor fijo en el Sistema Internacional de Medidas y se define exactamente como $c = 299792,458 \text{ Km/s}$

Las nuevas coordenadas se conocen también como cono de luz. con lo cual la EDP en (5.20) se reduce a

$$u_{\xi\eta} = 0$$

Ahora la ecuación (5.22) puede integrarse por ejemplo con respecto a la variable ξ :

$$u_{\eta}(\xi, \eta) = \phi(\eta)$$

Integrando nuevamente, ahora respecto a la variable η se obtiene

$$u(\xi, \eta) = \Phi(\eta) + \Psi(\xi)$$

donde las funciones Φ, Ψ con $\Phi' = \phi$ deben determinarse a partir de las condiciones iniciales (ci) en (5.20). Primero, se restituyen las variables originales por medio de las fórmulas (5.21) para obtener

$$u(x, t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct).$$

Dado que $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, tenemos al derivar (5.24) y poniendo $t = 0$:

$$\begin{aligned}\Phi(x) + \Psi(x) &= f(x) \\ c(-\Phi'(x) + \Psi'(x)) &= g(x).\end{aligned}$$

Si se integra (5.26) se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}\Phi(x) + \Psi(x) &= f(x) \\ -\Phi(x) + \Psi(x) &= \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau + K,\end{aligned}$$

donde las funciones Ψ, Φ son las incógnitas y $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto fijo. Sumando las ecuaciones (5.27), (5.28) se tiene

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau + \frac{K}{2}.$$

Si ahora restamos las ecuaciones (5.27), (5.28) se llega a

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau - \frac{K}{2}.$$

Para encontrar u se sustituyen (5.29), (5.30) en (5.24). De esta manera, (5.24) da la solución de D'Alembert en su forma clásica

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau.$$

Ejemplo 5.1 Considerese el problema de la cuerda infinita con desplazamiento inicial cero y velocidad inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq a \\ 0, & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

donde $a > 0$.

Este ejemplo corresponde al comportamiento de una cuerda infinita después de ser golpeada por un martillo de longitud $2a$. Claramente, la velocidad inicial tiene singularidades en $x = \pm a$. Por la fórmula de D'Alembert se tiene la solución

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau = \frac{1}{2c} |\{(-a, a) \cap (x-ct, x+ct)\}|$$

donde $|\{(-a, a) \cap (x-ct, x+ct)\}|$ es la longitud del conjunto resultante. Por ejemplo si $t = a/2c$

$$\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (-\infty, -\frac{3}{2}a] \\ \frac{1}{2c} (x + \frac{3}{2}a), & \text{si } x \in (-\frac{3}{2}a, -\frac{1}{2}a) \\ \frac{a}{2c}, & \text{si } x \in (-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a) \\ \frac{1}{2c} (-x + \frac{3}{2}a), & \text{si } x \in (\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}a) \\ 0, & \text{si } x \in [\frac{3}{2}a, \infty). \end{cases}$$

El lector debe ser capaz de encontrar soluciones de esta integral en casos específicos por si mismo.

15.5.1. La fórmula de D'Alembert en la semirecta

Las soluciones de la ecuación de onda en la semirecta $x > 0$ serán de gran utilidad para encontrar soluciones de la ecuación de onda en dimensiones superiores. El problema de la ecuación de onda en la semirecta

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad 0 < t < \infty$$

$$(ci) \begin{cases} u(x, 0) = f(x), & 0 < x \\ u_t(x, 0) = g(x), \end{cases}$$

$$(cf) u(0, t) = 0, t > 0,$$

también puede ser resuelto por el método de D'Alembert si se usan las extensiones impares de las condiciones iniciales. Considere las funciones

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ -f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0, \\ -g(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Ahora como un paso intermedio el problema extendido

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty$$

$$(ci) \begin{cases} v(x, 0) = \tilde{f}(x), & -\infty < x < \infty \\ v_t(x, 0) = \tilde{g}(x), \end{cases}$$

tiene la solución dada por el método de D'Alembert:

$$v(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x - ct) + \tilde{f}(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(\tau) d\tau$$

La solución u del problema en la semirecta se obtendrá a partir de la solución v restringiéndola a valores $x > 0$. En la región $x - ct > 0$ se tiene obviamente $x > ct > 0$ y en esta región $\tilde{f} = f$ y $\tilde{g} = g$. Por lo tanto

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau, \quad \text{si } x > ct$$

Por otra parte si $0 < x < ct$ se tiene $\tilde{f}(x - ct) = -f(ct - x)$ y así

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) - f(ct - x)) + \frac{1}{2c} \left(\int_0^{x+ct} g(\tau) d\tau + \int_{x-ct}^0 -g(-\tau) d\tau \right)$$

con el cambio de variable τ a $-\tau$ en la última integral se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) - f(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} g(\tau) d\tau, \quad \text{si } 0 < x < ct$$

15.6. Fórmula de Kirchhoff-Poisson

Consideramos el problema de la ecuación de onda en tres dimensiones

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 0 < t < \infty \\ (ci) \begin{cases} u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \end{cases} \end{cases}$$

La solución del problema (5.40) es el equivalente a la solución de D'Alembert para la ecuación de onda en una dimensión. Sin embargo, como veremos más adelante, esta generalización se sigue de la fórmula de D'Alembert de una manera no trivial. Además si $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ entonces el problema (5.40) tiene solución única, llamada fórmula de Kirchhoff-Poisson, dada por

$$u(\mathbf{x}_o, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_o\|=ct} f(\mathbf{x}) dS \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_o\|=ct} g(\mathbf{x}) dS$$

El lector debe observar que las integrales en la fórmula (5.41) son integrales de superficie de las funciones escalares f, g , tomadas sobre la esfera con centro en \mathbf{x}_o y radio ct .

15.6.1. Solución del problema de la ecuación de onda en \mathbb{R}^3

Si recordamos que el área de la esfera $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| = r$ está dada por $4\pi r^2$, el valor promedio $\bar{u}(r, t)$ de la función $u(\mathbf{x}, t)$ sobre la esfera está dado por,

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_o\|=r} u(\mathbf{x}, t) dS$$

o bien, en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, t) &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_o\|=r} u(\mathbf{x}, t) dS \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \phi, t) r^2 \sin \phi d\phi d\theta, \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \phi, t) \sin \phi d\phi d\theta. \end{aligned}$$

No es difícil verificar por medio de la fórmula (4.6) que \bar{u} satisface la ecuación de onda en coordenadas esféricas

$$\bar{u}_{tt} = c^2 \left(\bar{u}_{rr} + \frac{2}{r} \bar{u}_r \right)$$

si u es solución de la ecuación de onda y además es uniformemente continua en cada bola. Con la sustitución

$$v(r, t) = r\bar{u}(r, t)$$

se llega a la ecuación de onda del problema (5.20) como se muestra a continuación. Dado que $v_{tt} = r\bar{u}_{tt}$, $v_r = r\bar{u}_r + \bar{u}v_{rr} = r\bar{u}_{rr} + 2\bar{u}_r$, la ecuación (5.45) se convierte en

$$v_{tt} = c^2 v_{rr}$$

con $0 < t < \infty$, $0 < r < \infty$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\bar{u}(\mathbf{0}, t) < \infty$ y por lo tanto

$$v(0, t) = 0.$$

Además como u es solución de problema (5.40), v debe satisfacer las condiciones

$$v(r, 0) = r\bar{f}(r), v_t(r, 0) = r\bar{g}(r).$$

Las ecuaciones (5.46), (5.47) y (5.48) constituyen un problema de onda en una dimensión espacial y puede ser resuelto por el método de D'Alembert en la semirecta $0 < r$, la solución dada en la sección 5.4.1 fórmula (5.39) para este problema con $0 \leq r \leq ct$ da

$$v(r, t) = \frac{1}{2} [(ct + r)\bar{f}(ct + r) - (ct - r)\bar{f}(ct - r)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} s\bar{g}(s) ds$$

El primer término del lado derecho puede ser reescrito mediante el teorema fundamental del cálculo para obtener

$$v(r, t) = \frac{1}{2c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{f}(s) ds + \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{g}(s) ds \right]$$

para $0 \leq r \leq ct$

Claramente $u(r, \theta, \phi, t) = u(x_o + r \cos \theta \sin \phi, y_o + r \sin \theta \sin \phi, z_o + r \cos \phi, t)$ de esta forma la continuidad uniforme se requiere para el intercambio de derivadas parciales e integrales.

Caso $N = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(r, t) &= u(\mathbf{x}_o, t) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(r, t)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(r, t) - v(0, t)}{r} \\ &= \frac{\partial v}{\partial r}(0, t). \end{aligned}$$

Se deriva (5.49) con respecto a r y posteriormente se pone $r = 0$ para obtener

$$\begin{aligned} u(x_o, t) &= \frac{\partial v}{\partial r}(0, t) = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (2ct \bar{f}(ct)) + \frac{1}{2c} 2ct \bar{g}(ct) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (t \bar{f}(ct)) + t \bar{g}(ct) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_o\|=ct} \bar{f}(\mathbf{x}) dS \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_o\|=ct} \bar{g}(\mathbf{x}) dS \end{aligned}$$

la cual es la fórmula de Kichhoff-Poisson.

15.6.2. Principio de Huygens

El principio de Huygens puede describirse de manera fantástica afirmando que si existieran seres de una y dos dimensiones tendrían que ser ciegos y sordos. Para explicar por que esto es así resolveremos el problema de la ecuación de onda en una y tres dimensiones para contrastar las soluciones, es decir, resolveremos cualitativamente el problema para \mathbb{R}^N con $N = 1, 3$.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \|\mathbf{x}\| \leq a, & a > 0 \\ 0, \|\mathbf{x}\| > a. \end{cases} \end{cases}$$

Para $N = 1$ claramente $\|\mathbf{x}\| = |x|$ y este problema puede pensarse como la perturbación producida en una cuerda infinita al ser golpeada por un martillo de longitud $2a$. Recordamos

Caso $N = 3$ que para $N = 1$ la solución de D'Alembert está dada por

$$\begin{aligned}
 u(x_o, t) &= \frac{1}{2c} \int_{x_o-ct}^{x_o+ct} \psi(\tau) d\tau \\
 &= 0, \text{ si } \{x \in [x_o - ct, x_o + ct]\} \cap \{x : |x| \leq a\} = \emptyset \\
 &\neq 0, \text{ si } \{x \in [x_o - ct, x_o + ct]\} \cap \{x : |x| \leq a\} \neq \emptyset.
 \end{aligned}$$

Lo que dice la solución anterior es que si tomamos un punto x_o fijo sobre la recta y dejamos que t transcurra, tarde o temprano el intervalo $[x_o - ct, x_o + ct]$ intersecara el intervalo $-a \leq x \leq a$ en cierto $t = t_o$ y la solución será distinta de cero a partir de entonces, es decir, para todo $t \geq t_o$. Un esquema de la solución se muestra en la correspondiente figura 5.3.

Para $N = 3$ la fórmula de Kirchhoff-Poisson nos da

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}_o, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_o\|=ct} \psi(\mathbf{x}) dS \\
 &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{P(\mathbf{x}_o, t)} dS \\
 &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \text{area}(P(\mathbf{x}_o, t))
 \end{aligned}$$

Donde $P(\mathbf{x}_o, t) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| = ct\} \cap \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq a\}$. Es claro que para t suficientemente grande el conjunto $P(\mathbf{x}_o, t)$ sera vacío sin importar cual sea \mathbf{x}_o , como se muestra en la figura 5.4. La diferencia entre $N = 1$ y $N = 3$ es clara ya que en cualquier punto fijo \mathbf{x}_o para el caso $N = 1$ la perturbación inicial se sentirá por siempre a partir de cierto tiempo t_o , ya que se trata de la intersección de dos bolas unidimensionales (intervalos), mientras que para $N = 3$ la perturbación dejará de sentirse a partir de cierto t_o , dado que solo contribuye la superficie de la esfera $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| = ct$ que se interseca con la bola $\|\mathbf{x}\| \leq a$. Este hecho haría imposible la comunicación en dimensión uno ya que las perturbaciones se sumarían y continuarían escuchándose por siempre, lo que no ocurre en el espacio de tres dimensiones. Puede demostrarse que para $N \geq 2$ y par ocurre lo mismo que para $N = 1$.

16. Capítulo VII: Códigos en Python

Los siguientes códigos fueron implementados en el lenguaje de programación de alto nivel Python, bajo la filosofía de la Programación Funcional

1. Solución numérica de la ecuación de Schrödinger 2D

```
import numpy as np

from scipy.sparse.linalg import eigsh

from scipy.sparse.linalg import eigs

import matplotlib.pyplot as plt

from matplotlib import animation

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

from matplotlib.animation import PillowWriter

plt.style.use(['science', 'notebook'])

from scipy import sparse

N = 150

X, Y = np.meshgrid(np.linspace(0,1,N, dtype=float)

np.linspace(0,1,N, dtype=float))

def get_potential(x,y):

    return 0*x

def get_potential(x, y):

    return np.exp(-(x-0.3)**2/(2*0.1**2))*np.exp(-(y-0.3)**2/(2*0.1**2))

V = get_potential(X,Y)

eigenvalues, eigenvectors = eigsh(H, k=10, which='SM')

def get_e(n):

    return eigenvectors.T[n].reshape((N,N))

plt.figure(figsize=(9,9))

plt.contourf(X, Y, get_e(3)**2, 20)

my_cmap = plt.get_cmap('cool')
```

```

def init():
    ax.plot_surface(X, Y, get_e(3)**2, cmap=my_cmap,
        linewidth=0, antialiased=False)
    ax.set_xlabel('$x/a$')
    ax.set_ylabel('$y/a$')
    ax.set_zlabel('$\propto|\psi|^2$')
    return fig,

def animate(i):
    ax.view_init(elev=10, azim=4*i)
    fig = plt.figure()
    ax = Axes3D(fig)
    ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, init_func=init,
        frames=90, interval=50)
    ani.save('rotate_azimuth_angle_3d_surf.gif', writer='pillow', fps=20)
    return fig

```

2. Ecuación de Laplace con condiciones de contorno arbitrarias

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import animation
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib.animation import PillowWriter
from matplotlib import cm
from skimage import color
from skimage import io
import numba
from numba import jit
edge = np.linspace(-1, 1, 300)

```

```

upper_y = np.cos(np.pi * edge / 2)
lower_y = edge**4
upper_x = 1/(np.e**-1 - np.e) * (np.exp(edge)-np.e)
lower_x = 0.5 * (edge**2-edge)
xv, yv = np.meshgrid(edge, edge)
@numba.jit("f8[:,:](f8[:,:], i8)", nopython=True, nogil=True)
def compute_potential(potential, n_iter):
    length = len(potential[0])
    for n in range(n_iter):
        for i in range(1, length-1):
            for j in range(1, length-1):
                potential[j][i] = 1/4 * (potential[j+1][i] + potential[j-1][i] + \
                    potential[j][i+1] + potential[j][i-1])
            return potential
potential = np.zeros((300,300))
potential[0,:]= lower_y
potential[-1,:]= upper_y
potential[:,0]= lower_x
potential[:, -1]= upper_x
potential = compute_potential(potential, n_iter=10000)
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(8,6))
clr_plot = ax.contourf(xv, yv, potential, 30)
ax.set_xlabel('x/a')
ax.set_ylabel('y/a')
fig.colorbar(clr_plot, label='$V/V_0$')
ax.set_title('Potential in square')
plt.show()

```

```

def potential_block(x, y):
    return np.select([(x>0.5)*(x<0.7)*(y>0.5)*(y<0.7),
(x<=0.5)+(x>=0.7)+(y<=0.5)+(y>=0.7)], [1., 0])

plt.figure(figsize=(5,4))

plt.contourf(xv, yv, potential_block(xv,yv))

plt.colorbar()

fixed = potential_block(xv,yv)

fixed_bool = fixed!=0

@numba.jit("f8[:,:](f8[:,:], b1[:,:], i8)", nopython=True, nogil=True)

def compute_potential(potential, fixed_bool, n_iter):
    length = len(potential[0])
    for n in range(n_iter):
        for i in range(1, length-1):
            for j in range(1, length-1):
                if not(fixed_bool[j][i]):
                    potential[j][i] = 1/4 * (potential[j+1][i] + potential[j-1][i] + \
                                                potential[j][i+1] + potential[j][i-1])
            return potential

potential = np.zeros((300,300))

potential[0,:]= lower_y

potential[-1,:]= upper_y

potential[:,0]= lower_x

potential[:, -1]= upper_x

potential[fixed_bool] = fixed[fixed_bool]

potential = compute_potential(potential, fixed_bool, n_iter=10000)

fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(8,6))

clr_plot = ax.contourf(xv, yv, potential, 30)

```

```

ax.set_xlabel('x/a')
ax.set_ylabel('y/a')
fig.colorbar(cnr_plot, label='$V/V_0$')
ax.set_title('Potential in square')
plt.show()

```

3. Ecuación numérica del calor

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import animation
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib.animation import PillowWriter
from matplotlib import cm
from skimage import color
from skimage import io
import numba
from numba import jit
plt.style.use(['science', 'notebook'])
coords = x,y,z = np.loadtxt('../input/turk2.txt', unpack=True, delimiter=',', dtype=int)
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(projection='3d')
ax.scatter(x,y,z)
ax.view_init(elev=90)
img = np.zeros([int(max(z)+1), int(max(y)+1), int(max(x)+1)])
np.put(img, np.ravel_multi_index(np.flip(coords), img.shape), 1)
img = np.pad(img, pad_width=1, mode='constant',
constant_values=0)
turkey_bool = img>0.5

```

```

rawturk_temp = 273.15 + 25
oven_temp = 273.15 + 165
init_heat = np.zeros(img.shape) + oven_temp
init_heat[turkey_bool] = rawturk_temp
times = 36000
times_snapshot = 3600
f = int(times/times_snapshot)
heat_frames = np.zeros([times_snapshot, *img.shape])
heat_frames[0] = init_heat
x = 0.4
dx = x/img.shape[2]
dy = dz = dx
dt = 1
a = 1.32e-7
a * dt / dx**2
plt.imshow(turkey_bool[-21])
plt.show()
@numba.jit("f8[:,::,::,::](f8[:,::,::,::], b1[:,::,::])", nopython=True, nogil=True)
def solve_heat(heatmap, is_turkey):
    cs = heatmap[0].copy() #current state
    lz, ly, lx = cs.shape
    cf = 0 # current frame
    for t in range(1,times):
        ns = cs.copy() # new state
        for i in range(1, lx-1):
            for j in range(1, ly-1):
                for k in range(1,lz-1):

```

```

    if is_turkey[k][j][i]:
        ns[k][j][i] = cs[k][j][i] + a*dt/dx**2 * (cs[k][j+1][i] + cs[k][j-1][i] + \
            cs[k+1][j][i] + cs[k-1][j][i] + \
            cs[k][j][i+1] + cs[k][j][i-1] - \
            6*cs[k][j][i])
    cs = ns.copy()
    if t%f==0:
        cf = cf + 1
        heatmap[cf] = cs
    return heatmap

heat_frames = solve_heat(heat_frames, turkey_bool)
heat_frames -= 273.15
t = np.linspace(0, 10, len(heat_frames))
plt.imshow(heat_frames[-1][10])
heat_frames[3599][10]
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))
a = ax.contourf(heat_frames[10*67][10], 100, cmap=my_cmap,
    vmin=rawturk_temp-273.15, vmax = oven_temp-273.15)
cbar = fig.colorbar(a)
cbar.set_label('Temp [ $^{\circ}$ C]', fontsize=15)
ax.set_title('Time = {:.2f} hours'.format(100*67/3600), fontsize=20)
my_cmap = plt.get_cmap('inferno')
def init():
    a = ax.contourf(heat_frames[0][10], 100, cmap=my_cmap,
        vmin=rawturk_temp-273.15, vmax = oven_temp-273.15)
    cbar = fig.colorbar(a)
    cbar.set_label('Temp [ $^{\circ}$ C]')

```

```

def animate(i):
    ax.clear()

    ax.contourf(heat_frames[10*i][10], 100, cmap=my_cmap,
               vmin=rawturk_temp-273.15, vmax = oven_temp-273.15)

    ax.set_title('Time = {:.2f} hours'.format(100*i/3600), fontsize=20)

    return fig,

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,6))

ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, init_func=init,
                              frames=359, interval=50)

ani.save('cooked.gif', writer='pillow', fps=30)

avg_temp = np.array([heat_frame[turkey_bool].mean() for heat_frame in heat_frames])
min_temp = np.array([heat_frame[turkey_bool].min() for heat_frame in heat_frames])
std_temp = np.array([heat_frame[turkey_bool].std() for heat_frame in heat_frames])

plt.figure(figsize=(9,5))

plt.plot(t, avg_temp, label='average')
plt.plot(t, min_temp, label='minimum')

plt.axhline(80, color='k', ls='--')

plt.xlabel('Time[hours]')
plt.ylabel('Temp [ $^{\circ}$ C]')

plt.grid()

plt.legend()

plt.savefig('for_vid.png', dpi=200)

```

4. Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

```

import numpy as np

import scipy as sp

from scipy.integrate import quad

import matplotlib.pyplot as plt

```

```

import sympy as smp

import plotly.graph_objects as go

from IPython.display import HTML

t = smp.symbols('t', positive=True)

x, y, z = smp.symbols('x y z')

r = smp.Matrix([x, y, z])

r_p = smp.Matrix([smp.cos(4*t), smp.sin(4*t), t])

sep = r - r_p

dr_pdt = smp.diff(r_p, t).norm().simplify()

lam = smp.integrate(dr_pdt, (t, 0, 2*smp.pi))

integrand = lam * sep/sep.norm()**3 * dr_pdt

dExdt = smp.lambdify([t, x, y, z], integrand[0])

dEydt = smp.lambdify([t, x, y, z], integrand[1])

dEzdt = smp.lambdify([t, x, y, z], integrand[2])

def E(x, y, z):

    return np.array([quad(dExdt, 0, 2*np.pi, args=(x, y, z))[0],
quad(dEydt, 0, 2*np.pi, args=(x, y, z))[0],
quad(dEzdt, 0, 2*np.pi, args=(x, y, z))[0]])

x = np.linspace(-2, 2, 10)

y = np.linspace(-2, 2, 10)

z = np.linspace(0, 2*np.pi, 10)

xv, yv, zv = np.meshgrid(x, y, z)

E_field = np.vectorize(E, signature='((),(),()->(n)')(xv, yv, zv)

Ex = E_field[:, :, :, 0]

Ey = E_field[:, :, :, 1]

Ez = E_field[:, :, :, 2]

plt.hist(Ex.ravel(), bins=100, histtype='step', label='Ex')

```

```

plt.hist(Ey.ravel(), bins=100, histtype='step',label='Ey')
plt.hist(Ez.ravel(), bins=100, histtype='step',label='Ez')
plt.legend()
plt.xlabel('Electric Field Magnitude')
plt.ylabel('Frequency')
plt.show()
E_max = 150
Ex[Ex>E_max] = E_max
Ey[Ey>E_max] = E_max
Ez[Ez>E_max] = E_max
Ex[Ex<-E_max] = -E_max
Ey[Ey<-E_max] = -E_max
Ez[Ez<-E_max] = -E_max
tt = np.linspace(0, 2*np.pi, 1000)
lx, ly, lz = np.cos(4*tt), np.sin(4*tt), tt
data = go.Cone(x=xv.ravel(), y=yv.ravel(), z=zv.ravel(),
u=Ex.ravel(), v=Ey.ravel(), w=Ez.ravel(),
colorscale='Inferno', colorbar=dict(title='$x^2$'),
sizemode="scaled", sizeref=0.5)
layout = go.Layout(title=r'Plot Title',
scene=dict(xaxis_title=r'x',
yaxis_title=r'y',
zaxis_title=r'z',
aspectratio=dict(x=1, y=1, z=1),
camera_eye=dict(x=1.2, y=1.2, z=1.2)))
fig = go.Figure(data = data, layout=layout)
fig.add_scatter3d(x=lx, y=ly, z=lz, mode='lines',

```

```
line = dict(color='green', width=10))
HTML(fig.to_html(default_width=1000, default_height=600))
```

5. Óptica de Fourier

```
import numpy as np

import scipy as sp

from scipy.integrate import quad

from scipy.integrate import dblquad

import matplotlib.pyplot as plt

import sympy as smp

import plotly.graph_objects as go

from IPython.display import HTML

t = smp.symbols('t', real=True)

x, y, z = smp.symbols('x y z', real=True)

xp, yp, zp = smp.symbols('x_p y_p z_p', cls=smp.Function)

Px, Py, Pz = smp.symbols('P_x, P_y, P_z', cls=smp.Function)

xp = xp(t)

yp = yp(t)

zp = zp(t)

zp

Px = 0

Py = 0

Pz = smp.Abs(zp)

Pz

r = smp.Matrix([x, y, z])

r_p = smp.Matrix([xp, yp, zp])

P = smp.Matrix([Px, Py, Pz])

sep = r - r_p
```

```

sep
integrand = P.dot(sep)/sep.norm()**3 * smp.diff(r_p, t).norm()
integrand
integrand = integrand.subs([(xp, 2*smp.cos(4*t)),
(y, 2*smp.sin(4*t)),
(z, t)]).simplify()
integrand
integrand_f = smp.lambdify([t, x, y, z], integrand)
integrand_f(3,0,0,0)
def Phi(x, y, z):
    return quad(integrand_f, -np.pi/2, np.pi/2, args=(x, y, z))[0]
x = np.linspace(-1, 1, 30)
y = np.linspace(-1, 1, 30)
xv, yv = np.meshgrid(x, y)
phi = np.vectorize(Phi)(xv, yv, 0)
fig, ax = plt.subplots(1,1,figsize=(5,5))
cs = plt.contour(xv,yv,phi, levels=15, cmap='inferno')
plt.clabel(cs, fontsize=8)
plt.xlabel('$x/R$', fontsize=20)
plt.ylabel('$y/R$', fontsize=20)
plt.show()

```

6. Ecuación de potencial eléctrico de Laplace

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
from matplotlib import animation
from matplotlib.animation import PillowWriter

```

```

plt.style.use(['science', 'notebook'])

from itertools import combinations

n_particles = 16

r = np.random.random((2,n_particles))

# Color particles the start on either side
ixr = r[0]>0.5 #right
ixl = r[0]<=0.5 #left

ids = np.arange(n_particles)

plt.figure(figsize=(5,5))

plt.scatter(r[0][ixr],r[1][ixr], color='r', s=6)
plt.scatter(r[0][ixl],r[1][ixl], color='b', s=6)

v = np.zeros((2,n_particles))

v[0][ixr] = -500
v[0][ixl] = 500

ids_pairs = np.asarray(list(combinations(ids,2)))
ids_pairs

x_pairs = np.asarray(list(combinations(r[0],2)))
x_pairs

dx_pairs = np.diff(x_pairs, axis=1).ravel()
dx_pairs

y_pairs = np.asarray(list(combinations(r[1],2)))
y_pairs

dy_pairs = np.diff(y_pairs, axis=1).ravel()
dy_pairs

d_pairs = np.sqrt(dx_pairs**2 + dy_pairs**2)
d_pairs

radius = 0.06

```

```

ids_pairs_collide = ids_pairs[d_pairs < 2*radius]

ids_pairs_collide

v1 = v[:,ids_pairs_collide[:,0]]
v2 = v[:,ids_pairs_collide[:,1]]
r1 = r[:,ids_pairs_collide[:,0]]
r2 = r[:,ids_pairs_collide[:,1]]

v1new = v1 - np.diag((v1-v2).T@(r1-r2))/np.sum((r1-r2)**2, axis=0) * (r1-r2)
v2new = v2 - np.diag((v2-v1).T@(r2-r1))/np.sum((r2-r1)**2, axis=0) * (r2-r1)

def get_delta_pairs(x):
    return np.diff(np.asarray(list(combinations(x,2))), axis=1).ravel()

def get_deltad_pairs(r):
    return np.sqrt(get_delta_pairs(r[0])**2 + get_delta_pairs(r[1])**2)

def compute_new_v(v1, v2, r1, r2):
    v1new = v1 - np.diag((v1-v2).T@(r1-r2))/np.sum((r1-r2)**2, axis=0) * (r1-r2)
    v2new = v2 - np.diag((v2-v1).T@(r2-r1))/np.sum((r2-r1)**2, axis=0) * (r2-r1)
    return v1new, v2new

def motion(r, v, id_pairs, ts, dt, d_cutoff):
    rs = np.zeros((ts, r.shape[0], r.shape[1]))
    vs = np.zeros((ts, v.shape[0], v.shape[1]))
    rs[0] = r.copy()
    vs[0] = v.copy()
    for i in range(1,ts):
        ic = id_pairs[get_deltad_pairs(r) < d_cutoff]
        v[:,ic[:,0]], v[:,ic[:,1]] = compute_new_v(v[:,ic[:,0]], v[:,ic[:,1]], r[:,ic[:,0]], r[:,ic[:,1]])
        v[0,r[0]>1] = -np.abs(v[0,r[0]>1])
        v[0,r[0]<0] = np.abs(v[0,r[0]<0])
        v[1,r[1]>1] = -np.abs(v[1,r[1]>1])

```

```

v[1,r[1]<0] = np.abs(v[1,r[1]<0])

r = r + v*dt

rs[i] = r.copy()

vs[i] = v.copy()

return rs, vs

radius = 0.06

rs, vs = motion(r, v, ids_pairs, ts=1000, dt=0.000008, d_cutoff=2*radius)

fig, ax = plt.subplots(1,1,figsize=(5,5))

xred, yred = rs[0][0][ixr], rs[0][1][ixr]

xblue, yblue = rs[0][0][ixl],rs[0][1][ixl]

circles_red = [plt.Circle((xi, yi), radius=radius, linewidth=0) for xi,yi in zip(xred,yred)]
circles_blue = [plt.Circle((xi, yi), radius=radius, linewidth=0) for xi,yi in zip(xblue,yblue)]

cred = matplotlib.collections.PatchCollection(circles_red, facecolors='red')

cblue = matplotlib.collections.PatchCollection(circles_blue, facecolors='blue')

ax.add_collection(cred)

ax.add_collection(cblue)

ax.set_xlim(0,1)

ax.set_ylim(0,1)

plt.show()

fig, ax = plt.subplots(1,1,figsize=(5,5))

def animate(i):

    ax.clear()

    xred, yred = rs[i][0][ixr], rs[i][1][ixr]

    xblue, yblue = rs[i][0][ixl],rs[i][1][ixl]

    circles_red = [plt.Circle((xi, yi), radius=radius, linewidth=0) for xi,yi in zip(xred,yred)]
    circles_blue = [plt.Circle((xi, yi), radius=radius, linewidth=0) for xi,yi in zip(xblue,yblue)]

    cred = matplotlib.collections.PatchCollection(circles_red, facecolors='red')

```

```

cblue = matplotlib.collections.PatchCollection(circles_blue, facecolors='blue')

ax.add_collection(cred)

ax.add_collection(cblue)

ax.set_xlim(0,1)

ax.set_ylim(0,1)

ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=500, interval=50)

ani.save('ani3.gif',writer='pillow',fps=30,dpi=100)

n_particles = 400

r = np.random.random((2,n_particles))

ixr = r[0]>0.5

ixl = r[0]<=0.5

ids = np.arange(n_particles)

ids_pairs = np.asarray(list(combinations(ids,2)))

v = np.zeros((2,n_particles))

v[0][ixr] = -500

v[0][ixl] = 500

radius = 0.0015

rs, vs = motion(r, v, ids_pairs, ts=1000, dt=0.000008, d_cutoff=2*radius)

fig, ax = plt.subplots(1,1,figsize=(5,5))

ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=500, interval=50)

ani.save('ani3.gif',writer='pillow',fps=30,dpi=100)

v = np.linspace(0, 2000, 1000)

a = 2/500**2

fv = a*v*np.exp(-a*v**2 / 2)

bins = np.linspace(0,1500,10)

plt.figure()

plt.hist(np.sqrt(np.sum(vs[400]**2, axis=0)), bins=bins, density=True)

```

```

plt.plot(v,fv)
plt.xlabel('Velocity [m/s]')
plt.ylabel('# Particles')
fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(20,10))
def animate(i):
    [ax.clear() for ax in axes]
    ax = axes[0]
    xred, yred = rs[i][0][ixr], rs[i][1][ixr]
    xblue, yblue = rs[i][0][ixl],rs[i][1][ixl]
    circles_red = [plt.Circle((xi, yi), radius=4*radius, linewidth=0) for xi,yi in zip(xred,yred)]
    circles_blue = [plt.Circle((xi, yi), radius=4*radius, linewidth=0) for xi,yi in zip(xblue,yblue)]
    cred = matplotlib.collections.PatchCollection(circles_red, facecolors='red')
    cblue = matplotlib.collections.PatchCollection(circles_blue, facecolors='blue')
    ax.add_collection(cred)
    ax.add_collection(cblue)
ax.set_xlim(0,1)
ax.set_ylim(0,1)
ax.tick_params(axis='x', labelsz=15)
ax.tick_params(axis='y', labelsz=15)
ax = axes[1]
ax.hist(np.sqrt(np.sum(vs[i]**2, axis=0)), bins=bins, density=True)
ax.plot(v,fv)
ax.set_xlabel('Velocity [m/s]')
ax.set_ylabel('# Particles')
ax.set_xlim(0,1500)
ax.set_ylim(0,0.006)
ax.tick_params(axis='x', labelsz=15)

```

```

ax.tick_params(axis='y', labelsz=15)

fig.tight_layout()

ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=500, interval=50)

ani.save('ani.gif',writer='pillow',fps=30,dpi=100)

```

7. Ecuación diferencial de materia oscura

```

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

plt.style.use(['science', 'notebook', 'dark_background'])

from scipy.linalg import eigh_tridiagonal

V0 = 36

E = np.linspace(-V0, 0, 100000)

RHS = np.sqrt(-E)

LHS1 = np.sqrt(E+V0)*np.tan(np.sqrt(E+V0))

LHS2 = -np.sqrt(E+V0)/np.tan(np.sqrt(E+V0+1e-9))

plt.figure(figsize=(6,3))

plt.scatter(E, LHS1, s=1, color='blue')

plt.scatter(E, LHS2, s=1, color='blue')

plt.scatter(E, RHS, s=1, color='red')

plt.ylim(-10,10)

plt.grid(color='grey')

plt.xlabel('$E$')

plt.show()

def f1(E, V0):

    return np.sqrt(E+V0)*np.tan(np.sqrt(E+V0)) - np.sqrt(-E)

def f2(E, V0, eps=1e-10):

    return np.sqrt(E+V0+eps)/np.tan(np.sqrt(E+V0+eps)) + np.sqrt(-E)

plt.figure(figsize=(6,3))

```

```

plt.scatter(E,f1(E,V0), s=1, color='blue')
plt.scatter(E,f2(E,V0), s=1, color='blue')
plt.grid(color='grey')
plt.ylim(-10,10)
plt.xlabel('$E$')
plt.show()
zero_crossings = np.where((np.abs(f1s)<3).astype(float)[:1]
* np.diff(np.sign(f1s)))[0](E[zero_crossings] + E[zero_crossings+1])/2
f1s = f1(E, V0)
f2s = f2(E, V0)
zero_crossings_even = np.where(np.diff(np.sign(f1s)) * (np.abs(f1s[:1])<3).astype(float))[0]
zero_crossings_odd = np.where(np.diff(np.sign(f2s)) * (np.abs(f2s[:1])<3).astype(float))[0]
zero_crossings = np.sort(np.concatenate([zero_crossings_even, zero_crossings_odd]))
Es_method1 = (E[zero_crossings] + E[zero_crossings+1])/2
N = 100000
x = np.linspace(-3,3,N)
dx = np.diff(x)[0]
main_diag = 2*np.ones(N)/dx**2 -V0*((x>=-1)*(x<=1)).astype(float)
off_diag = -np.ones(N-1)/dx**2
Es_method2, psis = eigh_tridiagonal(main_diag, off_diag, select='v', select_range=(-V0,0))
plt.figure(figsize=(6,3))
plt.plot(x, np.abs(psis.T[0])**2)
plt.plot(x, np.abs(psis.T[1])**2)
plt.plot(x, np.abs(psis.T[2])**2)
plt.plot(x, np.abs(psis.T[3])**2)
plt.xlabel('x/a')
plt.show()

```

```
Es_method2
```

```
errs = 100 * np.abs(Es_method1 - Es_method2) / (0.5*(Es_method1 + Es_method2))
```

```
errs()
```

8. Fijación de ondas y polaridad celular de un sistema de reacción-difusión biestable.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, v)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(u, v)$$

Bajo condiciones de frontera de Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0,L} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0,L} = 0 \end{cases}$$

```
import numpy
```

```
from matplotlib import pyplot
```

```
numpy.set_printoptions(precision=3)
```

```
L = 1
```

```
J = 100
```

```
dx = float(L)/float(J-1)
```

```
x_grid = numpy.array([j*dx for j in range(J)])
```

```
T = 200
```

```
N = 1000
```

```
dt = float(T)/float(N-1)
```

```
t_grid = numpy.array([n*dt for n in range(N)])
```

```
D_v = float(10.)/float(100.)
```

```
D_u = 0.01 * D_v
```

```
k0 = 0.067
```

```
f = lambda u, v: dt*(v*(k0 + float(u*u)/float(1. + u*u)) - u)
```

```
g = lambda u, v: -f(u,v)
```

```
sigma_u = float(D_u*dt)/float((2.*dx*dx))
```

```

sigma_v = float(D_v*dt)/float((2.*dx*dx))
total_protein = 2.26
no_high = 10
U = numpy.array([0.1 for i in range(no_high,J)] + [2. for i in range(0,no_high)])
V = numpy.array([float(total_protein-dx*sum(u))/float(J*dx) for i in range(0,J)])
ylim((0., 2.1))
xlabel('x'); ylabel('concentration')
pyplot.plot(x_grid, U)
pyplot.plot(x_grid, V)
pyplot.show()
A_u = numpy.diagflat([-sigma_u for i in range(J-1)], -1) +\
numpy.diagflat([1.+sigma_u]+[1.+2.*sigma_u for i in range(J-2)]+[1.+sigma_u]) +\
numpy.diagflat([-sigma_u for i in range(J-1)], 1)
B_u = numpy.diagflat([sigma_u for i in range(J-1)], -1) +\
numpy.diagflat([1.-sigma_u]+[1.-2.*sigma_u for i in range(J-2)]+[1.-sigma_u]) +\
numpy.diagflat([sigma_u for i in range(J-1)], 1)
A_v = numpy.diagflat([-sigma_v for i in range(J-1)], -1) +\
numpy.diagflat([1.+sigma_v]+[1.+2.*sigma_v for i in range(J-2)]+[1.+sigma_v]) +\
numpy.diagflat([-sigma_v for i in range(J-1)], 1)
B_v = numpy.diagflat([sigma_v for i in range(J-1)], -1) +\
numpy.diagflat([1.-sigma_v]+[1.-2.*sigma_v for i in range(J-2)]+[1.-sigma_v]) +\
numpy.diagflat([sigma_v for i in range(J-1)], 1)
Para confirmar, así es como se ve
A_u:print A_u
f_vec = lambda U, V: numpy.multiply(dt, numpy.subtract(numpy.multiply(V,
numpy.add(k0, numpy.divide(numpy.multiply(U,U), numpy.add(1., numpy.multiply(U,U))))),
U))
print f(U[0], V[0])

```

```

U_record = []
V_record = []
U_record.append(U)
V_record.append(V)
for ti in range(1,N):
    U_new = numpy.linalg.solve(A_u, B_u.dot(U) + f_vec(U,V))
    V_new = numpy.linalg.solve(A_v, B_v.dot(V) - f_vec(U,V))
    U = U_new
    V = V_new
    U_record.append(U)
    V_record.append(V)
ylim((0., 2.1))
xlabel('x'); ylabel('concentration')
pyplot.plot(x_grid, U)
pyplot.plot(x_grid, V)
pyplot.show()
U_record = numpy.array(U_record)
V_record = numpy.array(V_record)
fig, ax = subplots()
xlabel('x'); ylabel('t')
heatmap = ax.pcolor(x_grid, t_grid, U_record, vmin=0., vmax=1.2)

```

17. Conclusiones

1. Se ha desarrollado un estudio extenso de las ecuaciones diferenciales parciales y sus principales ecuaciones, relacionandola con las caracterizaciones analíticas y teoricas con otros aspectos de las ciencias.
2. Las resoluciones de los ejercicios presentados constituyen una mejor comprensión y un aporte al proceso de enseñanza aprendizaje para los estudiantes de matemática e ingeniería; ya que la metodología de abordaje pasa por ejemplos introductorios de EDP, hasta de solución de modelado de aplicaciones específicas a otras ciencias.
3. La selección de material bibliográfico, artículos científicos y ejemplos aplicados a las ciencias exactas e ingenieriles, acá desarrollados, describen mejor la amplia gama del alcance de las EDP. Si bien se cubren parcialmente (menos en su totalidad) la aplicabilidad de las EDP porque siguen en desarrollo y creación de nuevas teorías, por mucho prepara al lector a la comprensión de soluciones de problemas de modelado y replicarlo en situaciones del mismo contexto.
4. En la actualidad y bajo un cambiante entorno de enseñanza en vías de actualización, respecto a herramientas computacionales de desarrollo y programación, es necesario tomar el criterio de selección para un lenguaje robusto y amplio que de salida efeciente y optima a resoluciones coyunturales de la ciencia. Phyton en un contexto global, cubre las expectativas, por ello las resoluciones numéricas (y analíticas en casos necesarios) de las EDP que se aportan en la tesis, con un énfasis de guía paso a paso.
5. Caracterizar de manera analíticas y numéricas los modelos de las ecuaciones diferenciales parciales de la ecuación de la onda, ecuación de calor, ecuaciones de Laplace y de Poisson de manera analítica y numérica.
6. Sintetizar los métodos clásicos de soluciones de las ecuaciones de la física matemática mediante diversas técnicas de solución de las ecuaciones diferenciales parciales.
7. Presentar teoría y ejemplos referentes a las ecuaciones clásicas de las ecuaciones diferenciales parciales, aplicado a la resolución de problemas intradisciplinarios de las ciencias experimentales y exactas.
8. Simular mediante el paradigma de programacion funcional en el lenguaje de alto nivel Python, diversos algoritmos referidos a las ecuaciones diferenciales parciales.

18. Recomendaciones

1. A los estudiantes: es recomendable cimentar sus estudios de pregrado en cálculo: infinitesimal, numérico y operacional; sostener un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, con talleres y laboratorios computacionales que permitan complementar su conocimiento.
2. Al lector: complementar o comprobar las soluciones acá descritas, para validar mi aporte o medir sus fortalezas y emprender una nueva investigación en el campo de las EDP. Ésto con el fin de recopilar sugerencias o mejoras a un tema no tan plausible de las matemáticas.
3. A las instituciones de educación superior: reordenar y/o reformar los programas de estudio a aquellas carreras que contengan un rigor científico aplicable; extendiendo y complementando las ciencias básicas específicas sobre las ecuaciones en derivadas parciales.
4. Incluir en los planes de estudios de las carreras de postgrados de matemáticas e ingenierías una asignatura referida a las ecuaciones diferenciales parciales o ecuaciones de la física-matemática.
5. Mejorar el plan de estudios de las carreras de postgrados de matemáticas e ingenierías incluyendo un curso de métodos numéricos complementado con un curso superior de programación en el lenguaje de alto nivel Python, bajo el paradigma de la programación orientado a objetos (POO).

19. Referencias Bibliográficas

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I., Handbook of Mathematical Functions, Dover Inc., New York, 1972
- [2] Apóstol, T., Calculus, Volumen II, Segunda Edición, Ed. Reverté, Barcelona, 2001
- [3] Barton, G., Elements of Green's Functions and Propagation - Potentials, Diffusion and Waves, Clarendon Press, Oxford, 1991
- [4] Birkoff, G., Maclane, S., A Survey of Modern Algebra, Macmillan, New York, 1951
- [5] Bitsadze, A., Equations of Mathematical Physics, MIR, Moscú, 1980
- [6] Bitsadze, A.V., Kalinichenko, D., A collection of problems on the equations of mathematical physics, MIR, Moscú, 1980
- [7] Brown, J.W., Churchill, R.V., Fourier Series and Boundary Value Problems, MacGraw-Hills Inc., New York, 1993
- [8] Courant, R., Differential and Integral Calculus Methods, Vol I, II, Nordeman Publishing Company, New York, 1942
- [9] Courant, R., Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics, Vol I, II, Wiley Classics Edition, 1989
- [10] Dym, H., McKean, H.P., Fourier Series and Integrals, Academic Press, 1972
- [11] Duff, G., Naylor, D., Differential Equations of Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1966
- [12] Elsgoltz, L., Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, MIR, Moscú, 1969
- [13] Erdelyi, A., Higher Transcendental Functions, MacGraw-Hill Inc., New York, 1955
- [14] Folland, G., Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1976
- [15] Gelfand, I.M., Shilov, G.E., Generalized Functions, Vol. I-III, Academic Press, New York & London, 1977
- [16] Godunov, S.K., Ecuaciones de la Física Matemática, MIR, 1978
- [17] Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, San Diego, 2000
- [18] Guzmán, M., Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Editorial Alhambra, 1975
- [19] Haberman, R., Elementary Applied Partial Differential Equations, Prentice-Hall, 1983
- [20] Hadamard, J., La theorie des equations aux derivées partielles, Editions Scientifiques, 1964
- [21] Hellwig, G., Partial Differential Equations, Blaisdell Pub. Co., New York, 1964
- [22] John, F., Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1982
- [23] Kellogg, O.D., Foundations of Potential Theory, Springer-Verlag, 1929

- [24] Krasnov, M., Kisielov, A., Makarenko, G., Ecuaciones integrales, MIR, Moscú, 1982
- [25] Larry. C.A., Elementary Partial Differential Equations with Boundary Value Problems, Academic Press College Division, 1986
- [26] Maki, D.P, Maynard T., Mathematical Models and Applications, Prentice Hall, New York, 1973
- [27] Mijailov, V.P., Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales, MIR, Moscú, 1980
- [28] Miller, F.M., Partial Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1952
- [29] Mizohata, S., Theory of Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 1973
- [30] Petrovsky, I.G., Lectures on Partial Differential Equations, Interscience Publications, New York, 1954
- [31] Petrovsky, I.G., Lectures on Integral Equations, MIR, Moscú, 1976
- [32] Piskunov, Cálculo diferencial e integral, Tomo II, MIR, Moscú, 1969
- [33] Protter, M.H. Weinberger, H.F., Maximum Principles in Differential Equations, Springer-Verlag, 1984
- [34] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., Trejo, C.A., Análisis Matemático, Vol. II, Kapeluz, 1959
- [35] Smirnov, M., A course of Higher Mathematics, vol. IV, Pergamon Press, 1964
- [36] Smirnov, M., Problemas de ecuaciones de la física matemática, MIR, Moscú, 1976
- [37] Sneddon. I.N., Elements of Partial Differential Equations, MacGraw-Hills Inc., 1957
- [38] Sneddon. I.N., Fourier Transforms, MacGraw-Hills Inc., 1951
- [39] Sobolev, S.L., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Dover, 1989
- [40] Sommerfeld, Partial Differential Equations in Physics, Academic Press, 1949
- [41] Spiegel, M.R., Applied Differential Equations, Prentice Hall, 1958
- [42] Tijonov, A., Samarsky, A., Ecuaciones de la Física Matemática, MIR, Moscú, 1972
- [43] Treves, F., Basic Linear Partial Differential Equations, Academic Press, 1975
- [44] Watson, G.N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1966
- [45] Weinberger. H., Partial Differential Equations, Blaisdel International Textbook Series, 1957
- [46] Zanderer, Partial Differential Equations of Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983

20. Webgrafía

1. Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales: <http://hdl.handle.net/10784/4605>
2. Funciones De Bessel y Sus Aplicaciones En Las Telecomunicaciones y Electrodinámica: <https://steemit.com/stem-espanol/@wilians/funciones-de-bessel-y-sus-aplicaciones-en-las-telecomunicaciones-y-electrodinamica>
3. Archivo de verificación y validación de la alianza NPARC: <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/archive.html>.
4. Fijación de ondas y polaridad celular de un sistema de reacción-difusión biestable: <https://doi.org/10.1529/biophysj.107.120824>
5. Archivo: Navier Stokes vía Crank Nicolson.webm: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fb/Navier_Stokes_via_Crank_Nicolson.webm.

21. Anexos

21.1. Notas históricas de Series y Transformadas de Fourier

En diciembre de 1807 Fourier presentó a la Academia de Ciencias de París un manuscrito titulado *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*. Los miembros de la Academia encargados de juzgarlo no emitieron un informe y expresaron sus dudas sobre el trabajo ²⁴. Pero el tema era suficientemente interesante para que la Academia propusiese como tema del gran premio de 1812, “dar la teoría matemática de las leyes de propagación del calor y comparar los resultados de esta teoría con los de experiencias exactas”. Fourier mejoró su manuscrito anterior y presentó al concurso uno nuevo titulado *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*. Ganó el premio, pero los académicos añadieron a sus elogios ciertas reservas, indicando que “*deja algo que desear, sea en cuanto a la generalidad, sea incluso del lado del rigor*”. Ninguna de las memorias fue publicada en esos años, pero Fourier culminó su trabajo con un libro titulado *Théorie analytique de la chaleur* y publicado en 1822, que el físico Arnold Sommerfeld calificó como “la Biblia de la Física Matemática” y James Clerk Maxwell de “gran poema matemático”.

El problema de la representación de una función en serie trigonométrica tenía precedentes en el siglo XVIII, como veremos en la siguiente sección. Sin embargo, las aportaciones de Fourier fueron cruciales para clarificar una situación que las discusiones del siglo anterior mantenían demasiado oscura; esta dificultad para superar los conceptos heredados del siglo XVIII hizo dudar de la validez del trabajo de Fourier a los ilustres matemáticos franceses de la época. Fourier encontró la expresión de los coeficientes²⁵ e interpretó las integrales como áreas bajo curvas, lo que le permitía hacerlos válidos para funciones bastante generales y desprovistas de una expresión analítica. Vio claramente que la igualdad entre la serie y la función ocurre en un intervalo, no necesariamente fuera de él, y que en intervalos más pequeños que un periodo series trigonométricas distintas pueden coincidir

²⁴Riemann escribió que “esta afirmación la de que una función arbitraria se puede representar en serie trigonométrica] resultó tan inesperada para el viejo Lagrange, que se opuso a ella de la forma más decidida”. Hay que valorar más el trabajo de Fourier por sí mismo que por haber ganado el premio.

La otra memoria que se presentó no teorizó ecuaciones ni términos científicos y, en cambio, contenía frases como: “El fuego ha recibido su principio del autor de todas las cosas y se propaga como todo lo que existe en la naturaleza según el orden inmutable del creador”.

²⁵En el prólogo del libro *Partial Differential Equations in Physics* de 1949.

Según se menciona en el artículo *History of Mathematics* de la *Encyclopaedia Britannica*.

Es verdad que aparecen parcialmente en un texto de Euler de 1777 e incluso en un trabajo de Clairaut de 1757, pero Fourier los dedujo directamente y los situó como claves para escribir la serie trigonométrica.

con la misma función.

Cuestiones que hoy nos pueden parecer elementales con un concepto moderno de función eran realmente avanzadas en esa época y fueron decisivas para clarificar las ideas. Desde el punto de vista físico, Fourier fue el primero en deducir la ecuación diferencial que describe la difusión del calor e inventó el método de separación de variables para su resolución, reconoció la potencia de este método y lo aplicó a otras ecuaciones. La integral, ahora transformada de Fourier, aparece por primera vez en su trabajo de 1811 como un paso al límite y fue incorporada también al libro.

1. Jean-Baptiste-Joseph Fourier (Auxerre, Francia, 1768 - París, 1830) Ingeniero y matemático francés. Era hijo de un sastre, y fue educado por los benedictinos. Los puestos en el cuerpo científico del ejército estaban reservados para familias de estatus reconocido, así que aceptó una cátedra militar de matemáticas.



Joseph Fourier

Durante la Revolución Francesa tuvo un papel destacado en su propio distrito, y fue recompensado con una candidatura para una cátedra en la École Polytechnique. Fourier acompañó a Napoleón en su expedición oriental de 1798, y fue nombrado gobernador del Bajo Egipto. Aislado de Francia por la flota británica, organizó los talleres con los que el ejército francés debía contar para sus suministros de munición. También aportó numerosos escritos sobre matemáticas al Instituto Egipcio que Napoleón fundó en El Cairo.

Tras las victorias británicas y la capitulación de los franceses al mando del general Menou en 1801, Joseph Fourier volvió a Francia, donde fue nombrado prefecto del departamento de Isère, y empezó sus experimentos sobre la propagación del calor. Se trasladó a París en 1816, y en 1822 publicó Teoría analítica del calor, basándose en parte en la ley del enfriamiento de Newton.

A partir de esta teoría desarrolló la denominada «serie de Fourier», de notable importancia en el posterior desarrollo del análisis matemático, y con interesantes aplicaciones a la resolución de numerosos problemas de física (más tarde, Dirichlet consiguió una demostración rigurosa de diversos teoremas que Fourier había planteado). Dejó inacabado su trabajo sobre resolución

de ecuaciones, que se publicó en 1831 y que contenía una demostración de su teorema sobre el cálculo de las raíces de una ecuación algebraica.

2 Leonhard Euler (Basilea, Suiza, 1707 - San Petersburgo, 1783) Matemático suizo. Las facultades que desde temprana edad demostró para las matemáticas pronto le ganaron la estima del patriarca de los Bernoulli, Johann, uno de los más eminentes matemáticos de su tiempo y profesor de Euler en la Universidad de Basilea. Tras graduarse en dicha institución en 1723, cuatro años más tarde fue invitado personalmente por Catalina I para convertirse en asociado de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, donde coincidió con otro miembro de la familia Bernoulli, Daniel, a quien en 1733 relevó en la cátedra de matemáticas. A causa de su extrema dedicación al trabajo, dos años más tarde perdió la visión del ojo derecho, hecho que no afectó ni a la calidad ni al número de sus hallazgos.



Hasta 1741, año en que por invitación de Federico II el Grande se trasladó a la Academia de Berlín, refinó los métodos y las formas del cálculo integral (no sólo gracias a resultados novedosos, sino también a un cambio en los habituales métodos de demostración geométricos, que substituyó por métodos algebraicos), que convirtió en una herramienta de fácil aplicación a problemas de física. Con ello configuró en buena parte las matemáticas aplicadas de la centuria siguiente (a las que contribuiría luego con otros resultados destacados en el campo de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales), además de desarrollar la teoría de las funciones trigonométricas y logarítmicas (introduciendo de paso la notación e para definir la base de los logaritmos naturales).

En 1748 publicó la obra *Introductio in analysim infinitorum*, en la que expuso el concepto de función en el marco del análisis matemático, campo en el que así mismo contribuyó de forma decisiva con resultados como el teorema sobre las funciones homogéneas y la teoría de la convergencia. En el ámbito de la geometría desarrolló conceptos básicos como los del ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo, y revolucionó el tratamiento de las funciones trigonométricas al adoptar ratios numéricos y relacionarlos con los números

complejos mediante la denominada identidad de Euler; a él se debe la moderna tendencia a representar cuestiones matemáticas y físicas en términos aritméticos.

En el terreno del álgebra obtuvo así mismo resultados destacados, como el de la reducción de una ecuación cúbica a una bicuadrada y el de la determinación de la constante que lleva su nombre. A lo largo de sus innumerables obras, tratados y publicaciones introdujo gran número de nuevas técnicas y contribuyó sustancialmente a la moderna notación matemática de conceptos como función, suma de los divisores de un número y expresión del número imaginario raíz de menos uno. También se ocupó de la teoría de números, campo en el cual su mayor aportación fue la ley de la reciprocidad cuadrática, enunciada en 1783.

A raíz de ciertas tensiones con su patrón Federico el Grande, regresó nuevamente a Rusia en 1766, donde al poco de llegar perdió la visión del otro ojo. A pesar de ello, su memoria privilegiada y su prodigiosa capacidad para el tratamiento computacional de los problemas le permitieron continuar su actividad científica; así, entre 1768 y 1772 escribió sus *Lettres à une princesse d'Allemagne*, en las que expuso concisa y claramente los principios básicos de la mecánica, la óptica, la acústica y la astrofísica de su tiempo.

De sus trabajos sobre mecánica destacan, entre los dedicados a la mecánica de fluidos, la formulación de las ecuaciones que rigen su movimiento y su estudio sobre la presión de una corriente líquida, y, en relación a la mecánica celeste, el desarrollo de una solución parcial al problema de los tres cuerpos -resultado de su interés por perfeccionar la teoría del movimiento lunar-, así como la determinación precisa del centro de las órbitas elípticas planetarias, que identificó con el centro de la masa solar. Tras su muerte, se inició un ambicioso proyecto para publicar la totalidad de su obra científica, compuesta por más de ochocientos tratados, lo cual lo convierte en el matemático más prolífico de la historia.

- 3 Jean le Rond D'Alembert (París, 1717 - id., 1783) Físico, matemático y filósofo francés, destacada figura de la Ilustración. Hijo natural de Madame de Tencin y el caballero Destouches, un general de artillería, fue abandonado en las escalinatas de la capilla de Saint Jean-Le-Rond, contigua a Notre-Dame de París, circunstancia a la que debe su nombre. Jean le Rond

D'Alembert (retrato de Maurice de La Tour)



Jean le Rond d'Alembert

Confiado a los cuidados de la esposa de un vidriero, a la que consideró siempre como su verdadera madre, recibió una pequeña renta de su padre que le permitió sufragar sus estudios de derecho y teología, pronto abandonados en favor de las matemáticas. Sus precoces publicaciones sobre cálculo integral le valieron el ingreso en la Academia de las Ciencias de París cuando tan sólo contaba veinticuatro años.

Entre 1743 y 1754 publicó sus obras científicas más importantes, la primera de las cuales fue el famoso Tratado de dinámica (1743), en el que expuso la mecánica de los cuerpos rígidos basándose en el principio que lleva su nombre y que establece la existencia de equilibrio entre las acciones y las reacciones internas de un sistema rígido. La aplicación de dicho principio a los fluidos dio pie a su Tratado del equilibrio y movimiento de los fluidos (1744), y desarrolló aquellos aspectos de la cuestión que hacían referencia al movimiento del aire en la *Théorie générale des vents* (1745); en este último trabajo se enfrentó con la demostración del llamado teorema fundamental del álgebra, para el cual halló una demostración parcial.

En 1747 aplicó el cálculo diferencial al análisis del problema físico de la cuerda vibrante, lo cual le condujo a la resolución de una ecuación diferencial en derivadas parciales para la que encontró una solución. En las *Investigaciones sobre la precesión de los equinoccios* (1749) estableció las ecuaciones del movimiento de la Tierra en torno a su centro de gravedad y abordó el problema de los tres cuerpos (relaciones entre las fuerzas y los movimientos correspondientes del Sol, la Tierra y la Luna).

En 1754 fue elegido miembro de la Académie Française, de la que se convirtió en secretario perpetuo en 1772. Junto con Denis Diderot, D'Alembert asumió la dirección de la Enciclopedia, contribuyendo a ella con el famoso Discurso preliminar; en él expuso su visión de la historia de la cultura como desarrollo del conocimiento humano, de modo que, en el estudio de dicha historia, el hombre había de conocerse a sí mismo y hallar una guía para su acción futura.

Redactó también casi por completo los artículos de matemáticas, así como buena parte de los filosóficos, amén de numerosos artículos dedicados a la física y a otras materias; su artículo Genève, inspirado por Voltaire, provocó las protestas de Rousseau.

El pensamiento de D'Alembert combina muchos de los elementos del empirismo y el racionalismo de los ilustrados. Consideró la filosofía como la unificadora de los diversos saberes, sistema racional de las relaciones entre principios y fenómenos, viendo en estos últimos el fundamento del conocimiento. Su racionalismo lo llevó a luchar contra toda creencia en una realidad trascendente, mítica o religiosa, que consideraba oscurantista; y su empirismo lo llevó a oponerse a cualquier principio metafísico que eludiera el contraste mediante la experiencia. Adversario, en este sentido, de la religión, la consideró como un instrumento para regular las costumbres del pueblo y propugnó un catecismo laico cuyo fin supremo fuera la utilidad social.

4 Familia Bernoulli. Familia de matemáticos y científicos suizos en la que sobresalieron Jakob Bernoulli (Basilea, Suiza, 1654 - 1705), Johann Bernoulli (Basilea, 1667 - 1748) y Daniel Bernoulli (Groninga, Holanda, 1700 - Basilea, 1782). Jakob Bernoulli, el iniciador de la dilatada saga de los Bernoulli, nació en el seno de una familia de comerciantes procedentes de los Países Bajos. Tras licenciarse en teología y haber estudiado matemáticas y astronomía contra la voluntad familiar, entre 1677 y 1682 viajó a Francia (donde se familiarizó con el pensamiento de Descartes), los Países Bajos e Inglaterra.



Jakob y Johann Bernoulli

De regreso en Suiza, desde 1683 enseñó mecánica en Basilea y en secreto introdujo en el estudio de las matemáticas a su hermano Johann Bernoulli, a quien su padre había destinado a la medicina. En 1687 se hizo cargo de la cátedra de matemáticas en la Universidad de Basilea. Con su hermano, estudió las aportaciones de Leibniz al cálculo infinitesimal, el cual aplicó al estudio de la catenaria (la curva que forma una cadena suspendida por sus extremos), y en 1690 introdujo el término de integral en su sentido moderno.

Al año siguiente, Johann Bernoulli solucionó el problema de la catenaria, lo cual le valió situarse entre los matemáticos de primera línea de la época; de los dos hermanos, Johann

Bernoulli fue el más intuitivo y el que con mayor soltura manejaba el formulismo matemático, mientras que Jakob era de inteligencia más lenta pero más penetrante. Ambos compartieron un exagerado afán por ver reconocidos sus méritos, e incluso mantuvieron frecuentes disputas de prioridad entre ellos y con otros autores. Johann inició en el cálculo infinitesimal creado por Leibniz al marqués Guillaume de l'Hôpital, quien aprovechó las lecciones para publicar el primer libro de texto sobre el tema.

En 1695, Johann Bernoulli decidió aceptar el ofrecimiento de ocupar una cátedra de matemáticas en Groninga, perdidas las esperanzas de obtener plaza en Basilea en vida de su hermano Jakob, y resentido con él por la actitud condescendiente con que lo trataba. En 1697, Johann dio una brillante solución al problema de la braquistócrona, que él mismo había planteado el año anterior. Jakob analizó también la cuestión y aportó su propia solución, mucho menos elegante, pero que lo condujo a las puertas de una nueva disciplina, el cálculo de variaciones, en cuyo ámbito propuso a su vez el llamado problema isoperimétrico.

Johann subestimó la complejidad del tema, que resolvió de forma incompleta; las despiadadas críticas que por ello le dedicó su hermano supusieron el inicio del abierto enfrentamiento entre ambos. Johann regresó a Basilea como sucesor de Jakob a la muerte de éste, debido a la cual quedó incompleta e inédita su gran obra sobre el cálculo de probabilidades, el *Ars coniectandi*, publicada en 1713 por su sobrino Nikolaus, hijo de Johann y hermano mayor de Daniel Bernoulli.



Daniel Bernoulli

Daniel Bernoulli, que se doctoró en medicina en Basilea (1721) con una tesis sobre la respiración, fue nombrado en 1725 profesor de matemáticas en la Academia de San Petersburgo; se trasladó a Rusia en compañía de su hermano Nikolaus, quien falleció al año siguiente de su llegada. En San Petersburgo contó, desde 1727, con la colaboración de Leonhard Euler, discípulo de su padre y de su tío Jakob. Euler le sucedió en la Academia de San Petersburgo cuando, en 1732, Daniel Bernoulli regresó a Basilea como catedrático de anatomía y de botánica.

Autor de notables contribuciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales, el tercer Bernoulli

destacó sobre todo por su estudio de la mecánica de fluidos; su obra principal, *Hydrodynamica*, se publicó en 1738, aunque ya la había concluido en 1734. Contiene la idea de lo que más tarde se conoció como teorema de Bernoulli, así como los fundamentos de la moderna teoría cinética de los gases. Desde 1750 hasta 1776 ocupó la cátedra de física en Basilea; se distinguió por ilustrar sus clases con interesantísimos experimentos que le valieron grandes éxitos de audiencia.

- 5 Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, actual Alemania, 1805 - Gotinga, id., 1859) Matemático alemán. Cursó sus estudios en París, relacionándose con matemáticos como Fourier. Tras graduarse, fue profesor en las universidades de Breslau (1826-1828), Berlín (1828-1855) y Gotinga, en donde ocupó la cátedra dejada por Carl Friedrich Gauss tras su muerte.



Peter Gav Lejeune Dirichlet

Sus aportaciones más relevantes se centraron en el campo de la teoría de los números, prestando especial atención al estudio de las series, y desarrolló la teoría de las series de Joseph Fourier. Consiguió una demostración particular del problema de Pierre de Fermat, aplicó las funciones analíticas al cálculo de problemas aritméticos y estableció criterios de convergencia para las series. En el campo del análisis matemático perfeccionó la definición y concepto de función, y en mecánica teórica se centró en el estudio del equilibrio de sistemas y en el concepto de potencial newtoniano.

- 6 Georg Friedrich Bernhard Riemann; Breselenz, actual Alemania, 1826 - Selasca, Italia, 1866) Matemático alemán. Su padre era pastor luterano, y su primera ambición fue la de seguir sus pasos. Ingresó en el liceo de Hannover, donde estudió hebreo y trató de probar la certeza del libro del Génesis por medio de razonamientos matemáticos. En 1846 ingresó en la Universidad de Gotinga, que abandonó un año después para trasladarse a la de Berlín y estudiar bajo la tutela de, entre otros, Jakob Steiner, Carl Gustav Jacob Jacobi y Peter Gustav Lejeune

Dirichlet, que ejerció una gran influencia sobre él.



Su carrera se interrumpió por la revolución de 1848, durante la cual sirvió al rey de Prusia. En 1851 se doctoró en Gotinga con una tesis que fue muy elogiada por Carl Friedrich Gauss. En ella Riemann estudió la teoría de las variables complejas y, en particular, lo que hoy se denominan superficies de Riemann, e introdujo en la misma los métodos topológicos. Las obras de Bernhard Riemann, pese a su número reducido, tienen todas un valor fundamental. En su corta vida contribuyó a muchísimas ramas de las matemáticas: integrales de Riemann, aproximación de Riemann, método de Riemann para series trigonométricas, matrices de Riemann de la teoría de funciones abelianas, funciones zeta de Riemann, hipótesis de Riemann, teorema de Riemann-Roch, lema de Riemann-Lebesgue, integrales de Riemann-Liouville de orden fraccional.

Pese a la importancia de todas estas contribuciones, la más conocida aportación de Bernhard Riemann fue su geometría no euclidiana, basada en una axiomática distinta de la propuesta por Euclides, y expuesta detalladamente en su célebre memoria Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría (1867). Esta geometría se sigue si se considera la superficie de una esfera y se restringen las figuras a esa superficie. Medio siglo más tarde, Albert Einstein demostró, en virtud de su modelo de espacio-tiempo relativista, que la geometría de Riemann ofrece una representación más exacta del universo que la de Euclides. El exceso de trabajo minó su frágil organismo, y en sus últimos años pasó largas temporadas en Italia, donde buscaba la curación de una grave afección pulmonar. Murió de tuberculosis antes de cumplir los cuarenta años.

7 Paul David Gustav du Bois-Reymond (Berlín, 2 de diciembre de 1831 - Friburgo, 7 de abril de 1889) fue un matemático alemán, hermano de Emil du Bois-Reymond. Su tesis se refería al equilibrio mecánico de los fluidos. Trabajó en la teoría de funciones y en física matemática. Sus intereses incluían la teoría de Sturm-Liouville, ecuaciones integrales, cálculo variacional y serie de Fourier. En este último campo, en 1873 pudo construir una función continua cuyas

series de Fourier no son convergentes. Su lema define una condición suficiente para garantizar que una función desaparezca casi en todas partes.



Du Bois-Reymond también estableció que una serie trigonométrica que converge a una función continua en cada punto es la serie de Fourier de esta función. También descubrió un método de prueba que más tarde se conoció como el argumento de la diagonal de Cantor.¹ Su nombre también se asocia con el lema fundamental del cálculo de las variaciones de las que probó una versión refinada basada en la de Joseph-Louis Lagrange.