



UNIVERSIDAD
NACIONAL
AUTÓNOMA DE
NICARAGUA,
MANAGUA
UNAN - MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDISCIPLINARIA MATAGALPA

FAREM MATAGALPA

TÍTULO DE LA TESIS

ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

**TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE DOCTOR EN
MATEMÁTICA APLICADA**

AUTORA:

MSc. INGRID JUDITH OROZCO MARTÍNEZ

TUTOR:

DR. IVÁN AUGUSTO CISNEROS DÍAZ

MATAGALPA, JUNIO, 2023

¡A LA LIBERTAD POR LA UNIVERSIDAD!

1. AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, a Dios, por conceder la vida, la salud y las fuerzas para culminar este trabajo.

A mis hermanas y madre, por su apoyo moral y económico en todo momento, ellas han sido protagonistas directas de mi esfuerzo y sacrificio a lo largo de mi formación académica, por haberme inculcado el valor de la perseverancia y otros valores morales como la amistad, la gratitud, la tolerancia y el respeto, para ellas todo mi amor.

A los maestros de UNAN-Managua, en especial al Dr. Iván Augusto Cisneros Díaz, que con sus aportes, empeño y amor a la educación universitaria, contribuye en la formación de profesionales que figuran como elementos importantes en la sociedad.

A los Maestros, por su infinita paciencia, en la transmisión de los conocimientos.

A las Ciencias por permitir descubrir diferentes aspectos de la realidad y verdades ocultas.

2. CARTA AVAL

Dr. Iván Augusto Cisneros Díaz, docente titular del Departamento de Enseñanzas de las Ciencias de la Facultad de Educación e Idiomas, de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, UNAN-Managua.

CERTIFICA que la presente Monografía

"Área y Volúmenes de Figuras Geométricas"

ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Enseñanzas de las Ciencias
por la Máster

Ingrid Judith Orozco Martínez

y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Matemática Aplicada.

Y para que así conste, en cumplimiento con la normativa vigente, autoriza su presentación ante la Coordinación del Programa de Doctorado y Maestría, para que pueda ser tramitada su lectura y defensa pública.

Tutor de Tesis



Dr. Iván Augusto Cisneros Díaz

Nicaragua, Matagalpa, junio 2023.

3. RESUMEN

Esta tesis muestra la relación natural existente entre la teoría del cálculo diferencial e integral en una y varias variables y el cálculo de área y volumen de las principales figuras geométricas cartesianas y polares que se desarrollan en los cursos usuales del área disciplinar de cálculo y análisis matemático. Se establecen las fórmulas de áreas y volumen mediante la aplicación de la integración en una y varias variables, estableciendo las demostraciones de los principales teoremas matemáticos referentes al cálculo de áreas y volumen, que muchas veces no son desarrollados en los cursos o clases ordinarias, por diversos motivos organizativos curriculares o porque no se contemplan en los programas analíticos de asignaturas del nivel universitario. Para las demostraciones de las fórmulas de cálculo de áreas y volúmenes se utilizan distintos sistemas de coordenadas: cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas. Las fórmulas de áreas y volumen de cuerpos geométricos sólidos se obtendrán a través de la aplicación del cálculo integral en una y varias variables y la geometría. El objetivo principal es demostrar dichos teoremas y mostrar que la teoría Matemática desarrollada en estos niveles, están fundamentada teórica y analíticamente por métodos y procedimientos lógicos, que permiten desarrollar otras formas de demostraciones matemáticas. Se estudian y se enfatizan en los teoremas de áreas y volúmenes de figuras geométricas planas y sólidos de revolución. Se muestran diversas estrategias de demostración, de manera que su construcción resulte apropiada para los docentes del nivel educativo universitario. Se hace énfasis en la necesidad de la deducción del método constructivo, mediante la aplicación de diferentes teoremas geométricos para producir una combinación de técnicas demostrativas que garanticen una correcta demostración Matemática. La lista de estos teoremas constituye un compendio que puede ser utilizada por docentes del área de Matemática en la educación universitaria de nuestro país. También se programó todos los algoritmos relativos al cálculo de áreas y volúmenes mediante el paradigma de programación funcional utilizando el lenguaje de programación de alto nivel Python.

Palabras claves: Cálculo, Geometría, Área, Volumen, Método Constructivo.

4. ABSTRACT

This thesis shows the natural relationship between the theory of differential and integral calculus in one and several variables and the calculation of area and volume of the main Cartesian and polar geometric figures that are developed in the usual courses of the disciplinary area of mathematical calculation and analysis. . The area and volume formulas are established through the application of integration in one and several variables, establishing the demonstrations of the main mathematical theorems referring to the calculation of areas and volume, which are often not developed in ordinary courses or classes, for various curricular organizational reasons or because they are not contemplated in the analytical programs of subjects at the university level. For the demonstrations of the formulas for calculating areas and volumes, different coordinate systems are used: Cartesian, polar, cylindrical and spherical. The formulas for areas and volume of solid geometric bodies will be obtained through the application of integral calculus in one and several variables and geometry. The main objective is to demonstrate these theorems and show that the mathematical theory developed at these levels is theoretically and analytically based on logical methods and procedures, which allow the development of other forms of mathematical demonstrations. The theorems of areas and volumes of plane geometric figures and solids of revolution are studied and emphasized. Various demonstration strategies are shown, so that their construction is appropriate for teachers at the university educational level. Emphasis is placed on the need for the deduction of the constructive method, through the application of different geometric theorems to produce a combination of demonstrative techniques that guarantee a correct mathematical demonstration. The list of these theorems constitutes a compendium that can be used by teachers in the area of mathematics in university education in our country. All the algorithms related to the calculation of areas and volumes were also programmed through the functional programming paradigm using the high-level programming language Python.

Keywords: Calculation, Geometry, Area, Volume, Construction Method.



UNIVERSIDAD
NACIONAL
AUTÓNOMA DE
NICARAGUA,
MANAGUA
UNAN - MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDISCIPLINARIA MATAGALPA

FAREM MATAGALPA

TÍTULO DE LA TESIS

ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

**TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE DOCTOR EN
MATEMÁTICA APLICADA**

AUTORA:

MSc. INGRID JUDITH OROZCO MARTÍNEZ

TUTOR:

DR. IVÁN AUGUSTO CISNEROS DÍAZ

MATAGALPA, JUNIO, 2023

¡A LA LIBERTAD POR LA UNIVERSIDAD!

Índice

1. AGRADECIMIENTOS	I
2. CARTA AVAL	II
3. RESUMEN	III
4. ABSTRACT	IV
5. CAPÍTULO 1: GENERALIDADES	1
5.1. Introducción	1
5.2. Planteamiento del Problema	4
5.3. Antecedentes	6
5.4. Justificación	8
5.5. Objetivos	9
5.5.1. Objetivo General	9
5.5.2. Objetivos Específicos	9
6. CAPÍTULO II: ESTADO DEL ARTE	10
7. CAPÍTULO III: SÓLIDOS PLATÓNICOS	13
7.1. Tetraedro	13
7.2. Hexaedro o Cubo	15
7.3. Octaedro	17
7.4. Dodecaedro	18
7.5. Icosaedro	21
8. CAPÍTULO IV: INTEGRAL EN UNA VARIABLE	24
8.1. Áreas	24
8.1.1. Rectángulo	24
8.1.2. Triángulo	25
8.1.3. Triángulo Equilátero	26
8.1.4. Triángulo Isósceles Rectángulo	30
8.1.5. Cuadrado	31

8.1.6.	Rombo	32
8.1.7.	Romboide	36
8.1.8.	Circunferencia	38
8.1.9.	Circunferencia Unitaria	39
8.1.10.	Corona Circular	42
8.1.11.	Cono	43
8.1.12.	Cilindro	45
8.1.13.	Elipse	46
8.2.	Volumen	48
8.2.1.	Esfera	48
8.2.2.	Cono	49
8.2.3.	Cilindro	51
9.	CAPÍTULO V: INTEGRALES DOBLES	52
9.1.	Área	52
9.1.1.	Rectángulo	52
9.1.2.	Triángulo	54
9.1.3.	Triángulo Equilátero	55
9.1.4.	Triángulo Isósceles Rectángulo	57
9.1.5.	Cuadrado	58
9.1.6.	Rombo	59
9.1.7.	Romboide	62
9.1.8.	Circunferencia	65
9.1.9.	Circunferencia Unitaria	68
9.1.10.	Cilindro	69
9.1.11.	Sector Circular	70
9.1.12.	Esfera	71
9.1.13.	Cubo	73
9.1.14.	Elipse	74
9.1.15.	Prisma Rectangular	75
9.2.	Volumen	77
9.2.1.	Esfera	77

10.CAPÍTULO VI: ÁREAS EN COORDENADAS POLARES	79
10.1. Cardiode	79
10.2. Lemniscata	81
10.3. Rosa	82
11.CAPÍTULO VII: LONGITUD DE CURVAS	85
11.1. Circunferencia	85
11.2. Cardiode	89
11.3. Astroide	91
12.CAPÍTULO VIII: VOLUMEN (INTEGRALES TRIPLES)	93
12.1. Prisma Rectangular	93
12.2. Cubo	94
12.3. Esfera	95
12.4. Pirámide	97
12.5. Cono	98
12.6. Cilindro	99
13.CAPÍTULO IX: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	101
14. CONCLUSIONES	103
15. RECOMENDACIONES	105
16.REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	106
17.ANEXOS	110
17.1. Área	110
17.2. Volumen	111
17.3. Programación Python	112

5. CAPÍTULO 1: GENERALIDADES

5.1. Introducción

En la vida real existen diversas clases de problemas que surgen en la teoría de la Matemática y uno de los principales, constituye la búsqueda de fórmulas de cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas regulares. Normalmente estas fórmulas están demostradas matemáticamente por medio de la teoría geométrica. En esta tesis, se presentan dichas demostraciones por medio del cálculo integral en una y varias variables. Todo el andamiaje matemático para sus respectivas demostraciones descansa en la teoría del Cálculo Integral y sus métodos de integración, incluyendo el cambio de coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas.

Los teoremas presentados en esta tesis, están referidos a la organización lógica de los contenidos del cálculo integral en una y varias variables, que se desarrollan en los contenidos de los cursos universitarios de las universidades nacionales, correspondiente a la disciplina de Cálculo y Análisis Matemático, específicamente en la Carrera de Matemática y Física-Matemática, que ofrece la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, UNAN-Managua, y las respectivas Facultades Multidisciplinarias de Matagalpa, Jinotepe, Estelí y Chontales.

La aplicabilidad y el correcto uso de estos teoremas, constituyen un gran desafío para la teoría Matemática, sin embargo, se considera importante señalar que la justificación teórica de sus demostraciones es aún más importante, ya que permite ampliar el horizonte lógico y abstracto de la Matemática, todo esto mediante la aplicación de la teoría del cálculo diferencial e integral en una y varias variables.

Desde un punto de vista teórico como práctico de las matemáticas aplicadas, muchas ramas de las ciencias ponen de manifiesto un alto nivel de interés teórico en el desarrollo de la Matemática y especialmente en las construcciones de algoritmos y métodos computacionales para resolver integrales analíticas por medio de aproximaciones numéricas.

En la actualidad, el estudio de las construcciones demostrativas en la enseñanza y aprendizaje de las fórmulas de áreas y volúmenes, es un campo bastante explorado por la

Matemática y cada día, la preocupación es más arraigada, debido a la imperante necesidad de demostrar dichos teoremas de una manera que permita un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes. Por otro lado, cada día, son más creciente las investigaciones referidas a la búsqueda de nuevas formas de demostraciones matemáticas.

Entre los principales valores metodológicos de la tesis, se pueden mencionar :

1. Diseño de nuevas estrategias de demostraciones matemáticas, mediante la conjugación de la teoría del cálculo diferencial e integral en una y varias variables.
2. Aplicación de diferentes técnicas o procesos lógicos para una correcta demostración Matemática.
3. Evidenciar la importancia de la búsqueda de nuevos enfoques de paradigmas demostrativos.

El capítulo 1, se refiere a generalidades de la tesis desarrollada, entre ellos, la introducción, planteamiento del problema, antecedentes, justificación y objetivos a alcanzar con el presente trabajo de investigación. En ellos se plasma la importancia y relevancia social de la investigación, implicaciones prácticas, valor teórico, utilidad metodológica y viabilidad de la investigación.

El capítulo 2, muestra el estado del arte referido al proceso de investigación desarrollado, con el objetivo de mostrar la amplitud de las diversas formas demostrativas para la obtención de las fórmulas de áreas y volúmenes de figuras geométricas y de esta manera poder dirigir nuestro estudio a la continuación de los conocimientos que se han alcanzado. También se enfatiza en la necesidad de establecer nuevas formas demostrativas empleando diferentes técnicas que combine la teoría del cálculo diferencial e integral en una y varias variables.

El capítulo 3, se refiere al desarrollo de las demostraciones de los sólidos plátonicos, a saber: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro, presentando las principales propiedades analíticas desde el punto de vista geométrico. Se demuestran dichos teoremas de manera geométricas, enfatizando en la propiedad de que la suma de las partes es el total del área, El objetivo es mostrar la amplitud de las diversas técnicas demostrativas y

dirigir nuestro esfuerzo a otros niveles demostrativos en proposiciones que requieren más justificación en su desarrollo matemático.

El capítulo 4, desarrolla el cálculo de área y volumen de figuras geométricas regulares mediante el uso de integración en una variable. Se utilizan diversas técnicas y métodos de integración y estas se combinan para obtener el resultado deseado.

El capítulo 5, desarrolla el cálculo de área y volumen de figuras geométricas regulares mediante el uso de integración en dos variables. Estas demostraciones son una generalización del capítulo anterior y se obtienen los mismos resultados, pero con la novedad de haber utilizado integración doble.

El capítulo 6, desarrolla el cálculo de área de las principales figuras en coordenadas polares, entre ellas: cardiodes, lemniscata y rosas, para todos los casos, se muestran diversas variantes utilizando las funciones senos y cosenos. Todas ellas son desarrolladas mediante la integral en una variable.

El capítulo 7, desarrolla la longitud de curvas, entre ellas: circunferencia, cardiode y astroide. Para todos los casos, se muestran diversas variantes de cálculo de las longitudes de dichas curvas. Todas ellas son desarrolladas utilizando la integral en una variable.

El capítulo 8, muestra el uso de la integral triple para el cálculo de volúmenes de los sólidos clásicos, a saber: cono, cilindro, esfera, pirámide y cubo. Se emplea las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas para la obtención de diversas variantes demostrativas (utilización de diversos métodos, regiones de integración y sistemas de coordenadas) para las diferentes fórmulas de volúmenes.

El capítulo 9 presenta el análisis y discusión de los resultados, sintetizando la cantidad de teoremas demostrados en cada uno de los capítulos desarrollados, así como, narrando la teoría Matemática utilizada para la obtención de las fórmulas de áreas y volúmenes de las figuras geométricas.

Es necesario aclarar que todas las demostraciones desarrolladas por técnicas de integración en una y varias variables constituyen el corazón del trabajo investigativo.

5.2. Planteamiento del Problema

La demostración de las fórmulas de áreas y volúmenes figuran entre los problemas más importantes en la construcción del desarrollo matemático. Desde el inicio de la humanidad ha sido una preocupación constante el hallazgo de fórmulas de áreas y volúmenes de figuras regulares, sin embargo, el desarrollo del cálculo integral ha permitido obtener diversas variantes de obtención de áreas bajo y entre curvas, más aún, el cálculo de volúmenes de sólidos geométricos. El uso de integración permite calcular el área de polígonos geométricos irregulares, aquí descansa el poder de esta teoría.

El estudio de estrategias demostrativas en las construcciones de las fórmulas de áreas y volúmenes, mediante el cálculo diferencial e integral en una y varias variables es cada día más importante, ya que es necesario construir procedimientos teóricos que faciliten su asimilación cognitiva, por otro lado, su nivel de aplicabilidad es cada vez más imperante en la resolución de problemas de la vida real.

La facilidad de aplicar fórmulas de áreas y volúmenes es imperativo en la resolución de problemas de la Matemática Aplicada y cada día, son más las investigaciones referidas a la búsqueda de nuevas estrategias de construcción y de nuevos hallazgos de teorías matemáticas que permitan relacionar el cálculo diferencial e integral con la geometría euclidiana.

Otra necesidad apremiante en esta área ha sido la de determinar procesos algorítmicos óptimos que permitan simular y aproximar de manera numérica y confiable los resultados de dichas fórmulas de áreas y volúmenes. En la actualidad existen diversos métodos numéricos para aproximar diferentes tipos de integrales indefinidas, definidas e impropias, en una y varias variables. Entre estos métodos numéricos se pueden mencionar la familia numérica de Newton-Cotes que permite calcular integrales de cualquier tipo. Existen formas cerradas y abiertas de las fórmulas de Newton-Cotes. Las formas cerradas son aquellas donde se conocen los datos al inicio y al final de los límites de integración. Las fórmulas abiertas tienen límites de integración que se extienden más allá del intervalo de los datos, se utilizan para resolver integrales impropias y ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, la búsqueda de otros procesos numéricos que puedan ser codificados en algún lenguaje de programación de alto nivel y el hallazgo de nuevas formas demostrativas

mediante el cálculo diferencial e integral en una y varias variables, nos lleva a la siguiente interrogante de investigación:

¿Cómo combinar la teoría del cálculo diferencial e integral en una y varias variables para mejorar los procesos demostrativos y optimizar los procesos lógicos en las demostraciones matemáticas de aquellos teoremas relativos al cálculo de áreas y volúmenes que son estudiados en la educación universitaria de nuestro país?

5.3. Antecedentes

Se efectuó una revisión bibliográfica sobre los métodos demostrativos del cálculo de área y volumen, mediante el uso de la combinación del cálculo diferencial e integral en una y varias variables, la cual consistió en analizar la metodología y resultados obtenidos en diversos artículos publicados en internet. Esto permitió obtener una visión general sobre las diferentes variantes existentes sobre las formas demostrativas de las fórmulas de áreas y volúmenes de figuras geométricas regulares.

En el repositorio de la UNAN-Managua, no se encuentra ninguna tesis de grados o postgrado referida al cálculo de áreas y volúmenes por medio de integración en una y varias variables, sin embargo, se encuentran diversas tesis referidas a la aplicabilidad de estrategias didácticas usando la teoría de integración. De igual manera, no se encontró ninguna tesis referida a nuestro objeto de estudio en las diversas coordinaciones de matemáticas de las Facultades Regionales Multidisciplinarias de Matagalpa, Estelí, Carazo y Juigalpa.

A nivel internacional, se tiene la tesis titulada «Empleo de Software Libre de Graficación para el tema de Sólidos de Revolución», Martínez (2018). Esta tesis fue elaborada en la Universidad San Luis de Potosi, Mexico y aborda la enseñanza de los tópicos de sólidos de manera tradicional en comparación con la utilización del software GeoGebra.

Por otro lado, la tesis titulada «Guía didáctica para mejorar la enseñanza de la integración múltiple aplicada al cálculo de área y volumen de sólidos con apoyo de recursos educativos», Aucapiña (2020). Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Licenciado en Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física, elaborada en la Universidad de Cuenca, Ecuador y dicho trabajo está encaminado a la construcción de una guía acompañada de recursos didácticos para mejorar la enseñanza de los contenidos matemáticos de la integración múltiple en áreas y volúmenes.

La tesis titulada «Cálculo de áreas de figuras planas y el volumen de algunos sólidos a partir de la teoría del aprendizaje significativo en estudiantes de grado noveno del colegio San Bartolomé, en la Universidad de Bucaramanga, Colombia», Cárdenas y Jacome (2010). Esta tesis describe un estudio de investigación cualitativa con metodología investigación-acción, relacionado al cálculo de áreas de figuras planas y el volumen de algunos sólidos a partir de la teoría del aprendizaje significativo en estudiantes.

Finalmente, la tesis titulada «Procesos Infinitos Inherentes a la Integral Definida», Cuida (2016). Esta tesis fue elaborada en la Universidad de Valladolid, España y está centrada en la comprensión de procesos infinitos asociados a la integral definida.

Ante los cambios de la sociedad, como producto de reformas de planes de estudios y reformas curriculares que se desarrollan en nuestro país; obliga a que el sector educativo desarrolle una serie de estrategias que le permita la búsqueda constante de la mejora en la calidad educativa. De esta manera, las instancias educativas requerirán una nueva forma de trabajo, organización y funcionamiento, (Secretaría de Educación Pública de México, SEP, 2010).

En estos tiempos en que la enseñanza actual tiene un enfoque centrado en el aprendizaje, la investigación y la práctica reflexiva; la toma de decisiones, el trabajo en equipo y la responsabilidad compartida, los docentes tienen el deber, en su compromiso social, de convertirse en agentes de cambios y comprometidos con la educación (Europea, C. 2004).

5.4. Justificación

La investigación constituye un puente teórico entre la teoría del cálculo diferencial e integral en una y varias variables, tanto a nivel del plano como del espacio.

La conveniencia del trabajo es mostrar diferentes formas o procesos demostrativos para el cálculo de área y volúmenes, a través del cálculo diferencial e integral en una y varias variables, mediante la combinación de técnicas y métodos de integración.

La relevancia y su impacto social estará reflejada en poder estimular la creatividad Matemática para desarrollar nuevas formas del pensamiento respecto a las formas de demostraciones matemáticas e incidir en la posibilidad de emplear dichas formulaciones en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática.

La implicación práctica del trabajo consiste en la posibilidad de poder argumentar y utilizar estos resultados en la solución de problemas aplicados a la vida cotidiana.

El valor teórico del presente trabajo consiste en ofrecer diversas variantes teóricas y métodos matemáticos del cálculo diferencial e integral en una y varias variables para las demostraciones de las fórmulas de áreas y volúmenes de polígonos y figuras geométricas regulares.

La utilidad metodológica se puede manifestar en el uso de diversas estrategias y técnicas teóricas que permitan aplicar y demostrar dichas fórmulas de cálculo de área y volúmenes. Esto se puede evidenciar mediante un proceso de transformación y adaptación de estos procesos lógicos y abstractos.

Por tanto, este trabajo beneficiará a estudiantes, docentes e investigadores que se interesen en los diferentes métodos de demostraciones matemáticas y en sus diversas formas metodológicas demostrativas.

5.5. Objetivos

5.5.1. Objetivo General

Presentar diversas demostraciones directas de las fórmulas del cálculo de área y volumen de cuerpos geométricos regulares, mediante técnicas del cálculo diferencial e integral en una y varias variables.

5.5.2. Objetivos Específicos

1. Demostrar mediante el cálculo diferencial e integral en una y varias variables, las fórmulas de de áreas y volúmenes de figuras geométricas.
2. Combinar diversos métodos de integración en la demostración de los teoremas referidos a áreas y volúmenes de figuras geométricas.

6. CAPÍTULO II: ESTADO DEL ARTE

La metodología empleada en este trabajo siguió las siguientes pasos:

1. Se han revisado diversas bibliografías y artículos de investigación sobre el cálculo de área y volúmenes de figuras geométricas en diferentes coordenadas, donde intervienen diferentes y múltiples combinaciones de teorías matemáticas, con énfasis en la combinación de la teoría del cálculo diferencial e integral en una y varias variables. Esto permitió analizar la metodología y obtener una visión general las demostraciones directas de dichas fórmulas.
2. Se estudiaron los procedimientos matemáticos ligados al cálculo diferencial e integral en una y varias variables para determinar las diferentes aplicaciones a la teoría geométrica de áreas y volúmenes.
3. Generación de diversos procedimientos matemáticos para la obtención de fórmulas geométricas de áreas y volúmenes.
4. Programación en el lenguaje de alto nivel Python de todas las fórmulas de áreas y volúmenes desarrollados en el trabajo.

Por otro lado, los trabajos consultados interrelacionan teorías matemáticas combinadas para el estudio de área y volumen, entrelazando áreas del cálculo diferencial e integral, considerando varios sistemas de coordenadas, entre ellas: rectangulares, cilíndricas y esféricas. La construcción analíticas de los resultados obtenidos están basado en dichos conceptos, propiedades y teoremas, que una vez combinados, permiten obtener dichas fórmulas.

Todos los trabajos consultados proclaman que la geometría es una de las ciencias más antiguas, ligadas fundamentalmente al conocimiento general de las longitudes, áreas y volúmenes. La civilización babilónica fue una de las primeras culturas en incorporar el estudio de la geometría, incorporando el sistema sexagesimal, descubriendo una fórmula para calcular el área del trapecio rectángulo.

“En el antiguo Egipto estaba muy desarrollada, según los textos de Herodoto, Estrabon y Diodoro Sículo. Euclides, en el siglo III a. C. configuró la geometría en forma axiomática y constructiva, tratamiento que estableció una norma a seguir durante muchos siglos la Geometría Euclidiana descrita en los elementos”, (Baldor, 2001).

El estudio de la astronomía y la cartografía, tratando de determinar las posiciones de estrellas y planetas en la esfera celeste, sirvió de fuente importante en la resolución de problemas geométricos durante más de un milenio. René Descartes desarrolló simultáneamente el álgebra de ecuaciones y la geometría analítica, marcando una nueva etapa, donde las figuras geométricas, tales como las curvas planas, podrían ser representadas analíticamente, con funciones y ecuaciones.

De esta manera, la geometría es una rama de las Matemáticas que estudia la forma de medir las relaciones entre puntos, líneas, ángulos, planos, figuras, y la manera cómo se miden, teniendo en cuenta los cuerpos matemáticos que existen mediante ilustraciones al igual que las conjeturas, axiomas, razonamientos y teoremas entre otros conocimientos matemáticos pueden manifestarse en un lenguaje formal propio de los sistemas sensatos de la lógica matemática, (Camelo, 2020).

La Geometría es la parte de las Matemáticas que experimenta la abstracción del espacio en términos de las propiedades y medidas de las figuras geométricas, pudiéndose decir que es el estudio de los “números y símbolos”, idealizaciones del espacio: puntos, rectas, planos, polígonos, poliedros, curvas y superficies, (Camelo, 2020).

Abriéndose campo para ser usada en diferentes espacios que permiten la comprensión de procesos de aprendizaje de los conceptos que encierra la misma, con el uso de la geometría se pretende reconocer la importancia de las aplicaciones que tiene en la vida cotidiana.

La geometría tiene su aplicación práctica en muchas asignaturas y carreras como lo es en física, mecánica, cartografía, astronomía, náutica, topografía, balística, entre otras, también da soporte teórico a ideas como el sistema global que nos permite ubicaciones exactas en el espacio, también está presente en la combinación con el análisis matemático y sobre todo con las ecuaciones diferenciales, (Camelo, 2020).

En la experiencia, la geometría sirve para solucionar problemas concretos en el mundo de lo visible. Entre sus utilidades se encuentran la justificación teórica en la medida de

superficie y volumen de muchos cuerpos físicos. También, en el lenguaje verbal se utiliza al tratar de comunicarse con otras personas: cuando se habla acerca de la forma de un objeto, una ubicación, cuando se explican propiedades e incluso una terminología, (Camelo, 2020).

Todo esto permite argumentar la posibilidad de desarrollar nuevas formas de demostración mediante la aplicación de la combinación de las teorías del cálculo diferencial e integral en una y varias variables, obteniendo distintos procedimientos matemáticos que involucren varias teorías de la Matemática Aplicada, incluyendo tópicos de matemáticas numéricas.

Se analizan varios métodos demostrativos, permitiendo incorporar estrategias para este tipo de demostraciones y hacer que la aplicabilidad de estas fórmulas de áreas y volúmenes constituya un significado propio para el aprendizaje de los estudiantes.

En los diversos trabajos consultados sobre este tipo de demostraciones tienen gran relevancia la aplicabilidad del cálculo integral en una y varias variables, ya que sus técnicas, procesos, y métodos son aplicables a la Matemática Aplicada.

Haciendo referencia al contexto de la investigación, el cual está concebido como un proceso de búsqueda del conocimiento caracterizada por la creatividad, innovación de ideas y métodos utilizados, la perspectiva es demostrar mediante distintas variantes, las fórmulas de áreas y volúmenes de polígonos y cuerpos geométricos regulares.

La aplicabilidad de estas fórmulas en diferentes contextos reales permiten el continuo avance para estudiar diferentes campos, de los cuales se obtienen algunos beneficios, que en la mayoría de los casos es interpretado como la producción científica, la cual sin duda alguna es transformada y mostrada como verdades relativas por la dependencia de las formas demostrativas que se descubren y el modo en que estas influyen en el desarrollo matemático.

Por último, las exigencias para mostrar resultados objetivos depende mucho de la efectividad, eficiencia y optimización de dichos métodos demostrativos, los cuales están sujetos a las técnicas, estrategias y procedimientos matemáticos que se aplicarán durante el desarrollo del estudio en cuestión.

7. CAPÍTULO III: SÓLIDOS PLATÓNICOS

Los sólidos platónicos son cinco cuerpos geométricos que comparten un conjunto de características geométricas similares. También reciben el nombre de sólidos perfectos, poliedros platónicos y de cuerpos cósmicos entre otros. Los sólidos platónicos son poliedros regulares y convexos. Son el tetraedro, el cubo (o hexaedro), el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. (Quesada, 2006)

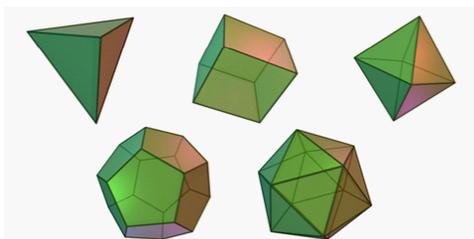


Figura 1. Tetraedro. (Quesada, 2006)

Propiedades básicas comunes de los sólidos plátonicos: (Romañach y Toboso, 2016)

1. Todas las caras son polígonos regulares iguales.
2. Todos los ángulos (diedros) son iguales.
3. Todas las aristas tienen la misma longitud.
4. En todos los vértices concurren el mismo número de caras y de aristas.

7.1. Tetraedro

De acuerdo con (Guirao, 2020) las principales características del Tetraedro son:

Posee 4 caras que son triángulos equiláteros, 4 vértices, 6 aristas y los ángulos diedros miden $70,53^\circ$

Teorema 1 *El área del Tetraedro es*

$$A = \sqrt{3}l^2$$

donde l es el lado (Quesada, 2006).



Figura 2. Tetraedro. (Quesada, 2006)

Demostración 1 *El tetraedro es un polígono geométrico formado por 4 triángulos equiláteros, cuya área estará conformada por las sumas de las mismas, es decir*

$$A = 4A_1$$

donde A_1 es el área de una de las caras que conforman el Tetraedro, luego el área de un triángulo equilátero es

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

entonces, sustituyendo y simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned} A &= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \right) \\ A &= \sqrt{3}l^2 \end{aligned}$$

Teorema 2 *El volumen del Tetraedro es*

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}l^3$$

donde l es el lado del tetraedro (Quesada, 2006).

Demostración 2 *El volumen lo podemos expresar por*

$$V = \frac{A_b \times h}{3}$$

donde A_b representa el área de la base y h la altura del tetraedro, además, el área de un triángulo equilátero es

$$A_b = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Para calcular la altura del tetraedro, recordemos que el ortocentro o punto donde se cortan las alturas de un triángulo dista $\frac{1}{3}$ de su longitud hasta el lado opuesto, es decir,

$\frac{a_p}{3}$ que equivale a un cateto del triángulo rectángulo. Este valor lo escribimos en función de la arista y obtenemos, que el valor del cateto menor es

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{1}{3}a_p \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}a \end{aligned}$$

y la hipotenusa, vale

$$hip = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

entonces, la altura por teorema de Pitágora es

$$\begin{aligned} h^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 \\ h^2 &= \frac{2}{3}a^2 \\ h &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a \end{aligned}$$

Finalmente sustituyendo y simplificando, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \frac{A_b \times h}{3} \\ V &= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\right) \\ V &= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \end{aligned}$$

7.2. Hexaedro o Cubo

Las principales características del Hexaedro o Cubo son: (CEIP, 2016)

Posee 6 caras que son cuadrados, 8 vértices, 12 aristas y sus ángulos diedros miden 90°

Teorema 3 *El área del Cubo es*

$$A = 6l^2$$

donde l es el lado del cubo (Romá, 2003).

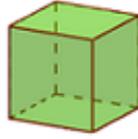


Figura 3. Tetraedro. (Quesada, 2006)

Demostración 3 El área de un cuadrado de lado l está dado por

$$A_1 = l^2$$

como son 6 caras cuadradas, entonces, el área total es

$$A = 6A_1$$

$$A = 6l^2$$

Teorema 4 El volumen del Hexaedro o Cubo es

$$A = l^3$$

donde l es el lado del cubo (Romá, 2003).

Demostración 4 El volumen del hexaedro es

$$V = A_b \times h$$

donde A_b representa el área de la base y h la altura del cubo, la base del cubo es un cuadrado y su área es

$$A_b = l^2$$

luego, la altura es

$$h = l$$

entonces, su volumen es

$$V = l^2 \times l$$

$$V = l^3$$

7.3. Octaedro

Las principales características del Octaedro son: (CEIP, 2016)

Posee 8 caras que son triángulos equiláteros, 6 vértices, 12 aristas y sus ángulos diedros miden $109,47^\circ$

Teorema 5 *El área del Octaedro es*

$$A = 2\sqrt{3}l^2$$

donde l es el lado (Quesada, 2006).



Figura 4. Tetraedro. (Quesada, 2006)

Demostración 5 *El área de un triángulo equilátero de lado l está dado por*

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

como son 8 caras triangulares, entonces, sustituyendo y simplificando, se tiene que el área total es

$$\begin{aligned} A &= 8A_1 \\ A &= 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \right) \\ A &= 2\sqrt{3}l^2 \end{aligned}$$

Teorema 6 *El volumen del Octaedro es*

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}l^3$$

donde l es el lado del Octaedro (Quesada, 2006).

Demostración 6 *El octaedro equivale a tener 2 pirámides cuadradas unidas por su base, además, el volumen de una pirámide cuadrada (V_p) es*

$$V_p = \frac{h \times a^2}{3}$$

donde a^2 es el apotema y h la altura respectivamente de la pirámide. Por lo tanto, el doble de volumen de una pirámide cuadrada es lo mismo que el volumen de un octaedro (V_O), es decir

$$\begin{aligned} V_O &= 2V_p \\ V_O &= 2 \left(\frac{h \times a^2}{3} \right) \end{aligned}$$

pero sabiendo que la altura de la pirámide, por el teorema de Pitágora, se expresa por

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \\ h^2 &= \frac{3}{4}a^2 \\ h &= \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{aligned}$$

luego substituyendo y simplificando, se tiene

$$\begin{aligned} V_O &= 2V_p \\ V_O &= 2 \left(\frac{h \times a^2}{3} \right) \\ V_O &= 2 \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a \times a^2}{3} \right) \\ V_O &= \frac{\sqrt{3}}{3}a^3 \end{aligned}$$

7.4. Dodecaedro

Las principales características del Dodecaedro son: (CEIP, 2016)

Posee 12 caras que son pentágonos regulares, 20 vértices, 30 aristas y sus ángulos diedros miden $116,56^\circ$

Teorema 7 *El área del Dodecaedro es*

$$A = 20,645 l^2$$

donde l es el lado (Romá, 2003).

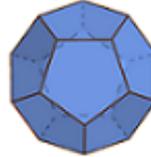


Figura 5. Tetraedro. (Quesada, 2006)

Demostración 7 *El área de un pentágono regular de lado l está dado por*

$$A_1 = \frac{5la_p}{2}$$

donde l es la longitud del lado y a_p la apotema, como son 12 caras pentagonales, entonces, el área total es

$$\begin{aligned} A &= 12A_1 \\ A &= 12 \left(\frac{5la_p}{2} \right) \end{aligned}$$

como la apotema está dada por

$$a_p = \frac{l}{2 \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{l}{2 \tan \left(\frac{72}{2} \right)} = \frac{l}{2 \tan (36^\circ)}$$

luego, sustituyendo y simplificando, el área total es

$$\begin{aligned} A &= 12 \left(\frac{5l \frac{l}{2 \tan (36^\circ)}}{2} \right) \\ A &= 12 \frac{5l^2}{4 \tan (36^\circ)} \\ A &= \left(3 \frac{5}{\tan (36^\circ)} \right) l^2 \\ A &= 20,645 l^2 \end{aligned}$$

Teorema 8 *El volumen del Dodecaedro es*

$$V = 7,66 l^3$$

donde l es el lado del dodecaedro (Romá, 2003).

Demostración 8 *El dodecaedro se descompone en 12 pirámides*

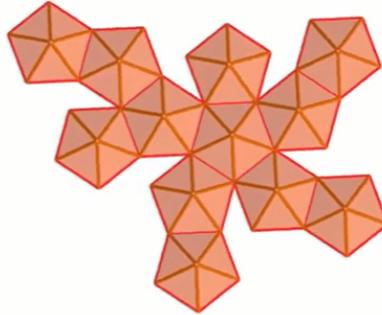


Figura 6. Tetraedro. (Quesada, 2006)

y el volumen de cada pirámide está dada por

$$V_P = \frac{A_b h}{3}$$

además, el área de la base lo constituye un pentágono regular, cuya área está dada por

$$A_b = \frac{P a_p}{2} = \frac{5l a_p}{2}$$

donde $P = 5l$, y sabiendo que el apotema del pentágono es

$$a_p = \frac{l}{2 \tan(36^\circ)}$$

luego sustituyendo estos valores en la fórmula del volumen de la pirámide, se tiene

$$V_P = \frac{5l \frac{l}{2 \tan(36^\circ)}}{2}$$
$$V_P = \frac{5l^2}{4 \tan(36^\circ)}$$

ahora debemos de encontrar el valor de la altura de la pirámide (h), donde el apotema de la cara (A_{pc}) de una de la pirámide es

$$a_{pc} = 1,309 l$$

luego, aplicando el teorema de Pitágora, obtenemos

$$\begin{aligned} h^2 + (a_p)^2 &= (a_{pc})^2 \\ h &= \sqrt{(a_{pc})^2 - (a_p)^2} \\ h &= \sqrt{(1,309l)^2 - \left(\frac{l}{2 \tan(36^\circ)}\right)^2} \\ h &= 1,113 l \end{aligned}$$

luego el volumen total del dodecaedro es

$$\begin{aligned} V_D &= 12 \left(\frac{A_b h}{3} \right) \\ V_D &= 12 \left(\frac{1}{3} \left(\frac{5l^2}{4 \tan(36^\circ)} \times 1,113l \right) \right) \\ V_D &= 12 (0,638581 l^3) \\ V_D &= 7,66 l^3 \end{aligned}$$

7.5. Icosaedro

Las principales características del Dodecaedro son: (Quesada, 2006)

Posee 20 caras que son triángulos equiláteros, 12 vértices, 30 aristas y sus ángulos diedros miden $138,19^\circ$

Teorema 9 *El área del Icosaedro es*

$$A = 5\sqrt{3}l^2$$

donde l es el lado del icosaedro (Romañach & Toboso, 2016)

Demostración 9 *El área de un triángulo equilátero de lado l está dado por*

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

como son 20 caras triangulares, entonces, el área total es

$$\begin{aligned} A &= 20A_1 \\ A &= 20 \left(\frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \right) \\ A &= 5\sqrt{3}l^2 \end{aligned}$$

Teorema 10 *El volumen del Icosaedro es*

$$V = 2,18 l^3$$

donde l es el lado del icosaedro (Romañach y Toboso, 2016)



Figura 7. Tetraedro. (Quesada, 2006)

Demostración 10 *Tomemos una cara del icosaedro, el segmento entre el centro de la cara y el punto medio de la arista es el apotema (a_p)*

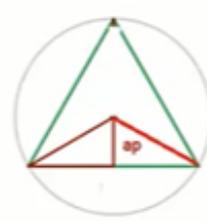


Figura 8, Cara del Icosaedro. (Quesada, 2006)

el ángulo superior es $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$, luego el ángulo superior del triángulo rectángulo es 60° (por ser bisectriz), luego el ángulo basal es

$$\begin{aligned}\tan 30^\circ &= \frac{a}{\frac{l}{2}} \\ a_p &= \frac{1}{2}l \tan 30^\circ\end{aligned}$$

luego, el área de un polígono regular (A_R) es

$$\begin{aligned}A_R &= \frac{P \times a_p}{2} \\ A_R &= \frac{3l \times \frac{1}{2}l \tan 30^\circ}{2} \\ A_R &= \frac{3l^2 \tan 30^\circ}{4}\end{aligned}$$

el ángulo entre dos caras de un icosaedro es $138,19^\circ$

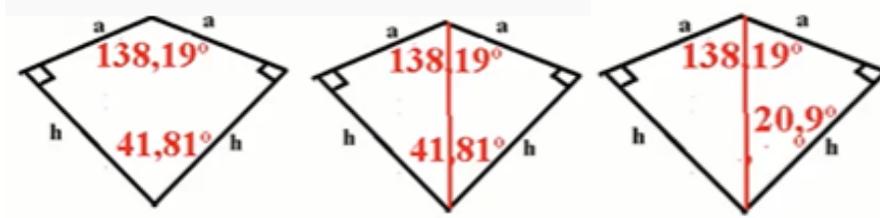


Figura 9. Ángulos. (Quezada, 2006)

luego

$$\tan 20,9^\circ = \frac{a_p}{h}$$

$$h = \frac{a_p}{\tan 20,9^\circ}$$

además

$$a_p = \frac{l}{2} \tan 30^\circ$$

sustituyendo

$$h = \frac{\frac{l}{2} \tan 30^\circ}{\tan 20,9^\circ}$$

$$h = \frac{l \tan 30^\circ}{2 \tan 20,9^\circ}$$

entonces el volumen de la pirámide (V_P) es

$$V_P = \frac{1}{3} A_b h$$

$$V_P = \frac{1}{3} \left(\frac{3l^2 \tan 30^\circ}{4} \right) \left(\frac{l \tan 30^\circ}{2 \tan 20,9^\circ} \right)$$

$$V_P = \frac{\tan^2 30^\circ}{8 \tan 20,9^\circ} l^3$$

y el volumen del icosaedro es

$$V = \left(20 \frac{\tan^2 30^\circ}{8 \tan 20,9^\circ} \right) l^3$$

$$V = 2,18 l^3$$

8. CAPÍTULO IV: INTEGRAL EN UNA VARIABLE

8.1. Áreas

En este capítulo se estarán utilizando las fórmulas referenciada por Leithold (1999) para el área bajo una curva

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

y para el caso del área acotada por dos curvas, se tiene

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

8.1.1. Rectángulo

Teorema 11 *El área del rectángulo es igual al producto de la base por la altura, es decir*

$$A = bh$$

donde b es la base y h es la altura, (Barnett, 1991).

Demostración 11 *Dibujando un rectángulo de base b y altura a en el plano \mathbb{R}^2 , se tiene*

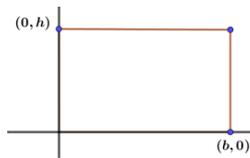


Figura 10. Rectángulo. (Orozco, 2022)

se tiene que realizando la integración respecto al eje x , tenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^b h dx \\ &= hx \Big|_0^b \\ &= bh \end{aligned}$$

ahora, realizando la integración respecto al eje y , se tiene

$$\begin{aligned} A &= \int_0^h b dy \\ &= by \Big|_0^h \\ &= bh \end{aligned}$$

Notar que independientemente de cual eje hemos tomado y de la posición de la figura en el plano \mathbb{R}^2 , siempre obtenemos que el área del rectángulo es

$$A = bh$$

8.1.2. Triángulo

Teorema 12 *El área de un triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura, es decir*

$$A = \frac{1}{2}bh$$

donde b es la base y h es la altura, (Barnett, 1991).

Demostración 12 *Consideremos el triángulo con los puntos $(b,0)$ y $(0,h)$ que interceptan al eje x y eje y respectivamente*

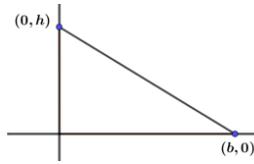


Figura 11. Triángulo. (Orozco, 2022)

calculando la pendiente de la recta entre los puntos $(0,h)$ y $(b,0)$, se tiene

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{h - 0}{0 - b} = -\frac{h}{b}$$

y aplicando la ecuación punto pendiente y tomando el punto $(b,0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 0 &= -\frac{h}{b}(x - b) \\ y &= -\frac{h}{b}x + h \end{aligned}$$

integrando respecto al eje x , tenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^b \left(-\frac{h}{b}x + h \right) dx \\ &= -\frac{h}{b} \int_0^b x dx + h \int_0^b dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{h}{2b}x^2 + hx \Big|_0^b \\
&= -\frac{h}{2b}b^2 + bh \\
&= -\frac{h}{2}b + bh \\
&= \frac{1}{2}(bh)
\end{aligned}$$

Si hubiéramos integrado respecto al eje y , se tendría que despejar x en función de y y la ecuación de la curva sería

$$x = -\frac{b}{h}y + b$$

y la integral toma la forma

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^h \left(-\frac{b}{h}y + b \right) dy \\
&= -\frac{b}{h} \int_0^h y dy + b \int_0^h dy \\
&= -\frac{b}{2h}y^2 + by \Big|_0^h \\
&= -\frac{b}{2h}h^2 + bh \\
&= -\frac{b}{2}h + bh \\
&= \frac{1}{2}(bh)
\end{aligned}$$

Notar que independiente de cual eje hemos tomado y de la posición de la figura en el plano \mathbb{R}^2 , siempre obtenemos que el área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}(bh)$$

8.1.3. Triángulo Equilátero

Teorema 13 *El área de un triángulo equilátero es*

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

donde l es el lado del triángulo (Barnett, 1991).

Demostración 13 *Tracemos un triángulo equilátero sobre el plano \mathbb{R}^2 , con los puntos $\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$ que se reflejan en la figura dada*

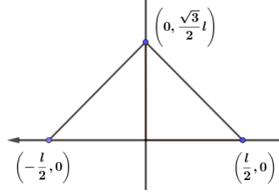


Figura 12. Triángulo Equilátero. (Orozco, 2022)

luego, necesitamos encontrar las ecuaciones de las rectas para poder integrar sobre dichas regiones, para la recta ubicada entre los puntos $\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$ se tiene que la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l - 0}{0 + \frac{l}{2}}$$

$$m = \sqrt{3}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$ es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = \sqrt{3}\left(x + \frac{l}{2}\right)$$

$$y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

De forma similar, para la recta ubicada entre los puntos $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$ se tiene que la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l - 0}{0 - \frac{l}{2}}$$

$$m = -\sqrt{3}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ es

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 0 &= -\sqrt{3}\left(x - \frac{l}{2}\right) \\ y &= -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}l \end{aligned}$$

Finalmente, integrando respecto al eje x y dividiendo la región de integración en dos regiones definida en los intervalos $\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{l}{2}\right)$ respectivamente, se tiene

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_{-l/2}^0 \left(\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}l\right) dx + \int_0^{l/2} \left(-\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}l\right) dx$$

$$A = \frac{1}{8}\sqrt{3}l^2 + \frac{1}{8}\sqrt{3}l^2$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

Otra Variante:

De acuerdo a la figura del triángulo equilátero y por ser una figura simétrica respecto al eje y , podemos realizar el análisis en la región determinada por los puntos $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$, con el objeto de determinar la ecuación de dicha recta que une dichos puntos, luego la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l - 0}{0 - \frac{l}{2}}$$

$$m = -\sqrt{3}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ es

$$\begin{aligned}y - y_0 &= m(x - x_0) \\y - 0 &= -\sqrt{3}\left(x - \frac{l}{2}\right) \\y &= -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}l\end{aligned}$$

Integrando respecto al eje x en el intervalo $\left(0, \frac{l}{2}\right)$ y multiplicando por 2 dicha región, se tiene

$$\begin{aligned}A &= 2 \int_0^{l/2} \left(-\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}l\right) dx \\A &= 2 \left[\int_0^{l/2} -\sqrt{3}x dx + \int_0^{l/2} \frac{\sqrt{3}}{2}l dx \right] \\A &= 2 \left[-\sqrt{3} \int_0^{l/2} x dx + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{l/2} l dx \right] \\A &= -\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}lx \Big|_0^{l/2} \\A &= \frac{\sqrt{3}}{4}l^2\end{aligned}$$

Otra segunda variante consiste en haber considerado los puntos $\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$, para determinar la ecuación de dicha recta, calculando su pendiente es

$$\begin{aligned}m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\m &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l - 0}{0 + \frac{l}{2}} \\m &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$ es

$$\begin{aligned}y - y_0 &= m(x - x_0) \\y - 0 &= \sqrt{3}\left(x + \frac{l}{2}\right) \\y &= \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}l\end{aligned}$$

Integrando respecto al eje x en el intervalo $\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$ y multiplicando por 2 dicha región, se tiene

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_{-l/2}^0 \left(\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}l \right) dx \\
 A &= 2 \left[\int_{-l/2}^0 \sqrt{3}x \, dx + \int_{-l/2}^0 \frac{\sqrt{3}}{2}l \, dx \right] \\
 A &= 2 \left[\sqrt{3} \int_0^{l/2} x \, dx + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{l/2} l \, dx \right] \\
 A &= \sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}lx \Big|_0^{l/2} \\
 A &= \frac{\sqrt{3}}{4}l^2
 \end{aligned}$$

Nuevamente, se puede notar que se pueden mostrar diversas variantes del cálculo de área del triángulo equilátero, independientemente de las regiones y límites de integración. En todos los casos, se obtiene siempre el mismo resultado.

8.1.4. Triángulo Isósceles Rectángulo

Teorema 14 *El área de un triángulo isósceles rectángulo es*

$$A = \frac{1}{2}l^2$$

donde l es la magnitud del lado igual en el triángulo isósceles rectángulo (Barnett, 1991).

Demostración 14 *Consideremos un triángulo isósceles de lado igual l y siendo sus puntos $(l, 0)$ y $(0, l)$ de intercepción con los ejes x e y respectivamente. De acuerdo a la figura dada*

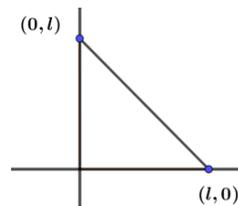


Figura 13. Triángulo Isósceles. (Orozco, 2022)

obtenemos que la pendiente que une dichos puntos es

$$m = \frac{0 - l}{l - 0} = -1$$

por la ecuación punto pendiente y considerando el punto $(l, 0)$, se tiene

$$\begin{aligned}y - 0 &= -1(x - l) \\y &= l - x\end{aligned}$$

entonces, al integrar respecto al eje x en el intervalo $(0, l)$, obtenemos

$$\begin{aligned}A &= \int_0^l (l - x) \, dx \\&= lx - \frac{x^2}{2} \Big|_0^l \\&= \frac{1}{2}l^2\end{aligned}$$

Si hubiéramos integrado respecto al eje y , se tendría que despejar x en función de y y la ecuación de la curva sería

$$x = l - y$$

al integrar respecto al eje y en el intervalo $(0, l)$, obtenemos

$$\begin{aligned}A &= \int_0^l (l - y) \, dy \\&= ly - \frac{y^2}{2} \Big|_0^l \\&= \frac{1}{2}l^2\end{aligned}$$

Notar que independiente de cual eje hemos tomado y de la posición de la figura en el plano \mathbb{R}^2 , siempre obtenemos que el área del triángulo isósceles es

$$A = \frac{1}{2}l^2$$

8.1.5. Cuadrado

Teorema 15 *El área del cuadrado es*

$$A = l^2$$

donde l es el lado del cuadrado (Barnett, 1991).

Demostración 15 Consideremos un cuadrado de lado l como el que está dado en la figura

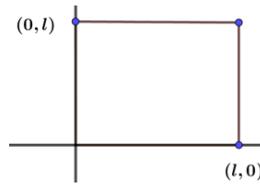


Figura 14. Cuadrado. (Orozco, 2022)

integrando respecto al eje x en el intervalo $(0, l)$, su área es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^l l \, dx \\ A &= lx \Big|_0^l \\ A &= l^2 \end{aligned}$$

de manera similar, si hubiéramos integrado respecto al eje y , se tendría

$$\begin{aligned} A &= \int_0^l l \, dy \\ A &= ly \Big|_0^l \\ A &= l^2 \end{aligned}$$

de aquí, se deduce que independientemente del tipo de integración respecto al eje x o del eje y , el valor de su área es

$$A = l^2$$

8.1.6. Rombo

Teorema 16 El área de un rombo es

$$A = \frac{d \times D}{2}$$

donde d y D son las diagonales menores y mayores respectivamente (Barnett, 1991).

Demostración 16 Consideremos los puntos $\left(0, -\frac{D}{2}\right)$, $\left(0, \frac{D}{2}\right)$, $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ que constituyen los vértices del rombo de acuerdo a la figura dada

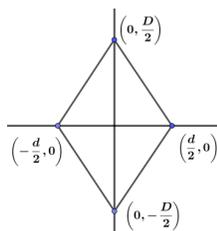


Figura 15. Rombo. (Orozco, 2022)

entonces necesitamos encontrar las ecuaciones de las rectas para poder integrar sobre dichas regiones, para la recta ubicada entre los puntos $\left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{D}{2}\right)$ se tiene que la pendiente es

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 m &= \frac{\frac{D}{2} - 0}{0 - \left(-\frac{d}{2}\right)} \\
 m &= \frac{D}{d}
 \end{aligned}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $\left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ es

$$\begin{aligned}
 y - y_0 &= m(x - x_0) \\
 y - 0 &= \frac{D}{d} \left(x + \frac{d}{2}\right) \\
 y &= \frac{D}{d}x + \frac{D}{2}
 \end{aligned}$$

De manera similar, para la recta ubicada entre los puntos $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{D}{2}\right)$ se tiene que la pendiente es

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
 m &= \frac{\frac{D}{2} - 0}{0 - \frac{d}{2}} \\
 m &= -\frac{D}{d}
 \end{aligned}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ es

$$\begin{aligned}y - y_0 &= m(x - x_0) \\y - 0 &= -\frac{D}{d}\left(x - \frac{d}{2}\right) \\y &= -\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}\end{aligned}$$

luego, podemos integrar sobre las dos regiones en el eje x definida por los intervalos $\left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{d}{2}\right)$ y obtener

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = 2 \int_{-d/2}^0 \left(\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}\right) dx + 2 \int_0^{d/2} \left(-\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}\right) dx$$

$$A = 2 \int_{-d/2}^0 \frac{D}{d}x dx + 2 \int_{-d/2}^0 \frac{D}{2} dx - 2 \int_0^{d/2} \frac{D}{d}x dx + 2 \int_0^{d/2} \frac{D}{2} dx$$

$$A = \frac{D}{d}x^2 + Dx \Big|_{-d/2}^0 + -\frac{D}{d}x^2 + Dx \Big|_0^{d/2}$$

$$A = \frac{1}{4}dD + \frac{1}{4}dD$$

$$A = \frac{d \times D}{2}$$

Otra variante demostrativa, consiste en integrar sobre las curvas definidas por los puntos $\left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ y $\left(0, -\frac{D}{2}\right)$, calculando su pendiente se tiene

$$\begin{aligned}m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\m &= \frac{-\frac{D}{2} - 0}{0 + \frac{d}{2}} \\m &= -\frac{D}{d}\end{aligned}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $\left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ es

$$\begin{aligned}y - y_0 &= m(x - x_0) \\y - 0 &= -\frac{D}{d}\left(x + \frac{d}{2}\right) \\y &= -\frac{D}{d}x - \frac{D}{2}\end{aligned}$$

De manera similar, para la recta ubicada entre los puntos $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ y $\left(0, -\frac{D}{2}\right)$ se tiene que la pendiente es

$$\begin{aligned}m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\m &= \frac{-\frac{D}{2} - 0}{0 - \frac{d}{2}} \\m &= \frac{D}{d}\end{aligned}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ es

$$\begin{aligned}y - y_0 &= m(x - x_0) \\y - 0 &= \frac{D}{d}\left(x - \frac{d}{2}\right) \\y &= \frac{D}{d}x - \frac{D}{2}\end{aligned}$$

luego, podemos integrar sobre las dos regiones en el eje x definida por los intervalos $\left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{d}{2}\right)$ y obtener

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = 2 \int_{-d/2}^0 -\left(-\frac{D}{d}x - \frac{D}{2}\right) dx + 2 \int_0^{d/2} -\left(\frac{D}{d}x - \frac{D}{2}\right) dx$$

$$A = 2 \int_{-d/2}^0 \left(\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}\right) dx + 2 \int_0^{d/2} \left(-\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}\right) dx$$

$$A = 2 \int_{-d/2}^0 \frac{D}{d} x \, dx + 2 \int_{-d/2}^0 \frac{D}{2} dx - 2 \int_0^{d/2} \frac{D}{d} x \, dx + 2 \int_0^{d/2} \frac{D}{2} dx$$

$$A = \frac{D}{d} x^2 + Dx \Big|_{-d/2}^0 + -\frac{D}{d} x^2 + Dx \Big|_0^{d/2}$$

$$A = \frac{1}{4} dD + \frac{1}{4} dD$$

$$A = \frac{d \times D}{2}$$

Podemos notar que esta nueva variante de integración produce el mismo resultado para el área del rombo, es decir

$$A = \frac{d \times D}{2}$$

8.1.7. Romboide

Teorema 17 El área de un romboide está dado

$$A = bh$$

donde b y h son la base y altura del romboide respectivamente (Barnett, 1991)

Demostración 17 Tracemos un romboide definido por los puntos $(0, 0)$, $(b, 0)$, (a, h) , $(a + b, h)$ y de acuerdo a la gráfica, se tiene

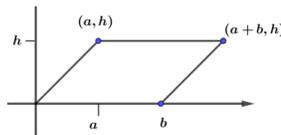


Figura 16. Romboide. (Orozco, 2022)

para la ecuación 1 definida por los puntos $(0, 0)$ y (a, h) , tiene por pendiente

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{h - 0}{a - 0} \\ &= \frac{h}{a} \end{aligned}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $(0, 0)$ es

$$\begin{aligned}y - y_0 &= m(x - x_0) \\y - 0 &= \frac{h}{a}(x - 0) \\y &= \frac{h}{a}x\end{aligned}$$

Para la ecuación 2 (recta paralela al eje x), tenemos que

$$y = h$$

y para ecuación 3, definida por los puntos $(b, 0)$ y $(a + b, h)$ se tiene que la pendiente es

$$\begin{aligned}m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\m &= \frac{h - 0}{a + b - b} \\m &= \frac{h}{a}\end{aligned}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $(b, 0)$ es

$$\begin{aligned}y - y_0 &= m(x - x_0) \\y - 0 &= \frac{h}{a}(x - b) \\y &= \frac{h}{a}x - \frac{hb}{a}\end{aligned}$$

luego, el área del romboide es la suma de áreas de tres regiones, es decir

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \int_0^a \frac{h}{a}x \, dx + \int_a^b h \, dx + \int_b^{a+b} \left(\frac{h}{a}x - \frac{bh}{a} \right) dx$$

$$A = \left. \frac{h}{a}x^2 \right|_0^a + hx \Big|_a^b + \left. \frac{h}{a}x^2 - \frac{bh}{a}x \right|_b^{a+b}$$

$$A = \frac{1}{2}ah + bh - ah + \frac{1}{2}ah$$

$$A = bh$$

8.1.8. Círculo

Teorema 18 *El área de un círculo de radio r está dada por*

$$A = \pi r^2$$

(Barnett, 1991).

Demostración 18 *Consideremos una circunferencia de radio r centrada en el origen, dada por la siguiente figura*

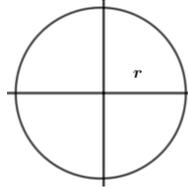


Figura 17. Circunferencia. (Orozco, 2022)

la ecuación cartesiana o rectangular de la circunferencia está dada por

$$x^2 + y^2 = r^2$$

al despejar la variable y en función de x , obtenemos que

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

integrando para el primer cuadrante sobre el eje x ,

$$A_1 = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

ahora, utilizando el método de sustitución trigonométrica y derivando respecto a x y θ ,

$$x = r \sin \theta$$

$$dx = r \cos \theta d\theta$$

sustituyendo en la integral dada, tenemos

$$A_1 = \int_0^r \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta} r \cos \theta d\theta$$

$$A_1 = \int_0^r \sqrt{r^2 (1 - \sin^2 \theta)} r \cos \theta d\theta$$

$$A_1 = \int_0^r (r \cos \theta) r \cos \theta d\theta$$

$$A_1 = r^2 \int_0^r \cos^2 \theta d\theta$$

Haciendo un cambio de límite de integración, donde $x = r \sin \theta$, se tiene que si

$$\begin{aligned}x &= 0 \quad , \quad \theta = 0 \\x &= r \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

luego utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

y sustituyendo en la integral anterior y cambiando los límites de integración, tenemos que

$$\begin{aligned}A_1 &= r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\A_1 &= \frac{r^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\A_1 &= \frac{r^2}{2} \left(\int_0^{\pi/2} d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta \right) \\A_1 &= \frac{r^2}{2} \left(\theta \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \Big|_0^{\pi/2} \right) \\A_1 &= \frac{1}{4} \pi r^2\end{aligned}$$

luego, el área total es 4 veces el área del primer cuadrante, es decir

$$\begin{aligned}A &= 4A_1 \\A &= 4 \left(\frac{1}{4} \pi r^2 \right) \\A &= \pi r^2\end{aligned}$$

8.1.9. Círculo Unitario

Teorema 19 El área de un círculo unitario está dada por

$$A = \pi$$

(Barnett, 1991).

Demostración 19 En el caso de una circunferencia unitaria, es decir, de radio $r = 1$, e integrando para el primer cuadrante sobre el eje x , es decir, en el intervalo $(0, 1)$ obtenemos

$$A_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

aplicando el método de sustitución trigonométrica

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta \\ dx &= \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

entonces, al sustituir en la integral anterior, tenemos

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de límite de integración, donde $x = \sin \theta$, se tiene que si

$$\begin{aligned} x &= 0 \quad , \quad \theta = 0 \\ x &= 1 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

luego, utilizando la identidad trigonométrica $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ y los nuevos límites de integración y finalmente sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

al multiplicar por 4, obtenemos el área total del círculo unitario, es decir,

$$\begin{aligned} A &= 4 \frac{1}{4} \pi \\ A &= \pi \end{aligned}$$

Teorema 20 El área de un círculo con centro en el polo y radio a , cuya ecuación es $r = a$, está dado por

$$A = \pi a^2$$

Demostación 20 Sabemos que el área de una región en coordenadas polares está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

y una circunferencia con centro en el polo y radio a , tiene por ecuación $r = f(\theta) = a$, haciendo recorrer θ en el intervalo $[0, 2\pi]$ se tiene

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [f(\theta)]^2 d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 d\theta$$

$$A = \left. \frac{1}{2} a^2 \theta \right|_0^{2\pi}$$

$$A = \pi a^2$$

Otra variante es haber calculado el área entre 0 y π y después multiplicar por 2 , y el resultado obtenido sería

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 d\theta$$

$$A = \left. \frac{1}{2} a^2 \theta \right|_0^{\pi}$$

$$A = \frac{1}{2} \pi a^2$$

$$A = 2 \left(\frac{1}{2} \pi a^2 \right)$$

$$A = \pi a^2$$

Teorema 21 El área de un círculo de radio a está dado por

$$A = \pi a^2$$

Demostación 21 La demostración se hará por medio de las ecuaciones paramétricas de la circunferencia

$$x = r \cos t \quad , \quad y = r \sin t \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$dx = -r \sin t \quad , \quad dy = r \cos t$$

entonces usando la variante de área definida por la integral de línea del Teorema de Green, se tiene

$$A = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$$

sustituyendo las ecuaciones paramétricas y sus respectivas derivadas se tiene

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((r \cos t)(r \cos t) - (r \sin t)(-r \sin t)) dt$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) dt$$

$$A = \pi r^2$$

8.1.10. Corona Circular

Teorema 22 El área de una Corona Circular está dado por

$$A = \pi (R^2 - r^2)$$

donde R y r son los radios mayor y menor respectivamente (Barnett, 1991).

Demostración 22 La demostración se hará desde el punto de vista de coordenadas polares y de acuerdo a la gráfica

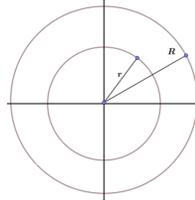


Figura 18. Corona Circular. (Orozco, 2022)

se obtiene que

$$R = f(\theta)$$

$$r = g(\theta)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

luego, su área estaría dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2) d\theta$$

entonces

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (R^2 - r^2) d\theta \\ A &= \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \int_0^{2\pi} d\theta \\ A &= \left[\frac{1}{2} (R^2 - r^2) \theta \right]_0^{2\pi} \\ A &= \pi (R^2 - r^2) \end{aligned}$$

Que en forma verbal se pudiera interpretar como el producto del número π por la diferencia del radio mayor y menor respectivamente.

8.1.11. Cono

Teorema 23 El área total del cono es

$$A = \pi r (r + g)$$

donde r y g son el radio y generatriz del mismo (Barnett, 1991).

Demostración 23 Consideremos el triángulo definido por los puntos $(0, 0)$, $(r, 0)$ y $(0, h)$ dada por la siguiente gráfica

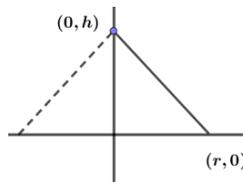


Figura 19. Cono. (Orozco, 2022)

El área total del cono será la suma de la área de la base y el área lateral. Sabemos que el área de la base es

$$A_b = \pi r^2$$

Necesitamos calcular el área lateral, para esto, sean los puntos $(0, h)$ y $(r, 0)$, su pendiente está definida por

$$m = \frac{0 - h}{r - 0} = -\frac{h}{r}$$

luego la ecuación punto pendiente es

$$\begin{aligned}y - 0 &= -\frac{h}{r}(x - r) \\y &= -\frac{h}{r}x + h\end{aligned}$$

Vamos a integrar respecto al eje y , entonces al despejar x en función de y , obtenemos

$$x = \frac{r}{h}(h - y)$$

ahora al aplicar la fórmula de área para una superficie de revolución

$$\begin{aligned}A &= 2\pi \int_c^d f(y) \sqrt{1 + (f'(y))^2} dy \\A &= 2\pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}(h - y) \sqrt{1 + \left(-\frac{r}{h}\right)^2} \right) dy \\A &= 2\pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}(h - y) \frac{1}{h} \sqrt{h^2 + r^2} \right) dy \\A &= \frac{2\pi}{h} \sqrt{h^2 + r^2} \int_0^h \left(r - \frac{r}{h}y \right) dy \\A &= \left(\frac{2\pi}{h} \sqrt{h^2 + r^2} \right) \int_0^h r dy - \int_0^h \frac{r}{h} y dy \\A &= \left(\frac{2\pi}{h} \sqrt{h^2 + r^2} \right) \left(ry - \frac{r}{2h} y^2 \Big|_0^h \right) \\A &= \left(\frac{2\pi}{h} \sqrt{h^2 + r^2} \right) \left(\frac{1}{2} rh \right) \\A &= \pi r \sqrt{h^2 + r^2} \\A &= \pi r g\end{aligned}$$

De forma similar, si hubiéramos considerado la integración respecto al eje x , la fórmula del área de superficie tomaría la forma

$$A = 2\pi \int_c^d f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

y la función a integrar sería

$$\begin{aligned}y &= -\frac{h}{r}x + h \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{h}{r}\end{aligned}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned}
 A &= 2\pi \int_0^r \left(-\frac{h}{r}x + h\right) \sqrt{1 + \left(-\frac{h}{r}\right)^2} dx \\
 A &= 2\pi \int_0^r \left(-\frac{h}{r}x + h\right) \sqrt{\frac{r^2 + h^2}{r^2}} dx \\
 A &= \frac{2\pi}{r} \sqrt{r^2 + h^2} \left(-\frac{h}{2r}x^2 + hx\right) \Big|_0^r \\
 A &= \pi h \sqrt{r^2 + h^2} \\
 A &= \pi r g
 \end{aligned}$$

De ambos resultados podemos inferir que el área total del cono es

$$\begin{aligned}
 A_t &= A_b + A_L \\
 A_t &= \pi r^2 + \pi r g \\
 A_t &= \pi r (r + g)
 \end{aligned}$$

8.1.12. Cilindro

Teorema 24 El área lateral de un cilindro de radio r y altura h está dada por

$$A = 2\pi r h$$

(Leithold, 1991).

Demostración 24 Consideremos la siguiente gráfica definida por los puntos $(h, 0)$ y $(0, r)$

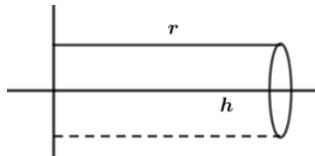


Figura 20. Cilindro. (Orozco, 2022)

En coordenadas cartesianas, consideremos la ecuación $y = f(x) = r$ y hagámolas rotar alrededor del eje x , entonces al aplicar la fórmula de área para una superficie de revolución

$$A_L = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dy$$

sustituyendo los respectivos límites de integración y la función dada, obtenemos

$$A_L = 2\pi \int_0^h \left(r \sqrt{1 + (0)^2} \right) dx$$

$$A_L = 2\pi r x \Big|_0^h$$

$$A_L = 2\pi r h$$

de igual forma, si hubiéramos formado un rectángulo de lado r y altura h , con $x = f(y) = h$ y lo hubiéramos rotados alrededor del eje y , obtendríamos al aplicar la fórmula de área para una superficie de revolución

$$A_L = 2\pi \int_c^d f(y) \sqrt{1 + (f'(y))^2} dx$$

$$A_L = 2\pi \int_0^r \left(h \sqrt{1 + (0)^2} \right) dx$$

$$A_L = 2\pi h x \Big|_0^r$$

$$A_L = 2\pi r h$$

Para ambos casos, el área total del cilindro es

$$A_t = 2A_b + A_L$$

$$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$A_t = 2\pi r (r + h)$$

8.1.13. Elipse

Teorema 25 El área de una elipse con eje mayor a y eje menor b es

$$A = \pi ab$$

(Leithold, 1999).

Demostración 25 Consideremos la siguiente gráfica definida por los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$ en el primer cuadrante

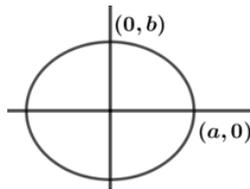


Figura 21. Elipse. (Orozco, 2022)

la ecuación de la elipse con centro el origen y eje mayor el eje x , está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

despejando la variable y , obtenemos

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

luego integrando con respecto al eje x la parte ubicada en el primer cuadrante y multiplicando por 4, se tiene

$$A = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$A = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

luego, utilizando sustitución trigonométrica

$$x = a \sin \theta$$

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

luego, sustituyendo e integrando, obtenemos

$$A = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} a \cos \theta d\theta$$

$$A = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \theta)} a \cos \theta d\theta$$

$$A = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} a \cos \theta d\theta$$

$$A = \frac{4b}{a} a^2 \int_0^a \cos^2 \theta d\theta$$

haciendo un cambio de límite de integración

$$x = 0, \quad \theta = 0$$

$$x = a, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

y utilizando la identidad trigonométrica del $\cos^2 \theta$, se tiene

$$A = \frac{4b}{a} a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$A = 4ab \left. \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right|_0^{\pi/2}$$

$$A = \pi ab$$

Teorema 26 *El área de una elipse con eje mayor a y eje menor b es*

$$A = \pi ab$$

Demostración 26 *Las ecuaciones paramétricas de la elipse son*

$$x = a \cos t \quad , \quad y = b \sin t \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

aplicando la fórmula de área de la variante del teorema de Green

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

sustituyendo las ecuaciones paramétricas y sus respectivas derivadas, obtenemos

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((a \cos t)(b \cos t) - (b \sin t)(-a \sin t)) dt$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\cos^2 t + \sin^2 t) dt$$

$$A = \pi ab$$

es decir, el área de una elipse es el producto del número π por las magnitudes de los ejes mayor y menor respectivamente.

8.2. Volumen

8.2.1. Esfera

Teorema 27 *El volumen de una esfera está dada por*

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

donde r es el radio de la esfera (Baldor, 2004).

Demostración 27 *De acuerdo a la figura*

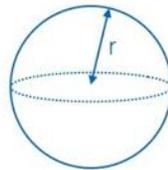


Figura 22. Esfera. (Orozco, 2022)

se tiene que haciendo girar una semicircunferencia de ecuación $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje x (eje de revolución) y aplicando la fórmula del volumen por el método del disco, se tiene

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^r [\sqrt{r^2 - x^2}]^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$V = \pi \left(\int_{-r}^r r^2 dx - \int_{-r}^r x^2 dx \right)$$

$$V = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Nota: Si de la fórmula del volumen de la esfera

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

aplicásemos la derivada del volumen respecto al radio r , se tiene

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

la cual es la fórmula del área de la esfera de radio r , es decir

$$A = 4\pi r^2$$

8.2.2. Cono

Teorema 28 *El volumen de un cono está dado por*

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

donde r y h son el radio y altura del cono (Baldor, 2004).

Demostración 28 Consideremos el triángulo definido por los puntos $(0, 0)$, $(r, 0)$ y $(0, h)$ dada por la siguiente gráfica

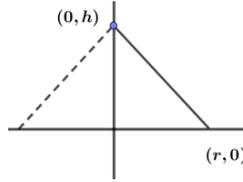


Figura 23. Cono. (Orozco, 2022)

El volumen del cono lo obtenemos haciendo girar un triángulo de base r y altura h alrededor del eje y , de esta manera, la pendiente definida por los puntos $(0, h)$ y $(r, 0)$ es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{h - 0}{0 - r}$$

$$m = -\frac{h}{r}$$

de donde, utilizando la ecuación punto pendiente y el punto $(r, 0)$, obtenemos la ecuación

$$y - 0 = -\frac{h}{r}(x - r)$$

$$y = -\frac{h}{r}(x - r)$$

despejando x de la ecuación anterior,

$$x = \frac{hr - ry}{h}$$

la cual al ser integrada respecto al eje y mediante la fórmula del disco

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

donde sustituyendo la función y los límites de integración, tenemos que

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{hr - yr}{h} \right)^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{hr - yr}{h} \right)^2 dy$$

$$V = \pi \int_0^h \left(r^2 + \frac{1}{h^2} r^2 y^2 - \frac{2}{h} r^2 y \right) dy$$

$$V = \pi r^2 y + \frac{1}{3h^2} r^2 y^3 - \frac{1}{h} r^2 y^2 \Big|_0^h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h r^2$$

8.2.3. Cilindro

Teorema 29 *El volumen de un cilindro recto está dado por*

$$V = \pi r^2 h$$

donde r y h es el radio y altura respectivamente (Baldor, 2004).

Demostración 29 *Consideremos la siguiente gráfica definida por los puntos $(h, 0)$ y $(0, r)$*

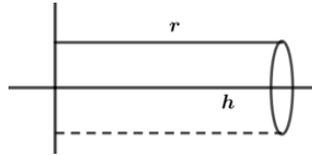


Figura 24. Cilindro. (Orozco, 2022)

De forma similar, obtenemos el volumen de un cilindro circular recto, considerando la rotación de un rectángulo de altura h y base r , nuevamente aplicando el método del disco, se tiene

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h (f(y))^2 dy \\ V &= \pi \int_0^h r^2 dy \\ V &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

Observemos que al derivar el volumen respecto a r , se obtiene

$$\frac{dV}{dr} = A_L = 2\pi r h$$

que corresponde al área lateral del cilindro circular recto. Notemos que el área lateral está dada por

$$A_L = 2\pi r h$$

y el área total por

$$\begin{aligned} A_{total} &= A_L + 2A_{base} \\ &= 2\pi r h + 2(\pi r^2) \\ &= 2\pi r (h + r) \end{aligned}$$

9. CAPÍTULO V: INTEGRALES DOBLES

9.1. Área

A lo largo de este capítulo vamos a considerar la siguiente definición de integral doble referenciada por (Leithold, 1999)

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta_i A$$

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$V = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \quad (2)$$

Pero si $f(x, y) = 1$, entonces, la medida A del área de la región R se expresa como una integral doble y obtenemos

$$A = \iint_R dx dy = \iint_R dy dx$$

9.1.1. Rectángulo

Teorema 30 *El área del rectángulo es igual al producto de la base por la altura, es decir*

$$A = bh$$

donde b es la base y h es la altura (Barnett, 1991).

Demostración 30 *Consideremos los límites de integración de acuerdo al esquema de la figura dada, es decir, con respecto al eje x está dado por el intervalo $(0, b)$ y con respecto al eje y , por el intervalo $(0, h)$*

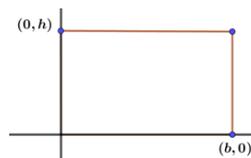


Figura 25. Rectángulo. (Orozco, 2022)

es decir

$$A = \int_0^h \int_0^b dx dy$$

al resolver la integral más interna, tenemos que

$$\int_0^b dx = x|_0^b = b$$

luego

$$A = \int_0^h b dy = by|_0^h = bh$$

Otra variante sería aplicar el Teorema de Fubini, entonces el área puede ser calculada por

$$A = \int_0^b \int_0^h dy dx$$

al resolver la integral más interna, tenemos que

$$\int_0^h dy = y|_0^h = h$$

luego

$$A = \int_0^b h dx = hx|_0^b = bh$$

en ambos casos, el orden de las integrales iteradas produce el mismo valor para su área.

Teorema 31 El área de un triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura, es decir

$$A = \frac{1}{2}bh$$

donde b es la base y h es la altura del triángulo

Demostración 31 Consideremos la siguiente gráfica definida en el primer cuadrante por los puntos $(b, 0)$ y $(0, h)$

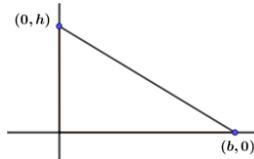


Figura 26. Triángulo. (Orozco, 2022)

cuya recta tiene por pendiente $-\frac{h}{b}$ y cuya ecuación de la recta es

$$y = -\frac{h}{b}x + h$$

integrando respecto al eje x en el intervalo $(0, b)$ y respecto al eje y por el intervalo $(0, -\frac{h}{b}x + h)$, se tiene

$$A = \int_0^b \int_0^{-\frac{h}{b}x+h} dy dx$$

luego, al integrar la integral más interna

$$\begin{aligned} \int_0^{-\frac{h}{b}x+h} dy &= [y]_0^{-\frac{h}{b}x+h} \\ &= -\frac{h}{b}x + h \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_0^b \left(-\frac{h}{b}x + h \right) dx \\ A &= -\int_0^b \frac{h}{b}x + \int_0^b h dx \\ A &= -\frac{h}{2b}x^2 + hx \Big|_0^b \\ A &= -\frac{h}{2b}b^2 + bh \\ A &= -\frac{h}{2}b + bh \\ A &= bh \end{aligned}$$

9.1.2. Triángulo

Teorema 32 *El área de un triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura, es decir*

$$A = \frac{1}{2}bh$$

donde b es la base y h la altura respectivamente (Baldor, 2004).

Demostración 32 *Consideremos la siguiente gráfica definida en el primer cuadrante por los puntos $(b, 0)$ y $(0, h)$*

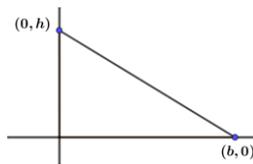


Figura 27. Triángulo. (Orozco, 2022)

Tomando los límites de integración respecto a cada uno de los ejes, se tiene

$$A = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} dy dx$$

integrando la integral más interna (respecto al eje y), obtenemos

$$\int_0^{\frac{h}{b}x} dy = y \Big|_0^{\frac{h}{b}x} = \frac{h}{b}x$$

finalmente, al integrar respecto al eje x

$$A = \int_0^b \left(\frac{h}{b}x \right) dx = \frac{h}{2b} x^2 \Big|_0^b = \frac{h}{2b} b^2 = \frac{1}{2} (bh)$$

9.1.3. Triángulo Equilátero

Teorema 33 El área de un triángulo equilátero es

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

donde l es el lado del triángulo (Barnett, 1991).

Demostración 33 Consideremos la siguiente gráfica definidas por los puntos $\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$

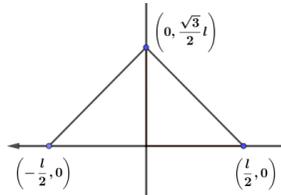


Figura 28. Triángulo Equilátero. (Orozco, 2022)

al igual que para el caso de una variable, consideremos la ecuación de la recta definida por los puntos $\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$

$$y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

integrando respecto a ambos ejes, obtenemos

$$A = \int_{-l/2}^0 \int_0^{\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}l} dy dx$$

luego

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3x+\frac{\sqrt{3}}{2}l}} dy &= [y]_0^{\sqrt{3x+\frac{\sqrt{3}}{2}l}} \\ &= \sqrt{3x} + \frac{\sqrt{3}}{2}l\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}A_1 &= \int_{-l/2}^0 \left(\sqrt{3x} + \frac{\sqrt{3}}{2}l \right) dx \\ A_1 &= \int_{-l/2}^0 \sqrt{3x} + \int_{-l/2}^0 \frac{\sqrt{3}}{2}l dx \\ A_1 &= \sqrt{3} \int_{-l/2}^0 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-l/2}^0 l dx \\ A_1 &= \left. \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}lx \right|_{-l/2}^0 \\ A_1 &= \frac{1}{8}\sqrt{3}l^2\end{aligned}$$

de manera similar, se tiene que para la otra ecuación definida por los puntos $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ y $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}l\right)$ se tiene

$$y = -\sqrt{3x} + \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

integrando respecto a ambos ejes

$$A = \int_0^{l/2} \int_0^{-\sqrt{3x+\frac{\sqrt{3}}{2}l}} dy dx$$

luego

$$\begin{aligned}\int_0^{-\sqrt{3x+\frac{\sqrt{3}}{2}l}} dy &= [y]_0^{-\sqrt{3x+\frac{\sqrt{3}}{2}l}} \\ &= -\sqrt{3x} + \frac{\sqrt{3}}{2}l\end{aligned}$$

entonces

$$A_2 = \int_0^{l/2} \left(-\sqrt{3x} + \frac{\sqrt{3}}{2}l \right) dx$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= -\int_0^{l/2} \sqrt{3}x + \int_0^{l/2} \frac{\sqrt{3}}{2}l \, dx \\
A_2 &= -\sqrt{3} \int_0^{l/2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{l/2} l \, dx \\
A_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}lx \Big|_0^{l/2} \\
A_2 &= \frac{1}{8}\sqrt{3}l^2
\end{aligned}$$

En consecuencia, el área total es la suma de las áreas de ambas regiones, es decir

$$\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
A &= \frac{1}{8}\sqrt{3}l^2 + \frac{1}{8}\sqrt{3}l^2 \\
A &= \frac{\sqrt{3}}{4}l^2
\end{aligned}$$

9.1.4. Triángulo Isósceles Rectángulo

Teorema 34 El área de un triángulo isósceles rectángulo es

$$A = \frac{1}{2}l^2$$

donde l es la magnitud del lado igual en el triángulo isósceles rectángulo (Baldor, 2004).

Demostración 34 Consideremos un triángulo isósceles de lado igual l , siendo sus puntos $(l, 0)$ y $(0, l)$ de intercepción con los ejes x y y respectivamente. De acuerdo a la figura dada

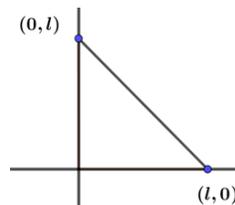


Figura 29. Triángulo Isósceles. (Orozco, 2022)

tenemos que al integrar sobre ambos ejes, se obtiene

$$A = \int_0^l \int_0^{l-x} dy \, dx$$

luego, la integral más interna es

$$\begin{aligned}
\int_0^{l-x} dy &= [y]_0^{l-x} \\
&= l - x
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_0^l (l - x) dx \\ A &= \int_0^l l dx - \int_0^l x dx \\ A &= lx - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^l \\ A &= l^2 - \frac{1}{2}l^2 \\ A &= \frac{1}{2}l^2 \end{aligned}$$

9.1.5. Cuadrado

Teorema 35 *El área del cuadrado es*

$$A = l^2$$

donde l es el lado del cuadrado (Barnett, 1991).

Demostración 35 *Consideremos la siguiente gráfica definida por los puntos $(l, 0)$ y $(0, l)$*

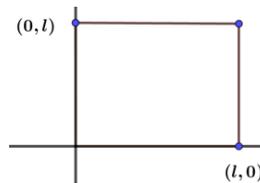


Figura 30. Cuadrado. (Orozco, 2022)

Utilizando integrales dobles, se tiene que

$$A = \int_0^l \int_0^l dy dx$$

luego, la integral más interna es

$$\begin{aligned} \int_0^l dy &= [y]_0^l \\ &= l \end{aligned}$$

entonces, al integrar respecto al eje x , obtenemos

$$A = \int_0^l l dx$$

$$\begin{aligned}
 A &= l \int_0^l dx \\
 A &= lx \Big|_0^l \\
 A &= l^2
 \end{aligned}$$

Otra variante consiste en haber integrado respecto al eje y , es decir

$$A = \int_0^l \int_0^l dx dy$$

luego, la integral más interna es

$$\begin{aligned}
 \int_0^l dx &= [x]_0^l \\
 &= l
 \end{aligned}$$

entonces, al integrar respecto al eje y , obtenemos

$$A = \int_0^l l dy$$

$$\begin{aligned}
 A &= l \int_0^l dy \\
 A &= ly \Big|_0^l \\
 A &= l^2
 \end{aligned}$$

Esto nos indica que realizando la integración a través del eje x o eje y , el resultado siempre es el mismo.

9.1.6. Rombo

Teorema 36 *El área de un rombo es*

$$A = \frac{d \times D}{2}$$

donde D y d son la diagonal mayor y menor respectivamente (Baldor, 2004)

Demostración 36 *Consideremos los puntos $\left(0, -\frac{D}{2}\right)$, $\left(0, \frac{D}{2}\right)$, $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ que constituyen los vértices del rombo de acuerdo a la figura dada*

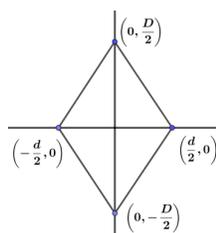


Figura 31. Rombo. (Orozco, 2022)

Calcularemos las otras ecuaciones de las rectas que están por debajo del eje x , es decir, iniciaremos por la recta que está definida por los puntos $\left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ y $\left(0, -\frac{D}{2}\right)$, entonces su pendiente es

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m &= \frac{-\frac{D}{2} - 0}{0 + \frac{d}{2}} \\ m &= -\frac{D}{d} \end{aligned}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $\left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ es

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 0 &= -\frac{D}{d} \left(x + \frac{d}{2}\right) \\ y &= -\frac{D}{d}x - \frac{D}{2} \end{aligned}$$

De forma similar, para la recta ubicada entre los puntos $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ y $\left(0, -\frac{D}{2}\right)$ se tiene que la pendiente es

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m &= \frac{0 + \frac{D}{2}}{\frac{d}{2} - 0} \\ m &= \frac{D}{d} \end{aligned}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ es

$$\begin{aligned}y - y_0 &= m(x - x_0) \\y - 0 &= \frac{D}{d}\left(x - \frac{d}{2}\right) \\y &= \frac{D}{d}x - \frac{D}{2}\end{aligned}$$

integrando en las regiones, definida por los intervalos $\left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ y $\left(-\frac{D}{d}x - \frac{D}{2}, \frac{D}{d}x + \frac{D}{2}\right)$ obtenemos

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_{-d/2}^0 \int_{-\frac{D}{d}x - \frac{D}{2}}^{\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}} dy dx + \int_0^{d/2} \int_{\frac{D}{d}x - \frac{D}{2}}^{-\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}} dy dx$$

Resolviendo la primera integral

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{D}{d}x - \frac{D}{2}}^{\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}} dy &= y \Big|_{-\frac{D}{d}x - \frac{D}{2}}^{\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}} \\&= \frac{D}{d}x + \frac{D}{2} + \frac{D}{d}x + \frac{D}{2} \\&= 2\left(\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}\right)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}A_1 &= \int_{-d/2}^0 2\left(\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}\right) dx \\A_1 &= 2 \int_{-d/2}^0 \frac{D}{d}x dx + 2 \int_{-d/2}^0 \frac{D}{2} dx\end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{D}{d}x^2 \Big|_{-\frac{d}{2}}^0 + Dx \Big|_{-\frac{d}{2}}^0$$

$$A_1 = -\frac{1}{4}dD + \frac{1}{2}dD$$

$$A_1 = \frac{1}{4}dD$$

De manera similar, para la otra parte de integración, obtenemos

$$A_2 = \int_0^{d/2} \int_{\frac{D}{d}x - \frac{D}{2}}^{-\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}} dy dx$$

al resolver la integral interna

$$\begin{aligned} \int_{\frac{D}{d}x - \frac{D}{2}}^{-\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}} dy &= y \Big|_{\frac{D}{d}x - \frac{D}{2}}^{-\frac{D}{d}x + \frac{D}{2}} \\ &= -\frac{D}{d}x + \frac{D}{2} - \frac{D}{d}x + \frac{D}{2} \\ &= 2 \left(-\frac{D}{d}x + \frac{D}{2} \right) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^{d/2} 2 \left(-\frac{D}{d}x + \frac{D}{2} \right) dx \\ A_2 &= 2 \int_0^{d/2} -\frac{D}{d}x dx + 2 \int_0^{d/2} \frac{D}{2} dx \\ A_2 &= -\frac{D}{d}x^2 \Big|_0^{d/2} + Dx \Big|_0^{d/2} \\ A_2 &= -\frac{1}{4}dD + \frac{1}{2}dD \\ A_2 &= \frac{1}{4}dD \end{aligned}$$

luego, el área total es

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ A &= \frac{1}{4}dD + \frac{1}{4}dD \\ A &= \frac{d \times D}{2} \end{aligned}$$

9.1.7. Romboide

Teorema 37 *El área de un romboide está dado*

$$A = bh$$

donde b y h son la base y altura del romboide respectivamente (Barnett, 1991).

Demostración 37 *Tracemos un romboide definido por los puntos $(0, 0)$, $(b, 0)$, (a, h) , $(a + b, h)$ y de acuerdo a la gráfica, se tiene*

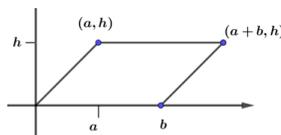


Figura 32. Romboide. (Orozco, 2022)

para la ecuación 1 definida por los puntos $(0, 0)$ y (a, h) , tiene por pendiente

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{h - 0}{a - 0} \\ &= \frac{h}{a} \end{aligned}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $(0, 0)$ es

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 0 &= \frac{h}{a}(x - 0) \\ y &= \frac{h}{a}x \end{aligned}$$

Para la ecuación 2 (paralela al eje x), tenemos que

$$y = h$$

y para ecuación 3, dada por los puntos $(b, 0)$ y $(a + b, h)$ se tiene que la pendiente es

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m &= \frac{h - 0}{a + b - b} \\ m &= \frac{h}{a} \end{aligned}$$

luego, la ecuación punto pendiente en el punto $(b, 0)$ es

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 0 &= \frac{h}{a}(x - b) \\ y &= \frac{h}{a}x - \frac{hb}{a} \end{aligned}$$

luego, el área del romboide es la suma de las tres regiones

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \int_0^a \int_0^{(h/a)x} dydx + \int_a^b \int_0^h dydx + \int_b^{a+b} \int_0^{(h/a)x - (bh)/a} dydx$$

Para la primer integral

$$\int_0^a \int_0^{h/ax} dy dx$$

tenemos que

$$\int_0^{(h/a)x} dy = y \Big|_0^{(h/a)x} = \frac{h}{a}x$$

luego

$$\int_0^a \frac{h}{a}x dx = \frac{1}{2}(ah)$$

Para la segunda integral

$$\int_a^b \int_0^h dy dx$$

la integral más interna

$$\int_0^h dy = y \Big|_0^h = h$$

finalmente

$$\int_a^b h dx = hx \Big|_a^b = bh - ah$$

Para la tercera integral

$$\int_b^{a+b} \int_0^{(h/a)x-(bh)/a} dy dx$$

la integral más interna

$$\int_0^{(h/a)x-(bh)/a} dy = y \Big|_0^{(h/a)x-(bh)/a} = -\frac{1}{a}h(b-x)$$

finalmente

$$-\int_b^{a+b} \frac{1}{a}h(b-x) dx = \frac{1}{2}ah$$

Al sumar estos resultados, se tiene

$$A = \int_0^a \int_0^{(h/a)x} dy dx + \int_a^b \int_0^h dy dx + \int_b^{a+b} \int_0^{(h/a)x-(bh)/a} dy dx$$

$$A = \frac{1}{2}(ah) + bh - ah + \frac{1}{2}ah$$

$$A = bh$$

9.1.8. Círculo

Teorema 38 *El área de un círculo de radio r está dada por*

$$A = \pi r^2$$

(Baldor, 2004)

Demostración 38 *La ecuación cartesiana o rectangular de la circunferencia está dada por*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

al despejar la variable y en función de x , obtenemos que

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Gráficamente se tiene

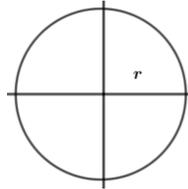


Figura 33. Circunferencia. (Orozco, 2022)

Los límites de integración con respecto a cada uno de los ejes están dados por

$$\begin{cases} -r \leq x \leq r \\ -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \end{cases}$$

Al aplicar integrales dobles, se tiene

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dydx \\ A &= \int_{-r}^r \left(\int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy \right) dx \end{aligned}$$

Al calcular la integral más interna

$$\int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} dy = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

luego

$$A = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx$$

procedemos a realizar un cambio de variable

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \\ dx = r \cos \theta d\theta \\ x = -r, \quad \theta = -\frac{\pi}{2} \\ x = r, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

luego, el área total es

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta} \right) r \cos \theta d\theta$$

$$A = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$A = 2r^2 \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$A = \pi r^2$$

Teorema 39 El área de un círculo de radio r está dada por

$$A = \pi r^2$$

Demostración 39 La ecuación del círculo en coordenadas polares está dado por

$$r = a$$

y su área en coordenadas polares es

$$A = \iint_R f(\theta) dr d\theta$$

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^r r dr d\theta$$

$$A = \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$A = \frac{2\pi r^2}{2}$$

$$A = \pi r^2$$

Teorema 40 *El área de un círculo de radio r está dada por*

$$\pi r^2$$

Demostración 40 *Para facilitar los cálculos pasamos de coordenadas cartesianas (x, y) a polares (r, θ) empleando el jacobiano r para el cambio de variable,*

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

calculemos el Jacobiano (determinante de las derivadas parciales)

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$J(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta$$

$$J(r, \theta) = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$J(r, \theta) = r$$

luego al sustituir los límites de integración y el valor del Jacobiano, tenemos

$$A = \int \int_C dx dy = \int_0^r \int_0^{2\pi} r d\theta dr$$

entonces, al calcular la integral más interna

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} dx &= r\theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

finalmente, la integral exterior es

$$\begin{aligned} A &= \int_0^r 2\pi r dr \\ &= \pi r^2 \Big|_0^r \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

9.1.9. Círculo Unitario

Teorema 41 *El área de un círculo de radio unitario está dada por*

$$A = \pi$$

(Baldor, 2004).

Demostración 41 *Como la circunferencia es unitaria, el valor de $r = 1$ y los límites de integración serán*

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

al aplicar la fórmula de la integral doble y los respectivos límites de integración, se tiene

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dy dx \\ A &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx \\ A &= \int_{-1}^1 \left(2\sqrt{1-x^2} \right) dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable

$$\begin{cases} x = \sin \theta \\ dx = \cos \theta d\theta \\ x = -1, \theta = -\frac{\pi}{2} \\ x = 1, \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

luego, el área total es

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sqrt{1-\sin^2 \theta} \right) \cos \theta d\theta \\ A &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ A &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \\
A &= \pi + 0 \\
A &= \pi
\end{aligned}$$

9.1.10. Cilindro

Teorema 42 *El área lateral de un cilindro de radio r y altura h está dada por*

$$A = 2\pi r h$$

(Barnett, 1991).

Demostración 42 *En coordenadas cilíndricas, una parametrización está dada por*

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \theta \\
y &= r \sin \theta \\
z &= u
\end{aligned}$$

donde la región de integración es

$$\begin{aligned}
0 &\leq \theta \leq 2\pi \\
0 &\leq z \leq h
\end{aligned}$$

calculemos el Jacobiano (determinante de las derivadas parciales)

$$\begin{aligned}
J(r, \theta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\
J(r, \theta) &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\
J(r, \theta) &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta \\
J(r, \theta) &= r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
J(r, \theta) &= r
\end{aligned}$$

luego al sustituir los límites de integración y el valor del Jacobiano, tenemos

$$\int \int_{\mathcal{R}} dx \, dy = \int_0^h \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dz$$

luego la integral más interna

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} r \, d\theta &= r\theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi r\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}\int_0^h 2\pi \, dz &= 2\pi rz \Big|_0^h \\ &= 2\pi rh\end{aligned}$$

En consecuencia, el área total del cilindro

$$\begin{aligned}A_t &= 2A_b + A_l \\ A_t &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ A_t &= 2\pi r(r + h)\end{aligned}$$

9.1.11. Sector Circular

Teorema 43 El área de un sector circular está dada por

$$A = \frac{1}{2}\theta R^2$$

donde R es el radio y θ el ángulo del sector circular (Baldor, 2004).

Demostración 43 El cálculo del área de un sector circular lo podemos obtener mediante el empleo de integrales dobles, en la figura siguiente, tenemos un sector circular de radio R y ángulo α

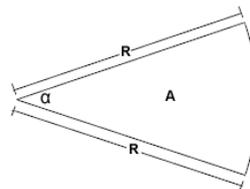


Figura 34. Sector Circular. (Orozco, 2022)

de aquí, utilizando el Jacobiano, se tiene

$$A = \iint r \, dr \, d\theta$$

entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\alpha \int_0^R r \, dr \, d\theta \\ A &= \int_0^\alpha \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R \, d\theta \\ A &= \frac{1}{2} \int_0^\alpha R^2 \, d\theta \\ A &= \frac{1}{2} \theta R^2 \end{aligned}$$

9.1.12. Esfera

Teorema 44 *El área de una esfera está dada por*

$$V = 4\pi r^2$$

donde r es el radio de la esfera (Baldor, 2004).

Demostración 44 *La ecuación cartesiana o rectangular de la esfera está dada por*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

al hacer

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

obtenemos la ecuación de la semi-esfera. Al calcular sus derivadas parciales, obtenemos

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y(x, y) &= \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

sin embargo, $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ no están definidas en el círculo $x^2 + y^2 = a^2$, además el área de la superficie está dada por

$$\iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} \, dx \, dy$$

entonces, al utilizar las derivadas parciales y la fórmula anterior, obtenemos

$$\iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy$$

al usar ahora coordenadas polares y el Jacobiano, la expresión anterior toma la forma

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{b \rightarrow a^-} \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dr \, d\theta \\
 A &= 2\pi a \lim_{b \rightarrow r^-} \int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr \\
 A &= 2\pi a \lim_{b \rightarrow r^-} \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^b \\
 A &= 2\pi a \lim_{b \rightarrow r^-} \left(\sqrt{a^2} - \sqrt{a^2 - b^2} \right) \\
 A &= 2\pi r^2
 \end{aligned}$$

al multiplicar por 2, obtenemos el área total de la esfera, el cual equivale a

$$A = 4\pi r^2$$

Es decir, el área de la superficie de una esfera es cuatro veces el área de su sección transversal, es decir, el área de superficie de una esfera de radio a es cuatro veces el área del círculo que la genera. Éste fue uno de los grandes descubrimientos de Arquímedes en el siglo III a.C.

Teorema 45 El área de una esfera está dada por

$$V = 4\pi r^2$$

donde r es el radio de la esfera.

Demostración 45 La ecuación de la esfera en coordenada cartesiana o rectangular es $x^2 + y^2 + z^2 = R$, utilizando coordenadas esféricas y parametrizando dicha curva, obtenemos

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \phi \\
 y &= r \sin \theta \sin \phi \\
 z &= r \cos \theta
 \end{aligned}$$

donde la región de integración está dada por

$$\begin{aligned}
 0 &\leq r \leq R \\
 0 &\leq \phi \leq 2\pi \\
 0 &\leq \theta \leq \pi
 \end{aligned}$$

calculemos el Jacobiano

$$\begin{aligned}
 J(r, \theta, \phi) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\
 &= r^2 \sin \theta
 \end{aligned}$$

Para calcular el área, calcularemos el recinto recorrido por la parametrización con $r = R$.

Calculamos la integral haciendo el cambio de variable con el jacobiano, entonces

$$\int \int_S dx dy = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta$$

ahora, al calcular la integral más interna se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\phi &= r^2 \sin \theta \phi \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 2\pi r^2 \sin \theta
 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi 2\pi r^2 \sin \theta \, d\theta &= -2\pi r^2 \cos \theta \Big|_0^\pi \\
 &= 4\pi r^2
 \end{aligned}$$

9.1.13. Cubo

Teorema 46 *El área del cubo está dada por*

$$V = 6a^2$$

donde a es el lado del cubo (Barnett, 1991).

Demostración 46 *Cada cara del cubo es un cuadrado, luego su área es*

$$A = 6 \int_0^a \int_0^a dy \, dx$$

entonces, la integral más interna es

$$\begin{aligned}\int_0^a dy &= y|_0^a \\ &= a\end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned}A &= 6 \int_0^a adx \\ &= 6ax|_0^a \\ &= 6a^2\end{aligned}$$

9.1.14. Elipse

Teorema 47 El área de una elipse con eje mayor a y eje menor b es

$$A = \pi ab$$

(Barnett, 1991).

Demostración 47 Consideremos la siguiente gráfica definida por los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$ en el primer cuadrante

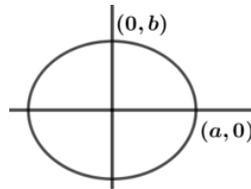


Figura 35. Elipse. (Orozco, 2022)

La ecuación de la elipse está dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, despejando la variable y , obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

luego integrando la parte ubicada en el primer cuadrante y multiplicando por 2, se tiene

$$A = 2 \int_0^a \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy dx$$

integrando la integral más interna

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy &= y \Big|_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= 2 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\end{aligned}$$

ahora

$$A = 2 \int_0^a 2 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$
$$A = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

utilizando sustitución trigonométrica

$$x = a \sin \theta$$
$$dx = a \cos \theta d\theta$$

luego

$$A = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} a \cos \theta d\theta$$
$$A = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \theta)} a \cos \theta d\theta$$
$$A = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} a \cos \theta d\theta$$
$$A = \frac{4b}{a} a^2 \int_0^a \cos^2 \theta d\theta$$

haciendo un cambio de límite de integración

$$x = 0 \quad , \quad \theta = 0$$
$$x = a \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

y utilizando la identidad trigonométrica del $\cos^2 \theta$, se tiene

$$A = \frac{4b}{a} a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$
$$A = 4ab \left. \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right|_0^{\pi/2}$$
$$A = \pi ab$$

9.1.15. Prisma Rectangular

Teorema 48 *El área de un prisma rectangular es*

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

donde a, b, c son las magnitudes de los lados (Baldor, 2004).

Demostración 48 De acuerdo a la figura

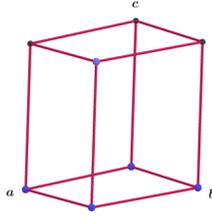


Figura 36. Prisma Rectangular. (Orozco, 2022)

y por integrales dobles (para el rectángulo definido por la región $[0, a]$ y $[0, b]$)

$$2 \int_0^a \int_0^b dy dx = 2 \int_0^a \left(\int_0^b dy \right) dx$$

luego

$$\begin{aligned} \int_0^b dy &= y \Big|_0^b \\ &= b \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} 2 \int_0^a \left(\int_0^b dy \right) dx &= 2 \int_0^a b dx \\ &= 2ab \end{aligned}$$

de igual manera (para el rectángulo definido por la región $[0, a]$ y $[0, c]$)

$$2 \int_0^a \int_0^c dz dx = 2 \int_0^a \left(\int_0^c dz \right) dx$$

luego

$$\begin{aligned} \int_0^c dz &= z \Big|_0^c \\ &= c \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} 2 \int_0^a \left(\int_0^c dz \right) dx &= 2 \int_0^a c dx \\ &= 2ac \end{aligned}$$

finalmente (para el rectángulo definido por la región $[0, b]$ y $[0, c]$)

$$2 \int_0^b \int_0^c dz dy = 2 \int_0^b \left(\int_0^c dz \right) dy$$

luego

$$\begin{aligned}\int_0^c dz &= z \Big|_0^c \\ &= c\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}2 \int_0^b \int_0^c dz dy &= 2 \int_0^b c dx \\ &= 2bc\end{aligned}$$

en consecuencia, el área total del prisma rectangular es

$$\begin{aligned}A &= 2 \int_0^a \int_0^b dy dx + 2 \int_0^a \int_0^c dz dx + 2 \int_0^b \int_0^c dz dy \\ A &= 2ab + 2ac + 2bc \\ A &= 2(ab + ac + bc)\end{aligned}$$

9.2. Volumen

9.2.1. Esfera

Teorema 49 (*Volumen de la esfera por integrales dobles*)

El volumen de una esfera está dada por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

donde r es el radio de la esfera (Baldor, 2004).

Demostración 49 *Sabemos que la ecuación cartesiana o rectangular de la esfera está dada por*

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

al despejar la variable z , obtenemos

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Como se está considerando la semiesfera positiva, se multiplicará por 2, para obtener el volumen completo de la misma, es decir

$$V = 2 \iint \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

utilizando coordenadas polares ($x^2 + y^2 = r^2$) y el Jacobiano ($r \, dr \, d\theta$), se tiene que

$$V = 2 \int \int \sqrt{R^2 - r^2} r \, dr \, d\theta$$

$$V = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} R^3 \, d\theta$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

10. CAPÍTULO VI: ÁREAS EN COORDENADAS POLARES

10.1. Cardiode

El cardiode es una figura polar muy conocida y tiene la forma de un corazón, su ecuación está dada por algunas de estas expresiones

$$a \pm a \cos \theta$$

$$a \pm a \sin \theta$$

Teorema 50 *El área del cardiode de la forma $r = a + a \cos \theta$, donde $a \in \mathbb{R}$ está dado por*

$$A = \frac{3}{2}\pi a^2$$

(Bers, 1972)

Demostración 50 *El área de una figura polar está dada por*

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta$$

al aplicar integración en la fórmula anterior y considerando que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned} A &= 2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (a + a \cos \theta)^2 d\theta \\ A &= \int_0^{\pi} (a^2 \cos^2 \theta + 2a^2 \cos \theta + a^2) d\theta \\ A &= \int_0^{\pi} a^2 \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{\pi} (2a^2 \cos \theta) d\theta + \int_0^{\pi} a^2 d\theta \\ A &= \frac{1}{2}\pi a^2 + 0 + \pi a^2 \\ A &= \frac{3}{2}\pi a^2 \end{aligned}$$

Otra variante es haber considerado tomar el límite de forma completa, es decir $0 \leq \theta \leq 2\pi$, también obtendríamos

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a + a \cos \theta)^2 d\theta$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \theta + 2a^2 \cos \theta + a^2) d\theta \\
A &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} (2a^2 \cos \theta) d\theta + \int_0^{2\pi} a^2 d\theta \right) \\
A &= \frac{1}{2} (\pi a^2 + 0 + 2\pi a^2) \\
A &= \frac{3}{2} \pi a^2
\end{aligned}$$

Podemos notar que independientemente de la elección de los límites de integración el valor del área es igual.

Teorema 51 El área del cardiode de la forma $r = a + a \sin \theta$, donde $a \in \mathbb{R}$ está dado por

$$A = \frac{3}{2} \pi a^2$$

(Bers, 1972)

Demostración 51 El área de una figura polar está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta$$

al aplicar integración en la fórmula anterior y considerando que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
A &= 2 \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a + a \sin \theta)^2 d\theta \\
A &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a^2 \sin^2 \theta + 2a^2 \sin \theta + a^2) d\theta \\
A &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \sin^2 \theta d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2a^2 \sin \theta) d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 d\theta \\
A &= \frac{1}{2} \pi a^2 + 0 + \pi a^2 \\
A &= \frac{3}{2} \pi a^2
\end{aligned}$$

Otra variante es haber considerado tomar el límite de forma completa, es decir $0 \leq \theta \leq 2\pi$, es decir

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a + a \sin \theta)^2 d\theta \\
A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^2 \theta + 2a^2 \sin \theta + a^2) d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 \theta \, d\theta + \int_0^{2\pi} (2a^2 \sin \theta) \, d\theta + \int_0^{2\pi} a^2 \, d\theta \right) \\
A &= \frac{1}{2} (\pi a^2 + 0 + 2\pi a^2) \\
A &= \frac{3}{2} \pi a^2
\end{aligned}$$

Podemos notar que independientemente de la elección de los límites de integración el valor del área es igual.

10.2. Lemniscata

Teorema 52 El área de la lemniscata de la forma $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$, donde $a \in \mathbb{R}$ está dado por

$$A = a^2$$

(Leithold, 1999)

Demostración 52 El área de una figura polar está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 \, d\theta$$

al aplicar integración en la fórmula anterior y considerando que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ se tiene

$$\begin{aligned}
A &= 4 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos(2\theta) \, d\theta \right) \\
A &= 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos(2\theta) \, d\theta \\
A &= 2a^2 \frac{1}{2} \sin(2\theta) \Big|_0^{\pi/4} \\
A &= a^2
\end{aligned}$$

Otra variante es haber considerado el valor del ángulo θ , entre $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, con lo cual

$$\begin{aligned}
A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos(2\theta) \, d\theta \right) \\
A &= a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\theta) \, d\theta \\
A &= a^2 \frac{1}{2} \sin(2\theta) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
A &= a^2
\end{aligned}$$

Podemos notar que independientemente de la elección de los límites de integración el valor del área es igual.

Teorema 53 El área de la lemniscata de la forma $r^2 = a^2 \sin(2\theta)$, donde $a \in \mathbb{R}$ está dado por

$$A = a^2$$

Demostración 53 El área de una figura polar está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta$$

al aplicar integración en la fórmula anterior y considerando que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ se tiene

$$A = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} a^2 \sin(2\theta) d\theta \right)$$

$$A = a^2 \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta$$

$$A = -a^2 \frac{1}{2} \cos(2\theta) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$A = a^2$$

Otra variante es haber considerado el valor del ángulo θ , entre $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, con lo cual se obtiene

$$A = 4 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \sin(2\theta) d\theta \right)$$

$$A = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \sin(2\theta) d\theta$$

$$A = -a^2 \cos(2\theta) \Big|_0^{\pi/4}$$

$$A = a^2$$

Podemos notar que independientemente de la elección de los límites de integración el valor del área es igual.

10.3. Rosa

Teorema 54 El área de la rosa de la forma $r = a \cos(k\theta)$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ par está dado por

$$A = \frac{\pi}{2} a^2$$

(Piskunov, 1980)

Demostración 54 El área de una figura polar está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta$$

al aplicar integración en la fórmula anterior y considerando que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ se tiene

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2(k\theta) d\theta \\ A &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2k\theta}{2} \right) d\theta \\ A &= \frac{1}{4} a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2k\theta) d\theta \\ A &= \frac{1}{4} a^2 \theta + \frac{1}{8k} \sin(2k\theta) \Big|_0^{2\pi} \\ A &= \frac{\pi}{2} a^2 \end{aligned}$$

Teorema 55 El área de la rosa de la forma $r = a \cos(k\theta)$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ impar está dado por

$$A = \frac{\pi}{4} a^2$$

Demostración 55 El área de una figura polar está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta$$

al aplicar integración en la fórmula anterior y considerando que $0 \leq \theta \leq \pi$ se tiene

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 \cos^2(k\theta) d\theta \\ A &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2k\theta}{2} \right) d\theta \\ A &= \frac{1}{4} a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos 2k\theta) d\theta \\ A &= \frac{1}{4} a^2 \theta + \frac{1}{8k} \sin(2k\theta) \Big|_0^{\pi} \\ A &= \frac{\pi}{4} a^2 \end{aligned}$$

Teorema 56 El área de la rosa de la forma $r = a \sin(k\theta)$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ par está dado por

$$A = \frac{\pi}{2} a^2$$

Demostración 56 *El área de una figura polar está dada por*

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta$$

al aplicar integración en la fórmula anterior y considerando que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ se tiene

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2(k\theta) d\theta \\ A &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2k\theta}{2} \right) d\theta \\ A &= \frac{1}{4} a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2k\theta) d\theta \\ A &= \left. \frac{1}{4} a^2 \theta - \frac{1}{8k} \sin(2k\theta) \right|_0^{2\pi} \\ A &= \frac{\pi}{2} a^2 \end{aligned}$$

Teorema 57 *El área de la rosa de la forma $r = a \sin(k\theta)$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ impar está dado por*

$$A = \frac{\pi}{2} a^2$$

Demostración 57 *El área de una figura polar está dada por*

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta$$

al aplicar integración en la fórmula anterior y considerando que $0 \leq \theta \leq \pi$ se tiene

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 \sin^2(k\theta) d\theta \\ A &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2k\theta}{2} \right) d\theta \\ A &= \frac{1}{4} a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2k\theta) d\theta \\ A &= \left. \frac{1}{4} a^2 \theta - \frac{1}{8k} \sin(2k\theta) \right|_0^{\pi} \\ A &= \frac{\pi}{4} a^2 \end{aligned}$$

11. CAPÍTULO VII: LONGITUD DE CURVAS

11.1. Circunferencia

Teorema 58 *La longitud de la circunferencia de centro el origen y radio r , con ecuaciones paramétricas $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ es*

$$L = 2\pi r$$

(Anton, 1997)

Demostración 58 *Sabemos que las ecuaciones paramétricas de la circunferencia son*

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

y sus derivadas respectivas respecto a t son

$$dx = -r \sin t; \quad dy = r \cos t$$

aplicando la fórmula de la longitud de una curva dada por ecuaciones paramétricas, se tiene

$$L = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} dt$$

luego

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt$$

$$L = r \int_0^{2\pi} dt$$

$$L = 2\pi r$$

Teorema 59 *La longitud de la circunferencia de centro el origen y radio unitario, con ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \sin t$ es*

$$L = 2\pi$$

Demostración 59 Sabemos que las ecuaciones paramétricas de la circunferencia unitaria son

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

y sus derivadas respectivas son

$$dx = -\sin t; \quad dy = \cos t$$

aplicando la fórmula de la longitud de una curva para ecuaciones paramétricas, se tiene

$$L = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} dt$$

luego

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} dt \\ L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt \\ L &= \int_0^{2\pi} dt \\ L &= 2\pi \end{aligned}$$

Otra cosa importante es que podemos notar que derivando el área de la circunferencia respecto al radio, obtenemos la longitud de la misma, es decir:

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ \frac{dA}{dr} &= 2\pi r \\ L &= 2\pi r \end{aligned}$$

Teorema 60 La longitud de la circunferencia de centro el origen y radio r , con ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es

$$L = 2\pi r$$

Demostración 60 La longitud de arco de una curva definida por la ecuación $y = f(x)$ está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

luego

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 \\2x dx + 2y dy &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}\end{aligned}$$

sustituyendo en la fórmula dada e integrando en el intervalo $-r \leq x \leq r$

$$\begin{aligned}L &= \int_{-r}^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2} dx \\L &= \int_{-r}^r \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} dx\end{aligned}$$

pero recordemos que $x^2 + y^2 = r^2$ entonces $y^2 = r^2 - x^2$ de aquí

$$\begin{aligned}L &= \int_{-r}^r \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\L &= 2 \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx\end{aligned}$$

Al aplicar una propiedad de integración

$$\int_{-r}^r f(x) dx = 2 \int_0^r f(x) dx$$

obtenemos

$$L = \int_{-r}^r \frac{\sqrt{r^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2 \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

al utilizar la sustitución trigonométrica $x = r \sin \theta$, junto con su derivada $dx = r \cos \theta d\theta$, y al realizar un cambio de límite, se tiene

$$\begin{aligned}L &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta}} r \cos \theta d\theta \\L &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{r}{\sqrt{r^2 (1 - \sin^2 \theta)}} r \cos \theta d\theta \\L &= 2r \int_0^{\pi/2} d\theta \\L &= 2r\theta \Big|_0^{\pi/2} \\L &= \pi r\end{aligned}$$

ahora, multipliquemos por 2, para obtener la longitud total de la circunferencia

$$L = 2\pi r$$

Teorema 61 La longitud de la circunferencia de centro el origen y radio r , con ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es

$$L = 2\pi r$$

Demostración 61 La longitud de arco de una curva definida por la ecuación $x = f(y)$ está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

luego

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ 2xdx + 2ydy &= 0 \\ \frac{dx}{dy} &= -\frac{y}{x} \end{aligned}$$

sustituyendo en la fórmula dada e integrando en el intervalo $-r \leq y \leq r$

$$\begin{aligned} L &= \int_{-r}^r \sqrt{1 + \left(-\frac{y}{x}\right)^2} dy \\ L &= \int_{-r}^r \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} dy \end{aligned}$$

pero recordemos que $x^2 + y^2 = r^2$ entonces $x^2 = r^2 - y^2$ de aquí

$$\begin{aligned} L &= \int_{-r}^r \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} dy \\ L &= \int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy \\ L &= 4 \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy \end{aligned}$$

al utilizar la sustitución trigonométrica $y = r \sin \theta$, $dy = r \cos \theta d\theta$, haciendo un cambio de límite de integración, se tiene

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \theta}} r \cos \theta d\theta \\ L &= 4r \int_0^{\pi/2} d\theta \\ L &= 4r\theta \Big|_0^{\pi/2} \\ L &= 2\pi r \end{aligned}$$

Teorema 62 La longitud de la circunferencia de centro el origen y radio r , es

$$L = 2\pi r$$

Demostración 62 Usaremos una integral curvilínea para calcular la longitud de la circunferencia, consideremos la región parametrizada por

$$C(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

luego

$$C'(\theta) = (-r \sin \theta, r \cos \theta)$$

ahora, tomando la norma de este vector, se tiene

$$\begin{aligned} \|C'(\theta)\| &= \sqrt{(-r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \\ &= \sqrt{r^2} \\ &= r \end{aligned}$$

la integral curvilínea es, con $f(C(\theta)) = 1$

$$\begin{aligned} L &= \oint_C f \, ds \\ L &= \oint_C f(C(\theta)) \|C'(\theta)\| \\ L &= \int_0^{2\pi} r \, d\theta \\ L &= 2\pi r \end{aligned}$$

11.2. Cardiode

Teorema 63 La longitud de la cardiode $r = a + a \cos \theta$ está dada por

$$L = 8a$$

(Lang, 1990)

Demostración 63 La longitud de una curva dada en coordenada polar está dada por

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

considerando la ecuación de la cardiode, derivando y sustituyendo en la integral anterior se tiene

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(a + a \cos \theta)^2 + (-a \sin \theta)^2} d\theta \\ L &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 + 2a^2 \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ L &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 + 2a^2 \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ L &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 + 2a^2 \cos \theta + a^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} d\theta \\ L &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2a^2 \cos \theta + 2a^2} d\theta \\ L &= 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{\cos \theta + 1} d\theta \\ L &= 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ L &= 2(\sqrt{2})^2 a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ L &= 8a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} \\ L &= 8a \end{aligned}$$

Teorema 64 La longitud de la cardiode $r = a + a \sin \theta$ está dada por

$$L = 8\sqrt{2}a$$

Demostración 64 La longitud de una curva dada en coordenada polar está dada por

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

considerando la ecuación de la cardiode, derivando y sustituyendo en la integral anterior se tiene

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(a + a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2} d\theta \\ L &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 + 2a^2 \sin \theta + a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L &= 2 \int_0^\pi \sqrt{a^2 + 2a^2 \sin \theta + a^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} d\theta \\
L &= 2 \int_0^\pi \sqrt{2a^2 + 2a^2 \sin \theta} d\theta \\
L &= 2 \int_0^\pi \sqrt{2a^2 (1 + \sin \theta)} d\theta \\
L &= 2\sqrt{2}a \int_0^\pi \sqrt{1 + \sin \theta} d\theta \\
L &= 8\sqrt{2}a
\end{aligned}$$

11.3. Astroide

Teorema 65 *La longitud del astroide dada en ecuaciones paramétricas $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ está dada por*

$$L = 6a$$

(Leithold, 1999)

Demostración 65 *Sabemos que derivando las ecuaciones paramétricas dadas respecto a θ obtenemos*

$$\begin{aligned}
dx &= -3a \cos^2 \theta \sin \theta \\
dy &= 3a \sin^2 \theta \cos \theta
\end{aligned}$$

además la longitud de una curva por ecuaciones paramétricas está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2} dx$$

entonces, calcularemos la longitud de la curva en el primer cuadrante y multiplicaremos por 4 para tener la longitud total

$$\begin{aligned}
L &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a \cos^2 \theta \sin \theta)^2 + (3a \sin^2 \theta \cos \theta)^2} d\theta \\
L &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + 9a^2 \sin^4 \theta \cos^2 \theta} d\theta \\
L &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} d\theta \\
L &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta} d\theta
\end{aligned}$$

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} 3a \cos \theta \sin \theta \, d\theta$$

$$L = 12a \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta$$

haciendo un cambio de variable

$$u = \sin \theta$$

$$du = \cos \theta \, d\theta$$

luego

$$L = 12a \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta$$

$$L = 12a \int_0^{\pi/2} u \, du$$

$$L = \frac{12}{2} a u^2$$

$$L = 6a \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi/2}$$

$$L = 6a$$

Otra variante consiste en aplicar un cambio de límite de integración, sabiendo que las ecuaciones

$$u = \sin \theta$$

$$du = \cos \theta \, d\theta$$

se pueden transformar por

$$\theta = 0 \quad , \quad u = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad u = 1$$

luego la integral se puede expresar por

$$L = 12a \int_0^1 u \, du$$

$$L = \frac{12}{2} a u^2$$

$$L = 6a u \Big|_0^1$$

$$L = 6a$$

12. CAPÍTULO VIII: VOLUMEN (INTEGRALES TRIPLES)

En este capítulo vamos a considerar las fórmulas referenciadas por (Leithold, 1999) respecto a la integral triple como

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i, w_i) \Delta_i V \\ V &= \iiint_R f(x, y, z) dV \\ V &= \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dy dx dz \end{aligned} \quad (3)$$

Pero si $f(x, y, z) = 1$, entonces, la medida del volumen V sobre la región R se expresa como una integral triple y obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \iiint_R dV \\ V &= \iiint_R dx dy dz \end{aligned}$$

notemos que el diferencial de volumen dV se puede expresar por las siguientes formas

$$\begin{aligned} dV &= dx dy dz \\ dV &= dx dz dy \\ dV &= dy dx dz \\ dV &= dx dz dx \\ dV &= dz dx dy \\ dV &= dx dz dy \end{aligned}$$

es decir, para el caso de 3 variables se tiene 3! de expresar el diferencial de volumen.

12.1. Prisma Rectangular

Teorema 66 *El volumen de un prisma rectangular está dado por*

$$V = abc$$

donde a, b, c son las dimensiones del prisma (Baldor, 2004).

Demostración 66 De acuerdo a la figura

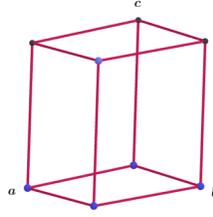


Figura 37. Prisma Rectangular. (Orozco, 2022)

y por integrales triples, el volumen del prisma rectangular se puede expresar por

$$V = \int_0^a \int_0^b \int_0^c dz dy dx$$

luego, la integral más interna es

$$\begin{aligned} \int_0^c dz &= z \Big|_0^c \\ &= c \end{aligned}$$

de igual manera, la integral intermedia es

$$\begin{aligned} \int_0^b c dy &= cy \Big|_0^b \\ &= bc \end{aligned}$$

finalmente, la integral exterior es

$$\begin{aligned} \int_0^a bc dx &= bcx \Big|_0^a \\ &= abc \end{aligned}$$

en consecuencia, el volumen del prisma rectangular es

$$V = abc$$

es decir, el producto de sus tres dimensiones (alto, largo y ancho).

12.2. Cubo

Teorema 67 *El volumen de un cubo está dado por*

$$V = a^3$$

donde a es la arista del cubo (Barnett, 1991).

Demostración 67 *De acuerdo a la figura*

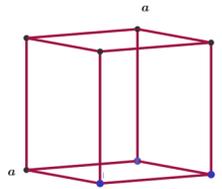


Figura 38. Cubo. (Orozco, 2022)

y por integrales triples, el volumen del cubo es

$$V = \int_0^a \int_0^a \int_0^a dx dy dz$$

luego, la integral más interna

$$\begin{aligned} \int_0^a dx &= x \Big|_0^a \\ &= a \end{aligned}$$

de igual manera, la integral intermedia

$$\begin{aligned} \int_0^a a dy &= ay \Big|_0^a \\ &= a^2 \end{aligned}$$

finalmente, la integral exterior

$$\begin{aligned} \int_0^a a^2 dz &= a^2 z \Big|_0^a \\ &= a^3 \end{aligned}$$

en consecuencia, el volumen del cubo es el producto de sus tres dimensiones (las cuales son todas iguales, ya que sus caras son cuadrados), es decir

$$V = a \times a \times a$$

$$V = a^3$$

12.3. Esfera

Teorema 68 *El volumen de una esfera está dada por*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

donde r es el radio de la esfera (Baldor, 2004).

Demostración 68 *Las ecuaciones esféricas en el espacio tridimensional están dadas por*

$$x = r \sin \phi \cos \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$z = r \cos \phi$$

calculemos el Jacobiano (determinante de las derivadas parciales)

$$J(r, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$J(r, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \sin \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta & r \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando el determinante por la tercer columna se tiene

$$J(r, \phi, \theta) = (-r \sin \theta \sin \phi) \begin{vmatrix} \sin \theta \sin \phi & r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & -r \sin \phi \end{vmatrix}$$

$$- (r \cos \theta \sin \phi) \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & r \cos \theta \cos \phi \\ \cos \phi & -r \sin \phi \end{vmatrix}$$

$$J(r, \phi, \theta) = (-r \sin \phi \sin \theta) (-r \sin^2 \phi \sin \theta - r \sin \theta \cos^2 \phi)$$

$$- (r \cos \theta \sin \phi) (-r \sin^2 \phi \cos \theta - r \cos^2 \phi \cos \theta)$$

$$J(r, \phi, \theta) = r^2 \sin \phi$$

luego

$$dx \, dy \, dz = r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta$$

$$\int \int \int_V dx dy dz = \int_0^\pi \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sin \phi d\theta dr d\phi$$

ahora

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \phi d\theta &= (r^2 \sin \phi) \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi r^2 \sin \phi \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_0^R 2\pi r^2 \sin \phi dr &= 2\pi \sin \phi \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \\ &= 2\pi \sin \phi \frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

finalmente

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi 2\pi \sin \phi \frac{R^3}{3} d\phi \\ V &= -2\pi \frac{R^3}{3} \cos \phi \Big|_0^\pi \\ V &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

12.4. Pirámide

Teorema 69 *El volumen de una pirámide está dada por*

$$V = \frac{1}{3}A_b h$$

donde A_b, h , son el área de la base y la altura respectivamente (Barnett, 1991).

Demostración 69 *Estableceremos los límites de integración para cada uno de los ejes del espacio*

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right) &\leq x \leq \frac{b}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \\ -\frac{b}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right) &\leq y \leq \frac{b}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \\ 0 &\leq z \leq h \end{aligned}$$

entonces

$$\int \int \int_V dx dy dz = \int_0^h \int_{-\frac{b}{2}(1-\frac{z}{h})}^{\frac{b}{2}(1-\frac{z}{h})} \int_{-\frac{b}{2}(1-\frac{z}{h})}^{\frac{b}{2}(1-\frac{z}{h})} dx dy dz$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)} dx &= x \Big|_{-\frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)} \\ &= \frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right) - \left(-\frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)\right) \\ &= \frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right) + \frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right) \\ &= b\left(1-\frac{z}{h}\right)\end{aligned}$$

ahora

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)} b\left(1-\frac{z}{h}\right) dy &= b\left(1-\frac{z}{h}\right) y \Big|_{-\frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)} \\ &= b\left(1-\frac{z}{h}\right) \frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right) + b\left(1-\frac{z}{h}\right) \frac{b}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right) \\ &= b^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^2\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}V &= \int_0^h b^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^2 dz \\ V &= \int_0^h b^2\left(1-2\frac{z}{h}+\frac{z^2}{h^2}\right) dz \\ V &= \frac{1}{3}b^2h\end{aligned}$$

12.5. Cono

Teorema 70 *El volumen del cono está dada por*

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2h$$

donde R, h , son el radio y la altura respectivamente (Barnett, 1991).

Demostración 70 *Utilizando coordenadas polares para poder parametrizar correctamente la base circular, obtenemos*

$$\begin{aligned}0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq r \leq R\left(1-\frac{z}{h}\right) \\ 0 &\leq z \leq h\end{aligned}$$

luego hacemos el cambio de variable a polares con Jacobiano r

$$\int \int \int_V dx \, dy \, dz = \int_0^h \int_0^{R(1-\frac{z}{h})} \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dr \, dz$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} r \, d\theta &= r\theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_0^{R(1-\frac{z}{h})} 2\pi r \, dr &= \pi r^2 \Big|_0^{R(1-\frac{z}{h})} \\ &= \pi R^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi R^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz \\ V &= \int_0^h \pi R^2 \left(1 - 2\frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2}\right) dz \\ V &= \frac{1}{3}\pi R^2 h \end{aligned}$$

12.6. Cilindro

Teorema 71 *El volumen del cilindro está dada por*

$$V = \pi R^2 h$$

donde R, h , son el radio y la altura respectivamente (Barnett, 1991).

Demostración 71 *Utilizaremos los siguientes límites de integración*

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq R$$

$$0 \leq z \leq h$$

luego hacemos el cambio de variable a polares con Jacobiano r

$$\int \int \int_V dx \, dy \, dz = \int_0^h \int_0^R \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dr \, dz$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} r \, d\theta &= r\theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi r\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\int_0^R 2\pi r \, dr &= \pi r^2 \Big|_0^R \\ &= \pi R^2\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}V &= \int_0^h \pi R^2 \, dz \\ V &= \pi R^2 z \Big|_0^h \\ V &= \pi R^2 h\end{aligned}$$

13. CAPÍTULO IX: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Los resultados obtenidos sobre el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas son:

1. Para el capítulo III: Sólidos Platónicos, se demostraron 5 fórmulas de áreas y 5 fórmulas de volúmenes, totalizando un total de 10 resultados por medios netamente geométricos.

Se utilizaron resultados referente al área del triángulo equilátero y del polígono regular, además de algunas propiedades geométricas relativas al cálculo de área y volúmenes de polígonos regulares.

2. Para el capítulo IV: Integral en una variable, se demostraron 16 fórmulas de áreas y 3 fórmulas de volúmenes, totalizando un total de 19 resultados por medio de la integración en una variable.

Se aplicaron propiedades de la integral definida, así como cambio de variable en coordenadas polares, también se manifestó la utilización de distintos métodos de integración, entre ellos: integración por partes, sustituciones trigonométricas e integrales trigonométricas. Vale señalar que para el caso de la circunferencia y la elipse se demostraron de varias formas las fórmulas de áreas. Se utilizaron diversas equivalencias trigonométricas de manera que los resultados fueran más fáciles de trabajar.

3. Para el capítulo V: Integrales dobles, se demostraron 19 fórmulas de áreas y 1 fórmula de volumen, totalizando un total de 20 resultados por medio de la integración en dos variables.

Se emplearon diversas propiedades de la integral doble, así como cambio de variable en coordenadas cilíndricas y esféricas, también se manifestó la aplicación de la integración iterada y diversos métodos de integración, entre ellos: integración por partes,

sustituciones trigonométricas e integrales trigonométricas. Se señala que para el caso de la circunferencia y la esfera, se obtuvieron diversas formas de demostraciones. También se utilizaron diversas equivalencias trigonométricas, entre ellas las relativas al $\cos^2 \theta$.

4. Para el capítulo VI: Áreas en Coordenadas Polares, se obtuvieron 8 resultados fundamentales, 2 para la cardiode, 2 para las lemniscata y 4 para las rosas, totalizando 8 fórmulas de áreas, todas ellas desarrolladas por integración en una variable.
5. Para el capítulo VII: Longitud de Curvas, se obtuvieron 8 resultados fundamentales, 5 para la circunferencia, 2 para las cardiodes y 1 para el astroide, totalizando 8 fórmulas de longitud de curvas, todas ellas desarrolladas por integración en una variable.
6. Para el capítulo VIII: Integrales triples, se demostraron 6 fórmulas de volumen, todas ellas desarrolladas por integración en tres variables. Estas corresponden a los cuerpos geométricos : Prisma Rectangular, Cubo, Esfera, Pirámide, Cono y Cilindro.

Se utilizaron diversas propiedades de la integral triple, así como cambio de variable en coordenadas cilíndricas y esféricas, también se manifestó la aplicación de la integración iterada y diversos métodos de integración, entre ellos: integración por partes, sustituciones trigonométricas e integrales trigonométricas.

14. CONCLUSIONES

Luego de haber realizado el análisis detallado de la información recabada en torno a la investigación se llegó a las conclusiones siguientes de acuerdo al orden de los propósitos previstos:

Con relación al objetivo específico 1: Inferir diversas estrategias de demostraciones utilizando el cálculo diferencial e integral en una y varias variables, referido al cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas.

1. Aplicación de propiedades fundamentales de integración en el desarrollo constructivo de una fórmula de área o volumen.
2. Formulación de argumentos explicativos y lógicos que permiten la narrativa de la demostración Matemática.
3. Aplicación de procesos de integración en las demostraciones de dichas fórmulas de áreas o volúmenes.
4. Procesos de deducción e inducción en los raciocinios del pensamiento lógico matemático.
5. Uso de simbología y de procesos analíticos en la construcción de las demostraciones.

Con relación al objetivo específico 2: Combinar diversos métodos de integración en la construcción de los teoremas referidos a áreas y volúmenes de figuras geométricas.

1. Vinculación de diferentes métodos de integración para el desarrollo del teorema.
2. Demostrar un teorema de área o volumen mediante diversas teorías de integración en una y varias variables.
3. Generalización de procesos abstractos que permitan inducir o deducir ciertas relaciones propias de los objetos matemáticos.
4. Disponibilidad de los conocimientos matemáticos en el desarrollo demostrativo de un teorema.

5. Capacidad de poder discernir y elegir procesos o métodos demostrativos de acuerdo a la naturaleza del problema.
6. Posibilidad de poder aplicar diferentes técnicas matemáticas para la solución de un determinado problema.

En esta fase conclusiva se puede afirmar:

1. El presente trabajo de investigación contiene
 - a) 5 fórmulas de áreas demostrada por medio de la geometría euclídea.
 - b) 5 fórmulas de volúmenes demostrada por medio de la geometría euclídea.
 - c) 35 fórmulas de áreas por medio de la integración en una y varias variables.
 - d) 10 fórmulas de volúmenes por medio de integración en una y varias variables.
 - e) 8 fórmulas de áreas en coordenadas polares por medio de integración en una variable.
 - f) 8 fórmulas de longitud de curvas por medio de integración en una variable.
2. En consecuencia, se demostró 71 fórmulas de áreas, volúmenes y longitud de curvas, todas ellas desarrolladas por integración en una, dos y tres variables y utilizando diversos tipos de coordenadas: cartesianas, cilíndricas y esféricas.

15. RECOMENDACIONES

En relación al trabajo de investigación se proponen las siguientes recomendaciones:

1. Propiciar en los futuros doctorandos la necesidad de realizar investigaciones en las diferentes disciplinas de las Matemáticas.
2. Promover la utilización del cálculo diferencial e integral en las demostraciones de fórmulas de áreas y volúmenes en los salones de clases de pregrado y de grado en las aulas universitarias.
3. Promover en las carreras de grado universitario, específicamente en Matemática, la publicación de resultados investigativos de la especialidad de Matemática.
4. Estimular la apertura de nuevas líneas y áreas de investigación.

16. BIBLIOGRAFÍA

- Anton, H., (1997). Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 2. Limusa. México.
- Apostol, T. (1982). Calculus, Vol.I. Buenos Aires. Reverté.
- Aucapiña, R. (2020). Guía didáctica para mejorar la enseñanza de la integración múltiple aplicada al cálculo de área y volumen de sólidos con apoyo de recursos educativos. Universidad de Cuenca, Ecuador.
- Baldor, J. (2004) . Geometría y Trigonometría, Publicaciones Cultural S. A. de C. V.
- Barnett, R. (1991) . Geometría, mcGRAW-HILL interamericana de México S.A, de C.V
- Bartle, R. (1996). Introducción al Análisis Matemático de una variable. México. Limusa.
- Baum, A. & Milles, S. y Schultz, H. (1992). Cálculo Aplicado. Limusa. Grupo Noriega Editores. México.
- Bers, L. (1972). Cálculo Diferencial e Integral. México. Interamericana.
- Boyer, C. (1991). A History of Mathematics. John Wiley & Son, Inc. USA.
- Burgos de J. (1994). Curso de Álgebra y Geometría. Alhambra Longman. Madrid.
- Camelo, D. (2020). Estado del arte uso de la geometría de burbujas con fines educativos en Colombia. Universidad Santo Tomás, División de Educación Abierta y a Distancia, Facultad de Educación, Julio 2020.
- Crespo, C.; Farfán, R. y Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13 (3), 283-306.
- Cuida, M. (2016). Procesos Infinitos Inherentes a la Integral Definida. Universidad de Valladolid, España.
- De Burgos, J. (1996). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Madrid. McGrawHill.

- Eugenio F. & Hitt, F. (1997). Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamericana.
- Europea, C. (2004). Modelo Educativo por Competencias, Dirección General de Educación y Cultura de la Comisión Europea.
- Fetíssov, A. (1980). Acerca de la demostración en Geometría, Editorial MIR, Moscú.
- Godino, J. D. y Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 19 (3), 405-414.
- Goldstein, L.& Lay, D. y Schneider, D. (1990). Cálculo y sus Aplicaciones. Cuarta Edición. Prentice Hall. Méjico.
- Guirao, A. (24 de Noviembre de 2020). Sólidos Platónicos - Universidad de Murcia. <https://www.um.es/phi/aguirao/EntreParticulas/PDF/2020%20nov24.pdf>
- Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. For the Learning of mathematics, 15 (3), 42-49. Doi:
- Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. Mathematics Magazine, 64(5), 291-314.
- Lakatos, I. (1978). Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Madrid: Alianza Universidad.
- Lang, S. (1990). Cálculo I. México. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Larson, R. & Hostetler, R. y Edwards, B. (1995). Cálculo y Geometría Analítica, Volumen 1. Quinta Edición. Mc. Graw Hill. Méjico.
- Lehmann, C. (1980) . Geometría Analítica, Editorial Limusa S. A. de C. V.
- Leithold, L. (1999). El Cálculo, 7 ed. Oxford University Press. Méjico.
- Martínez, G (2018). Empleo de Software Libre de Graficación para el tema de Sólidos de Revolución. Universidad San Luis de Potosi, Mexico.

Montoro, V. (2007). Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 2 (1), 101-121.

Noriega, R. (1987). *Cálculo Diferencial e Integral*. Buenos Aires. Docencia.

Orozco, I. (2022). Acerca de la diagonal del Cuadrado. *Revista de Divulgación y Prensa*, Farem-Chontales.

Patterson, C. (1950). *Los principios del pensamiento correcto: lógica*. Argentina, Buenos Aires: Editorial Americalee.

Pasos, C & Taborda, J. (2015). *Trabajo con cuerpos geométricos en la escuela secundaria*.

Piskunov, N. (1980). *Cálculo Diferencial e Integral*. Toms I y II. Moscú. Mir.

Pita, C. (1989). *Cálculo de una Variable*. México. Prentice-Hall.

Protter-Morrey, (1989). *Cálculo y Geometría Analítica*, 1er curso. México. Fondo Educativo Latinoamericano.

Purcell, E. y Varberg, D. (1995). *Cálculo con Geometría Analítica*. Prentice Hall Hispanoamericana. Méjico.

Quesada, C. (2006). *Los sólidos platónicos, historia, propiedades y arte*. Universidad de México, UNAM.

Quesada, C. (2006). *Los sólidos platónicos - Departamento de Matemática UNAM* . <https://lya.fciencias.unam.mx/gfgf/ga20132/poliedros/arch5.pdf>

Romá, J. (2003). *Poliedros regulares: geometría descriptiva*. Club Universitario.

Romañach, J., & Toboso, M. (12 de Mayo de 2016). *Los sólidos platónicos y la proporción áurea (I)*. *Relaciones y Series*. http://www.diversocracia.org/docs/platonicos_aureos_I_.pdf

SEP (2010). *Modelo Educativo por Competencias*, Secretaría de Educación Pública de México.

- Siurot, M. (2016). Los cuerpos geométricos - Junta de Andalucía.
- Spivak, M. (1990). Calculus. Barcelona. Reverté.
- Stein, K., & Barcellos, A. (1995). Cálculo y Geometría Analítica. I. Bogotá. Mc Graw-Hill.
- Stewart, J. (2001). Cálculo, Conceptos y Contextos. International Thomson Editores. México.
- Swokowski, E. (1987). Introducción al Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.
- Thomas, G. y Finney, R. (1998). Cálculo, una variable. Addison Wesley Longman. Méjico.
- Waner, S. y Costenoble, S. (2002). Cálculo Aplicado. Segunda Edición. Thomson Learning. México.

17. ANEXOS

17.1. Área

1. Área del Rectángulo

$$A = bh$$

2. Área del Triángulo

$$A = \frac{bh}{2}$$

3. Área del Triángulo Equilátero

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

4. Área del Triángulo Isósceles Rectángulo

$$A = \frac{1}{2}l^2$$

5. Área del Cuadrado

$$A = l^2$$

6. Área del Rombo

$$A = \frac{d \times D}{2}$$

7. Área del Romboide

$$A = bh$$

8. Área del Círculo

$$A = \pi r^2$$

9. Área del Círculo Unitario

$$A = \pi$$

10. Área de la Corona Circular

$$A = \pi (R^2 - r^2)$$

11. Área total del Cono

$$A = \pi r (r + g)$$

12. Área lateral de un Cilindro

$$A = 2\pi rh$$

13. Área de la Elipse

$$A = \pi ab$$

14. Área del Sector Circular

$$A = \frac{1}{2}\theta R^2$$

15. Área del Trapecio

$$A = \frac{(b_1 + b_2) h}{2}$$

17.2. Volumen

1. Volumen Esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2. Volumen Cilindro Circular Recto

$$V = \pi r^2 h$$

3. Volumen del Cono Circular Recto

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

4. Volumen del Cubo

$$V = l^3$$

5. Volumen Pirámide

$$V = \frac{1}{3}A_b h$$

6. Volumen del Prisma Rectangular

$$V = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto}$$

17.3. Programación Python

```
"
Created on Thu Oct 20 15:53:18 2022
@author: Ingrid Judith Orozco Martinez
"

import math
from time import sleep
print()
print('M E N U   P R I N C I P A L')
print()

def mostrar_menu(opciones):
    print('Seleccione una opción:')
    print()
    for clave in opciones:
        print(f' {clave} {opciones[clave][0]}')

def leer_opcion(opciones):
    print()
    while (a := input('Deme su Opción: ')) not in opciones:
        print('Opción incorrecta, vuelva a intentarlo.')
    return a

def ejecutar_opcion(opcion, opciones):
    opciones[opcion][1]()

def generar_menu(opciones, opcion_salida):
    opcion = None
    while opcion != opcion_salida:
        mostrar_menu(opciones)
        opcion = leer_opcion(opciones)
        ejecutar_opcion(opcion, opciones)
    print()
```

```

def menu_principal():
    opciones = {
        '1': ('Area del Rectangulo', rectangulo),
        '2': ('Area del Triangulo', triangulo),
        '3': ('Area del Triangulo Equilatero', triangulo_equi),
        '4': ('Area del Triángulo Isosceles Rectangulo :', triangulo_Isoc),
        '5': ('Area del Cuadrado :', cuadrado),
        '6': ('Area del Rombo :', rombo),
        '7': ('Area del Romboide :', romboide),
        '8': ('Area de la Circunferencia :', circunferencia),
        '9': ('Area de la Corona Circular :', corona_circular),
        '10': ('Area del Cono :', cono),
        '11': ('Area lateral del Cilindro :', cilindro_Lat_Tot),
        '12': ('Area Elipse :', elipse),
        '13': ('Volumen de la Esfera :', esfera),
        '14': ('Volumen del Cono :', conov),
        '15': ('Volumen del Cilindro :', cilindrov),
        '16': ('Area Sector Circular :', sector_circular),
        '17': ('Area Cardiode :', cardiode),
        '18': ('Area Lemniscata :', lemniscata),
        '19': ('Area Rosas :', rosa),
        '20': ('Longitud Circunferencia :', long_circ),
        '21': ('Longitud Cardiode :', long_cardiode),
        '22': ('Longitud Astroide :', long_astroide),
        '23': ('Volumen Prisma :', prisma),
        '24': ('Salir', salir)
    }

    generar_menu(opciones, '24')

def rectangulo():
    print()
    print('Datos del Rectángulo')

```

```

b=float(input('Deme la base : '))
a=float(input('Deme la altura : '))
print()
print('El area es : ', a*b, ' unidades cuadradas')
sleep(3)
pass

def triangulo():
    print()
    print('Datos del Triángulo')
    b=float(input('Deme la base : '))
    a=float(input('Deme la altura : '))
    print()
    print('El area es : ',0.5*a*b, ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

def triangulo_equi():
    print()
    print('Datos del Triángulo Equilátero')
    l=float(input('Deme el lado : '))
    print()
    print('El área es : ', math.sqrt(3)/4*l**2, ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

def triangulo_Isoc():
    print()
    print('Datos del Triángulos Isósceles')
    l=float(input('Deme el lado : '))
    print()
    print('El área es : ', 0.5*l**2, ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

```

```

def cuadrado():
    print()
    print('Datos del Cuadrado')
    l=float(input('Deme el lado : '))
    print()
    print('El área es : ', l**2, ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

def rombo():
    print()
    print('Datos del Rombo')
    D=float(input('Deme la diagonal mayor : '))
    d=float(input('Deme la diagonal menor : '))
    print()
    print('El área es : ', 0.5*D*d, ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

def romboide():
    print()
    print('Datos del Romboide')
    b=float(input('Deme la base : '))
    a=float(input('Deme la altura : '))
    print()
    print('El área es : ', b*a, ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

def circunferencia():
    print()
    print('Datos de la Circunferencia')
    r=float(input('Deme el radio de la circunferencia : '))
    print()

```

```

print('El área es : ', math.pi*r**2, ' unidades cuadradas')
sleep(3)
pass

def corona_circular():
    print()
    print('Datos de la Corona Circular')
    R=float(input('Deme el radio mayor : '))
    r=float(input('Deme el radio menor : '))
    print()
    print('El área es : ', math.pi*(R**2-r**2), ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

def cono():
    print()
    print('Datos del Cono')
    r=float(input('Deme el radio : '))
    g=float(input('Deme la generatriz : '))
    print()
    print('El área es : ', math.pi*r*(r+g), ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

def cilindro_Lat_Tot():
    print()
    print('Datos del Cilindro')
    r=float(input('Deme el radio : '))
    h=float(input('Deme la altura : '))
    print()
    print('El área lateral es : ', 2*math.pi*r*h, ' unidades cuadradas')
    print('El área Total es : ', 2*math.pi*r*(r+h), ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

```

```

def elipse():
    print()
    print('Datos de la Elipse')
    a=float(input('Deme eje mayor : '))
    b=float(input('Deme eje menor : '))
    print()
    print('El área es : ', math.pi*a*b, ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

def esfera():
    print()
    print('Datos de la Esfera')
    r=float(input('Deme el radio : '))
    print()
    print('El Volumen es : ', math.pi*4/3*r**3, ' unidades cúbicas')
    sleep(3)
    pass

def conov():
    print()
    print('Datos del Cono')
    r=float(input('Deme el radio : '))
    h=float(input('Deme la altura : '))
    print()
    print('El Volumen es : ', 1/3*math.pi*h*r**2, ' unidades cúbicas')
    sleep(3)
    pass

def cilindrov():
    print()
    print('Datos del Cilindro')
    r=float(input('Deme el radio : '))
    h=float(input('Deme la altura : '))

```

```

print()
print('El Volumen es : ', math.pi*r**2*h, ' unidades cúbicas')
sleep(3)
pass

def sector_circular():
    print()
    print('Datos del Sector Circular')
    ang=float(input('Deme el angulo : '))
    r=float(input('Deme el radio : '))
    print()
    print('El área es : ', 1/2*ang*r**2, ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

def cardiode():
    print()
    print('Datos del Cardiode')
    a=float(input('Deme el valor de a : '))
    print()
    print('El área es : ', 3/2*math.pi*a**2, ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

def lemniscata():
    print()
    print('Datos de la lemniscata')
    a=float(input('Deme el valor de a : '))
    print()
    print('El área es : ', a**2, ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

```

```

def rosa():
    print()
    print('Datos de la Rosa')
    a=float(input('Deme el valor de a : '))
    print()
    print('El área es : ', math.pi/2*a**2, ' unidades cuadradas')
    sleep(3)
    pass

def long_circ():
    print()
    print('Datos de la Circunferencia')
    r=float(input('Deme el radio2 : '))
    print()
    print('La longitud es : ', 2*math.pi*r, ' unidades')
    sleep(3)
    pass

def long_cardiode():
    print()
    print('Datos del Cardiode')
    a=float(input('Deme el valor de a : '))
    print()
    print('La longitud es : ', 8*a, ' unidades')
    sleep(3)
    pass

def long_astroide():
    print()
    print('Datos del Astroide')
    a=float(input('Deme el valor de a : '))
    print()
    print('La longitud es : ', 6*a, ' unidades')
    sleep(3)

```

```
def prisma():
    print()
    print('Datos del Prisma')
    a=float(input('Deme el valor de a : '))
    b=float(input('Deme el valor de a : '))
    c=float(input('Deme el valor de a : '))
    print()
    print('El volumen del Prisma es : ', a*b*c, ' unidades cúbicas')
    sleep(3)
    pass

def salir():
    print('Adiós, Saliendo del Sistema')

if __name__ == '__main__':
    menu_principal()
```