UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN - MANAGUA

Facultad Regional Multidisciplinaria de Chontales

Las Secciones Cónicas desde el entorno dinámico GeoGebra

T E S I S

Para obtener el grado de

Doctor en Matemática Aplicada

P R E S E N T A:

Msc. Primitivo Herrera Herrera

Tutor de tesis:

Dr. Antonio Parajón Guevara

Juigalpa, Chontales

Febrero, 2018

Dedicatoria

A Dios, por ser luz, guía y dador de humildad en este caminar.

A mis padres, Ana Julia Herrera y Primitivo Herrera, que siempre me han brindado su apoyo y consejos para ser cada día mejor persona.

A mi esposa e hijos quienes inspiran, día a día, mis deseos de superación personal.

Agradecimientos

Deseo agradecer en estas líneas a todas las personas involucradas en mi formación humana, profesional y académica, que colaboraron de manera directa e indirectamente para la realización de este trabajo, principalmente:

A mis Maestros, por todos los conocimientos y consejos dados durante mi formación.

Al Dr. Parajón, por todas las sugerencias y aportes dados a este trabajo en calidad de tutor.

Al Dr. Larios por compartir, de manera personal, sus trabajos de investigación en Geometría Dinámica, los que me llevaron a incursionar en este nuevo enfoque de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Índice general

Capítulo 1

DIAGNÓSTICO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

El desarrollo alcanzado por la humanidad ha sido, en gran medida, a la búsqueda de alternativas de solución a los problemas que surgen en las diferentes actividades humanas, búsqueda que se lleva a cabo a través de investigaciones que permiten ampliar los conocimientos y abrir posibilidades de estudio en diversas áreas de las ciencias sociales, naturales y exactas.

Según Manterola, C y Otzen, T. (2013) "la investigación tiene como principales objetivos, la generación de conocimiento, a través de la producción de nuevas ideas; y la solución de problemas prácticos". Muchos de estos problemas aquejan a la sociedad y son las Ciencias Sociales las que tratan de resolverlos. Entre ellas, destaca la Ciencia de la Educación como pilar fundamental en el desarrollo de cualquier nación y cuyas investigaciones se realizan en base a los intereses propios de los educadores. Así que, investigar en educación, es una acción que se vuelve más apremiamente si se realiza para reflexionar sobre nuestras prácticas diarias como formadores docentes.

En esta dirección, existen investigaciones encaminadas hacia el campo educativo, donde su contribución e impacto resulta ser más evidente e inmediato, mas aún cuando estas proponen nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje en las distintas áreas disciplinares para cada nivel educativo, mostradas como respuestas a los diversos retos y desafíos que se enfrentan en este ámbito. Entre ellos: el bajo rendimiento académico, la deserción estudiantil, la falta de disponibilidad de materiales didácticos contextualizados, el desinterés de los estudiantes por aprender, la falta de motivación hacia el estudio, la selección de los contenidos a enseñar, para qué y cómo enseñarlos, entre otros.

En este contexto, debido a su gran complejidad, un aspecto que ha dado mucho quehacer a los investigadores en educación matemática, ha sido el tratamiento didáctico - metodológico de contenidos matemáticos con el apoyo de materiales manipulables y visuales; necesarios para contribuir a la calidad del proceso de enseñanza aprendizaje en esta disciplina.

El número de recursos y materiales didácticos usados para la enseñanza y aprendizaje de la matemática ha venido creciendo hasta la actualidad gracias al desarrollo de la computación y su integración en el aula de clases. En Nicaragua esto no es ajeno, pues las computadoras están presentes en muchos colegios debido a que el desarrollo alcanzado demanda apoyarse en ellas, para entre otras funciones, propiciar un ambiente idóneo y factible que conlleve a la ejecución efectiva de cada uno de los roles que desempeñen los componentes del sistema educativo.

Al respecto, León (2007) señala que "la incorporación de las herramientas tecnológicas en la enseñanza de la matemática no es un fenómeno nuevo. En este devenir histórico los matemáticos han utilizado desde las herramientas más clásicas (regla, compás, ábaco, reglas de cálculo), hasta las más modernas (las computadoras) para operar con el contenido matemático. El problema consiste entonces en poder determinar **cómo utilizar estos recursos tecnológicos en contextos de aprendizaje**" para facilitar la adquisición de conocimientos, habilidades y destrezas en el estudiante en áreas como: álgebra, geometría, estadística, probabilidades, cálculo y análisis matemático.

En geometría esto conlleva al diseño de actividades de aprendizaje que reflejan el uso de recursos, entre los que se destacan los Softwares de Geometría Dinámica (SGD). La incorporación de estos en la actividad docente debe ser inmediata, aprovechando las potencialidades y bondades que ofrecen. A partir de estas, es que se configura el concepto de Geometría Dinámica, según el cual “las construcciones geométricas pueden ser manipuladas manteniéndose invariantes las relaciones geométricas intrínsecas con las cuales fueron realizadas”. (Bernard y Ecke, 2002: 5).

Bajo esta premisa, existen trabajos previos (ver León (2007), Soberanes (2013), Ruíz (2012), González (2014), entre otros) donde aparecen actividades diseñadas con SGD orientadas principalmente para primaria y secundaria, pero únicamente en contenidos propios de la geometría sintética. A la vez, estos trabajos destacan la importancia de la geometría como base fundamental en el currículum en estos niveles, ya que permite analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales que favorecen la comprensión y admiración por el entorno natural, al igual que estimula en los alumnos la creatividad y una actitud positiva hacia las matemáticas.

La enseñanza de la Geometría no es una tarea fácil, pero en lugar de tratar de enfrentar y superar los obstáculos que emergen de tal proceso; las prácticas escolares actuales en muchos países simplemente los evitan, excluyendo las partes más demandantes, y con frecuencia sin nada que las reemplace. Por ejemplo, en Nicaragua el estudio de las secciones cónicas casi ha desaparecido o ha sido marginado en el currículum de educación media y superior, puesto que en los distintos programas de estudio aparece como tópico de la última unidad y por falta de tiempo o por no disponer del material necesario no logra desarrollarse, privando de estos conocimientos a los estudiantes.

Ante tal situación, muchos investigadores han propuesto diferentes modelos de enseñanza y aprendizaje para la geometría, destacándose como rector el propuesto por el matrimonio Van Hiele, alrededor de los años 60, el cual ha sufrido adaptaciones hasta la actualidad. Este se caracteriza por fijar niveles de razonamiento geométrico de manera inductiva y resaltar fases de enseñanza que permiten alcanzar dichos niveles. En este trabajo es retomado este modelo bajo la perspectiva de sus aspectos teóricos y prácticos.

De todos los argumentos expresados anteriormente, nace el contenido de este trabajo, que consiste en el diseño de actividades de aprendizaje de las secciones cónicas fundamentadas en las fases de enseñanza del modelo de Van Hiele utilizando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra, con el que se pretende contribuir al tratamiento didáctico y metodológico de tales contenidos propios de la Geometría Analítica Plana.

1.2. Justificación

A nivel internacional y nacional, es constante dentro de las directrices para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría la orientación de utilizar las tecnologías de la información y la comunicación como herramientas mediadoras de dicho proceso. De igual manera, se especifica en los programas de asignaturas la utilización de SGD con el fin de manipular y formular conjeturas sobre propiedades geométricas, ya que es a través de los contenidos geométricos que los alumnos se ponen en contacto con los objetos del mundo real.

En Nicaragua la enseñanza de la Geometría Analítica ha sido acompañada por textos (como Geometría Moderna de Moise-Downs, Geometría Básica y Geometría Analítica Descriptiva de Carlos Walsh, Geometría Analítica de Charles Lehmann y fascículos elaborados a partir de estos textos) que reflejan un tratamiento riguroso meramente algebraico y que se concretan en la presentación de conceptos, propiedades y teoremas, fórmulas y su aplicación a través del discurso magistral del profesor como principal medio didáctico, lo cuál no da lugar a que el estudiante tome un papel activo en la construcción del conocimiento geométrico, ni fomenta la creatividad y ni el aprendizaje significativo, a como lo señalan Báez e Iglesias (2007); Paredes, Iglesias y Ortiz (2007).

Dentro de los contenidos estudiados en Geometría Analítica se destacan las secciones cónicas como parte fundamental en la formación matemática de todo profesional, por esta razón están contemplados en los currículos nacionales de los niveles de bachillerato y universitario. En este sentido, los planes de estudio recomiendan la utilización de softwares para un mejor aprovechamiento de los recursos tecnológicos. Sin embargo, es notorio que existe desconocimiento o dificultad en la comprensión de las secciones cónicas y en el uso adecuado de los recursos tecnológicos disponibles que facilitan su comprensión.

En relación a este hecho, diversos trabajos (Ruiz (2012), Blanca (2012), Soberanes (2013)) hacen referencia a la influencia mediadora que tiene la tecnología entre el conocimiento geométrico y el estudiante. Muchos de estos presentan actividades de aprendizaje para contenidos de la geometría sintética incorporando algún SGD, pero no se encontró alguno que tratara específicamente las secciones cónicas. Esto evidencia la necesidad existente de un material bien estructurado didáctica y metodológicamente, donde se incluya el rigor matemático y la utilización de SGD en la configuración de actividades de aprendizaje de estos tópicos para contribuir al mejoramiento de la calidad de dicho proceso y de esta manera, ofrecerle al estudiante un encuentro entre el sujeto y el medio para que surja el conocimiento (Gamboa, 2007).

A nivel internacional, se han realizado diversas investigaciones relacionadas con el uso de Software de Geometría Dinámica (SGD) en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría. A continuación, se destacan las que brindan aportes valiosos y que constituyen los fundamentos de este trabajo.

Una importante contribución en este tema la realiza León (2007) en su tesis de doctorado, al abordar la temática de la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el nivel primario con un enfoque dinámico, mediante una concepción que aporta importantes elementos teóricos que deben ser considerados en cualquier trabajo, en este caso son tomados los elementos heurísticos por su importancia en el aprendizaje de la geometría en todos los niveles. La referencia explícita a los SGD se realiza con respecto a medios como el geoplano con ligas y el geoplano electrónico, que también son softwares que dinamizan el aprendizaje, además se considera el papel cuadriculado como herramienta de aprendizaje.

Ruíz (2012) hace referencia al análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de primaria. En este trabajo se aborda el GeoGebra como una herramienta útil para el desarrollo de estas competencias en todo tipo de alumnado, incluido el que no tiene grandes conocimientos tecnológicos. Esto puede explicarse por el carácter intuitivo del software y porque la intervención llevada a cabo con él ha sido suficiente para llegar a convertirse en un verdadero instrumento para los alumnos (en el sentido de la teoría de la instrumentación).

Gonzáles y Osorio (2012) presentan una propuesta de actividades para el aprendizaje de la geometría del triángulo en ambientes de geometría dinámica a nivel de bachillerato, caracterizadas por la siguiente estructuración: planteamiento, construcción, exploración, explicitación, justificación de las propiedades y conclusión. Todo esto con el objetivo de fundamentar el proceso de construcción de demostraciones en entornos de este tipo.

Blanca (2012) en su tesis *Integración de tecnología informática en tópicos selectos de geometría analítica* elabora una serie de recorridos didácticos para el profesor, estructurados con base en materiales diseñados para el aprendizaje de los alumnos, incorporando una simulación de los laboratorios propuestos fundamentada en los trabajos de Levy (1997).

Soberanes (2013) en su tesis *"Geometría dinámica como herramienta de apoyo para el docente en algunos temas de geometría de bachillerato de la UAQ"* elabora una guía didáctica para el docente de matemáticas de dicha universidad, estableciendo como estrategia didáctica la utilización de un software de geometría dinámica, concretamente Cabri Geometre, en la elaboración de las actividades planeadas bajo los niveles cognoscitivos del modelo de Van Hiele que se esperan observar en los estudiantes.

González (2014) en su trabajo de investigación *"La utilización de Software de Geometría Dinámica en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Sintética Plana"* propone una concepción didáctica para la utilización de SGD en el proceso de enseñanza aprendizaje de esta disciplina en la formación inicial del profesorado de matemática, estudio que contiene la ampliación de la definición de softarea y aporta una clasificación por niveles de las tareas docentes que utilizan estos tipos de softwares, de acuerdo con la profundidad con que se manipulan las herramientas disponibles.

Todos estos trabajos de investigación convergen en la inmediata necesidad de diversificar situaciones de aprendizaje de la Geometría, que incluyan la incorporación del uso de SGD y la explicación paso a paso de cada una de las actividades propuestas para tal fin, pero no en contenidos propios de la geometría analítica plana. Por ello, se considera necesaria la existencia de este documento.

Por otra parte, con respecto al modelo de enseñanza y aprendizaje a emplear en Geometría, el de Van Hiele es el más adoptado por especialistas en esta rama, pues brinda las fases de enseñanza que ayudan a mejorar la calidad de los razonamientos que los estudiantes van adquiriendo en el desarrollo de los contenidos geométricos.

De aquí surge la necesidad de diseñar actividades de aprendizaje de las secciones cónicas, fundamentadas en las fases de enseñanza del modelo de Van Hiele utilizando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra como herramienta invaluable para la enseñanza y el aprendizaje de contenidos geométricos, ya que es difícil conseguir que los alumnos interioricen la geometría analítica dándoles definiciones, propiedades y teoremas para que ellos las memoricen. Como docentes se hace necesario utilizar nuestra creatividad e imaginación para poder llevar los recursos tecnológicos al salón de clases y de esta manera potenciar el desarrollo integral de nuestros alumnos.

El **aporte teórico y metodológico** radica en la ampliación de actividades de aprendizaje de las secciones cónicas, sustentadas en la adaptación de los niveles de razonamiento y fases de enseñanza del modelo de Van Hiele al software de geometría dinámica, GeoGebra, que permitan desarrollar en el estudiante la capacidad de búsqueda y formulación de resultados geométricos a través de la manipulación y visualización de las herramientas que ofrece el entorno dinámico del software.

Su **relevancia práctica** la constituye el conjunto de actividades de aprendizaje, con las que se pretende ubicar al estudiante como artífice de su propio aprendizaje a través de la manipulación y visualización de entes geométricos y al docente como copartícipe en cada una de las actividades diseñadas.

En cuanto a la **relevancia social** se pretende con estas actividades sufragar los grandes retos y desafíos que enfrenta el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría analítica plana en las condiciones de la realidad actual nicaragüense.

Desde el **punto de vista tecnológico** se incorpora el SGD GeoGebra como recurso mediador entre el conocimiento y el estudiante, pues le permitirá a este desarrollar sus habilidades y realizar conjeturas a través de la manipulación y visualización concreta.

1.3. Preguntas de investigación

Bajo los aspectos mencionados anteriormente, este trabajo está centrado principalmente en dar respuesta a las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuál es el estado actual en que se encuentra el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría analítica plana a nivel de bachillerato y en la formación inicial de profesores de matemática en Nicaragua?

2. ¿Qué referentes teóricos-metodológicos fundamentan el uso de los SGD en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría analítica?

3. ¿Cómo diseñar actividades de aprendizajes con los temas referidos a las secciones cónicas fundamentadas en las fases de enseñanza de Van Hiele utilizando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra?

1.4. Própositos

General

Elaborar una propuesta didáctica-metodológica que contemple actividades de aprendizaje para el proceso de enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas, fundamentada en las fases de enseñanza del modelo de Van Hiele utilizando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra.

Específicos

- Determinar el estado actual en que se encuentra el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría analítica plana a nivel de bachillerato y en la formación inicial de profesores de matemática en Nicaragua.

- Fundamentar el estudio teórico realizado sobre el uso de Software de Geometría Dinámica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría y los niveles de razonamiento y fases de enseñanza del modelo de Van Hiele.

- Diseñar actividades de aprendizajes con cada una de las secciones cónicas fundamentadas en las fases de enseñanza del modelo de Van Hiele utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra.

- Proporcionar una propuesta que contribuya al mejoramiento del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría analítica plana y al enriquecimiento bibliográfico nacional en el tratamiento didáctico y metodológico de estos contenidos incorporando SGD.

1.5. Diseño Metodológico

El diagnóstico realizado está enmarcado dentro del **enfoque naturalista** de investigación, ya que este es un método empleado para tratar de comprender la naturaleza del fenómeno en estudio, sin mediciones numéricas, tomando descripciones, puntos de vista de otros investigadores, entrevistas, etc. y no aceptando en general las hipótesis como algo indispensable.

La investigación cualitativa del presente estudio es del **tipo fenomenológico**, pues tiene como base de conocimiento la experiencia subjetiva de los hechos tal y como se perciben. En este estudio interesa observar y describir lo que sucede en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas, para la mejora inmediata.

La búsqueda persistente de respuestas a las preguntas de investigación planteadas, condujo a incorporar en este trabajo un componente:

- **Exploratorio** referente al papel que desempeña la Geometría Analítica en el currículum oficial de bachillerato y en las carreras de formación docente de la UNAN-Managua, tomando en cuenta los contenidos referentes a las secciones cónicas estipulados para enseñarse en dichos niveles. Todo esto dió dos resultados: una contextualización de la enseñanza de la Geometría Analítica y una perspectiva teórica sobre el uso de los software de geometría dinámica en el proceso de enseñanza aprendizaje.

- **Descriptivo** de los niveles de razonamiento y de las fases de enseñanza del modelo de Van Hiele, como modelo rector de la enseñanza de la geometría, del uso de Software de Geometría Dinámica y de las características propias del Geogebra.

Los métodos utilizados son los siguientes:

- **Análisis documental:** para el estudio de los documentos curriculares del Ministerio de Educación y de la carrera de Matemática en lo referente a los contenidos de Geometría Analítica y de los diferentes documentos que de una u otra manera están relacionados con el proceso de enseñanza aprendizaje de esta disciplina, el modelo de Van Hiele y el uso de Software de Geometría Dinámica.

- **Inducción y deducción:** en el diseño de las actividades de aprendizaje, ya que lo que se persigue en cada una de ellas es llegar a establecer conjeturas sobre propiedades y teoremas relacionados con las secciones cónicas, que se deducirán a partir de la manipulación y visualización de construcciones geométricas que ofrece el entorno dinámico GeoGebra.

Los instrumentos que han permitido dar fundamento a la existencia de este trabajo son los siguientes:

- **Prueba diagnóstica** realizada a estudiantes del curso de Geometría I de la carrera de Física - Matemática durante el II semestre del 2017, con el objetivo de determinar el nivel de conocimiento de los futuros docentes referente a los contenidos sobre las secciones cónicas, estipulados en los programas de estudio de bachillerato.

  Esta prueba estuvo conformada por dos items, uno conceptual y otro procedimental. En el conceptual, se buscó que los estudiantes involucrados definieran los conceptos de lugar geométrico, excentricidad de una cónica, circunferencia e hipérbola. De estos, únicamente se reflejó la idea geométrica de circunferencia como una curva plana y cerrada cuyos puntos se encuentran a una misma distancia de un punto fijo. Los demás conceptos no fueron definidos por ningún estudiante.

  El item procedimental incluía dos puntos, primero determinar la ecuación de un lugar geométrico y segundo, el trazado del mismo. En este item, algunos de los estudiantes reflejaron el dominio de la fórmula para la distancia entre dos puntos del plano al plantear el cálculo de la distancia entre un punto cualquiera $P(x, y)$ y el punto $(7, 2)$. Además, no hubo trazado alguno.

- **Entrevista** realizada a profesores en formación, (algunos de los cuales ejercen docencia directa y que son estudiantes de la carrera de Física - Matemática) con la finalidad de conocer las experiencias vividas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica, los contenidos que se abordan en el bachillerato y en la universidad, cómo se abordan dichos contenidos, los documentos oficiales con los cuales se desarrollan las clases, algunas perspectivas para mejorar dicho proceso y además, el nivel eventual de conocimiento de algunos SGD y su aplicación en el aula de clases.

A partir del diagnóstico, de la literatura consultada, de la experiencia docente del autor y de los señalamientos anteriores, en relación al tratamiento didáctico y metodológico de los contenidos de la Geometría Analítica, se pudieron apreciar las dificultades siguientes:

- Falta de materiales que contemplen los contenidos de Geometría Analítica con un tratamiento didáctico - metodológico mediado con el uso de Software de Geometría Dinámica (SGD), que despierten el interés en el estudiante por aprender y en el docente por enseñar esta disciplina.

- Las características de la bibliografía utilizada actualmente para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Analítica no conduce a la apropiación acertada de los contenidos de esta disciplina por parte del discente.

- Los contenidos se desarrollan haciendo uso de medios y recursos didácticos tradicionales y clásicos, propiciando así una Geometría Analítica estática, en contradicción con el concepto de "movilidad"presente en todas las definiciones de las secciones cónicas.

- Falta de interpretación y razonamiento geométrico en los estudiantes, habilidades vitales que se pretenden desarrollar durante la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica.

- El currículo base de la formación inicial del futuro profesor de Matemática, no incluye un curso donde se enseñen contenidos de la geometría analítica plana ni el uso de SGD, aunque sí se recomienda su utilización.

Además, se puede constatar que, internacionalmente dentro de las barreras para la implementación de las TIC se encuentra "…la resistencia (con frecuencia inconsciente) de muchos educadores a la intromisión de la tecnología, que amenaza con alterar drásticamente prácticas y costumbres establecidas y veneradas desde hace mucho tiempo; y la falta de docentes capacitados para explotar el potencial de las TIC de forma competente." (UNESCO, 2006:188).

Esto impone una intensa búsqueda de alternativas de soluciones reales y factibles, que favorezcan un tratamiento didáctico y metodológico de los contenidos de geometría analítica plana con la incorporación las TIC, en particular el uso de algún SGD, para su enseñanza y aprendizaje. Además, es notorio que el uso de los recursos tecnológicos ha abierto grandes posibilidades de obtener conclusiones sobre propiedades geométricas, al permitir visualizar y manipular entes abstractos que antes solo el especialista en dicha área podía hacer. Por lo tanto, es primordial ofrecer una geometría analítica donde las herramientas de construcciones disponibles en los SGD permitan al estudiante construir su propio conocimiento y al docente ser copartícipe de los logros obtenidos por sus alumnos.

Todos los planteamientos anteriores evidencian que existen dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica, especialmente en los contenidos referidos a las secciones cónicas.

1.6. Contextualización de la enseñanza de la Geometría Analítica

1.6.1. A nivel escolar

Actualmente, el currículo básico de Nicaragua está dado por competencias y constituye un marco de referencia para todos los componentes del sistema educativo, donde se concentran los grandes propósitos e intencionalidades de la educación nicaragüense. Un elemento importante que contempla el currículo son los programas de estudio organizados en unidades, competencias educativas, indicadores de logros, contenidos y evaluación.

El programa de estudio de Educación Secundaria en el área de matemática correspondiente a los grados décimo y undécimo señala dentro de las competencias de dicho nivel: el empleo de distintas formas de razonamiento, el método científico, la tecnología, la comunicación, la modelación, la búsqueda de patrones como herramientas de aprendizaje e investigación que contribuyen a formular y resolver situaciones concretas de la vida diaria. La pertinente incorporación de los SGD facilita su adquisión a corto y mediano plazo.

De acuerdo con el programa vigente de matemática de undécimo grado los tópicos de las secciones cónicas se desarrollan en la unidad VI: Geometría Analítica. Esta comienza con un estudio detallado de la recta como lugar geométrico, sus ecuaciones y las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas. Luego, se continúa con el tratamiento de las secciones cónicas centradas en el origen, pero no se llega a establecer propiedades generalizadas sobre estas, se hace énfasis en determinar las ecuaciones de las cónicas conociendo sus elementos pero no se aborda la visualización, construcción y razonamiento, procesos cognitivos vitales para el establecimiento de propiedades geométricas.

Por otro lado, según los entrevistados y la experiencia del autor, esta unidad no se logra desarrollar completamente por diversos factores, entre los cuales se destacan: el tiempo asignado para actividades extracurriculares y la poca divulgación de materiales de apoyo al docente que contemplen un tratamiento científico metodológico de los contenidos referidos.

En general, se puede afirmar que el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría analítica en este nivel se encuentra en una situación desfavorable para lograr alcanzar los indicadores de logros propuestos para estos contenidos.

1.6.2. La geometría analítica en el currículo de las carreras de formación docente de la UNAN - Managua

A nivel nacional, las carreras orientadas hacia la formación docente en matemática son: Licenciatura de Ciencias de la Educación con mención en Matemática y Licenciatura de Ciencias de la Educación con mención en Física – Matemática. Dentro de las universidas que las ofertan, se destacan: UNAN-Managua, UNAN-León, Universidad Católica "Redemtoris Mater" (UNICA), Universidad Paulo Freire (UPF), Universidad de las Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense (URACCAN) y La Bluefields Indian Caribbean University (BICU), todas ellas tienen como objetivo mejorar la calidad de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en todos los niveles de educación.

Debido a que la problemática de la enseñanza y del aprendizaje de la Matemática en la Educación Media ha sido generadora de múltiples reflexiones, análisis y discusiones en relación a las dificultades de aprendizaje que presentan los estudiantes, la falta de dominio científico – metodológico de los maestros, poco interés de los docentes en superarse y poca demanda en la formación de docentes en esta área del conocimiento, la UNAN – Managua, a través de la Facultad de Educación e Idiomas y las Facultades Regionales Multidisciplinarias de Matagalpa, Estelí, Chontales y Carazo, prepara al futuro maestro de Educación Media en Física - Matemática y/o en Matemática, durante tres años como Profesor de Educación Media (PEM) y cinco años para obtener la licenciatura en los turnos profesionalización y/o regular. La carrera que hace mención, específicamente, en Matemática es ofertada en las Facultades: Educación e Idiomas y FAREM Chontales en los turnos Matutino y Dominical, respectivamente. Estas son las únicas contempladas en la oferta académica de la UNAN – Managua que tienen dicho fin social.

De acuerdo con el Modelo Educativo de la Nueva Transformación Curricular de la UNAN – Managua, ambas carreras en su nuevo modelo pedagógico consideran que el estudiante es el principal artífice de su propio aprendizaje, asumiendo un rol activo y participativo con responsabilidad en el desarrollo de un aprendizaje significativo. Este aprendizaje será producto de un proceso interactivo, de una actividad compartida en la que los estudiantes interactúan entre ellos, con el profesor y con todos los elementos que le rodean en el contexto socio - cultural en que se desenvuelve, desarrollando estrategias que le permitan aprender a ser, aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a convivir, aprender a emprender y aprender a crear.

En este modelo pedagógico el rol del maestro va más allá de ser un transmisor de conocimientos, es copartícipe, mediador, facilitador, emprendedor e innovador del proceso de enseñanza - aprendizaje, que fomenta el desarrollo de nuevas capacidades, habilidades, destrezas, valores, sentimientos y está en permanente búsqueda de situaciones de aprendizaje donde se interrelacionan los conocimientos previos de los alumnos con los nuevos saberes.

Por otro lado, se consideran vigentes diversas áreas disciplinares de pedagogía y psicología, así como también, áreas disciplinares específicas de matemática, tales como: Álgebra y Geometría, Cálculo y Análisis, Estadística y Probabilidades y Didáctica de la Matemática, cada una de ellas evidenciadas en las asignaturas de formación general, básica y profesionalizante.

Dentro del área específica del Álgebra y Geometría se destacan las asignaturas Geometría Euclidiana, Geometría Cartesiana, Geometría Lineal del Espacio, Geometría Computacional y Geometría Diferencial (en la carrera de matemática) y Geometría I y Geometría II (en la carrera de Física – Matemática). A continuación se describen de manera general dichas asignaturas.

La importancia de que las asignaturas: Geometría Euclidiana y Geometría I estén presentes en los planes de estudios radica, en que ellas abordan con mucho detalle los principales contenidos de geometría que actualmente un estudiante de bachillerato debe recibir en la escuela y por esta razón los docentes en formación muestran mayor interés y preocupación por el dominio de dichos contenidos, principalmente los que se refieren a Geometría Analítica, contemplados en el programa de asignatura de Geometría I en la carrera de Física-Matemática.

En la asignatura Geometría II se abordan contenidos referentes a coordenadas polares en el plano, ecuaciones paramétricas y la estereometría. Aquí el conocimiento es puesto como una generalización de temas abordados en Geometría I.

Por otra parte, la Geometría Cartesiana es una asignatura que ayuda al entrenamiento matemático formal y que ha debido su desarrollo a la inserción que ha tenido en las actividades humanas a lo largo del tiempo, presentando una cuantiosa gama de posibilidades científicas y didácticas para el desempeño del futuro profesor de Matemática con un enfoque geométrico - algebraico pues se contemplan tópicos de algebra lineal desde el punto de vista geométrico.

Con un pronunciado enfoque métrico se muestra la asignatura Geometría Lineal del Espacio que contribuye al desarrollo de las capacidades y habilidades necesarias para dominar partes importantes del álgebra y la geometría a nivel de educación media y superior. Además, se presenta una unidad sobre geometría descriptiva donde se sugiere hacer ejercicios preparatorios de representaciones de objetos espaciales mediante la técnica de proyecciones ortogonales.

La incorporación de los primeros elementos de Geometría Computacional en el pensum del profesorado de matemática, es una respuesta a la demanda de transformación en la enseñanza de la geometría elemental escolar ante la acelerada gestación de nuevos objetivos procedimentales que la presente revolución tecnológica está planteando. La Geometría elemental euclidiana y sus algoritmos asociados, en conjunto con los procedimientos básicos de combinatoria, teoría de grafos y cálculo elemental, se juntan para sufrir un proceso de alambicado en la computadora, donde las entidades numéricas y geométricas, que alguna vez fueron considerados productos exclusivos de la razón pura, rezuman ahora sus mejores propiedades en beneficio del diseño geométrico de figuras dentro del universo factual de la computadora.

Todas estas asignaturas contribuyen a la forja de capacidades para diseñar estrategias didácticas en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, enfocar adecuadamente la teoría psicopedagógica en los contenidos de Geometría, formular, organizar, planificar y proponer acciones y propuestas didácticas y metodológicas innovadoras utilizando la computadora en la verificación y demostración de las principales propiedades de las figuras geométricas.

Un aspecto positivo que se debe resaltar respecto al tratamiento que se da a los contenidos geométricos es el acercamiento de la enseñanza de temas de la geometría escolar, sin perder su rigor, pero utilizando el aspecto intuitivo de manera creciente, en correspondencia con la estructuración del estudio de la geometría en el nivel medio. Así como también, la introducción explícitamente en los programas de las asignaturas: Geometría Euclidiana y Geometría I del trabajo con los softwares, para el desarrollo de las mismas y también en su función de preparar a los profesores en formación para su posterior aplicación docente.

Propiamente ambas carreras no tienen ningún curso con el nombre de geometría analítica, pero contemplan dentro de los contenidos programáticos de algunas de las asignaturas descritas, tópicos relativos a la geometría analítica, con mayor tratamiento se hace en la asignatura Geometría I en la carrrera de Física - Matemática.

A partir de la experiencia docente del autor y del diagnóstico realizado, como factores adversos en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría Analítica se señalan:

- Bajo nivel de entrada en lo que respecta a los conocimientos geométricos analíticos por parte de los profesores en formación, como consecuencia de la preparación precedente.
- El nivel de conocimientos que tienen los profesores encargados de impartir los contenidos de Geometría Analítica sobre el uso de los software no es suficiente.

Ambos documentos curriculares señalan en lo que se refiere a las asignaturas Geometría Euclidiana y Geometría I, dentro de las recomendaciones metodológicas en los programas de asignatura, el uso de la regla, el transportador y el software GeoGebra, como buenos recursos para la construcción de figuras de creciente complejidad, dejando atrás la manipulación concreta y el establecimiento de conjeturas geométricas.

Es necesario resaltar que pese a estar planteado de manera explícita en los programas de asignatura el uso de los SGD, no aparece en la bibliografía ni en las recomendaciones metodológicas de cada unidad un planteamiento didáctico acerca de cómo utilizarlos, de ahí la importancia de desarrollar un material para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica usando el software de Geometría Dinámica GeoGebra.

1.7. Software de Geometría Dinámica

Existen tres tendencias en el uso de la tecnología computacional en educación que consisten en:

- Concepción de la tecnología como un fin en sí misma.
- Uso de la tecnología de manera técnica para realizar tareas docentes.

- Incorporar o integrar la tecnología como un instrumento que permita la apropiación del conocimiento matemático, modificando las prácticas en el aula y del currículo escolar a fin de hacerla lo más visible posible (MacFarlane, 2001).

En la última tendencia es válido señalar, el desarrollo de softwares útiles para el estudio de la geometría, estos son conocidos como procesadores geométricos, dentro de ellos se encuentran: GeoGebra, Cabri-Geómetre, Sketchpad, GeoLab, Cinderella, entre otros. A través de los años se han ido desarrollando cada uno de ellos, incluso algunos tienen variantes para trabajar con la geometría en el espacio como son el Cabri y el Geogebra, este último con un desarrollo incipiente en esta vertiente, además muchos de ellos han trascendido al estudio de otras ramas de la matemática: el Álgebra, el estudio de las funciones, la estadística, las ecuaciones e incluso del cálculo simbólico como son el Geómetra en sus versiones a partir de la 4 y el GeoGebra.

Dentro de las caracterizaciones de estos softwares se destacan aquellas realizadas a la manipulación dinámica, escencialmente la realizada por Finzer y Jackiw en 1998, quienes señalan las siguientes características principales:

- “Manipulación directa. Apuntas al vértice del triángulo y lo arrastras. La distancia cognitiva entre lo que está en la pantalla y la matemática detrás es mínima. No te sientes inclinado a decir, “estoy moviendo el ratón, que arrastra este pequeño círculo en la pantalla, que cambia las coordenadas del vértice del triángulo”. Dices: “estoy arrastrando el vértice del triángulo”.

- Movimiento continuo. El cambio se produce durante el arrastre. Los objetos matemáticos representados en la pantalla permanecen coherentes y enteros en todo momento. A medida que el vértice del triángulo se mueve del punto A al punto B, puedes ver todos los estados intermedios.

- Ambiente inmersivo. Tu experiencia es que estás involucrado con los objetos que estás manipulando, rodeado por ellos, explorándolos, jugando con ellos. La interfaz es mínimamente intrusiva para que te enfoques en cómo lograr tus metas matemáticas, no en cómo impulsar la tecnología".

Así pues, los SGD reciben este nombre porque en sus ambientes virtuales se dinamizan las representaciones de las figuras geométricas en el sentido de que se pueden mover y deformar, hacerse más grandes o más pequeñas manteniendo invariante las propiedades geométricas que las caracterizan, esto en contraposición con el estudio de la Geometría basado en medios tradicionales, donde las figuras son tangibles, en cartulina, en papel o cualquier otro material, utilizando diferentes conjuntos de dichos representaciones para poder realizar las comparaciones deseadas sobre ellas, constituyendo en este caso lo que se ha dado en llamar, en contraposición, geometría estática.

Como consecuencia directa de la caracterización de este tipo de software es que sus productos, sean archivos del software o applets que contienen representaciones de figuras geométricas que contribuyen al proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría, pues sirven para materializar los entes geométricos que son objeto de estudio, con lo cual responden a la definición de Castro (1986) de medio de enseñanza, cuando establece que los mismos son: "... los componentes del proceso docente - educativo que actúan como soporte material de los métodos con el propósito de lograr los objetivos planteados." (Castro, 1986: 48), y que constituye la definición que se adopta en este trabajo de medio de enseñanza y también la caracterización de los SGD como medios de enseñanza aprendizaje.

Al respecto Klingberg (1978) escribía: "Como medio de enseñanza se denominan todos los medios materiales necesitados por el maestro o el alumno para una estructuración o conducción efectiva y racional del proceso de educación e instrucción a todos los niveles (...) para todas las asignaturas, para satisfacer las exigencias del plan de enseñanza" (Klingberg, 1978: 420) lo cual es una característica esencial de los SGD, por cuanto sus productos pueden ser utilizados tanto para enseñar como para aprender, constituyendo esta última forma muy valiosa cuando se trata de un aprendizaje donde el sujeto debe jugar un papel activo y creador, tanto desde el punto de vista interno como externo, lo cual se logra mediante la manipulación de los archivos de SGD.

Esto es imprescindible porque "...las transformaciones necesarias en la educación de estos tiempos debe sustentarse no exclusivamente en la potencialidad técnica de las NTIC, sino en un nuevo modelo de aprendizaje que tenga en cuenta cómo se concibe el proceso docente, el papel activo del sujeto como constructor de su conocimiento, y de la interacción profesor-alumnos y estudiante-estudiante en el proceso educativo" (Rosa ...[et al], 1999: 37)

Labarrere y Valdivia (1988) destacan la función de los medios de enseñanza para lograr el cumplimiento del principio audiovisual de la enseñanza y con ello una mayor solidez de los conocimientos; otro de los principios a tener en cuenta, y que además es una de las características de estos SGD, es objetivar los diferentes entes geométricos, de manera dinámica para poder interactuar con ellos y de esta manera lograr que el conocimiento transcurra de la contemplación viva a partir de estos entes matemáticos objetivados en la pantalla de la computadora, al pensamiento abstracto. En tal sentido, Klingberg(1970) expresó: "Los medios de enseñanza son medios de objetivación y de trabajo que están vinculados a objetos materiales, sirven de apoyo al proceso de enseñanza y contribuyen decisivamente al logro de los objetivos" (Klingberg...[et al], 1970: 43)

Se considera necesario hacer algunas reflexiones sobre el carácter de este tipo de medio para objetivar los entes geométricos y de esa manera lograr la manipulación o experimentación geométrica, pues a diferencia de los medios estáticos, los representantes de objetos geométricos en el ambiente del software de que se trate, pueden ser manipulados mediante el arrastre de ciertos puntos, produciendo deformaciones de estos representantes, que según hayan sido concebidos pueden o no orientar adecuadamente el aprendizaje de ciertos contenidos. En este caso existen dos aspectos a tener en cuenta, qué y cómo se arrastran diferentes elementos de una figura y como han sido diseñados estos representantes.

Resulta imprescindible destacar que esa posibilidad de cambiar la forma, posición y tamaño de los representantes de diferentes objetos geométricos construidos, sin que cambien sus propiedades esenciales es la manifestación concreta de la posibilidad de aplicar el principio heurístico de la movilidad, tan difícil de lograr antes del surgimiento de los SGD y que estos lo traen integrado a través de la herramienta arrastre. Al respecto Scher (2002) hace una caracterización de las herramientas tradicionales señalando como características principales las siguientes: son estáticas (cualquier ilustración dibujada en papel o en el pizarrón se mantiene fija y no puede ser alterada sin algún borrado) y particulares (cualquier objeto construido representa un ente específico con una longitud de lado particular, pero ninguna imagen única y estacionaria captura las generalidades de las definiciones involucradas), a su vez propone dos características para herramientas dinámicas las cuales son muy parecidas a las ya mencionadas: los objetos geométricos pueden ser movidos y cambiados de forma interactivamente y una única imagen en la pantalla representa una clase completa de objetos geométricos.

En relación con la operación arrastre, Olivero (2003) destaca las modalidades de: arrastre errante, arrastre de borde, arrastre guiado, arrastre de lugar mudo, arrastre en linea, arrastre ligado y examen de arrastre como los tipos de uso que le dan los alumnos a tal herramienta.

Todo lo anterior permite diseñar actividades y ambientes que ayuden a los alumnos a escrutar situaciones de aprendizajes sin tener que hacer mucho énfasis en procesos mecánicos. Pero también hay que diferenciar los objetos geométricos y sus representaciones, no solamente por ser dos apreciaciones de un mismo fenómeno, sino por la influencia que tienen en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, puesto que es imprescindible utilizar ilustraciones en este proceso, ya muchos geómetras, entre ellos Félix Klein, reconocían la necesidad de utilizar representaciones de figuras geométricas para su estudio o como expresara Larios citando a Mariotti, 1995 “no es posible presentar un concepto geométrico sin ejemplos proporcionados, lo que significa dibujar figuras o mostrar modelos” (Larios, 2006: 364)

Larios se refiere, además, a la necesidad de distinguir entre figuras y dibujos, lo cual también es tratado por otros autores como (Parzysz, 1988; Laborde y Capponi,1994; Hölzl, 1996; Goldenberg y Cuoco, 1998; Maracci, 2001). A los efectos del uso de SGD, es importante diferenciar las representaciones de objetos geométricos en el ambiente del software que pueden ser las que se llaman figuras y las que se denominan dibujos, las primeras tienen el componente conceptual, pues se construyen de acuerdo con las propiedades esenciales que caracterizan al objeto geométrico y que se mantienen invariantes por arrastre; los dibujos se realizan por una apreciación visual que se aproxima a la imagen abstracta que se tiene del objeto geométrico, pero solo eso, se aproximan, pues no son estables mediante el arrastre. Ambos tipos de representaciones son útiles de acuerdo al fin que se tenga.

El aprendizaje de la geometría, teniendo en cuenta los componentes figural y conceptual, así como la utilización de representaciones gráficas estereotipadas, ha sido estudiado por (Larios, 2006), llegándose a la conclusión de que muchos factores inciden en que los alumnos tengan más en cuenta uno que otro componente, o que no sean capaces de aplicar lo conceptual a situaciones concretas, o la influencia que tienen las posiciones y formas estereotipadas en dicho aprendizaje, lo que genera respuestas incompletas o elaboradas teniendo en cuenta, no la esencia de los objetos geométricos, sino aspectos que tienen que ver con la posición o la forma y no con los aspectos teóricos conceptuales referidos a los objetos.

De esta manera queda enmarcada entonces la necesidad de analizar enfoques didácticos que puedan contribuir a buscar cierta uniformidad en el tratamiento de los componentes de los objetos geométricos con la utilización de SGD, con vistas a lograr un mejoramiento del proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría, visto desde el punto de vista de cómo puede ser la preparación de los profesores en formación para que repercuta en una mejor labor profesional, cuando de enseñar contenidos geométricos se trata.

El análisis realizado se considera necesario, ya que en ocasiones cuando se habla de Geometría Dinámica, algunos pueden pensar en una Geometría con características diferentes a la clásica, y realmente de lo que se trata es de la posibilidad del estudio de esta Geometría con nuevos medios de enseñanza – aprendizaje que tienen como recurso el dinamismo, que permite deformar convenientemente los representantes de las figuras que se construyan en el ambiente del software; en el trabajo estos representantes serán llamados simplemente figuras.

1.7.1. Características esenciales de los SGD

Resultan características comunes a los SGD de acuerdo con sus funciones las siguientes:

- Todos tienen una barra de herramientas mediante la cual se construyen entes básicos de la Geometría como son puntos, rectas, semirrectas, segmentos, circunferencias, ángulos, perpendiculares, paralelas, mediatrices, bisectrices, además es posible incursionar en la construcción de cónicas, y en algunos casos, de polígonos regulares, basados en macros o subprogramas que a partir de la longitud del lado y el número de lados los construyen directamente.

- Permiten medir longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos, pero también otras magnitudes de figuras planas como son el área y el perímetro, así como realizar operaciones algebraicas con estas magnitudes.

- Es posible deformar la figura construida, moviendo mediante el ratón puntos, segmentos o rectas, dando de esta manera la posibilidad de analizar las propiedades geométricas de determinado tipo de figura, pues se cambian el tamaño y posición convenientemente mediante el “arrastre” en la pantalla de los elementos mencionados.

- Se pueden escribir notas que identifiquen elementos geométricos o que den orientaciones sobre las tareas que se quieran realizar con el software.

- Es factible ocultar/mostrar cualquiera de las construcciones o acciones que aparezcan representadas en la pantalla a partir del accionar con el software.
- En un nivel más complejo de utilización estos softwares tienen herramientas para realizar una serie de construcciones fundamentales con regla y compás a partir de las cuales se pueden realizar construcciones como composición de las mismas. También permiten realizar las transformaciones geométricas del plano que aparecen en los programas escolares como son la simetría axial y central, la traslación, la rotación y la homotecia.
- También es posible trazar lugares geométricos a partir de la definición correspondiente y determinar sus ecuaciones algebraicas, esto es vital en este trabajo.

1.8. Los SGD en el proceso de enseñanza aprendizaje

Al referirse al uso de la tecnología como herramientas mediadoras del conocimiento Laborde (2003), refiere, citando a Lagrange ... [et al], (2001), el papel fundamental que juega el profesor en el acierto de la integración de la tecnología en el proceso de enseñanza aprendizaje; más adelante aclara además sobre la necesidad de "... hacer uso de la tecnología para la organización de buenas condiciones que impulsen el aprendizaje (...) pero esta organización debe estar basada en varios análisis (...) el análisis cognitivo de las posibles dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, pero también en la utilización de la tecnología" (Laborde, 2003:1; traducción de JG). A su vez Gamboa (2007) afirma que "la tecnología ayuda en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática siempre que este proceso sea bien dirigido por el profesor".

En consecuencia, es el propio profesor quien debe dirigir, planificar y diseñar actividades que impulsen el aprendizaje apoyándose en la tecnología, pues el avance tecnológico, específicamente el surgimiento de diferentes softwares para la enseñanza de la geometría y su incorporación en el salón de clases, así lo demanda.

La revisión de múltiples trabajos encontrados en muchos blog, y páginas Web, muestra que no hay uniformidad en la forma de utilizar los SGD, pero sí referentes de cómo son utilizados, los cuales se pasan a analizar a continuación.

Lo más general es el objetivo con el que son utilizados, pues se dirige al tratamiento de dos funciones didácticas: la introducción de nuevo contenido y la sistematización, esencialmente para la ejercitación, que se dirige fundamentalmente al tratamiento de ejercicios con un nivel alto de complejidad y situaciones interesantes dentro de la Geometría.

El otro aspecto, que resulta bastante general, es que las tareas que se presentan con los diferentes SGD son llamadas ejercicios, situaciones de aprendizaje, talleres, presentaciones, práctica guiada, problemas, actividades para ser ejecutadas con el software, lo cual demuestra lo relacionado con la falta de uniformidad, no solo en el nombre, sino en la concepción de las mismas.

Hay un amplio diapasón de utilización, lo cual está en correspondencia con las habilidades que tienen los autores de artículos para trabajar con los diferentes SGD y además con sus paradigmas didácticos. Esto hace que, a como se expresó, no haya uniformidad, pero sí algunas regularidades de uso, sin que esto signifique que no haya diferentes matices. El análisis se puede establecer de acuerdo con diferentes elementos como pueden ser: presentación de los productos de los SGD, libertad para trabajar, génesis de los conocimientos y habilidades con el software necesarias para trabajar. Esto para resaltar algunas de las características, pues en la práctica se combinan y no se dan aislados estos elementos, pues la forma de presentación como elemento de análisis, lleva aparejada determinada planificación de la libertad de acción y de las habilidades necesarias para cumplir la tarea.

En cuanto a la presentación de los productos de los SGD son trabajados en dos formas fundamentalmente: archivos con la extensión correspondiente al tipo de software, a los cuales se accede con el software para realizar las tareas que se orientan, las cuales aparecen generalmente en un documento escrito aparte; en este caso son fundamentales las habilidades para trabajar con el software.

La otra forma de presentación son mediante hojas dinámicas, llamadas applets o conjuntos de hojas interrelacionadas, en este caso se necesita de un navegador para abrirlas y de acuerdo a las potencialidades del software ir navegando por las diferentes opciones que brinda la página o el conjunto de páginas. Se conocen experiencias muy completas como es Escuela 2.0 Proyecto Gauss del Ministerio de Educación, Cultura y Deportes y del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado de España, la cual es casi un libro electrónico interactivo realizado según las posibilidades del GeoGebra, para el tratamiento de diferentes partes del contenido matemático de los distintos niveles de enseñanza de ese país.

De acuerdo con la libertad para trabajar existen algunas formas de presentar las actividades, una muy utilizada es la llamada exploración libre, donde se dan pocas orientaciones y se pide analizar el comportamiento de propiedades de entes geométricos, también utilizada para la resolución de ejercicios portadores de información geométrica, el otro extremo es el llamado trabajo paso a paso, donde son dadas una secuencia de indicaciones que describen y orientan cada una de las operaciones a ejecutar con el software, en ambos casos se realizan algunas preguntas que tienden a producir conjeturas sobre lo nuevo a aprender o sugerencias sobre los resultados a obtener.

Estas experiencias son utilizadas internacionalmente y también en Nicaragua, con el desarrollo acelerado del GeoGebra en los últimos años, con posibilidades nuevas, se utiliza también la introducción de construcciones paso a paso a través de los comandos de entrada, aspecto que a criterio del autor, produce interesantes y complejos resultados, buenos para ser presentados como motivación.

Es común que generalmente la vía de acceder a nuevos conocimientos o resolver determinados problemas utilizando SGD se realice a través de la realización de construcciones geométricas, las cuales son importantes y necesarias, pero tradicionalmente son una de las vías más importantes para la integración y sistematización de los conocimientos geométricos, lo cual hace que el nivel de complejidad de la realización de construcciones, sea superior al nivel de complejidad de la identificación y la determinación de propiedades, la observación, etc. que son necesarias para la obtención de nuevas definiciones y propiedades de entes geométricos. De ahí que el autor no comparta la idea de que el aprendizaje de los contenidos geométricos escolares tenga su punto de partida en una de las habilidades más difíciles de alcanzar, la de realizar construcciones geométricas. Esto no está en contradicción con que se utilicen las construcciones fundamentales con el fin de promover el conocimiento de nuevas propiedades geométricas.

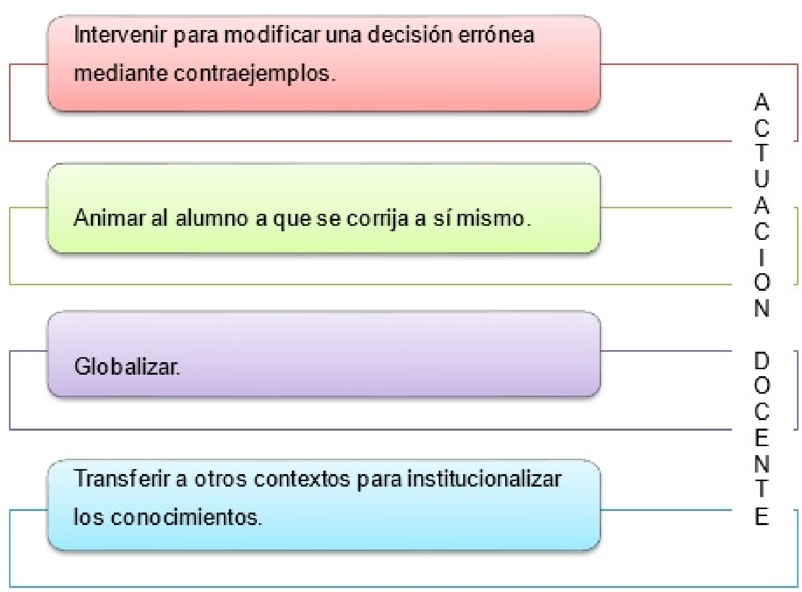
Se destaca en muchos casos la proyección de actividades con los SGD que conllevan a la necesidad de adquirir un nivel alto de desarrollo de las habilidades para trabajar con el software, y aunque (Laborde, 2003: 2), al referirse a los SGD a los que llama herramientas para hacer Matemática expresa "... Las herramientas no son transparentes [...] requiere de la específica apropiación de las herramientas...", no puede ser a tal grado esa apropiación que se vayan convirtiendo estas herramientas en un fin y no en un medio de enseñanza al que hay que conocer y dominar.

Teniendo en cuenta las características de la utilización de SGD que diferentes autores como (Larios, 2006; Gamboa y Morales 2010; Acosta, Mejías y Rodríguez, 2011; Acosta, 2010; Sarmiento, 2004; Páez 2003; Gutiérrez, 2004) y muchos más al incorporarlos al proceso de enseñanza aprendizaje, se pudo observar que: en todos los casos dicha utilización cuenta de objetivos y contenidos específicos, de acciones a realizar, de medios a emplear, que en este caso es precisamente el software, se explica la organización de la actividad y en la mayoría de los casos se expone cómo se evalúan los resultados del trabajo realizado por los usuarios, que pueden ser alumnos de diferentes niveles o profesores en formación inicial. Además, presentan en algunos casos detalles en cuanto a los tipos de justificaciones que los alumnos hacen al desarrollar cada una de las actividades propuestas en dichos trabajos.

En conclusión, con las actividades mostradas en los diferentes trabajos para los contenidos de enseñanza y aprendizaje de la geometría se pretende establecer una serie de destrezas cognitivas de carácter general que puedan ser utilizadas en muchos casos particulares y que contribuyen por sí mismas a desarrollar dichas capacidades, ya que el nivel de dificultades de las acciones a realizar aumentan al pasar de una etapa a otra, consiguiéndose de esta forma un desarrollo progresivo de la perpecpción espacial en el estudiante. La línea general de trabajar la geometría es desde una metodología de resolución de problemas, mediante la que el alumno, además de estar motivado, aprende.

1.8.1. Factores que condicionan la gestión de la clase y la actuación por parte del profesor al integrar SGD

A continuación se muestran algunos factores que condicionan la gestión de la clase y la actuación por parte del profesor propuestos por González - López (2001), quién clasifica cada uno de estos aspectos en los siguientes cuatro bloques:



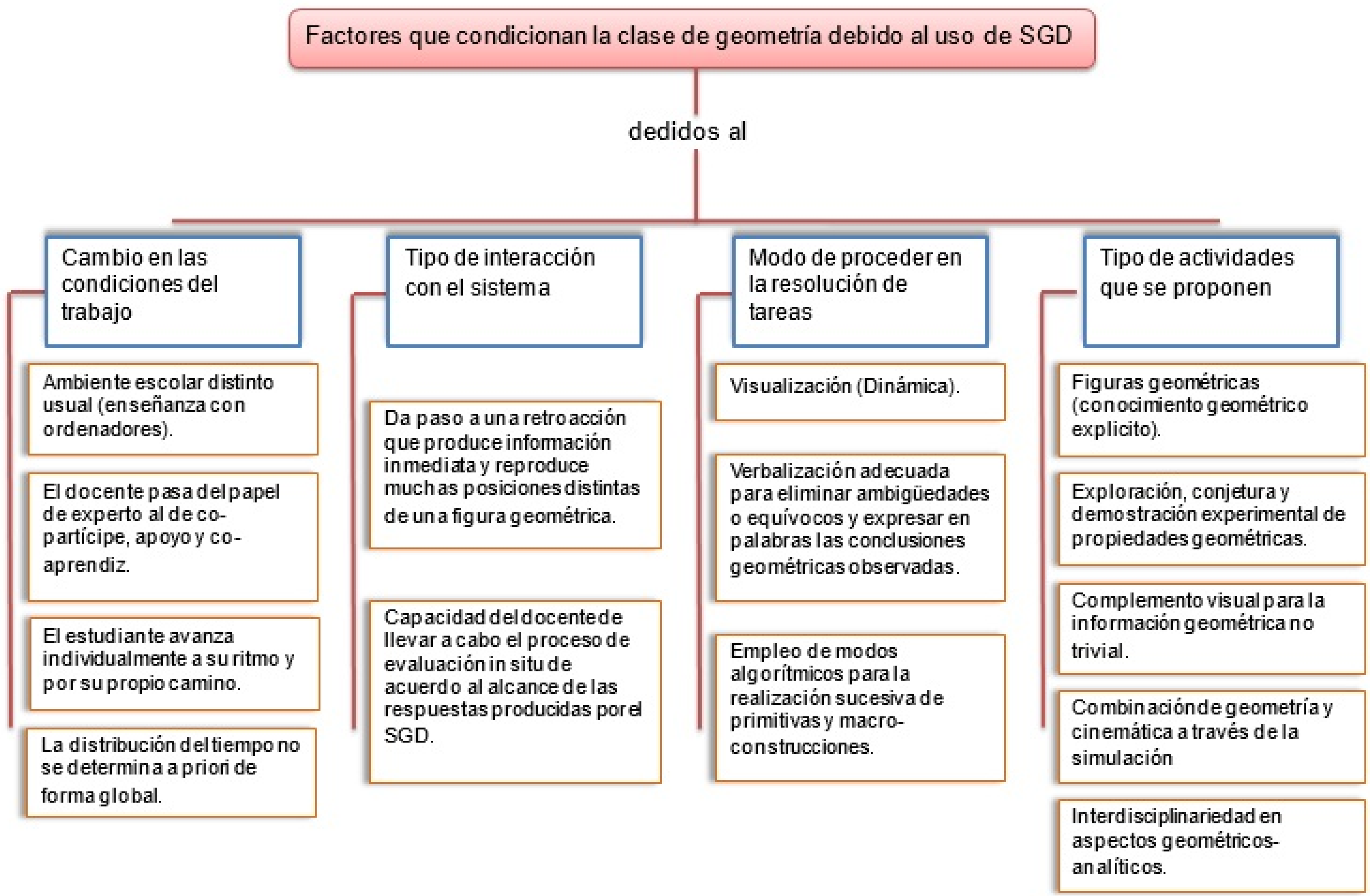


Figura 1.1: Factores que condicionan la clase de geometría debido al uso de SGD

Capítulo 2

PROPUESTA

2.1. Diseño de las actividades

2.1.1. Modelo didáctico empleado en la propuesta

Actualmente los cursos de geometría se concretan en la memorización de conceptos y su aplicación a través del discurso magistral del profesor como principal medio didáctico, lo cuál no da lugar a que el estudiante tome un papel activo en el desarrollo del conocimiento geométrico, ni propicia el fomento de la creatividad y del aprendizaje significativo, tal y como lo señalan los siguientes autores: Baez e Iglesias (2007); Paredes, Iglesias y Ortiz (2007). Esto se ve condicionado debido a las concepciones y experiencias adquiridas por el profesor en su formación.

Ante esta problemática, vigente desde hace varios años, muchos investigadores han propuesto diferentes modelos de enseñanza aprendizaje de la geometría destacándose como modelo rector el propuesto por el matrimonio Van Hiele en 1957, el cual ha sufrido adaptaciones hasta llegar a la forma generalmente aceptada en la actualidad. Analizaremos este modelo para poder diseñar las actividades de aprendizaje con las secciones cónicas, adaptando los niveles de razonamiento y fases de enseñanza aquí propuestos al entorno dinámico GeoGebra.

Modelo de Van Hiele

La idea básica del modelo de Van Hiele es que el aprendizaje de la Geometría se hace pasando por determinados niveles de pensamiento y conocimiento, que no van asociados a la edad y que sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente. De acuerdo con Jaime (1993) dicho modelo abarca dos aspectos básicos:

- *Descriptivo*: porque se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar el progreso de estos.
- *Instructivo*: ya que marca pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico llamadas fases de aprendizaje.

En este modelo el aprendizaje es comparado a un proceso inductivo. En un nivel $n-1$ ciertas versiones limitadas de los objetos geométricos pueden ser estudiadas. Algunas relaciones de los objetos pueden ser explicadas, sin embargo hay otras que no son accesibles a este nivel y, por tanto, no pueden ser abordadas. En el nivel n se supone el dominio de los conocimientos del nivel $n-1$ y se explicitan las relaciones que estaban implícitas en el nivel anterior. Así, los objetos del nivel n son extensiones del nivel $n-1$.

La caracterización del modelo de Van Hiele se hace a través de 5 niveles de razonamientos, respecto de los cuales no hay unanimidad en cuanto a su numeración; como lo señala Vargas y Gamboa (2013), algunos autores hablan de los niveles del 0 al 4 y otros los enumeran del 1 al 5. En este trabajo se toma la segunda numeración.

A continuación se presentan las características principales de cada nivel de razonamiento extraídas de diversas publicaciones, escencialmente de Jaime y Gutiérrez (1993) y Vargas y Gamboa (2013).

- Nivel 1. *Reconocimiento o visualización*: El individuo reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de la figura. Puede, sin embargo, producir una copia particular de esta o reconocerla.

No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a figuras geométricas por su nombre.

- Nivel 2. *Análisis*: El individuo puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas, pero no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras. Establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación. Como muchas de las definiciones de la geometría se establecen a partir de propiedades, no puede elaborar definiciones. La demostración de una propiedad se realiza mediante la comprobación en uno o pocos casos.

- Nivel 3. *Clasificación o deducción informal*: El individuo determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas propiedades se derivan de otras, construye interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas. Establece las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas, para que las definiciones adquieran significado. Sin embargo, su razonamiento lógico está basado en la manipulación. Sigue las demostraciones pero no es capaz de entenderlas en su totalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones. Al no poder realizar razonamientos lógicos formales ni sentir su necesidad, el individuo no comprende el sistema axiomático de las Matemáticas.

- Nivel 4. *Deducción Formal*: En este nivel ya el individuo realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales, a partir del reconocimiento de su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. Comprende y maneja las relaciones entre propiedades y formaliza en sistemas axiomáticos, por lo que ya entiende la naturaleza axiomática de las Matemáticas. Comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas, lo que le permite entender que se puedan realizar distintas demostraciones para obtener un mismo resultado. Es claro que, adquirido este nivel, al tener un alto grado de razonamiento lógico, obtiene una visión globalizadora de las Matemáticas. El individuo puede desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra, percibe la posibilidad de una prueba, sin embargo, no reconoce la necesidad del rigor en los razonamientos.

- Nivel 5. *Rigor*: El individuo está capacitado para analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos y compararlos entre sí. Puede apreciar la consistencia, independencia y completitud de los axiomas como fundamentos de la geometría. Capta la geometría en forma abstracta. Este último nivel, por su alto grado de abstracción, debe ser considerado en una categoría aparte, tal como lo sugieren estudios sobre el tema. Alsina, Fortuny y Pérez (1997) y Gutiérrez y Jaime (1991) afirman que solo se desarrolla en estudiantes de la Universidad, con una buena capacidad y preparación en geometría.

En el marco del modelo de Van Hiele se señalan características de los niveles de razonamiento que a continuación se detallan:

- *Jerarquización y secuencialidad*: Esto es, los niveles tienen un orden que no se puede alterar y para alcanzar un nivel de razonamiento es necesario haber adquirido previamente los niveles anteriores.

- *Especificidad del lenguaje*: Cada nivel tiene un lenguaje propio, lo que contribuye al enriquecimiento del vocabulario matemático, a la forma y significado de la expresión.

- *Continuidad*: El paso de un nivel al siguiente no se hace de forma brusca, ya que ocurre un período de transición, en el cual se entremezclan momentos de razonamiento de los dos niveles consecutivos.

- *Localidad*: El paso de un nivel a otro depende más de la enseñanza recibida que de la edad o madurez, lo que conlleva a que un individuo puede razonar en diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la geometría.

Van Hiele propone también una serie de fases de aprendizaje que pretenden presentar una organización de las actividades para pasar de un nivel de razonamiento al siguiente. Las fases no están asociadas a un nivel determinado, sino que en cada nivel la instrucción comienza con actividades de la fase primera y continúa con actividades de las siguientes fases.

A continuación se ofrece una descipción de las fases propuestas por Vargas y Gamboa (2013).

- Fase 1. *Información*: En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema que es objeto de estudio. El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y sus correspondientes niveles de razonamiento. Fouz y De Donosti (2005) citan a Azubel (1978) para respaldar que se trata del primer acercamiento a los conocimientos del alumno: "Si tuviera que reducir toda la Psicología Educativa a un solo principio diría lo siguiente: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno/a sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia" (p. 72). Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

- Fase 2. *Orientación dirigida*: Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes), con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar. Los problemas propuestos han de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor debe seleccionar cuidadosamente los problemas y actividades y, cuando lo necesiten, orientar a sus alumnos hacia la solución. De acuerdo con Jaime (1993), esta fase es fundamental, ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente. Al respecto cita a Van Hiele (1986), quien señala que "(. . .) las actividades (de la segunda fase), si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior"(p. 10).

- Fase 3. *Explicitación*: Los estudiantes deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y entre los mismos estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio. Los estudiantes tienen que utilizar el vocabulario adecuado para describir la estructura sobre la que han estado trabajando. En esta fase no se produce un aprendizaje de conocimientos nuevos, en cuanto a estructuras o contenidos, sino una revisión del trabajo llevado a cabo con anterioridad, a partir de conclusiones, práctica y perfeccionamiento de la forma de expresarse, todo lo cual origina un afianzamiento de la nueva red de conocimientos que se está formando. El tipo de trabajo que se debe realizar en esta fase es de discusión y comentarios sobre la forma de resolver los ejercicios anteriores, propiedades y relaciones que se han observado o utilizado.

- Fase 4. *Orientación libre*: En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas. En palabras de Van Hiele (1986), citado por Jaime (1993), "(. . .) los estudiantes aprenden a encontrar su camino en la red de relaciones por sí mismos, mediante actividades generales" (p. 11). Los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir en situaciones nuevas. Los problemas planteados en esta fase deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y aplicarlos a situaciones diferentes de las propuestas anteriormente. La intervención del profesor en la resolución de las tareas debe ser mínima, pues son los alumnos quienes tienen que encontrar el camino adecuado a partir de lo aprendido en la segunda fase.

- Fase 5. *Integración*: Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. Se trata de lograr una visión general de los contenidos del tema objeto de estudio, integrada por los nuevos conocimientos adquiridos en este nivel y los existentes en los estudiantes. No hay un aprendizaje de elementos nuevos, sino una fusión de los nuevos conocimientos, algoritmos y formas de razonar con los anteriores. Las actividades de esta fase deben favorecer dicha integración y permitirle al profesor comprobar si ya se ha conseguido.

Cada una de estas fases se corresponden de manera implícita con los aspectos señalados en la actuación docente, pues el profesor es el encargado del cumplimiento de cada una de ellas para que el estudiante logre pasar de un nivel de razonamiento a otro.

Las actividades diseñadas pretenden seguir las fases de enseñanza del modelo de Van Hiele: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración. A continuación se detalla cómo se desea seguir cada una de estas fases.

En la primera fase se da a conocer la intención que se persigue en la actividad propuesta, así como también las herramientas del software a utilizar en la construcción geométrica de cada sección cónica.

Para la fase 2, se debe tener presente todas las indicaciones que se muestran en la actividad para lograr con lujo de detalle lo que se indica. Se pretende utilizar cada uno de los entes geométricos presentes en la definición de cada sección cónica. Una característica predominante en esta fase es el cuestionamiento dirigido a un aprendizaje autorreflexivo.

Para cumplir con la tercera fase como su nombre lo indica se muestra una explicitación de todo el bagaje geométrico utilizado en la fase dos, además en algunos casos se solicita una descripción de todo el proceso, que hasta el momento se ha realizado, para tal efecto debe existir una interacción alumno - alumno y alumno - profesor, propiciando así un aprendizaje colaborativo. Esta fase da lugar a que se realice la construcción solicitada, se explore y se conjeturen resultados.

En la fase 4 se hacen actividades que conllevan a la consolidación de los conocimientos geométricos, son actividades que difieren un poco de las anteriores ya que se persigue que los estudiantes establezcan nuevas relaciones o propiedades y que planteen varias vías de soluciones.

Para la fase 5 se establecen actividades que implican la organización de los conocimientos ya adquiridos. Todo esto conduce a conclusiones justificadas de propiedades estudiadas y a la ejecución del proceso de institucionalización del conocimiento como el papel del docente.

2.1.2. SGD empleado en el diseño de las actividades

El GeoGebra y su dinamismo

El desarrollo de las actividades propuestas contemplan cada uno de los pasos a seguir usando el GeoGebra como un ambiente eficaz que permite realizar construcciones, establecer conjeturas y llegar a generalizar propiedades, todo esto a partir de la visualización. Su uso requiere tiempo para una iniciación y exploración instrumental, por lo cual se presentan las principales herramientas que se usarán para llevar a cabo cada actividad propuesta.

GeoGebra es un programa dinámico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Combina dinámicamente, geometría, álgebra, cálculo, análisis y estadística en un único conjunto de herramientas, operativamente sencillas y eficientes.

Además de la gratuidad y la facilidad de aprendizaje, GeoGebra se destaca por la percepción de los objetos, ya que al introducirlos cada uno tiene dos representaciones, una en la vista gráfica (que se corresponde con la parte geométrica) y otra en la vista algebraica (que se corresponde con el formalismo algebraico). De esta forma se establece una permanente conexión entre el álgebra y la geometría, fin que se persigue en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica.

GeoGebra es en su origen la tesis de Markus Hohenwarter, que tenía como objeto crear una calculadora de uso libre para trabajar el Álgebra y la Geometría. Fue un proyecto que se inició en el 2001 en un curso de Matemática en la Universidad de Salzburgo (Austria). Actualmente, GeoGebra continúa su desarrollo en la Universidad de Boca Raton, Florida Atlantic University (USA). Pero no tenemos que olvidar que GeoGebra está diseñado con mentalidad colaborativa. Desde la página oficial disponemos de acceso a ayudas, recursos, foros y wikis que usuarios de todo el mundo mantienen en constante actualización.

Algunas características de este software son:

- Es gratuito y de código abierto (GNU GPL).
- Está disponible en español incluyendo el manual de ayuda.
- Presenta foros en varios idiomas.
- Ofrece una wiki que permite compartir las propias construcciones.
- Usa la multiplataforma Java, lo que garantiza su portabilidad a sistemas de Windows, Linux, Solaris o MacOS X.
- Posee las características propias de los programas de geometría dinámica pero también de los programas de cálculo simbólico (CAS).
- Al abrir el software se presentan dos vistas: una geométrica y otra algebraica. A todo objeto que se vaya incorporando en la zona gráfica le corresponderá una expresión en la vista algebraica y viceversa.
- Permite abordar la geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos objetos, facilitando la realización de construcciones que conllevan a conjeturar resultados a partir de la observación directa.

Con base en lo anterior, GeoGebra puede asumirse como una herramienta didáctica, puesto que es un elemento físico o simbólico que, dentro del aula de clase, provee de ciertas ventajas al maestro para la presentación de una temática particular, y que a la vez le proporciona al estudiante una forma de representación, visualización y organización de los conceptos trabajados en el estudio de ciertos contenidos.

2.2. Contenido de la propuesta

La propuesta contempla una serie de actividades de aprendizaje para la construcción geométrica de las secciones cónicas, la determinación de sus ecuaciones y la solución de problemas relativos a cada una de las secciones cónicas, haciendo uso del software de geometría dinámica GeoGebra. Estas actividades promueven el aprendizaje de algunos contenidos propios de la geometría analítica, así como el desarrollo de habilidades, destrezas y aprehensión de dichos conocimientos.

La construcción geométrica de cada una de las secciones cónicas a partir de su definición tiene como fin que el alumno asocie cada curva (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) con su definición lo que permite una deducción inmediata de su ecuación y un mayor acercamiento al tema.

Se puede notar en esta propuesta el trato especial que se da a cada sección cónica como lugar geométrico, contrario a la mayoria de los textos existentes, en los que hay un predominio algebraico, además de una forma visual bastante reducida de cada una de las cónicas. Además es notorio que estos textos presentan la misma definición desde diferentes puntos de vista. En este trabajo, la definición que se elige es la analítica por medio del cálculo de la distancia de un punto del locus a los focos. Las razones son las siguientes:

- Es la principal definición que se da a conocer a los alumnos.
- Esta definición permite evidenciar propiedades geométricas, no sólo analíticas.
- Es la definición que mejor se ajusta a las características propias del GeoGebra.

Por cada sección cónica se presentan actividades de aprendizaje, agrupadas en cuatro temas centrales que se enlistan a continuación:

A. **Circunferencia**:

1. Construcción geométrica
2. Ecuación canónica de una circunferencia
3. Ecuación ordinaria de una circunferencia
4. Problemas relativos a una circunferencia

B. **Parábola**

1. Construcción geométrica
2. Ecuación canónica de una parábola
3. Ecuación ordinaria de una parábola
4. Problemas relativos a una parábola

C. **Elipse**

1. Construcción geométrica
2. Ecuación canónica de una elipse
3. Ecuación ordinaria de una elipse
4. Problemas relativos a una elipse

D. **Hipérbola**

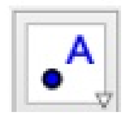
1. Construcción geométrica
2. Ecuación canónica de una hipérbola
3. Ecuación ordinaria de una hipérbola
4. Problemas relativos a una hipérbola

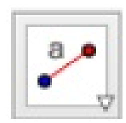
2.3. Actividades con circunferencias

2.3.1. Actividad 1. Construcción geométrica

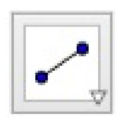
Esta actividad está diseñada en dos etapas: la primera tiene el objetivo de construir el lugar geométrico llamado circunferencia; y la segunda, persigue la búsqueda de una propiedad que sirva para establecer su definición como tal.

Las herramientas que vamos a utilizar para desarrollar esta actividad son las siguientes:

Punto 

Segmento de longitud dada 

Distancia o longitud 

Segmento 

Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra. Automáticamente se observan las vistas: algebraica y geométrica.

2. Cierre la vista algebraica y oculte los ejes coordenados, dando clic derecho sobre el área de trabajo y desactive la herramienta **Ejes**.

3. Elija la herramienta **Punto** y marque un punto sobre el área de trabajo y llámelo C (este punto debe quedar fijo).

4. Seleccione la herramienta **Segmento de longitud dada** y construya un segmento de longitud cualquiera con extremo en C. Para ello, primero debe dar clic sobre el

punto C y luego, aparecerá un cuadro de diálogo donde debe especificar la longitud del segmento. Rotule el otro extremo con P.

5. Active el rastro y la animación para el punto P dando clic derecho sobre él y activando las herramientas **Rastro y Animación**. Observe que al moverse P describe un lugar geométrico ¿conoces el nombre de esta figura?

   El lugar geométrico que hemos construido auxiliándonos del GeoGebra se llama *circunferencia*. Ahora dediquémonos a la búsqueda de una caracterización que ayude a definir este lugar geométrico.

6. Elija la herramienta **Punto** y marque los puntos A, B, D y E sobre el lugar geométrico que describe P. Seleccione la herramienta **Segmento** y trace los segmentos cuyos extremos son C y cada punto marcado. Con la herramienta **Distancia o longitud** calcule la longitud de cada uno de ellos ¿Cómo son estas medidas en relación con la del segmento que determinan C y P? ¿Qué propiedad cumple cualquier punto que esté sobre el lugar geométrico que describe P respecto a C?

   Al punto C le llamaremos *centro* y *radio* a la distancia de C a cualquier punto del lugar geométrico.

7. Guarde el archivo con el nombre "construcción geométrica de una circunferencia".

Tomando en cuenta los pasos anteriores, escriba con sus propias palabras una definición para el lugar geométrico circunferencia. Aquí se debe establecer la siguiente definición.

Definición 1. *Circunferencia* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.

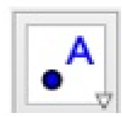
El punto fijo se llama *centro* de la circunferencia, y la distancia constante se llama *radio*.

2.3.2. Actividad 2. Ecuación canónica de una circunferencia

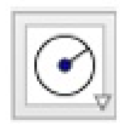
Una vez conocida la definición de circunferencia como lugar geométrico, pasamos a estudiar su ecuación canónica y para ello recurrimos a las vistas: algebraica y geométrica del GeoGebra.

Las herramientas que vamos a utilizar para desarrollar esta actividad son las siguientes:

Punto



Circunferencia (centro, radio)



Texto

Pasos a seguir:

1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra. Automáticamente se observan las vistas: algebraica y geométrica.

2. Seleccione la herramienta **Circunferencia (centro, radio)**. Fije como *centro* el origen $(0,0)$, se desplegará un cuadro de diálogo donde se debe introducir como *radio* un valor positivo cualquiera. Escriba 2, por ejemplo.

   Observe que en la vista algebraica aparece de manera automática la ecuación buscada. Además, note que el lado derecho de la igualdad corresponde al cuadrado del valor del *radio* establecido. Se dice que esta ecuación está en su forma canónica. Por tanto, la ecuación que se muestra en la vista algebraica es la ecuación canónica de la circunferencia trazada.

Ahora corrobore que realmente cualquier punto sobre la circunferencia satisface dicha ecuación.

3. Elija la herramienta **Punto** y marque un punto B sobre la circunferencia trazada. Garantice que dicho punto sea "móvil"desplazándolo sobre la circunferencia.

4. Escriba en la **Barra de entrada** el comando $x(B)$ y seguidamente el comando $y(B)$. Observe que en la vista algebraica se registraron los números a y b, que corresponden a la abscisa y a la ordenada del punto B.

5. Seleccione la herramienta **Texto** y dé clic sobre el área de trabajo. En el cuadro de diálogo que se muestra seleccione la pestaña *Objetos* escoja a y elévelo al cuadrado, luego súmele el cuadrado de b, para esto repita el procedimiento dado para a. Dicha suma debe igualarla al valor dado a la derecha del igual en la ecuación de la circunferencia que se obtuvo en el paso 2.

6. Dé clic sobre el punto B y active la herramienta **Animación**. ¿Qué pasa con los valores para a y b? ¿A qué es igual la suma de sus cuadrados?

   En este momento, se debe notar que los valores para a y b cambian a medida que el punto B recorre la circunferencia, pero la suma de sus cuadrados siempre es igual al cuadrado del valor del *radio* establecido.

7. Guarde el archivo con el nombre "ecuación canónica de una circunferencia".

De acuerdo con los pasos anteriores, escriba un resultado donde se determine la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y cuyo radio sea r. El objetivo aquí es establecer el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Una circunferencia cuyo centro sea el origen y cuyo radio sea r, tiene por ecuación*

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

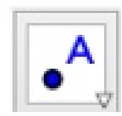
*Esta expresión es llamada **ecuación canónica** de una circunferencia.*

2.3.3. Actividad 3. Ecuación ordinaria de una circunferencia

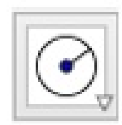
Estudiada la ecuación canónica de una circunferencia esta puede ser generalizada cambiando únicamente las coordenadas del centro de la circunferencia que se manipule. A esto nos dedicaremos en la siguiente actividad.

Las herramientas que emplearemos en esta actividad son las siguientes:

Punto



Circunferencia (centro, radio)



Texto

Pasos a seguir:

1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra. Automáticamente se observan las vistas: algebraica y geométrica.

2. Con la herramienta **Punto** trace un punto A con coordenadas cualesquiera.

3. Seleccione la herramienta **Circunferencia (centro, radio)**. Fije como *centro* el punto A y se desplegará un cuadro de diálogo donde se debe establecer como *radio* un valor positivo cualquiera. Escriba, por ejemplo, 1.

   Observe que en la vista algebraica se tiene de manera automática la ecuación buscada. Además, note que el lado derecho de la igualdad corresponde al cuadrado del valor del *radio* establecido. Se dice que esta ecuación está en su forma ordinaria. Por tanto, la ecuación que se muestra en la vista algebraica es la ecuación ordinaria de la circunferencia trazada.

Utilizando los pasos de la actividad anterior, corrobore que realmente cualquier punto sobre la circunferencia satisface dicha ecuación.

4. Elija la herramienta **Punto** y marque un punto B sobre la circunferencia trazada. Garantice que dicho punto sea "móvil"desplazándolo sobre la circunferencia.

5. Escriba en la **Barra de entrada** el comando $h = x(A)$ y seguidamente el comando $k = y(A)$. Observe que en la vista algebraica se registraron los números h y k. Estos corresponden a la abscisa y a la ordenada del centro de la circunferencia, respectivamente.

6. Escriba en la **Barra de entrada** el comando $x(B)$ y seguidamente el comando $y(B)$. Observe que en la vista algebraica se registraron los números a y b. Estos corresponden a la abscisa y a la ordenada del punto B.

7. Seleccione la herramienta **Texto** y dé clic sobre el área de trabajo. En el cuadro de diálogo que se muestra, escriba la suma de los cuadrados de las diferencias $a - h$ y $b - k$, seleccionando en la pestaña *Objetos* los objetos correspondientes. Iguale la suma al valor dado en el miembro derecho en la ecuación de la circunferencia que se obtuvo en el paso 2.

8. Dé clic sobre el punto B y active la herramienta **Animación**. ¿Qué pasa con los valores para h y k? ¿Qué pasa con los valores para a y b?¿A qué es igual la suma de los cuadrados de las diferencias $a - h$ y $b - k$?

   Se debe notar que los valores para h y k permanecen fijos por ser las coordenadas del centro de la circunferencia y que los valores para a y b cambian a medida que el punto B recorre la curva, pero la suma de los cuadrados de las diferencias $a - h$ y $b - k$ siempre es igual al cuadrado del valor del *radio* establecido.

9. Guarde el archivo con el nombre "ecuación ordinaria de una circunferencia".

De acuerdo con los pasos anteriores, escriba un resultado donde se determine la ecuación de una circunferencia cuyo centro sea un punto con coordenadas (h, k) y el radio sea r.

El objetivo aquí es establecer el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *La ecuación de una circunferencia cuyo centro es un punto con coordenadas (h, k) y que tiene radio r, es*

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Esta ecuación es llamada ***ecuación ordinaria*** *de una circunferencia.*

Se pueden explorar otras variantes para cada una de las actividades aquí propuestas haciendo uso de las herramientas **Circunferencia (centro, punto)** y **Circunferencia por tres puntos**; los pasos a seguir son similares.

2.3.4. Actividad 4. Problemas relativos a una circunferencia

Desde el estudio de la geometría elemental se presentan diversos problemas relativos a una circunferencia tales como:

1. Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones.
2. Familia de circunferencias.
3. Tangente a una circunferencia.

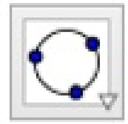
Todos ellos tratados con diversos métodos analíticos y geométricos. Aquí se presentan los pasos a seguir para resolver cada uno de ellos haciendo uso de las herramientas del GeoGebra.

Actividad 4.1 Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones

Esta actividad busca establecer que la ecuación de cualquier circunferencia, en particular, puede obtenerse determinando los valores de las tres constantes h, k y r involucradas en la ecuación ordinaria. Así que, tanto analítica como geométricamente, la ecuación de una circunferencia se determina completamente por tres condiciones independientes; por ejemplo, queda determinada por tres puntos cualesquiera no colineales.

La nueva herramienta que emplearemos es:

Circunferencia por tres puntos



Pasos a seguir:

1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

2. Introduzca en la **Barra de entrada** los puntos dados y sus coordenadas correspondientes.

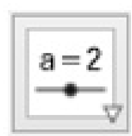
3. Seleccione la herramienta **Circunferencia por tres puntos** y dé clic sobre cada uno de los tres puntos trazados en el paso 2. Automáticamente, se genera la circunferencia y su ecuación ordinaria puede ser visualizada en la vista algebraica ¿Cómo identificarías las coordenadas del centro? ¿y el valor del radio?

Actividad 4.2 Familia de circunferencias

En esta actividad se persigue que los estudiantes manipulen una de las tres constantes h, k o r, para representar geométricamente familias de circunferencias.

Utilizaremos la herramienta:

Deslizador



Pasos a seguir:

1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

2. Cree tres deslizadores del tipo número utilizando la herramienta **Deslizador** y nómbralos con h, k y r, respectivamente. Fije un valor mínimo y un valor máximo para cada uno de los deslizadores, puede dejar los mismos que aparecen por defecto, excepto para r, ya que debe ser un número positivo.

3. Introduzca en la **Barra de entrada** la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Automáticamente aparecerá una circunferencia que tiene por centro y radio los valores correspondientes a los deslizadores h, k y r creados en el paso 2.

4. Arrastre cada uno de los deslizadores ¿qué ocurre con la circunferencia cuando se arrastra h? ¿qué ocurre con la circunferencia cuando se arrastra k? ¿qué ocurre con la circunferencia cuando se arrastra r?

5. Active la herramienta **Rastro** para la circunferencia creada.

6. Active la herramienta **Animación** para el deslizador h ¿Qué se forman?

7. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador h y actívela para el deslizador k ¿Qué se forman?

8. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador k y actívela para el deslizador r ¿Qué se forman?

Con cada uno de los últimos tres pasos se ha creado una familia de circunferencias cuyos centros están sobre una recta paralela al eje X, en el primer caso, y sobre una recta paralela al eje Y, en el segundo. Además, cuando se anima a r se tiene una familia de circunferencias concéntricas, es decir, circunferencias con el mismo centro.

Actividad 4.3 Tangente a una circunferencia

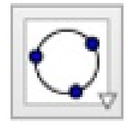
Esta actividad está dirigida a determinar:

- La ecuación de la tangente a una circunferencia dada en un punto dado de contacto.

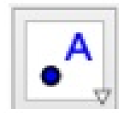
- Las ecuaciones de las tangentes a una circunferencia dada y que pasan por un punto exterior dado.

Las herramientas que utilizaremos son:

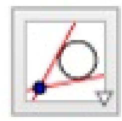
Circunferencia por tres puntos



Punto



Tangentes



Pasos a seguir:

1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

2. Trace una circunferencia haciendo uso de cualquiera de las herramientas ya utilizadas para tal efecto. Por ejemplo, use la herramienta **Circunferencia por tres puntos**.

3. Con la herramienta **Punto** trace un punto C sobre dicha circunferencia. Este será el punto de tangencia.

4. Seleccione la herramienta **Tangentes** y luego, dé clic sobre el punto C y sobre la circunferencia. Instantáneamente aparecerá la recta tangente a la circunferencia en el punto C y su ecuación en la vista algebraica. Con esto queda resuelto el primer problema.

   Para resolver el segundo problema los pasos a seguir son:

5. Oculte la recta tangente ya trazada y con la herramienta **Punto** trace un punto D exterior a dicha circunferencia.

6. Seleccione la herramienta **Tangentes** y luego, dé clic sobre el punto D y sobre la circunferencia. Seguidamente aparecerán las rectas tangentes a la circunferen-

cia trazadas desde el punto D. Sus ecuaciones pueden visualizarse en la vista algebraica.

7. Arrastre el punto exterior ¿qué ocurre con las rectas, siguen siendo tangentes?

Si lo que interesa son las coordenadas de los puntos de tangencias, basta con utilizar la herramienta **Intersección** y dar clic en la circunferencia y en cada una de las rectas tangentes.

Responda las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo son los segmentos trazados desde el punto exterior y cada uno de los puntos de tangencia?
- ¿Cuánto mide el ángulo formado por las rectas tangentes y un radio con extremo el punto de tangencia? Si el ángulo mide diferente, ¿cómo es la recta respecto a la circunferencia?

Con las respuestas a dichas preguntas deben quedar establecidos los siguientes resultados:

Teorema 2.3. *Los segmentos tangentes a una circunferencia trazados desde un punto exterior son congruentes, es decir, sus longitudes son iguales.*

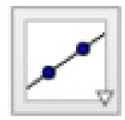
Teorema 2.4. *Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de la circunferencia en el punto de tangencia.*

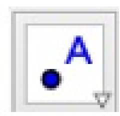
2.4. Actividades con parábolas

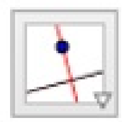
2.4.1. Actividad 1: Construcción geométrica

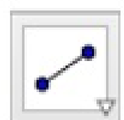
Esta actividad está diseñada en dos etapas: la primera tiene el objetivo de construir el lugar geométrico llamado parábola y la segunda encontrar una propiedad para establecer su definición como tal.

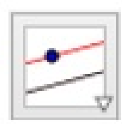
Las herramientas que vamos a utilizar para desarrollar esta actividad son las siguientes:

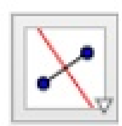
Recta


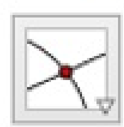
Punto


Perpendicular


Segmento


Paralela


Mediatriz


Intersección


Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra. Automáticamente se observan las vistas: algebraica y geométrica.

2. Oculte los ejes coordenados dando clic derecho sobre el área de trabajo y desactivando la herramienta **Ejes**.

3. Seleccione la herramienta **Recta** y construya una recta. Para visualizarla dé dos clic sobre el área de trabajo. Por defecto, pasará por los puntos A y B y se nombrará como f.

4. Elija la herramienta **Punto** y marque un punto C exterior a la recta.

5. Seleccione la herramienta **Perpendicular** y construya una recta perpendicular a f que pase por C. Esta recta se llamará g.

6. Nuevamente, elija la herramienta **Punto** y marque un punto D sobre la recta f. Arrastre dicho punto para garantizar que siempre se encuentre sobre la recta.

7. Seleccione la herramienta **Paralela** y construya una recta paralela a g que pase por D. Esta recta se llamará h.

8. Elija la herramienta **Segmento** y construya el segmento con extremos D y C. Este se llamará i.

9. Con la herramienta **Mediatriz** trace la mediatriz j del segmento i.

10. Usando la herramienta **Intersección**, determine el punto de intersección de la mediatriz j y la recta h. Se nombrará E.

11. Dé clic derecho sobre E y active la herramienta **Rastro**.

12. Dé clic derecho sobre D y active la herramienta **Animación**. Observe que al moverse D sobre la recta f también se mueve E, describiendo un lugar geométrico ¿conoce cómo se llama?

El lugar geométrico que hemos construido, auxiliándonos del GeoGebra se llama *parábola*. Ahora busquemos una propiedad que caracterice a los puntos de dicho lugar geométrico.

13. Elija la herramienta **Segmento** y trace los segmentos k y l con extremos D y E, E y C, respectivamente. Observe que en la vista algebraica aparecen dichos segmentos, ¿cómo son sus longitudes? ¿cómo es el punto E respecto a la recta f y al punto C?

    Al punto C le llamaremos *foco* y a la recta f *directriz* de la parábola.

14. Guarde el archivo con el nombre "construcción geométrica de una parábola".

Tomando en cuenta los pasos anteriores, escriba con sus propias palabras una definición para el lugar geométrico construido. Aquí debe quedar establecida la siguiente definición.

Definición 2. *Parábola* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

El punto fijo se llama *foco* y la recta fija *directriz* de la parábola.

2.4.2. Actividad 2. Ecuación canónica de una parábola

Para determinar la ecuación canónica de una parábola necesitamos definir primero los otros elementos de esta.

Eje recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.

Vértice punto medio del segmento que une el foco y el punto de intersección entre el eje y la directriz.

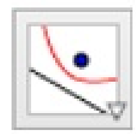
Cuerda segmento que une dos puntos cualesquiera de la parábola. En particualr, la cuerda que pasa por el foco se llama *cuerda focal*.

Lado recto cuerda perpendicular al eje.

La ecuación de una parábola toma la forma más simple cuando su vértice está en el origen y su eje coincide con uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto consideraremos dos casos, uno por cada eje coordenado.

Supongamos que la parábola tiene su vértice en el origen y su eje coincide con el eje X, así que el foco está sobre el eje X. Utilizamos la herramienta:

Parábola



Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra. Automáticamente se observan las vistas: algebraica y geométrica.

2. Introduzca en la **Barra de entrada** la recta $x = -1$. Esta será la directriz f.

3. Introduzca desde la **Barra de entrada** el punto A con coordenadas $(1, 0)$. Este será el foco.

4. Seleccione la herramienta **Parábola** y trace la parábola con foco A y directriz f, dando clic sobre cada objeto. Seguidamente aparecerá dicha curva y en la vista algebraica puede observar su ecuación $y^2 - 4x = 0$. ¿Hacia dónde abre esta parábola?

5. Por otro lado, desde la vista algebraica dé doble clic sobre la recta f y escribe $x = 1$, similarmente para el punto A escribe $(-1, 0)$ ¿Qué ocurre con la parábola? ¿Hacia donde abre?

Ahora estudiemos el caso en el que el vértice de la parábola es el origen, pero su eje coincide con el eje Y. Emplearemos las mismas herramientas ya utilizadas.

Pasos a seguir:

1. Abra una nueva ventana en GeoGebra.

2. Introduzca en la **Barra de entrada** la recta $y = -1$. Esta será la directriz f.

3. Introduzca desde la **Barra de entrada** el punto A con coordenadas $(0, 1)$. Este será el foco.

4. Seleccione la herramienta **Parábola** y trace la parábola con foco A y directriz f, dando clic sobre cada objeto. Seguidamente aparecerá dicha curva y en la vista algebraica puede observar su ecuación $x^2 - 4y = 0$ ¿Hacia dónde abre la parábola?

5. Por otro lado, desde la vista algebraica dé doble clic sobre la recta f y escriba $y = 1$, similarmente para el punto A escriba $(0, -1)$ ¿Qué ocurre con la parábola? ¿Hacia dónde abre?

Con esta actividad debe quedar establecido el siguiente teorema:

Teorema 2.5. *La ecuación de una parábola con vértice en el origen y eje el eje X, es*

$$y^2 = 4px,$$

en donde el foco *es el punto con coordenadas $(p, 0)$ y la* directriz *es la recta $x = -p$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda.*

Si el eje de la parábola coincide con el eje Y, y el vértice está en el origen, su ecuación es

$$x^2 = 4py,$$

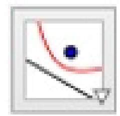
en donde el foco *es el punto con coordenadas $(0, p)$ y la* directriz *es la recta $y = -p$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo.*

2.4.3. Actividad 3. Ecuación ordinaria de una parábola

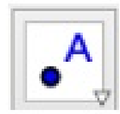
En esta actividad trataremos con parábolas cuyos vértices no están en el origen y que tienen ejes paralelos, no necesariamente coincidentes con los ejes coordenados.

Las herramientas que utilizaremos son:

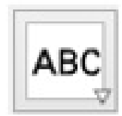
Parábola



Punto



Texto



Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.

2. Con la herramienta **Parábola** trace una parábola con vértice en cualquier punto del plano y eje paralelo al eje Y. Por ejemplo, utilice como foco el punto $A(2, 3)$ y como directriz la recta $y = 1$. Seguidamente en la vista algebraica aparecerá la ecuación de la parábola.

3. Seleccione la herramienta **Punto** y ubique el punto $C(2, 2)$, vértice de la parábola, y un punto B sobre la parábola. Arrastre el punto B para garantizar que siempre estará sobre la parábola.

4. Escriba en la **Barra de entrada** el comando $h = x(C)$ y seguidamente el comando $k = y(C)$. Observe que en la vista algebraica se registraron los números h y k, respectivamente. Estos corresponden a la abscisa y a la ordenada del vértice de la parábola.

5. Escriba en la **Barra de entrada** el comando $x(B)$ y seguidamente el comando $y(B)$. Observe que en la vista algebraica se registraron los números a y b que corresponden a la abscisa y a la ordenada del punto B.

6. Seleccione la herramienta **Texto** y dé clic sobre el área de trabajo. En el cuadro de diálogo que se muestra, escribe $(a-h)^2 = 4(b-k)$, seleccionando en la pestaña *Objetos* los objetos correspondientes.

7. Dé clic sobre el punto B y active la herramienta **Animación**. ¿Qué pasa con los valores para h y k? ¿Qué pasa con los valores para a y b?

   En este momento, se debe hacer notar que los valores para h y k permanecen fijos, por ser las coordenadas del vértice, y que los valores para a y b cambian a medida que el punto B recorre la curva, pero la igualdad establecida se mantiene. Además, la ecuación que se introdujo con la herramienta **Texto** en el paso 6. no es idéntica visualmente a la ecuación de la parábola mostrada en la vista algebraica, que corresponde al desarrollo de la ecuación ordinaria, para verla de esta manera desde la vista algebraica de clic derecho sobre la ecuación de la parábola y seleccione la ecuación en la forma $4p(y-k) = (x-h)^2$.

8. Guarde el archivo con el nombre "ecuación ordinaria de una parábola".

Finalizando esta actividad debe quedar establecido el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *La ecuación de una parábola con vértice el punto (h,k) y eje paralelo al eje X es de la forma*

$$(y-k)^2 = 4p(x-h).$$

Si $p > 0$, la parábola abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda.

Si el eje de la parábola es paralelo al eje Y, y el vértice es el punto (h,k), su ecuación es de la forma

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo.

2.4.4. Actividad 4. Problemas relativos a una parábola

A continuación se muestran los pasos a seguir en el tratamiento de los siguientes problemas:

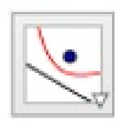
1. Propiedad intrínseca de la parábola.
2. Familia de parábolas.
3. Tangente a una parábola

Actividad 4.1 Propiedad intrínseca de la parábola

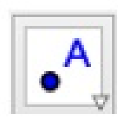
La llamada propiedad intrínseca de la parábola se cumple para toda parábola, cualquiera que sea su posición relativa a los ejes coordenados. Con ayuda del GeoGebra deduciremos esta propiedad importantísima ya que a partir de la misma se pueden determinar las dos formas de la ecuación ordinaria de una parábola.

Las herramientas que utilizaremos son:

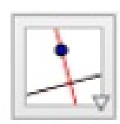
Parábola



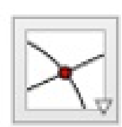
Punto



Perpendicular



Intersección



Segmento

Pasos a seguir:

1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

2. Con la herramienta **Parábola** trace una parábola.

3. Elija la herramienta **Punto** y marque un punto B sobre la parábola.

4. Utilice la herramienta **Perpendicular** para trazar la recta f, perpendicular al eje de la parábola y que pasa por el punto B.

5. Utilizando la herramienta **Intersección**, determine el punto de intersección C de la perpendicular f con el eje de la parábola.

6. Seleccione la herramienta **Segmento** y trace el segmento g cuyos extremos son B y C. Es decir, el segmento que va desde un punto cualquiera de la párabola al pie de la perpendicular. En la vista algebraica puede observar la longitud de dicho segmento.

7. Con la herramienta **Punto** determine el vértice D de la parábola.

8. Seleccione la herramienta **Segmento** y trace el segmento h cuyos extremos son C y D. Es decir, el segmento que va desde el pie de la perpendicular al vértice. En la vista algebraica puede observar la longitud de dicho segmento.

9. Haciendo uso de la herramienta **Perpendicular** trace la perpendicular i al eje de la parábola y que pasa por el foco A.

10. Seleccione la herramienta **Intersección** y determine los puntos de intersección E y F de la perpendicular i con la parábola.

11. Seleccione la herramienta **Segmento** y trace el segmento j cuyos extremos son E y F ¿Cómo se le llama a este segmento? En la vista algebraica puede observar su longitud. A esta longitud se le llama *longitud del lado recto.*

12. Oculte las rectas f e i.

13. Desde la **Barra de entrada** introduzca g^2 y el producto $j * h$. Automáticamente, el software reconocerá estos comandos como los números a y b, respectivamente ¿Cómo son a y b?

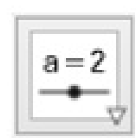
En base a los pasos mostrados anteriormente, escriba en su cuaderno la propiedad que se cumple para los números a y b.

En este momento, debe establecerse la **propiedad intrínseca** de la parábola que reza así: *Si desde un punto cualquiera de una parábola se baja una perpendicular a su eje, el cuadrado de la longitud de esta perpendicualar es igual al producto de las longitudes de su lado recto y del segmento del eje comprendido entre el pie de dicha perpendicular y el vértice.*

Actividad 4.2 Familia de parábolas

Al igual que en la circunferencia, en las dos formas de la ecuación ordinaria de una parábola, hay tres constantes arbitrarias o parámetros, h, k y p. Por tanto, la ecuación de cualquier parábola cuyo eje sea paralelo a uno de los ejes coordenados puede determinarse a partir de estos tres parámetros. Así que al manipular cada uno de ellos de manera independiente obtendremos familias de parábolas. Para tal efecto, emplearemos la herramienta:

Deslizador



Pasos a seguir:

1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

2. Cree tres deslizadores del tipo número utilizando la herramienta **Deslizador** y nómbrelos con h, k y p, respectivamente. Fije un valor mínimo y un valor máximo para cada uno de los deslizadores, puede dejar los mismos que aparecen por defecto.

3. Introduzca en la **Barra de entrada** la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$. Automáticamente aparecerá una parábola que tiene por vértice y foco los valores correspondientes a los deslizadores h, k y p creados en el paso 2.

4. Arrastre cada uno de los deslizadores ¿Qué ocurre con la parábola cuando se arrastra h? ¿Qué ocurre con la parábola cuando se arrastra k? ¿Qué ocurre con la parábola cuando se arrastra p? ¿qué ocurre cuando $p = 0$?

5. Active la herramienta **Rastro** para la parábola creada.

6. Active la herramienta **Animación** para el deslizador h ¿Qué se forman?

7. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador h y actívela para el deslizador k ¿Qué se forman?

8. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador k y actívela para el deslizador p ¿Qué se forman?

Con cada uno de los últimos tres pasos se ha creado una familia de parábolas cuyos vértices están sobre una recta paralela al eje X, en el primer caso, y sobre una recta paralela al eje Y, en el segundo. Además, cuando se anima a p se obtiene una familia de parábolas con el mismo vértice e igual concavidad, en dependencia del signo de p.

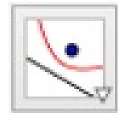
Actividad 4.3 Tangente a una parábola

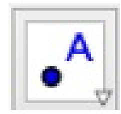
Similarmente, igual que en caso de la tangente para una circunferencia aquí estudiaremos los casos:

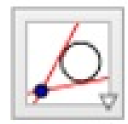
- Encontrar la ecuación de la tangente a una parábola en un punto dado de contacto.

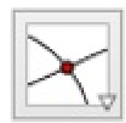
- Determinar las ecuaciones de las tangentes a una parábola y que pasan por un punto exterior dado.

Para determinar la ecuación de una tangente a una parábola no se requiere introducir ninguna herramienta nueva, así que emplearemos las mismas que ya conocemos.

Parábola 

Punto 

Tangentes 

Intersección 

Pasos a seguir:

1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

2. Trace una parábola haciendo uso de cualquiera de las herramientas ya utilizadas para tal efecto.

3. Con la herramienta **Punto** trace un punto B sobre dicha parábola. Este será el punto de tangencia.

4. Seleccione la herramienta **Tangentes** y luego, dé clic sobre el punto B y sobre la parábola. Instantáneamente aparecerá la recta tangente a la parábola en el punto B y su ecuación en la vista algebraica. Con esto queda resuelto el primer problema.

5. Active **Animación** para el punto B ¿Qué ocurre con la recta tangente? ¿cómo es su pendiente?

Para resolver el segundo problema los pasos a seguir son:

6. Oculte la recta tangente ya trazada y con la herramienta **Punto** trace un punto C exterior a dicha parábola.

7. Seleccione la herramienta **Tangentes** y luego, dé clic sobre el punto C y sobre la parábola. Seguidamente aparecerán las rectas tangentes a la parábola trazadas desde el punto C. Sus ecuaciones pueden visualizarse en la vista algebraica.

8. Arrastre el punto exterior ¿qué ocurre con las rectas, siguen siendo tangentes? ¿siempren cortan a la directriz y al lado recto? Si la respuesta es no, en qué caso ocurre lo contrario.

9. Arrastre el punto exterior hasta que los puntos de tangencia queden sobre el lado recto de la parábola ¿cuánto mide el ángulo formado por las rectas tangentes?

Si lo que interesa son las coordenadas de los puntos de tangencia, basta con utilizar la herramienta **Intersección** y dar clic en la parábola y en cada una de las rectas tangentes.

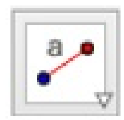
2.5. Actividades con elipses

2.5.1. Actividad 1. Construcción geométrica

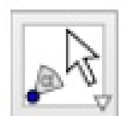
Esta actividad esta diseñada de la misma manera que las construcciones geométricas para una circunferencia y para una parábola, es decir, primero construimos el lugar geométrico llamado elipse y luego buscamos una propiedad que caracterice a todos los puntos de dicho lugar geométrico.

Las herramientas que emplearemos son:

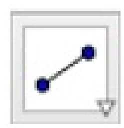
Segmento de longitud dada



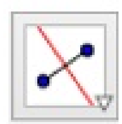
Gira en torno a un punto



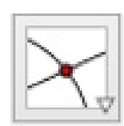
Segmento



Mediatriz



Intersección



Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra. Automáticamente se observan las vistas: algebraica y geométrica.

2. Oculte los ejes coordenados dando clic derecho sobre el área de trabajo y desactivando la herramienta **Ejes**.

3. Elija la herramienta **Segmento de longitud dada** y trace un segmento f de longitud 4, por ejemplo, con extremos A y B. En la vista algebraica aparecerá su longitud.

4. Seleccione la herramienta **Segmento de longitud dada** y trace el segmento g con extremo en A y C cuya longitud sea menor que la del segmento f.

5. Seleccione la herramienta **Gira en torno a un punto** y dé clic sobre A y luego, arrastre el punto B.

6. Seleccione la herramienta **Segmento** y trace el segmento h con extremos B y C.

7. Elija la herramienta **Mediatriz** y trace la mediatriz i del segmento h.

8. Seleccione la herramienta **Intersección** y determine el punto de intersección D de la recta i y el segmento f.

9. Oculte la rectas i y los segmentos f y h.

10. Active el **Rastro** para el punto D.

11. Active la **Animación** para el punto B ¿Conoce el lugar geométrico que se ha trazado?

    El lugar geométrico que hemos construido, auxiliándonos del GeoGebra se llama *Elipse*. Ahora busquemos una propiedad que caracterice a todos los puntos de dicho lugar geométrico.

12. Con la herramienta **Segmento** trace los segmentos j y k determinados por los puntos C y D, A y D, respectivamente.

13. Desde la **Barra de entrada** introduzca $j + k$ y el software identificará esta suma con el número a.

14. Active la **Animación** para el punto B ¿Qué ocurre con la suma $j + k$, varía?

    A los puntos A y C les llamaremos *focos*, y al punto medio del segmento determinado por dichos puntos, *centro* de la elipse.

15. Guarde el archivo con el nombre “construcción geométrica de una elipse”.

Tomando en cuenta los pasos anteriores, escriba con sus propias palabras una definición para el lugar geométrico construido. Aquí debe quedar establecida la siguiente definición.

Definición 3. *Elipse* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

Los puntos fijos se llaman *focos* y el punto medio del segmento determinado por dichos puntos *centro* de la elipse.

2.5.2. Ecuación canónica de una elipse

Para determinar la ecuación canónica de una elipse necesitamos definir primero sus demás elementos, estos son:

Eje focal recta que pasa por los focos de la elipse.

Vértices puntos donde el eje focal corta a la elipse.

Eje mayor segmento comprendido entre los vértices de la elipse.

Centro punto medio del segmento que determinan los focos de la elipse.

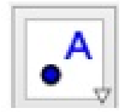
Eje menor segmento de recta perperdicular al eje focal en el centro de la elipse.

Los elementos cuerda, cuerda focal y lado recto de una elipse se definen de manera similar a los de una parábola.

Consideremos los siguientes dos casos:

- La elipse con centro en el origen y cuyo eje focal coincida con el eje X.
- La elipse con centro en el origen y cuyo eje focal coincida con el eje Y.

Para el primer caso, las herramientas que emplearemos son las siguientes:

Punto 

Elipse 

Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra. Automáticamente se observan las vistas: algebraica y geométrica.

2. Elija la herramienta **Punto** y marque los puntos $A(-2,0)$, $B(2,0)$ y $C(0,2)$.

3. Seleccione la herramienta **Elipse** y trace la elipse con focos en A y B y que pasa por C. Seguidamente aparecerá dicha curva y en la vista algebraica puede observar su ecuación $1x^2 + 2y^2 = 8$.

4. Dé clic derecho sobre la ecuación encontrada en el paso anterior y seleccione la ecuación en la forma $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$. Aparecerá la ecuación $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

   ¿Cuál de los denominadores del lado izquierdo de la igualdad es mayor? ¿debajo de qué numerador se encuentra?

Para el segundo caso ocuparemos las mismas herramientas del caso anterior.

Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.

2. Elija la herramienta **Punto** y marque los puntos $A(0,-2)$, $B(0,2)$ y $C(2,0)$.

3. Seleccione la herramienta **Elipse** y trace la elipse con focos en A y B y que pasa por C. Seguidamente aparecerá dicha curva y en la vista algebraica puede observar su ecuación $2x^2 + 1y^2 = 8$.

4. Dé clic derecho sobre la ecuación determinada en el paso anterior y seleccione la ecuación en la forma $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$. Aparecerá la ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$.

   ¿Cuál de los denominadores del lado izquierdo de la igualdad es mayor? ¿debajo de qué numerador se encuentra?

Aquí debe establecerse que si el eje focal es el eje X, entonces el mayor de los denominadores del lado izquierdo de la ecuación que se determine estará bajo x^2 y que si el eje focal es el eje Y, entonces el mayor de los denominadores del lado izquierdo de la ecuación que se determine estará bajo y^2.

Debe formularse el siguiente teorema.

Teorema 2.7. *La ecuación de una elipse con centro en el origen y eje focal el eje X con focos $(c,0)$ y $(-c,0)$ está dada por*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, y los focos tienen coordenadas $(0,c)$ y $(0,-c)$ su ecuación es

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b la longitud del semieje menor, y a, b y c están ligados por la ecuación $a^2=b^2+c^2$.

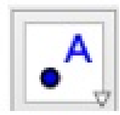
También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ y al cociente $\frac{c}{a}$ se le llama excentricidad.

2.5.3. Actividad 3. Ecuación ordinaria de una elipse

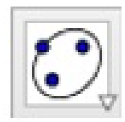
Establecida la ecuación canónica de una elipse podemos trasladar su centro a cualquier punto del plano y determinar como eje focal a una recta paralela a cualquiera de los ejes coordenados, y de esta manera deducir la ecuación ordinaria de una elipse. A esto nos dedicaremos en esta actividad.

Las herramientas que emplearemos son:

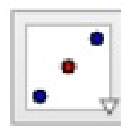
Punto



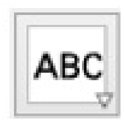
Elipse



Medio o centro



Texto



Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.

2. Elija la herramienta **Punto** y marque los puntos $A(1,2)$, $B(5,2)$ y $C(4,3)$.

3. Con la herramienta **Elipse** trace una elipse con focos en A y B y que pase por C. Seguidamente en la vista algebraica aparecerá la ecuación de la elipse.

4. Seleccione la herramienta **Punto** y ubique el punto $D(2,1)$ sobre la elipse. Arrastre el punto D para garantizar que siempre estará sobre la elipse.

5. Seleccione la herramienta **Medio o centro** y luego dé clic sobre la elipse para determinar su centro E.

6. Selecione la herramienta **Segmento** y trace los segmentos f del centro E a cualquiera de los vértices de la elipse y g del centro E a cualquiera de los extremos del eje menor. Renómbrelos como a y b, respectivamente, para ello debe dar clic derecho sobre cada uno y seleccionar **Renombra**.

7. Escriba en la **Barra de entrada** el comando $m = x(E)$ y seguidamente el comando $n = y(E)$. Observe que en la vista algebraica se registraron los números m y n, respectivamente. Estos corresponden a la abscisa y a la ordenada del centro de la elipse, respectivamente.

8. Escriba en la **Barra de entrada** el comando $x(D)$ y seguidamente el comando $y(D)$. Observe que en la vista algebraica se registraron los números d y e que corresponden a la abscisa y a la ordenada del punto D.

9. Seleccione la herramienta **Texto** y dé clic sobre el área de trabajo. En el cuadro de diálogo que se muestra, escriba $\dfrac{(d-m)^2}{a^2} + \dfrac{(e-n)^2}{b^2} = 1$, seleccionando en la pestaña *Objetos* los objetos correspondientes.

10. Dé clic sobre el punto D y active la herramienta **Animación** ¿Qué pasa con los valores para m y n? ¿Qué pasa con los valores para d y e?

    En este momento, se debe hacer notar que los valores para m y n permanecen fijos, por ser las coordenadas del centro, y que los valores para d y e cambian a medida que el punto D recorre la curva, pero la igualdad establecida se mantiene. Además, la ecuación que se introdujo con la herramienta **Texto** en el paso 9. no es idéntica visualmente a la ecuación de la elipse mostrada en la vista algebraica, que corresponde al desarrollo de la ecuación ordinaria, para verla de esta manera desde la vista algebraica dé clic derecho sobre la ecuación de la elipse y seleccione la ecuación en la forma $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$.

11. Guarde el archivo con el nombre “ecuación ordinaria de una elipse”.

Aquí debe quedar establecido el siguiente teorema.

Teorema 2.8. *La ecuación de una elipse con centro* (m, n) *y eje focal paralelo al eje* X *está dada por*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal de la elipse es paralelo al eje Y*, su ecuación es*

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1.$$

2.5.4. Actividad 4. Problemas relativos a una elipse

A continuación resolveremos los siguientes problemas:

1. Propiedad intrínseca de la elipse.

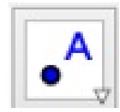
2. Familia de elipses.

3. Tangente a una elipse.

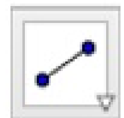
Actividad 4.1 Propiedad intrínseca de una elipse

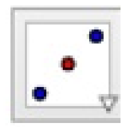
Hasta este momento hemos determinado la ecuación para una elipse con centro en cualquier punto del plano y con eje focal paralelo a uno de los ejes coordenados. Utilizaremos tales hechos para establecer la propiedad geométrica intrínseca de la elipse, en esto consiste esta actividad.

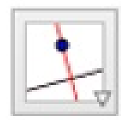
Las herramientas que utilizaremos son:

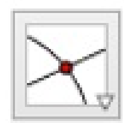
Punto 

Elipse 

Segmento 

Medio o centro 

Perpendicular 

Intersección 

Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.

2. Oculte los ejes coordenados.

3. Elija la herramienta **Punto** y marca los puntos alineados horizontalmente A y B y un punto C exterior al segmento que determinan A y B. Renombre al punto C como P.

4. Con la herramienta **Elipse** trace una elipse con focos en A y B y que pase por P.

5. Seleccione la herramienta **Segmento** y trace el segmento f que determinan los focos A y B de la elipse ¿cómo se le llama a dicho segmento?

6. Seleccione la herramienta **Medio o centro** y luego dé clic sobre la elipse para determinar su centro C. Renómbrelo como O.

7. Con la herramienta **Perpendicular** determine la recta g perpendicular al segmento f y que pasa por P.

8. Utilice la herramienta **Intersección** para determinar el punto de intersección C de la recta g y el segmento f. Renombre tal punto como Q.

9. Selecione la herramienta **Segmento** y trace los segmentos h e i cuyos extremos son O y Q, Q y P, respectivamente. En la vista algebraica puedes observar sus longitudes.

10. Determine las logitudes a y b del semieje mayor y menor, respectivamente ¿cómo lo harías usando el GeoGebra?

11. Desde la **Barra de entrada** introduzca $\dfrac{h^2}{a^2} + \dfrac{i^2}{b^2}$. Automáticamente, en la vista algebraica aparece el número d ¿qué valor toma?

De acuerdo con los pasos desarrollados, escriba con sus propias palabras la formulación del resultado que se manipuló.

Aquí debe quedar establecida la **propiedad intrínseca** de una elipse: Si O es el centro de una elipse cuyos semiejes mayor y menor son de longitudes a y b, respectivamente, y Q es el pie de la perpendicular trazada desde cualquier punto P de la elipse a su eje focal, entonces

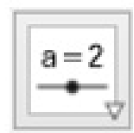
$$\frac{OQ^2}{a^2} + \frac{PQ^2}{b^2} = 1.$$

Actividad 4.2 Familia de elipses

Manipularemos los cuatro parámetros m, n, a y b presentes en la ecuación ordinaria de una elipse para formar familias de elipses cuyos centros no están en el origen, y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados. En otras palabras, la ecuación de una elipse queda completamente determinada siempre que se conozcan las coordenadas de cuatro de sus puntos.

Al igual que en el caso de la circunferencia y la parábola, haremos uso de la herramienta

Deslizador



Pasos a seguir:

1. Abre un nuevo archivo en GeoGebra.

2. Introduzca cuatro deslizadores del tipo número utilizando la herramienta **Deslizador** y nómbrelos con m, n, a y b, respectivamente. Fije un valor mínimo y un valor máximo para cada uno de los deslizadores, puede dejar los mismos que aparecen por defecto, excepto para a y b porque estos deben ser positivos.

3. En la **Barra de entrada** escriba la ecuación $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$. Automáticamente aparecerá una elipse que tiene por centro y longitudes de los semiejes mayor y menor, los valores correspondientes a los deslizadores m, n, a y b creados en el paso 2.

4. Arrastre cada uno de los deslizadores ¿Qué ocurre con la elipse cuando se arrastra m? ¿Qué ocurre con la elipse cuando se arrastra n? ¿Qué ocurre con la elipse cuando se arrastra a? ¿Qué ocurre con la elipse cuando se arrastra b?

5. Active la herramienta **Rastro** para la elipse creada.

6. Active la herramienta **Animación** para el deslizador m ¿Qué se forman?

7. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador m y actívela para el deslizador n ¿Qué se forman?

8. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador n y actívela para el deslizador a ¿Qué se forman?

9. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador a y actívela para el deslizador b ¿Qué se forman?

Con cada uno de los últimos cuatro pasos se ha creado una familia de elipses cuyos centros están sobre una recta paralela al eje X, en el primer caso, y sobre una recta paralela al eje Y, en el segundo. Además, cuando se anima a a o a b se tiene una familia de elipses que tienen el mismo centro y un estiramemiento o compresión sobre su eje focal, esto era de esperarse pues estos dos últimos parámetros determinan si el eje focal es paralelo a X o a Y.

¿Qué ocurre con la elipse cuando a y b son iguales?

Debe quedar claro que en este caso se tiene una circunferencia.

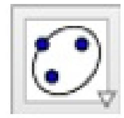
Actividad 4.3 Tangente a una elipse

Nos dedicaremos a trabajar los dos problemas siguientes:

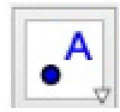
- La ecuación de la tangente a una elipse dada en un punto dado de contacto.
- Las ecuaciones de las tangentes a una elipse dada y que pasan por un punto exterior dado.

Utilizaremos las herramientas conocidas hasta este momento.

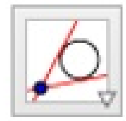
Elipse



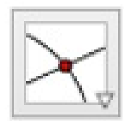
Punto



Tangentes



Intersección



Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.

2. Elija la herramienta **Punto** y marque los puntos alineados horizontalmente A y B y el punto C exterior al segmento que determinan A y B.

3. Con la herramienta **Elipse** trace una elipse con focos en A y B y que pase por C.

4. Seleccione la herramienta **Punto** y marque un punto D sobre la elipse. Arrastre D para garantizarse que siempre está sobre la elipse.

5. Elija la herramienta **Tangentes** y trace la tangente f a la elipse en el punto D. En la vista algebraica puedes observar su ecuación.

6. Active la **Animación** para el punto D ¿Qué ocurre con la recta tangente f? ¿Para qué puntos de tangencia la recta tangente es paralela a los ejes coordenados?

   Para resolver el segundo problema los pasos a seguir son:

7. Oculte la recta tangente ya trazada y con la herramienta **Punto** trace un punto E exterior a la elipse.

8. Seleccione la herramienta **Tangentes** y luego, dé clic sobre el punto E y sobre la elipse. Seguidamente aparecerán las rectas tangentes a la elipse trazadas desde el punto E. Sus ecuaciones pueden visualizarse en la vista algebraica.

9. Arrastre el punto exterior ¿qué ocurre con las rectas, siguen siendo tangentes? ¿siempren cortan al eje focal?

10. Arrastre el punto exterior hasta que quede sobre los ejes coordenados ¿qué son, en este caso, los ejes coordenados respecto al ángulo cuyo vértice es el punto exterior y que pasa por los puntos de tangencia?

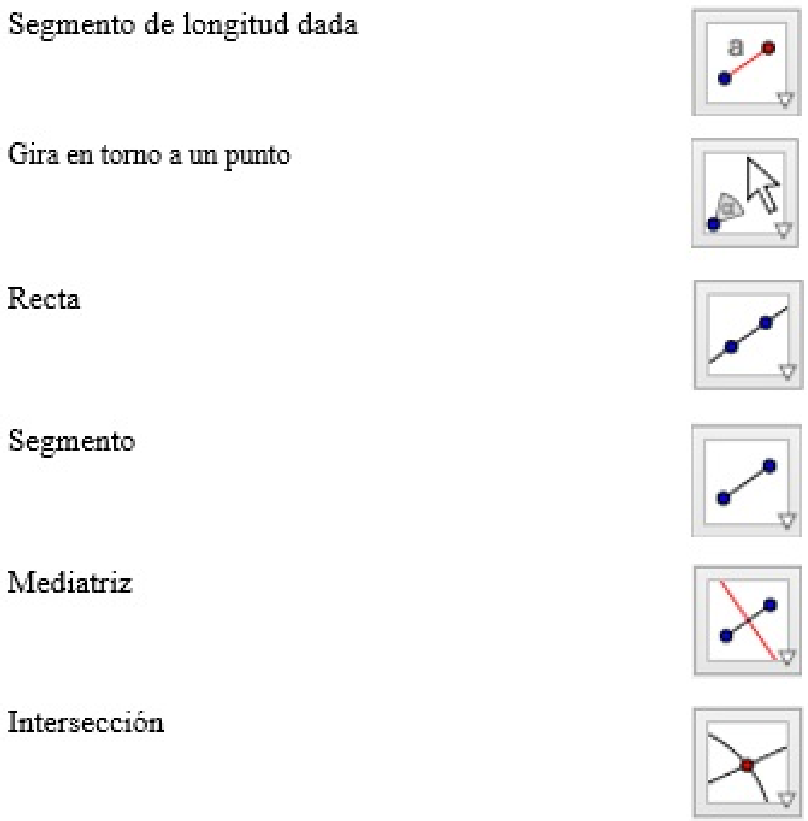
Si lo que interesa son las coordenadas de los puntos de tangencia, basta con utilizar la herramienta **Intersección** y dar clic en la elipse y en cada una de las rectas tangentes.

2.6. Actividades con hipérbolas

2.6.1. Actividad 1. Construcción geométrica

Esta actividad busca establecer la construcción de una hipérbola como lugar geométrico; y a partir de esta, deducir una propiedad que verifiquen todos los puntos de dicha curva.

Las herramientas que vamos a utilizar son:



Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra. Automáticamente se observan las vistas: Algebraica y Geométrica.

2. Oculte los ejes coordenados dando clic derecho sobre el área de trabajo y desactivando la herramienta **Ejes**.

3. Elija la herramienta **Segmento de longitud dada** y trace un segmento f con extremos A y B. En la vista algebraica aparecerá su longitud.

4. Seleccione la herramienta **Segmento de longitud dada** y trace el segmento g con extremo en A y C cuya longitud sea menor que la del segmento f.

5. Seleccione la herramienta **Gira en torno a un punto** y dé clic sobre A y luego arrastre el punto C.

6. Selecione la herramienta **Recta** y trace la recta h que pasa por los puntos A y C.

7. Selecione la herramienta **Segmento** y trace el segmento i que pasa por los puntos B y C.

8. Elija la herramienta **Mediatriz** y trace la mediatriz j del segmento i.

9. Seleccione la herramienta **Intersección** y determine el punto de intersección D de la recta h y de la mediatriz j.

10. Oculte los segmentos f, g e i.

11. Active el **Rastro** para el punto D.

12. Active la **Animación** para el punto C ¿Conoce el lugar geométrico que se ha trazado?

    El lugar geométrico que hemos construido auxiliándonos del GeoGebra se llama *Hipérbola*. Ahora busquemos una propiedad que caracterice a todos los puntos de dicho lugar geométrico.

13. Oculte las rectas h y j.

14. Con la herramienta **Segmento** trace los segmentos k y l determinados por los puntos A y D, B y D, respectivamente.

15. Desde la **Barra de entrada** introduzca $abs(k-l)$, que indica el valor absoluto de la diferencia $k-l$, y el software identificará este valor con el número a.

16. Active la **Animación** para el punto C ¿Qué ocurre con el número $a : abs(k-l)$, varía?

    A los puntos A y B les llamaremos *focos*, y al punto medio del segmento determinado por dichos puntos, *centro* de la hipérbola.

17. Guarde el archivo con el nombre "construcción geométrica de una hipérbola".

Tomando en cuenta los pasos anteriores, escriba con sus propias palabras una definición para el lugar geométrico construido. Aquí debe quedar establecida la siguiente definición.

Definición 4. *Hipérbola* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, es siempre igual a una constante, positiva y menor que la distancia entre los dos puntos.

Los puntos fijos se llaman *focos* y el punto medio del segmento determinado por dichos puntos *centro* de la hipérbola.

2.6.2. Actividad 2. Ecuación canónica de una hipérbola

Para determinar la ecuación canónica de una hipérbola necesitamos definir primero sus demás elementos, estos son:

Eje focal recta que pasa por los focos de la hipérbola.

Vértices puntos donde el eje focal corta a la hipérbola.

Eje transverso segmento comprendido entre los vértices de la hipérbola.

Centro punto medio del eje transverso.

Eje conjugado segmento de recta perperdicular al eje focal en el centro de la hipérbola.

Cuerda segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de una hipérbola; estos pueden ser ambos de la misma rama, o uno de una rama y otro de la otra.

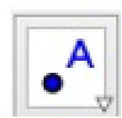
Los elementos cuerda focal y lado recto de una hipérbola se definen de manera similar a los de una parábola.

Consideremos los dos casos siguientes:

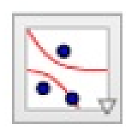
- La hipérbola con centro en el origen y cuyo eje focal coincida con el eje X.
- La hipérbola con centro en el origen y cuyo eje focal coincida con el eje Y.

Para el primer caso, las herramientas que emplearemos son las siguientes:

Punto



Hipérbola



Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.
2. Elija la herramienta **Punto** y marque los puntos $A(-5,0)$, $B(5,0)$ y $C(5,2.25)$.
3. Seleccione la herramienta **Hipérbola** y trace la hipérbola con focos en A y B y que pasa por C. Seguidamente aparecerá dicha curva y en la vista algebraica puede observar su ecuación $x^2 - 1.78y^2 = 16$.
4. Dé clic derecho sobre la ecuación determinada en el paso anterior y seleccione la ecuación en la forma $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$. Aparecerá la ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

En la ecuación determinada, ¿cuál de los dos coeficientes de las variables x e y tiene signo positivo? ¿coincide con el eje coordenado que contiene al eje transverso?

Para el segundo caso ocuparemos las mismas herramientas del caso anterior y los pasos a seguir son:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.
2. Elija la herramienta **Punto** y marque los puntos $A(0,5)$, $B(0,-5)$ y $C(2,3.35)$.
3. Seleccione la herramienta **Hipérbola** y trace la hipérbola con focos en A y B y que pasa por C. Seguidamente aparecerá dicha curva y en la vista algebraica puede observar su ecuación $-x^2+1.78y^2=16$.
4. Dé clic derecho sobre la ecuación determinada en el paso anterior y seleccione la ecuación en la forma $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}-\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$. Aparecerá la ecuación $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$.

   En la ecuación determinada, ¿cuál de los dos coeficientes de las variables x e y tiene signo positivo? ¿coincide con el eje coordenado que contiene al eje transverso?

Aquí debe establecerse que la posición de la hipérbola se determina por los signos de los coeficientes de las variables x e y. Es decir, la variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene al eje transverso de la hipérbola.

Debe formularse el siguiente teorema.

Teorema 2.9. *La ecuación de una hipérbola con centro en el origen y eje focal el eje X con focos $(c,0)$ y $(-c,0)$ está dada por*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Si el eje focal de la hipérbola coincide con el eje Y, y los focos tienen coordenadas $(0,c)$ y $(0,-c)$ su ecuación es

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

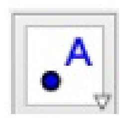
Para cada hipérbola, a es la longitud del semieje transverso, b la longitud del semieje conjugado, c la distancia del centro a cada foco y a, b y c están ligados por la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$.

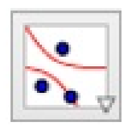
También, para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $\dfrac{2b^2}{a}$ y al cociente $\dfrac{c}{a}$ se le llama excentricidad.

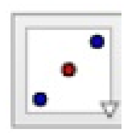
2.6.3. Actividad 3. Ecuación ordinaria de una hipérbola

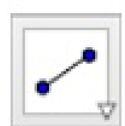
Esta actividad busca generalizar la ecuación canónica de una hipérbola trasladando su centro a cualquier punto del plano y su eje focal sobre una recta paralela a cualquiera de los ejes coordenados, para deducir de esta manera la ecuación ordinaria.

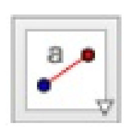
Las herramientas que emplearemos son:

Punto 

Hipérbola 

Medio o centro 

Segmento 

Segmento de longitud dada 

Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.

2. Elija la herramienta **Punto** y marque los puntos $A(1,1)$, $B(1,5)$ y $C(3,1)$.

3. Con la herramienta **Hipérbola** trace una hipérbola con focos en A y B y que pase por C. Seguidamente en la vista algebraica aparecerá su ecuación.

4. Seleccione la herramienta **Punto** y ubique el punto $D(-1, 5)$ sobre la hipérbola. Arrastre el punto D para garantizar que siempre estará sobre la hipérbola.

5. Seleccione la herramienta **Medio o centro** y luego dé clic sobre la hipérbola para determinar su centro E.

6. Selecione la herramienta **Segmento** y trace los segmento f del centro E a cualquiera de los vértices y g del centro E a cualquiera de los focos de la hipérbola. Renómbrelos como a y c, respectivamente.

7. Seleccione la herramienta **Segmento de longitud dada** y trace un segmento f con longitud $\sqrt{c^2 - a^2}$. Este será el semieje conjugado. Renómbrelo como b.

8. Arrástrelo hasta que uno de sus extremos coincida con el punto E.

9. Escriba en la **Barra de entrada** el comando $m = x(E)$ y seguidamente el comando $n = y(E)$. Observe que en la vista algebraica se registraron los números m y n, respectivamente. Estos corresponden a la abscisa y a la ordenada del centro de la hipérbola.

10. Escriba en la **Barra de entrada** el comando $x(D)$ y seguidamente el comando $y(D)$. Observe que en la vista algebraica se registraron los números d y e que corresponden a la abscisa y a la ordenada del punto D.

11. Escriba en la barra de entrada $\dfrac{(e-n)^2}{a^2} - \dfrac{(d-m)^2}{b^2}$, ¿a qué es igual este número?

12. Dé clic sobre el punto D y active la herramienta **Animación**. ¿Qué pasa con los valores para m y n? ¿Qué pasa con los valores para d y e?

    En este momento, se debe hacer notar que los valores para m y n permanecen fijos, por ser las coordenadas del centro, y que los valores para d y e cambian a medida que el punto D recorre la curva, pero la igualdad establecida se mantiene. Además, la expresión que se introdujo desde la **Barra de entrada** en el paso 11. no es idéntica visualmente al lado izquierdo de la ecuación de la hipérbola mostrada en la vista algebraica, que corresponde al desarrollo de la ecuación ordinaria, para verla de esta manera desde la vista algebraica dé clic derecho sobre la ecuación de la hipérbola y seleccione la ecuación en la forma $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$.

13. Guarde el archivo con el nombre "ecuación ordinaria de una hipérbola".

Aquí debe quedar establecido el siguiente teorema.

Teorema 2.10. *La ecuación de una hipérbola con centro (m, n) y eje focal paralelo al eje X está dada por*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Si el eje focal de la hipérbola es paralelo al eje Y, su ecuación es

$$\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1.$$

2.6.4. Actividad 4. Problemas relativos a una hipérbola

En esta última sección trataremos los siguientes seis problemas relativos a una hipérbola:

1. Asíntotas de una hipérbola.
2. Hipérbola equilátera o rectangular.
3. Hipérbolas conjugadas
4. Propiedad intrínseca de la hipérbola.
5. Familia de hipérbolas.
6. Tangente a una hipérbola.

Actividad 4.1 Asíntotas de una hipérbola

A diferencia de las demás cónicas estudiadas, la hipérbola tiene asíntotas. Esta actividad está dirigida a determinar sus ecuaciones tomando como referencia la ecuación ordinaria de una hipérbola, por eso nos apoyaremos en la actividad anterior.

Pasos a seguir:

1. Abra el archivo ecuación ordinaria de una hipérbola creado en la actividad anterior.

2. Desde la **Barra de entrada** introduzca las ecuaciones

$$y - n = \frac{a}{b}(x - m) \ \text{ y } \ y - n = -\frac{a}{b}(x - m).$$

   Automáticamente se generarán dos rectas g y h ¿En qué punto se cortan estas rectas? ¿cortan estas rectas a la hipérbola?

3. Active la herramienta **Animación** para el punto D y determine en qué momento D se acerca lo más próximo a dichas rectas.

Aquí debe quedar claro que las asíntotas de una hipérbola nunca cortan a esta curva y que cualquier punto de la hipérbola puede estar muy cercano a las asíntotas siempre y cuando su abscisa tome un valor extremadamente grande o extremadamente pequeño y de esta manera poder establecer el siguiente teorema.

Teorema 2.11. *Si una hipérbola tiene por ecuación* $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$*, sus asíntotas están dadas por la expresión*

$$y - n = \pm\frac{b}{a}(x - m).$$

Si una hipérbola tiene por ecuación $\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$*, sus asíntotas están dadas por la expresión*

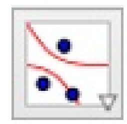
$$y - n = \pm\frac{a}{b}(x - m).$$

Actividad 4.2 Hipérbola equilátera o rectangular

En esta actividad deduciremos las propiedades que debe cumplir una hipérbola para que sea equilátera.

Sólamente utilizaremos la herramienta:

Hipérbola



Pasos a seguir:

1. Abra un nuevo archivo de GeoGebra.
2. Con la herramienta **Hipérbola** trace la hipérbola con focos $A(-4\sqrt{2}, 0)$ y $B(4\sqrt{2}, 0)$ que pasa por $C(5, 3)$. En la vista algebraica aparece su ecuación.
3. Dé clic derecho sobre dicha ecuación y escoja la ecuación en la forma $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$. ¿Cómo son los denominadores del lado izquierdo de la nueva ecuación? ¿los cuadrados de qué valores son?
4. Trace las asíntotas de dicha hipérbola, ¿cómo son entre sí?

A las hipérbolas que cumplen tal condición se llaman *equiláteras* o *rectangulares*.

Seguidamente debe establecerse la siguiente definición.

Definición 5. Una hipérbola se llama *equilátera* o *rectangular*, si sus ejes transverso y conjugado son de igual longitud, y en consecuencia, sus asíntotas son perpendiculares entre sí.

Por lo tanto, si consideramos la ecuación canónica de la hipérbola con eje focal el eje X, dicha ecuación toma la forma

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Actividad 4.3 Hipérbolas conjugadas

En esta actividad manipularemos dos hipérbolas para establecer la relación que guardan las longitudes de los ejes transverso y conjugado de una de ellas con los de la otra. Al igual que la actividad anterior, usaremos sólamente la herramienta **Hipérbola**.

Pasos a seguir:

1. Abra un nuevo archivo de GeoGebra.

2. Con la herramienta **Hipérbola** trace la hipérbola con focos $A(-\sqrt{13}, 0)$ y $B(\sqrt{13}, 0)$ que pasa por $C(2, 0)$. En la vista algebraica aparece su ecuación $144x^2 - 64y^2 = 576$.

3. Dé clic derecho sobre dicha ecuación y escoja la ecuación $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, resultando $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

4. Con la herramienta **Hipérbola** trace la hipérbola con focos $D(0, \sqrt{13})$ y $E(0, -\sqrt{13})$ que pasa por $C(0, 3)$. En la vista algebraica aparece su ecuación $64y^2 - 144x^2 = 576$.

5. Dé clic derecho sobre dicha ecuación y escoge la ecuación $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$, dando como resultado $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$.

6. Compare las ecuaciones de ambas hipérbolas ¿en qué se diferencian?

7. Compare la longitud del eje transverso de una con la longitud del eje conjugado de la otra, ¿cómo son tales longitudes?

   A las hipérbolas que cumplen tal condición se llaman *conjugadas*.

Al finalizar esta actividad debe quedar establecida la siguiente definición.

Definición 6. Si dos hipérbolas son tales que el eje transverso de una es idéntico al eje conjugado de la otra, se llaman *hipérbolas conjugadas*. Cada hipérbola es entonces la hipérbola conjugada de la otra.

En consecuencia, si la ecuación de una hipérbola es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

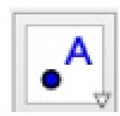
la hipérbola conjugada tiene por ecuación

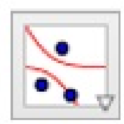
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

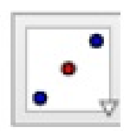
Actividad 4.4 Propiedad intrínseca de una hipérbola

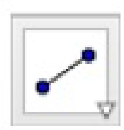
Aquí estableceremos una propiedad importante que se cumple en cualquier hipérbola, conocida como propiedad intrínseca de una hipérbola.

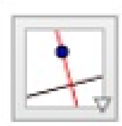
Las herramientas que emplearemos son:

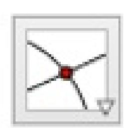
Punto 

Hipérbola 

Medio o centro 

Segmento 

Perpendicular 

Intersección 

Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.

2. Oculte los ejes coordenados.

3. Elija la herramienta **Punto** y marque los puntos alineados horizontalmente A y B y un punto C exterior al segmento que determinan A y B. Renombre al punto C como P.

4. Con la herramienta **Hipérbola** trace una hipérbola con focos en A y B y que pase por P.

5. Seleccione la herramienta **Segmento** y trace el segmento f que determinan los focos A y B de la hipérbola ¿cómo se le llama a dicho segmento?

6. Seleccione la herramienta **Medio o centro** y luego dé clic sobre la hipérbola para determinar su centro C. Renómbrelo como O.

7. Con la herramienta **Perpendicular** determine la recta g perpendicular al segmento f y que pasa por P.

8. Utilice la herramienta **Intersección** para determinar el punto de intersección C de la recta g y el segmento f. Renombre tal punto como Q.

9. Selecione la herramienta **Segmento** y trace los segmentos h e i cuyos extremos son O y Q, Q y P, respectivamente. En la vista algebraica puedes observar sus longitudes.

10. Determine las logitudes a y b del semieje transverso y conjugado de la hipérbola, respectivamente ¿cómo lo harías usando el GeoGebra?

11. Desde la **Barra de entrada** introduzca $\dfrac{h^2}{a^2} - \dfrac{i^2}{b^2}$. Automáticamente, en la vista algebraica aparecerá el número d ¿qué valor toma?

De acuerdo con los pasos desarrollados, escriba con sus propias palabras una formulación para la propiedad que se verificó.

Aquí debe quedar establecida la **propiedad intrínseca** de una hipérbola: Si O es el centro de una hipérbola cuyos semiejes transverso y conjugado son de longitudes a y b, respectivamente, y Q es el pie de la perpendicular trazada desde cualquier punto P de la hipérbola a su eje focal, entonces

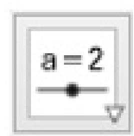
$$\frac{OQ^2}{a^2} - \frac{PQ^2}{b^2} = 1.$$

Actividad 4.5 Familia de hipérbolas

Similarmente a como hicimos con la elipse, manipularemos los cuatro parámetros m, n, a y b presentes en la ecuación ordinaria de una hipérbola para formar familias de hipérbolas cuyos centros no están en el origen, y sus ejes focales son paralelos a los ejes coordenados. En otras palabras, la ecuación de una hipérbola queda completamente determinada siempre que se conozcan las coordenadas de cuatro de sus puntos.

Para este tipo de actividad, seguimos haciendo uso de la herramienta:

Deslizador



Pasos a seguir:

1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra.

2. Introduzca cuatro deslizadores del tipo número utilizando la herramienta **Deslizador** y nómbrelos con m, n, a y b, respectivamente. Fije un valor mínimo y un valor máximo para cada uno de los deslizadores, puedes dejar los mismos que aparecen por defecto, excepto para a y b porque estos deben ser positivos.

3. En la **Barra de entrada** escriba la ecuación $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$. Automáticamente aparecerá una hipérbola que tiene por centro y longitudes de los semiejes transverso y conjugado, los valores correspondientes a los deslizadores m, n, a y b creados en el paso 2.

4. Arrastre cada uno de los deslizadores ¿Qué ocurre con la hipérbola cuando se arrastra m? ¿Qué ocurre con la hipérbola cuando se arrastra n? ¿Qué ocurre con la hipérbola cuando se arrastra a? ¿Qué ocurre con la hipérbola cuando se arrastra b?

5. Active la herramienta **Rastro** para la hipérbola creada.

6. Active la herramienta **Animación** para el deslizador m ¿Qué se forman?

7. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador m y actívela para el deslizador n ¿Qué se forman?

8. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador n y actívela para el deslizador a ¿Qué se forman?

9. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador a y actívela para el deslizador b ¿Qué se forman?

Con cada uno de los últimos cuatro pasos se ha creado una familia de hipérbolas cuyos centros están sobre una recta paralela al eje X, en el primer caso, y sobre una recta paralela al eje Y, en el segundo. Además, cuando se anima a a o a b se tiene una familia de hipérbolas que tienen el mismo centro y una compresión o estiramiento de sus ejes transverso o conjugado, esto era de esperarse pues estos dos últimos parámetros determinan las semilongitudes de dichos ejes.

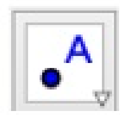
Fíjese qué ocurre con la hipérbola cuando a toma valores cercanos a cero y b toma valores grandes y viceversa.

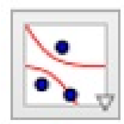
Actividad 4.6 Tangente a una hipérbola

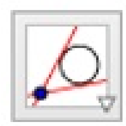
Similarmente a los problemas tratados con tangentes para las demás cónicas, determinaremos:

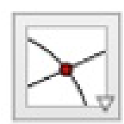
- La ecuación de la tangente a una hipérbola dada en un punto dado de contacto.
- Las ecuaciones de las tangentes a una hipérbola dada y que pasan por un punto exterior dado.

Utilizaremos las herramientas conocidas hasta este momento.

Punto 

Hipérbola 

Tangentes 

Intersección 

Pasos a seguir:

1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra.
2. Elija la herramienta **Punto** y marque los puntos alineados horizontalmente A, B y el punto C exterior al segmento que determinan A y B.
3. Con la herramienta **Hipérbola** trace una hipérbola con focos en A y B y que pase por C.
4. Seleccione la herramienta **Punto** y marque un punto D sobre la hipérbola. Arrastre D para garantizarse que siempre está sobre la curva.

5. Elija la herramienta **Tangentes** y trace la tangente f a la hipérbola en el punto D. En la vista algebraica puedes observar su ecuación.

6. Active la **Animación** para el punto D ¿Qué ocurre con la recta tangente f? ¿Para qué puntos de tangencia la recta tangente es paralela al eje conjugado?

   Para resolver el segundo problema los pasos a seguir son:

7. Oculte la recta tangente ya trazada y con la herramienta **Punto** trace un punto E exterior a la hipérbola.

8. Seleccione la herramienta **Tangentes** y luego dé clic sobre el punto E y sobre la hipérbola. Seguidamente aparecerán las rectas tangentes a la hipérbola trazadas desde el punto E. Sus ecuaciones pueden visualizarse en la vista algebraica.

9. Arrastre el punto exterior ¿qué ocurre con las rectas, siguen siendo tangentes? ¿siempren cortan al eje focal?

10. Arrastre el punto exterior hasta que quede sobre los ejes coordenados ¿qué son, en este caso, los ejes coordenados respecto al ángulo cuyo vértice es el punto exterior y que pasa por los puntos de tangencia? ¿Qué ocurre con las asíntotas cuando el punto exterior coincide con el centro de la hipérbola?

Si lo que interesa son las coordenadas de los puntos de tangencia, basta con utilizar la herramienta **Intersección** y dar clic en la hipérbola y en cada una de las rectas tangentes.

Capítulo 3

SIMULACIÓN DE LA PROPUESTA

La simulación constituye una nueva modalidad de conocimmiento y se aplica en diversas áreas de la matemática. Al respecto, Levy (2001) señala que la simulación ocupa un lugar central dentro de las nuevas modalidades cognoscitivas abiertas por la cibercultura (conjunto de técnicas, de maneras de hacer, de maneras de ser, de valores, de representaciones que están relacionadas con la extensión del Ciberespacio (Faura, 1998).

Además, Levy (2001) subraya que las técnicas de simulación, en particular aquellas en las que intervienen imágenes interactivas, no sustituyen al razonamiento humano sino que prolongan y transforman las facultades imaginativas, conceptuales y procedimentales. De acuerdo con Blancas (2012), indudablemente, la simulación es una auxiliar indispensable en educación que favorece tener imágenes no estáticas como una ampliación de la imaginación y una evidencia convincente.

Actualmente, la simulación tiene un peso cada vez mayor en las actividades de investigación científica, concepción industrial, gestión, enseñanza y aprendizaje. La simulación, no es teoría ni experiencia sino una especie de industrialización de la experiencia del pensamiento, es una modalidad específica del conocimiento, propia de la cibercultura y por lo tanto, más adecuada para las nuevas generaciones. En la investigación, su principal interés no radica en sustituir la experiencia, la implementación o puesta en práctica, ni en tomar el lugar de la realidad, sino que permite formular y explorar rápidamente un gran número de hipótesis.

Ambos autores destacan que se trata de tecnologías intelectuales, que amplifican, exteriorizan y modifican la memoria, la imaginación, percepciones y razonamientos. Ahora bien, desde que tales procesos cognitivos son exteriorizados y reedificados, se vuelven compartibles y refuerzan los procesos de inteligencia colectiva, siempre y cuando las técnicas sean utilizadas oportunamente.

Teniendo como fundamentos estos señalamientos, se ha decidido simular las actividades de aprendizaje diseñadas en esta propuesta, con el objetivo de mostrar sus prototipos y evidenciar fenómenos cógnitivos presentes en el desarrollo de cada una de ellas.

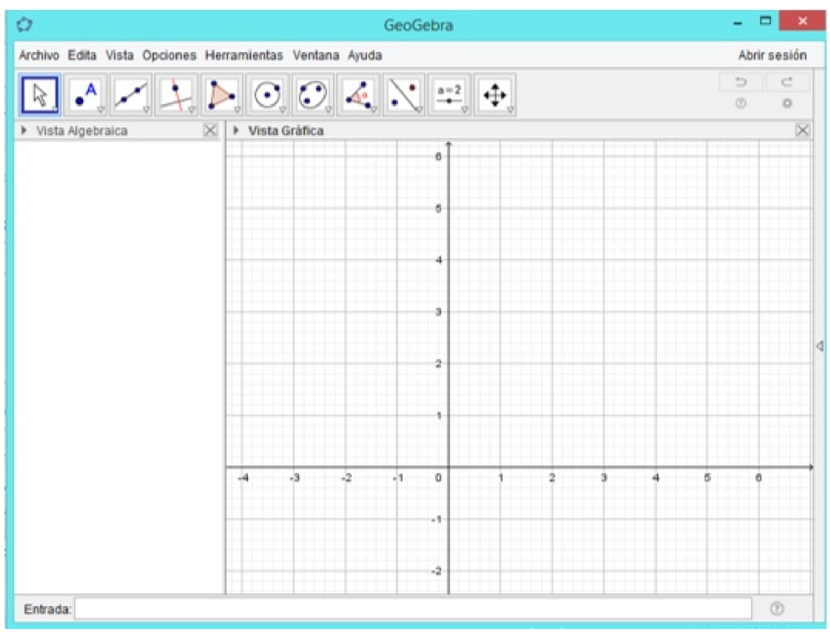
3.1. Simulación parcial de la propuesta

Las actividades tomadas como referencia para el proceso de simulación son aquellas vinculadas con las construcciones geométricas de las secciones cónicas y de familias de tales lugares geométricos.

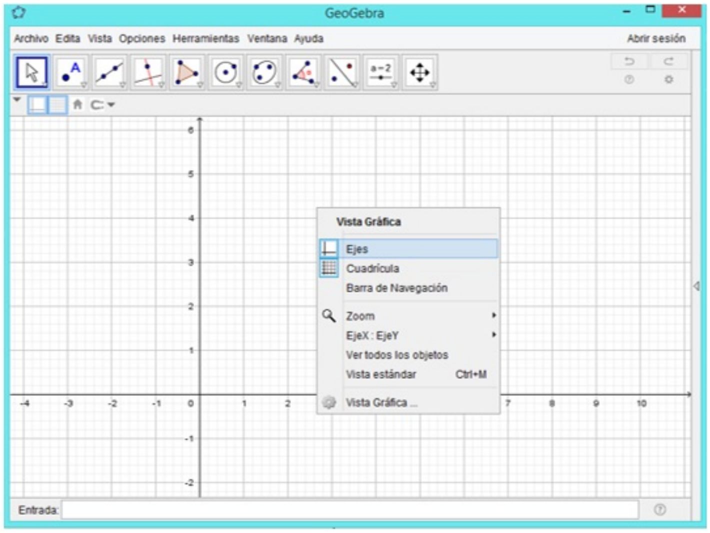
3.1.1. Simulación de la Actividad 1. Construcción geométrica de una circunferencia

A continuación se muestra el desarrollo de cada uno de los pasos propuestos.

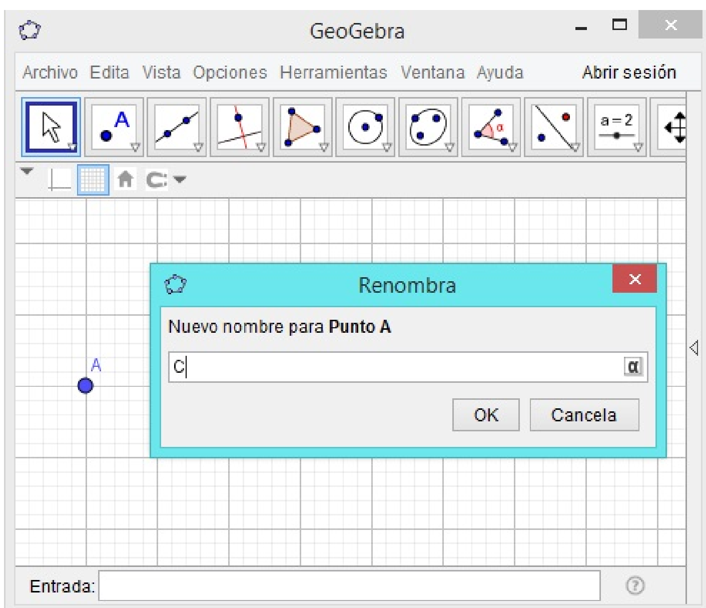
Paso 1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra. Automáticamente se observan las vistas: algebraica y geométrica.



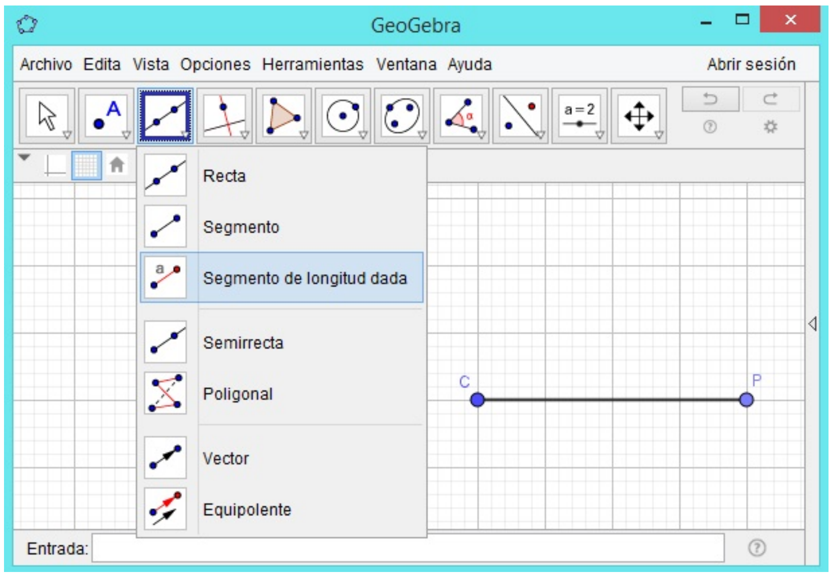
Paso 2. Cierre la vista algebraica y oculte los ejes coordenados, dando clic derecho sobre el área de trabajo y desactive la herramienta **Ejes**.



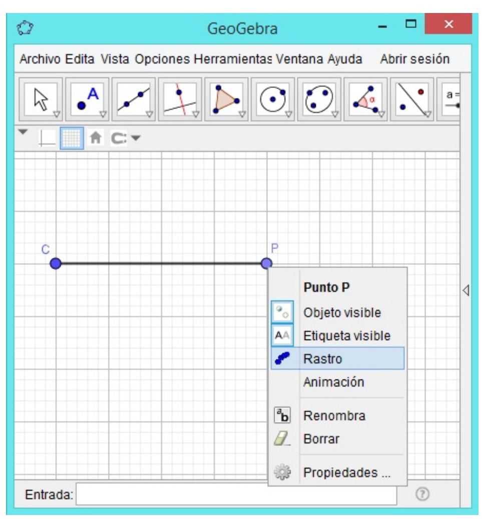
Paso 3. Elija la herramienta **Punto** y marque un punto sobre el área de trabajo y llámelo C (debe quedar como punto fijo).



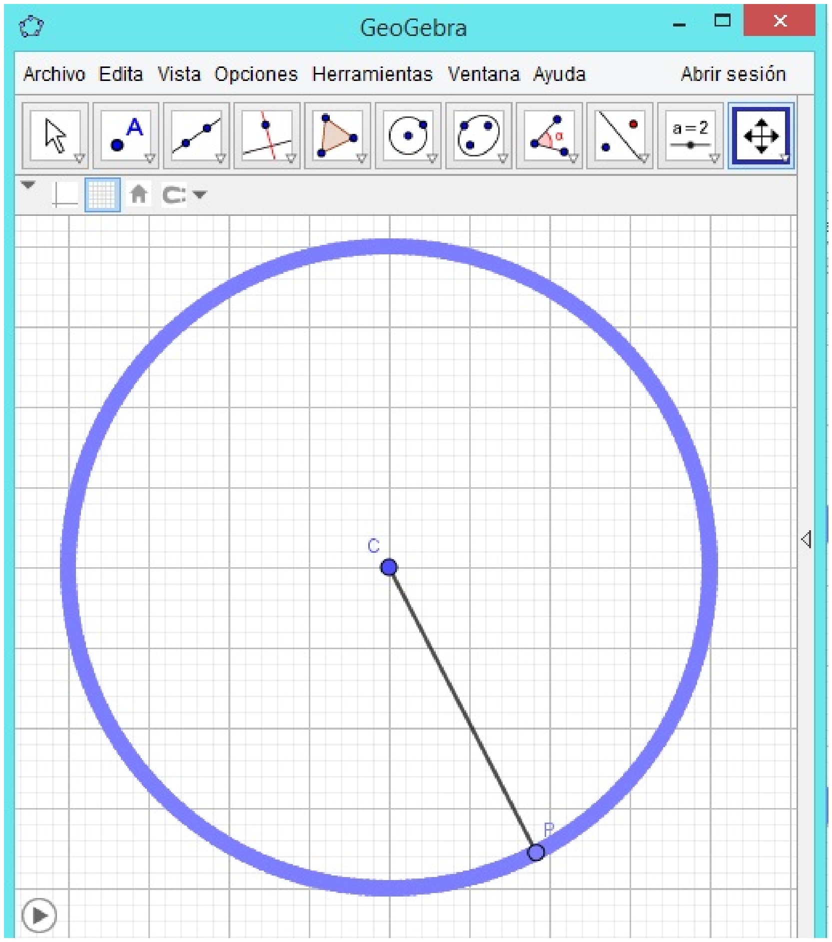
Paso 4. Seleccione la herramienta **Segmento de longitud dada** y construya un segmento de longitud cualquiera con extremo en C. Para ello, primero debe dar clic sobre el punto C y luego, aparecerá un cuadro de diálogo donde debe especificar la longitud del segmento. Rotule el otro extremo con P.



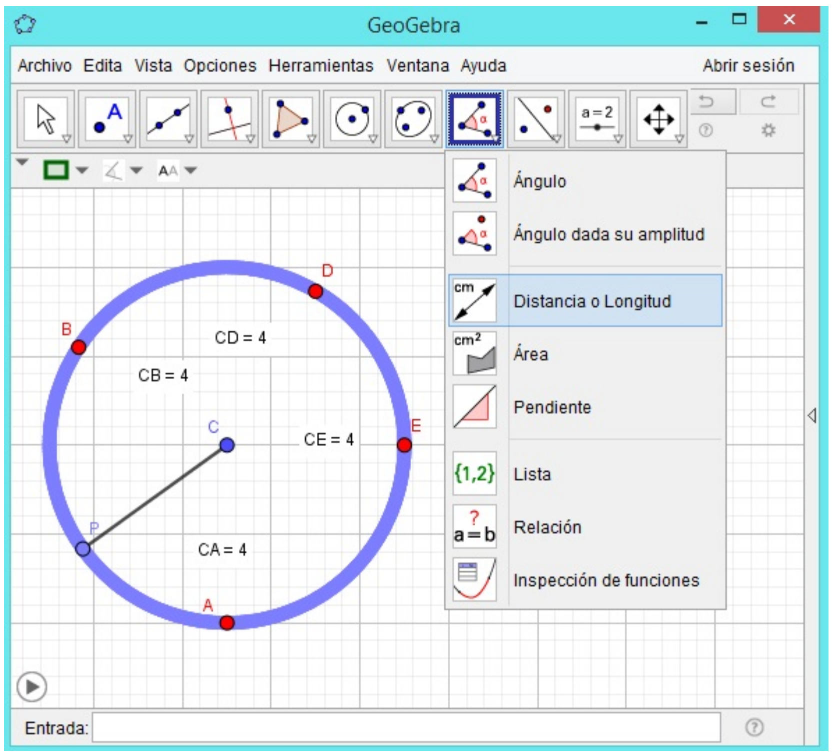
Paso 5. Active el rastro y la animación para el punto P dando clic derecho sobre él y activando las herramientas **Rastro y Animación**. Observe que al moverse P describe un lugar geométrico ¿conoces el nombre de esta figura?



Efectivamente, puede verse en la siguiente figura que al moverse P describe un lugar geométrico llamado circunferencia.



Paso 6. Elija la herramienta **Punto** y marque los puntos A, B, D y E sobre el lugar geométrico que describe P. Seleccione la herramienta **Segmento** y trace los segmentos cuyos extremos son C y cada punto marcado. Con la herramienta **Distancia o longitud** calcule la longitud de cada uno de ellos. ¿Cómo son estas medidas en relación con la del segmento que determinan C y P? ¿Qué propiedad cumple cualquier punto que esté sobre el lugar geométrico que describe P respecto a C?

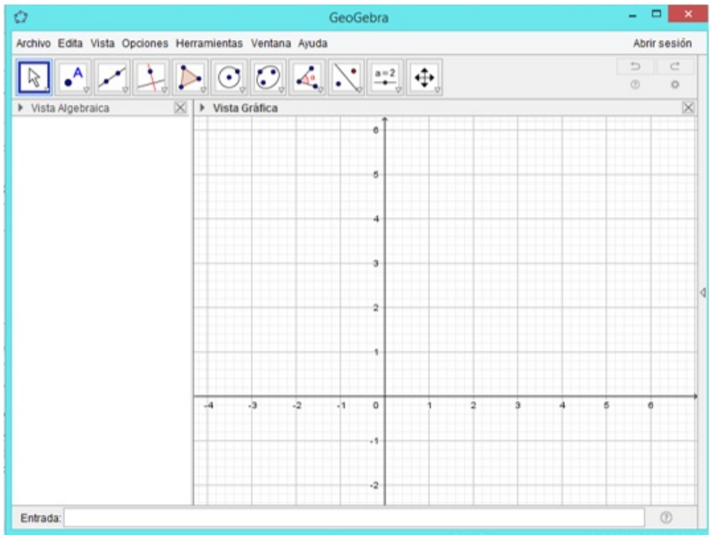


Puede observarse que las longitudes determinadas, CA, CB, CD y CE, son iguales entre sí e iguales a la longitud del segmento cuyos extremos son C y P. En este caso, iguales a 4. Así que, cualquier punto sobre el lugar geométrico que describe P es equidistante del punto C, es decir, todos se encuentran a la misma distancia de C.

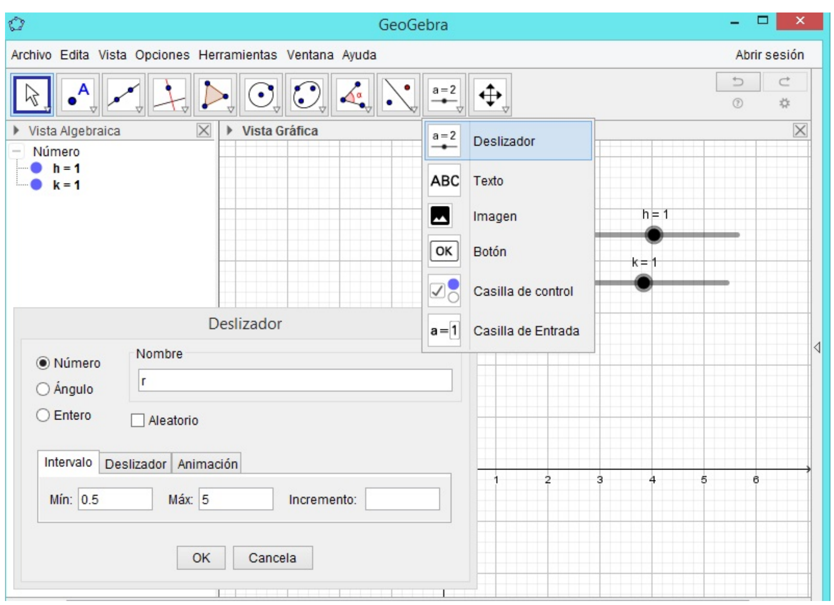
3.1.2. Simulación de la Actividad 4.2 Familia de circunferencias

El desarrollo de cada uno de los pasos se muestra a continuación.

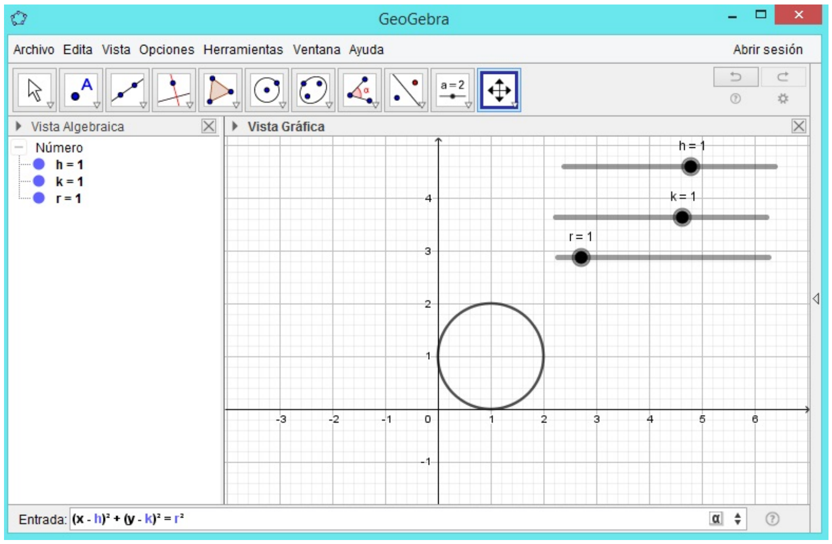
Paso 1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra.



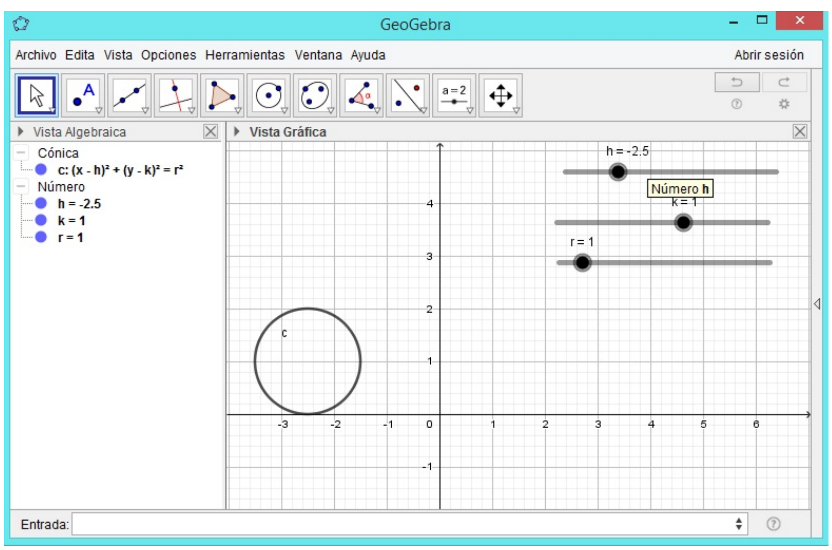
Paso 2. Cree tres deslizadores del tipo número utilizando la herramienta **Deslizador** y nómbralos con h, k y r, respectivamente. Fije un valor mínimo y un valor máximo para cada uno de los deslizadores, puede dejar los mismos que aparecen por defecto, excepto para r, ya que debe ser un número positivo.



Paso 3. Introduzca en la **Barra de entrada** la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Automáticamente aparecerá una circunferencia que tiene por centro y radio los valores correspondientes a los deslizadores h, k y r creados en el paso 2.

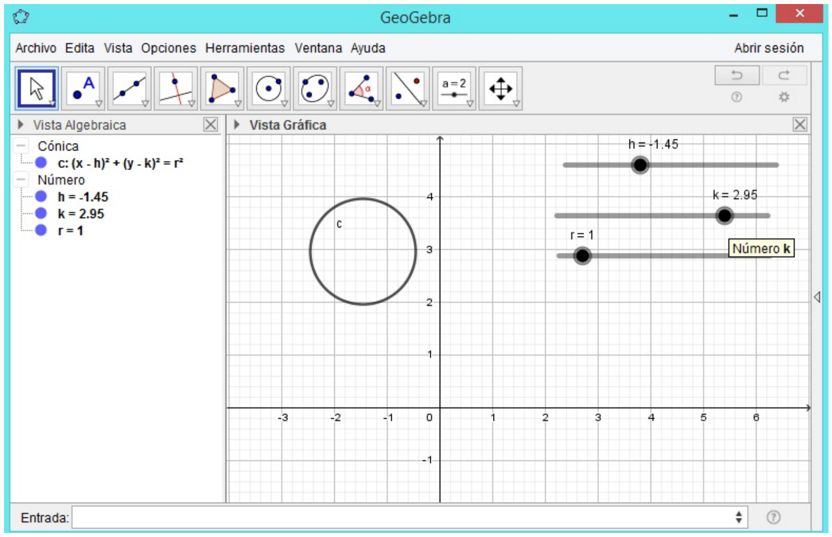


Paso 4. Arrastre cada uno de los deslizadores ¿qué ocurre con la circunferencia cuando se arrastra h?



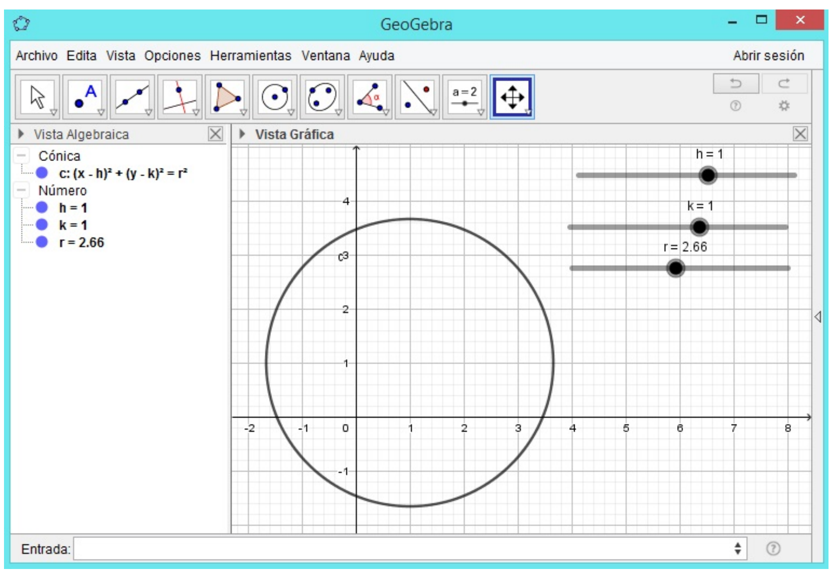
Cuando se arrastra h, la circunferencia se mueve horizontalmente, es decir, el centro de la circunferencia se mueve sobre una recta paralela al eje X.

¿qué ocurre con la circunferencia cuando se arrastra k?



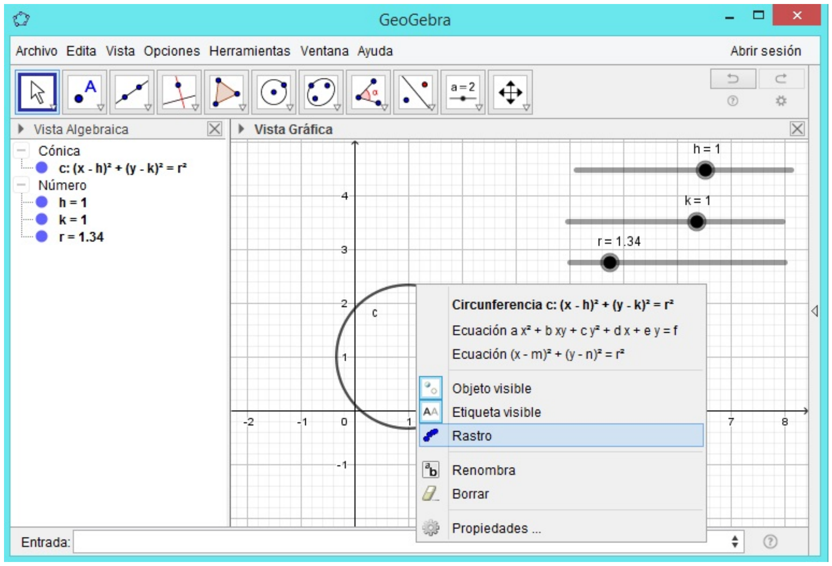
Cuando se arrastra k, la circunferencia se mueve verticalmente, es decir, el centro de la circunferencia se mueve sobre una recta paralela al eje Y.

¿qué ocurre con la circunferencia cuando se arrastra r?

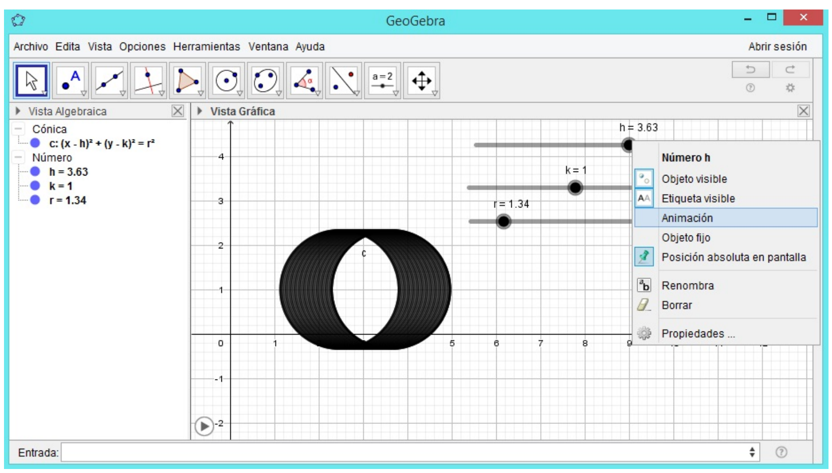


Si se arrastra r, la circunferencia se agranda o se achica, es decir, el radio se hace más grande o más pequeño.

Paso 5. Active la herramienta **Rastro** para la circunferencia creada.

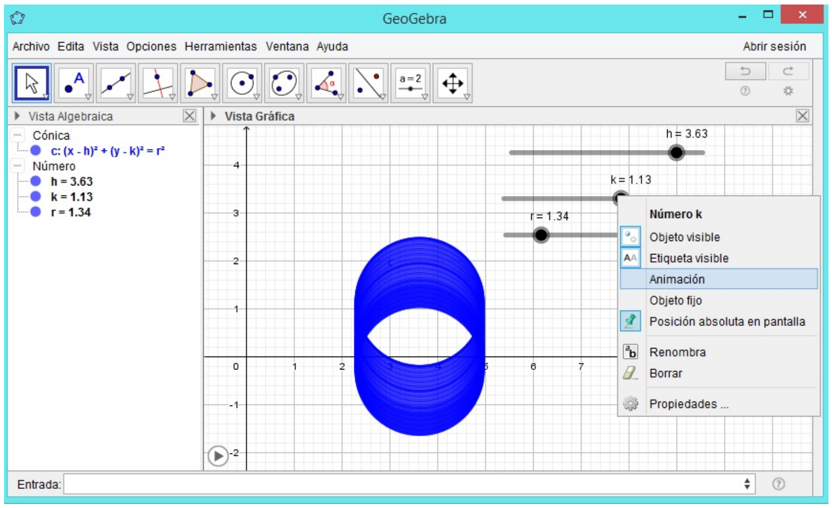


Paso 6. Active la herramienta **Animación** para el deslizador h ¿Qué se forman?



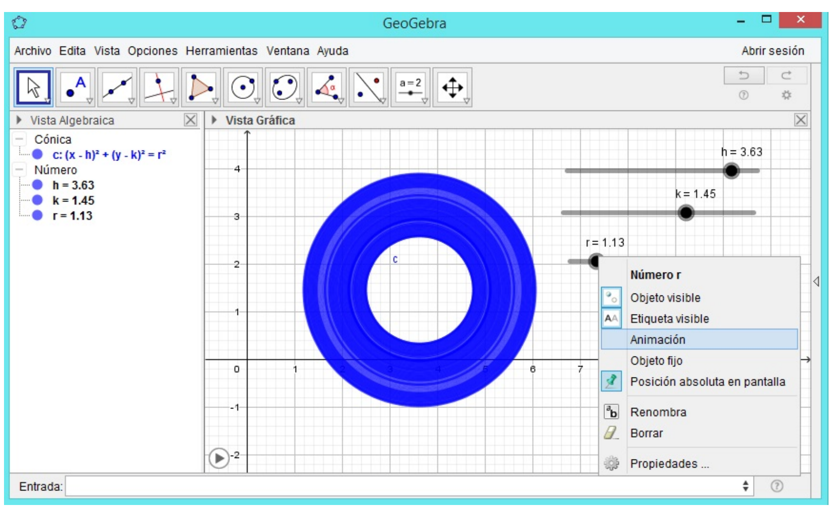
Cuando se activa animación para h, puede observarse que se forman circunferencias cuyos centros están sobre una recta paralela al eje X.

Paso 7. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador h y actívela para el deslizador k ¿Qué se forman?



Cuando se activa animación para k, es evidente que se forman circunferencias cuyos centros están sobre una recta paralela al eje Y.

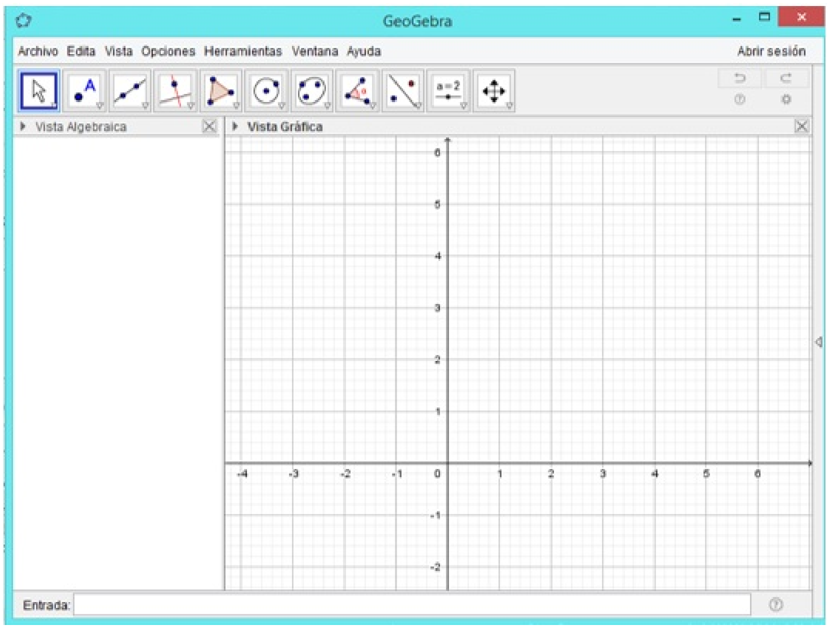
Paso 8. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador k y actívela para el deslizador r ¿Qué se forman?



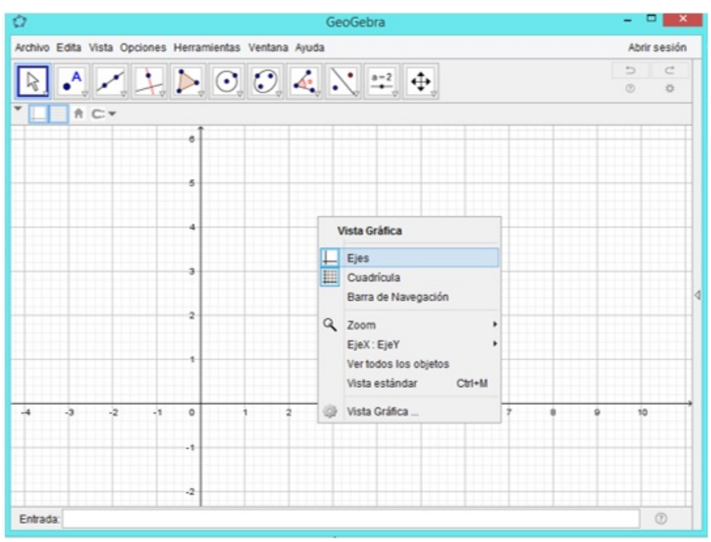
Cuando se activa animación para r se forman circunferencias concéntricas, es decir, circunferencias que tienen el mismo centro.

3.1.3. Simulación de la Actividad 1. Construcción geométrica de una parábola

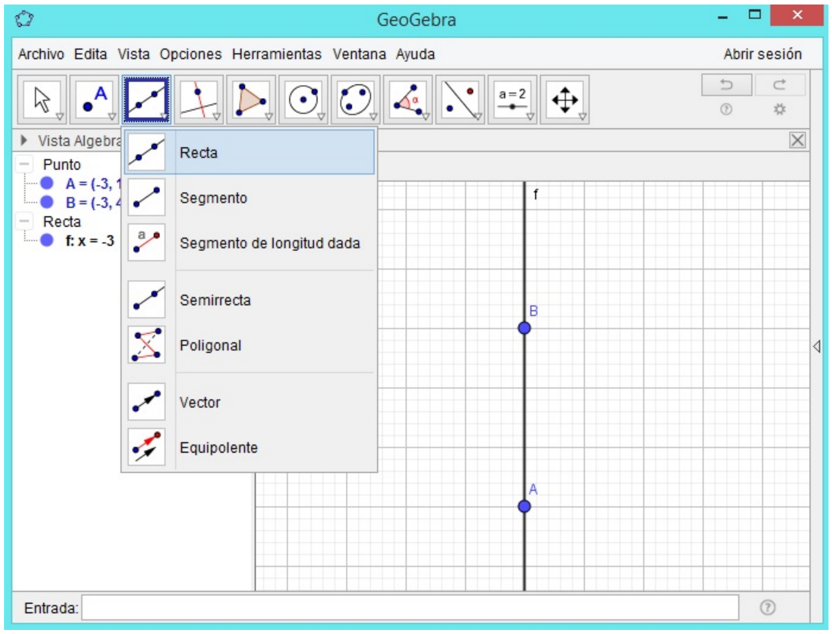
Paso 1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra. Automáticamente se observan las vistas: algebraica y geométrica.



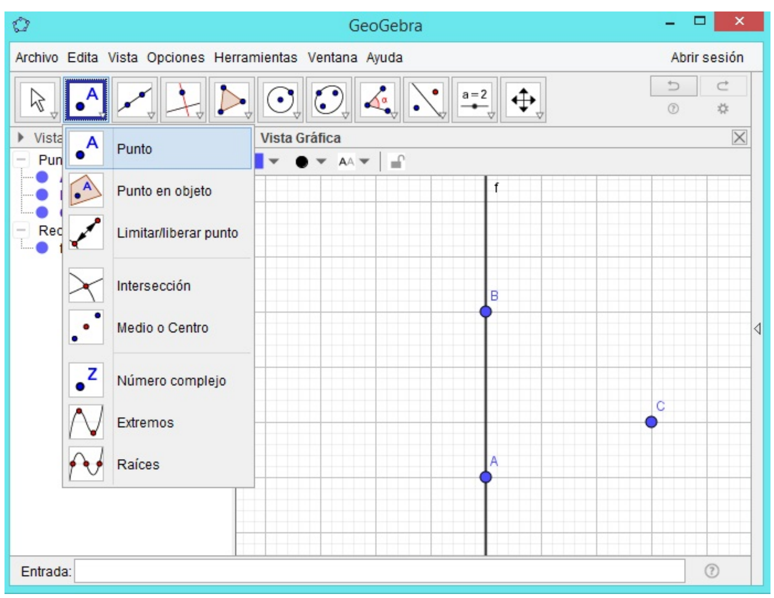
Paso 2. Oculte los ejes coordenados dando clic derecho sobre el área de trabajo y desactive la herramienta **Ejes**.



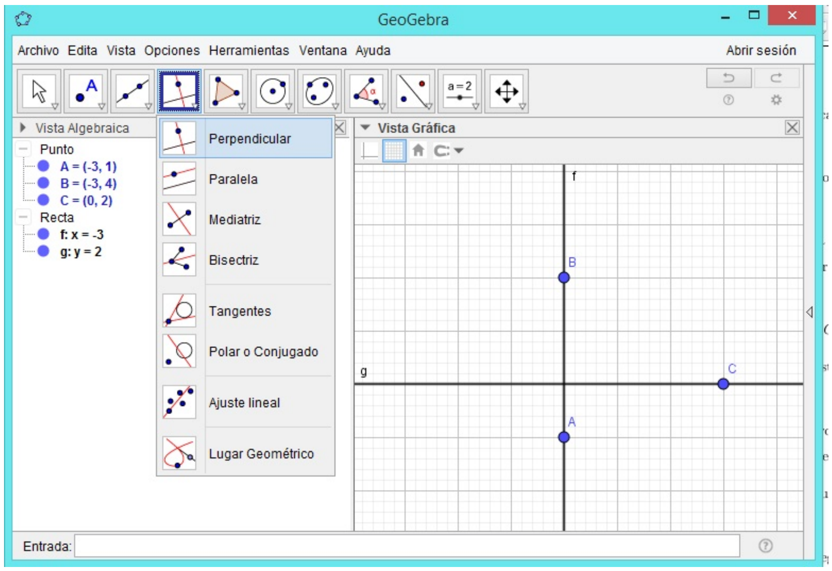
Paso 3. Seleccione la herramienta **Recta** y construya una recta. Para visualizarla dé dos clic sobre el área de trabajo. Por defecto, pasará por los puntos A y B y se nombrará como f.



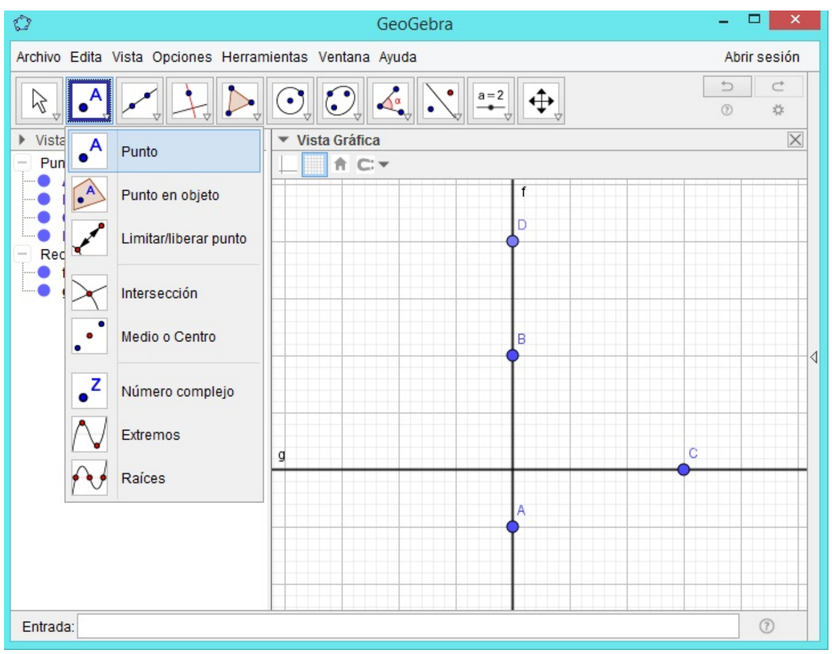
Paso 4. Elija la herramienta **Punto** y marque un punto C exterior a la recta.



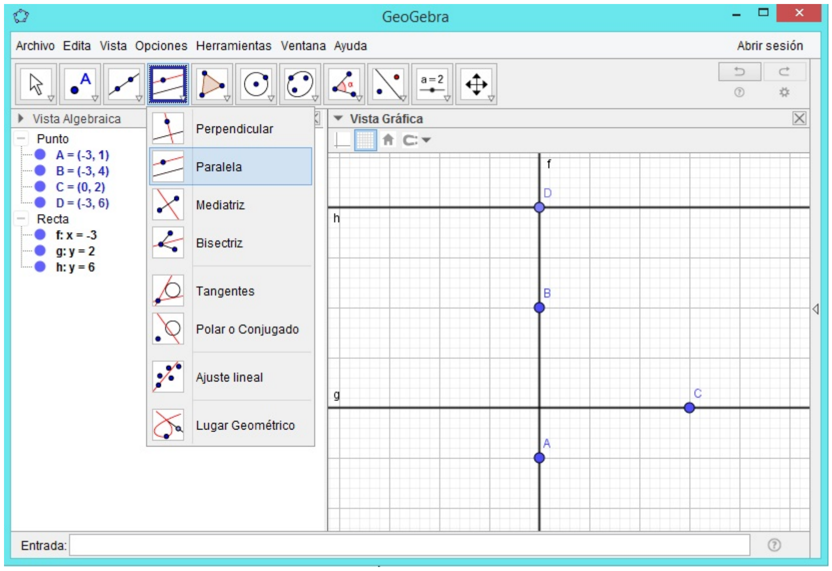
Paso 5. Seleccione la herramienta **Perpendicular** y construya una recta perpendicular a f que pase por C. Esta recta se llamará g.



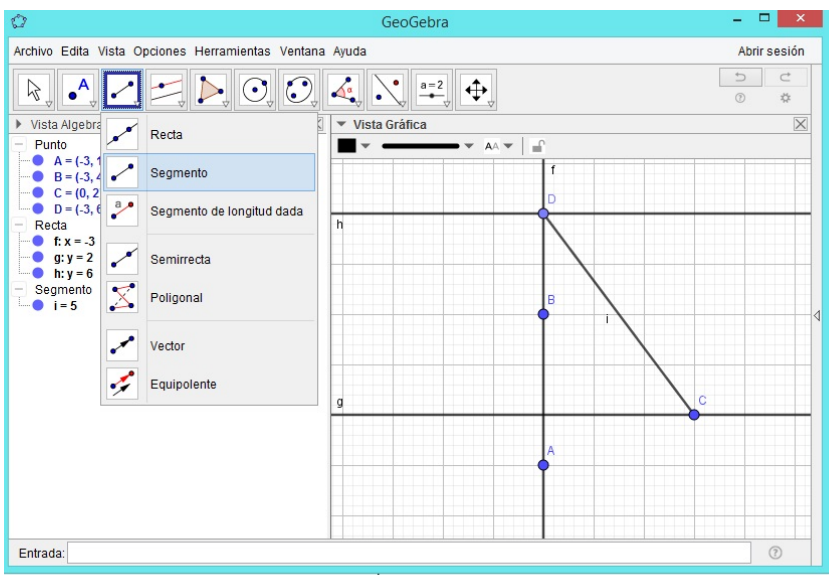
Paso 6. Nuevamente, elija la herramienta **Punto** y marque un punto D sobre la recta f. Arrastre dicho punto para garantizar que siempre se encuentre sobre la recta.



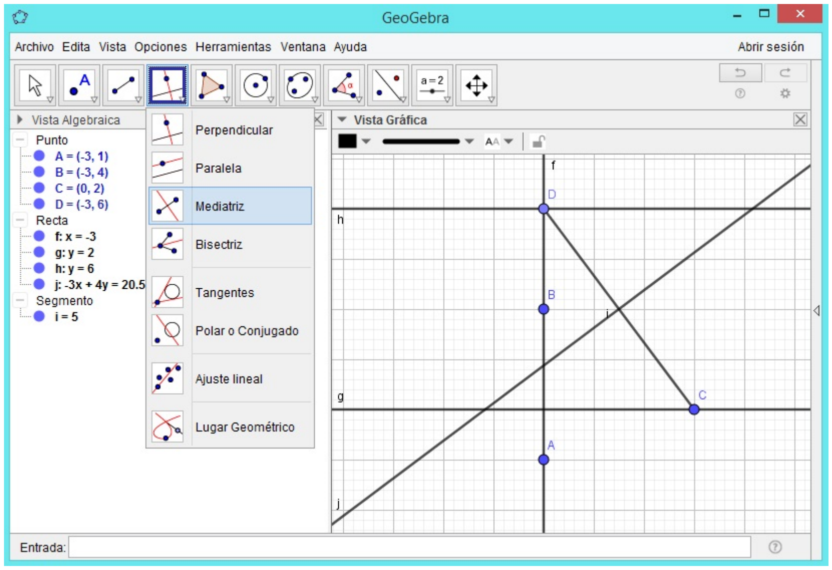
Paso 7. Seleccione la herramienta **Paralela** y construya una recta paralela a g que pase por D. Esta recta se llamará h.



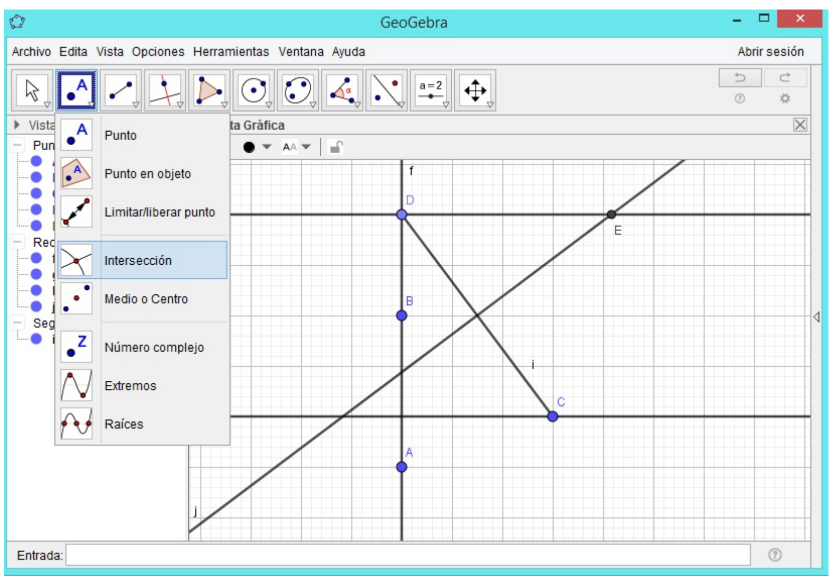
Paso 8. Elija la herramienta **Segmento** y construya el segmento con extremos D y C. Este se llamará i.



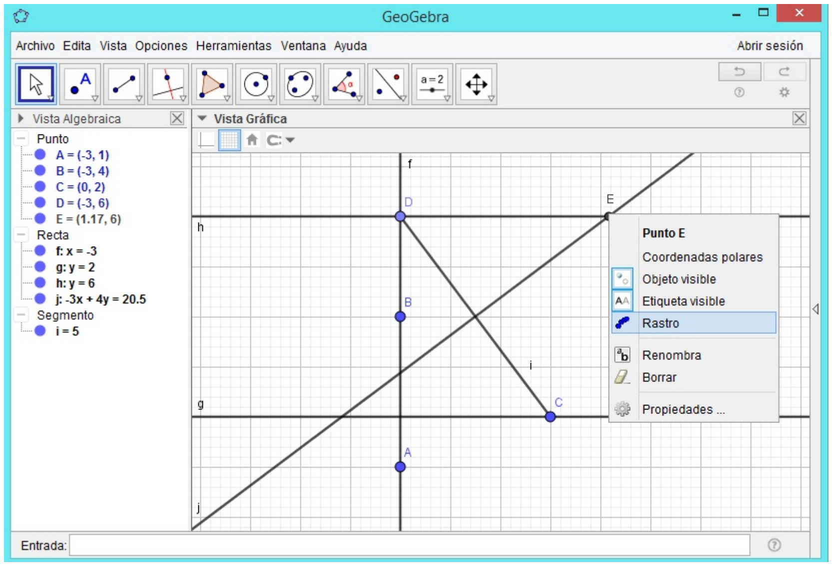
Paso 9. Con la herramienta **Mediatriz** trace la mediatriz j del segmento i.



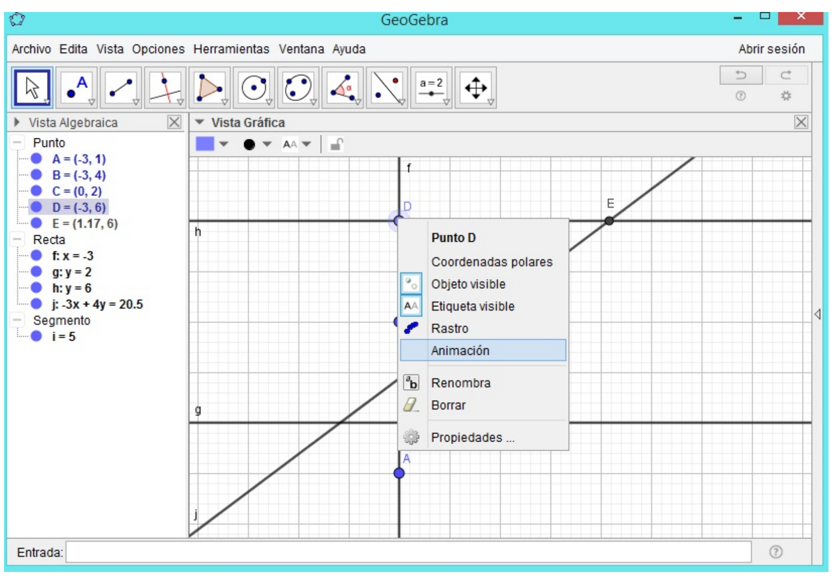
Paso 10. Usando la herramienta **Intersección**, determine el punto de intersección de la mediatriz j y la recta h. Se nombrará E.



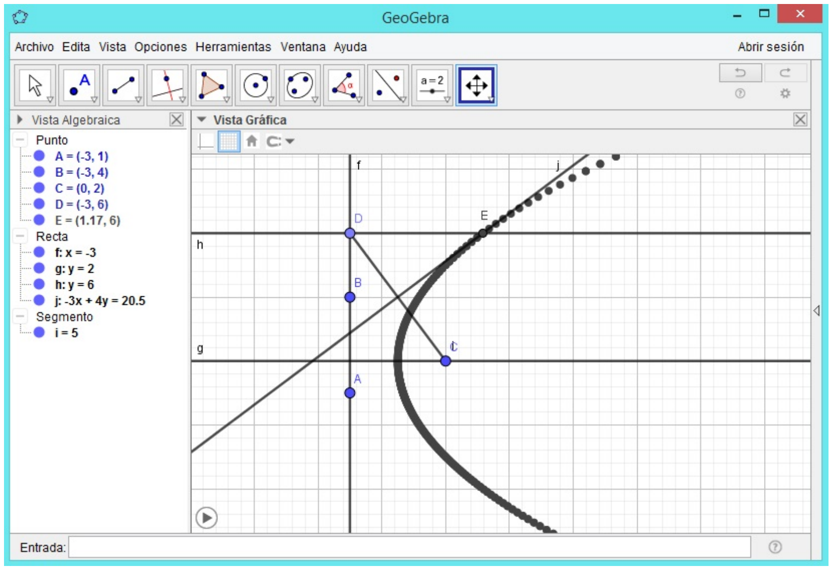
Paso 11. Dé clic derecho sobre E y active la herramienta **Rastro**.



Paso 12. Dé clic derecho sobre D y active la herramienta **Animación**.

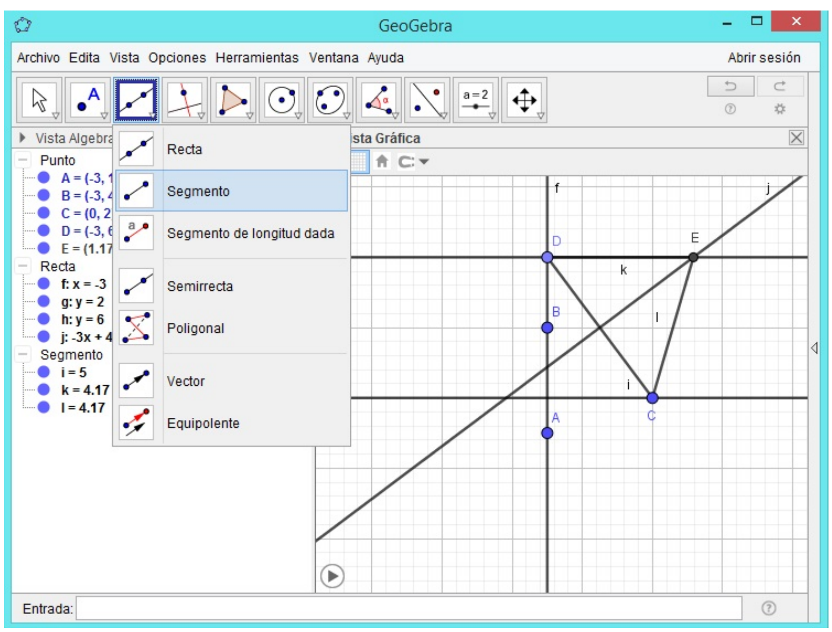


Observará la siguiente construcción:



De donde, el lugar geométrico construido con GeoGebra es una *parábola*.

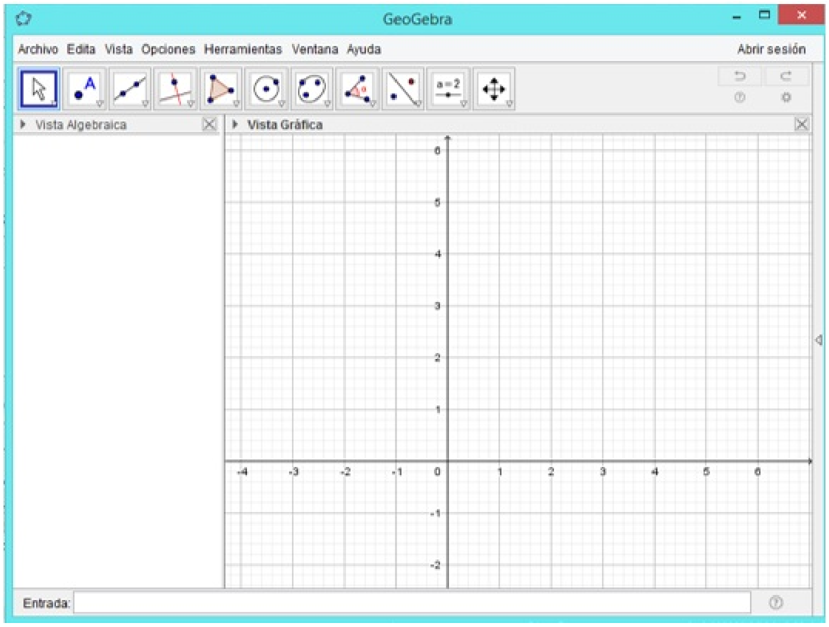
Paso 13. Elija la herramienta **Segmento** y trace los segmentos k y l con extremos D y E, E y C, respectivamente.



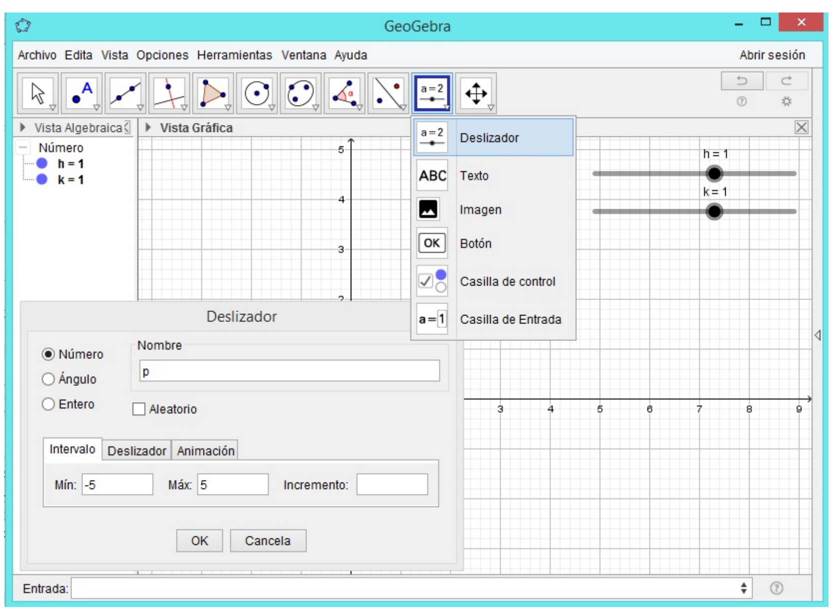
Como las longitudes de dichos segmentos son iguales, el punto E es equidistante de la recta f y del punto C.

3.1.4. Simulación de la Actividad 4.2 Familia de parábolas

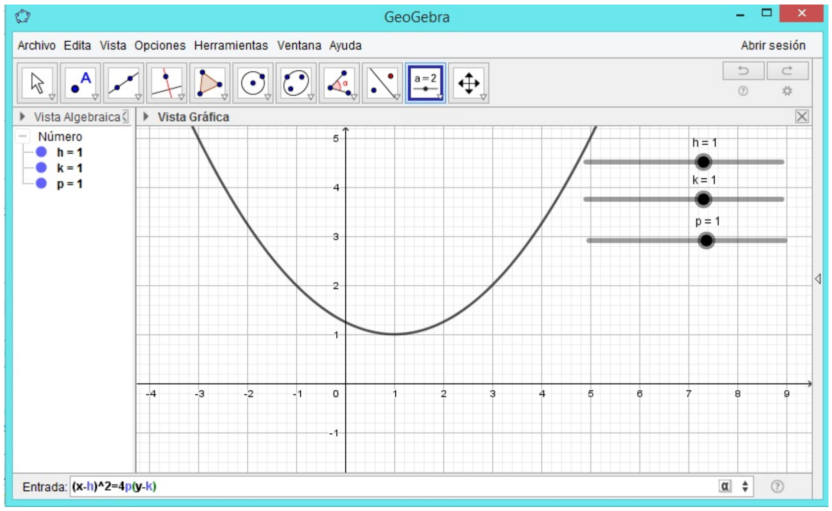
Paso 1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra.



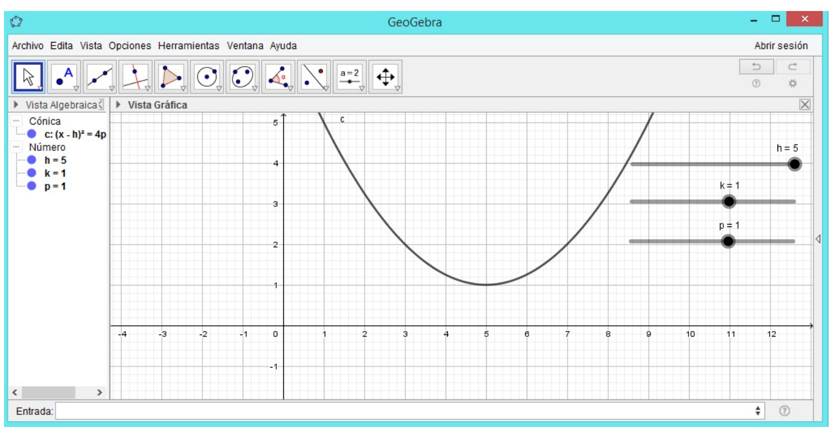
Paso 2. Cree tres deslizadores del tipo número utilizando la herramienta **Deslizador** y nómbrelos con h, k y p, respectivamente. Fije un valor mínimo y un valor máximo para cada uno de los deslizadores, puede dejar los mismos que aparecen por defecto.



Paso 3. Introduzca en la **Barra de entrada** la ecuación $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. Automáticamente aparecerá una parábola que tiene por vértice y foco los valores correspondientes a los deslizadores h, k y p creados en el paso 2.

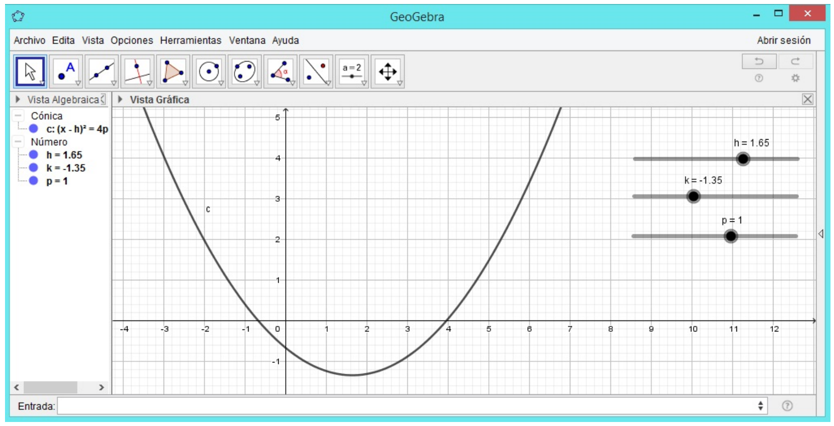


Paso 4. Arrastre cada uno de los deslizadores ¿qué ocurre con la parábola cuando se arrastra h?



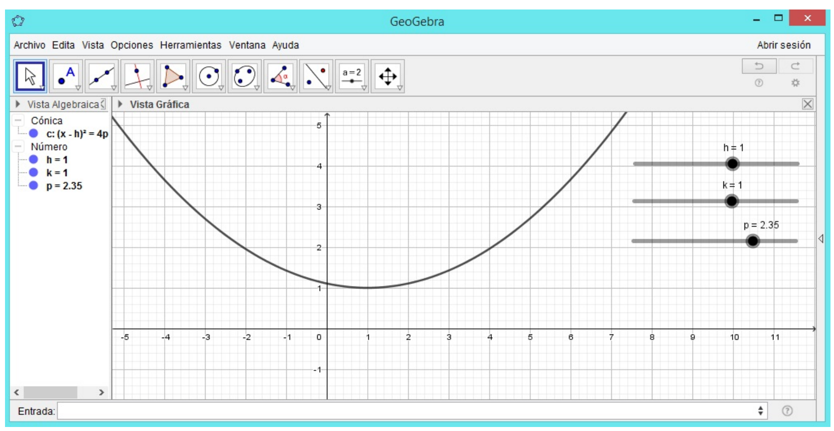
Cuando se arrastra h, el vértice de la parábola está siempre sobre una recta paralela al eje X.

¿qué ocurre con la parábola cuando se arrastra k?



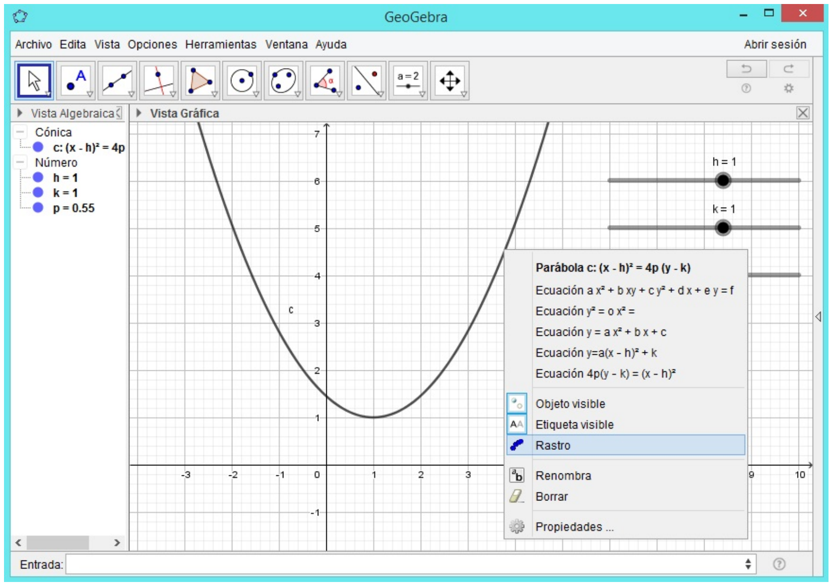
Cuando se arrastra k, el vértice de la parábola está siempre sobre una recta paralela al eje Y.

¿qué ocurre con la parábola cuando se arrastra p? ¿qué ocurre cuando $p = 0$?

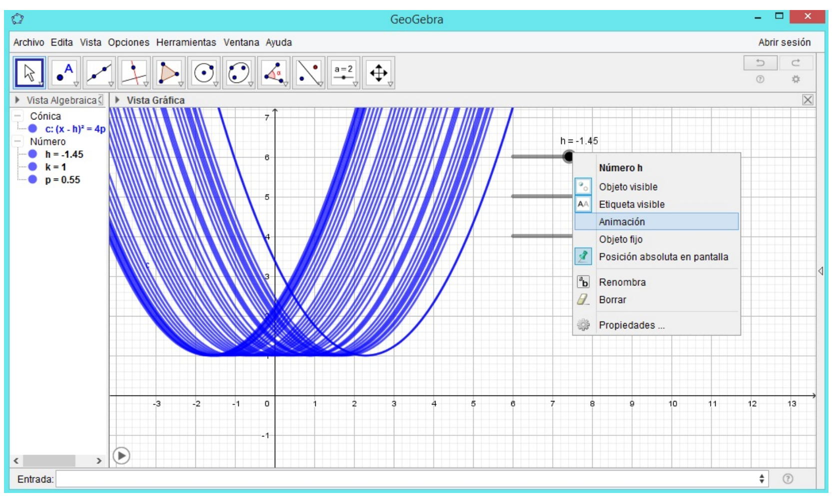


Cuando se arrastra p, la parábola se estira o se comprime sobre su eje focal. Además, se observa que esta abre hacia arriba o hacia abajo, en dependencia del signo de p.

Paso 5. Active la herramienta **Rastro** para la parábola creada.

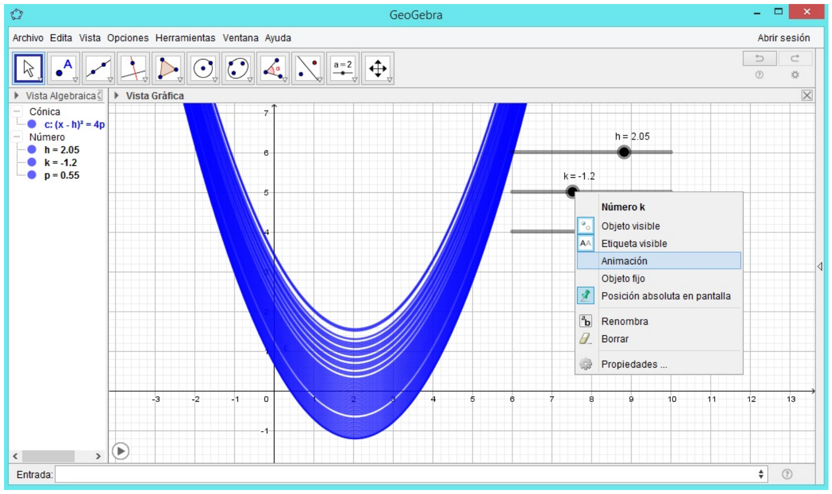


Paso 6. Active la herramienta **Animación** para el deslizador h ¿Qué se forman?



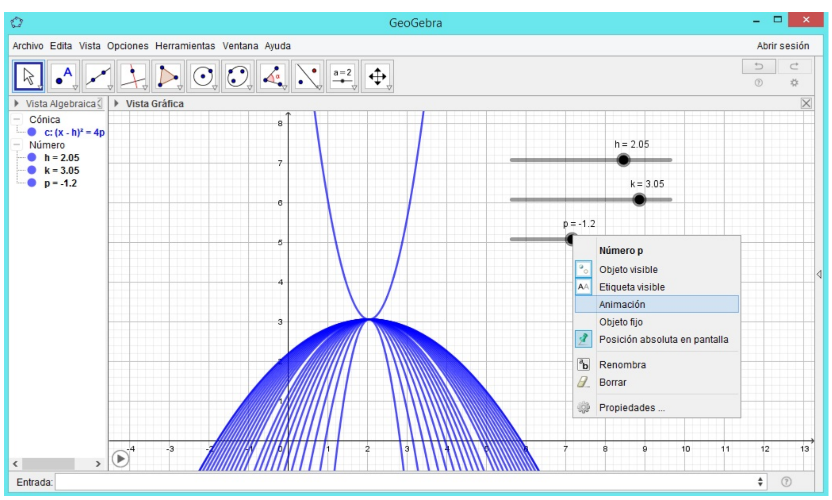
Se forman parábolas cuyos vértices están sobre una recta paralela al eje X.

Paso 7. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador h y actívela para el deslizador k ¿Qué se forman?



Se forman parábolas cuyos vértices están sobre una recta paralela al eje Y.

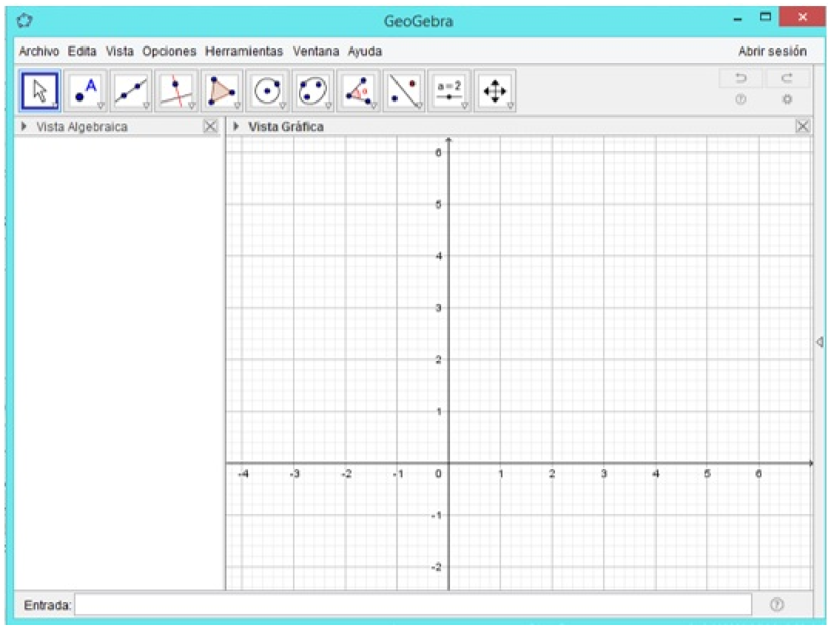
Paso 8. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador k y actívela para el deslizador p ¿Qué se forman?



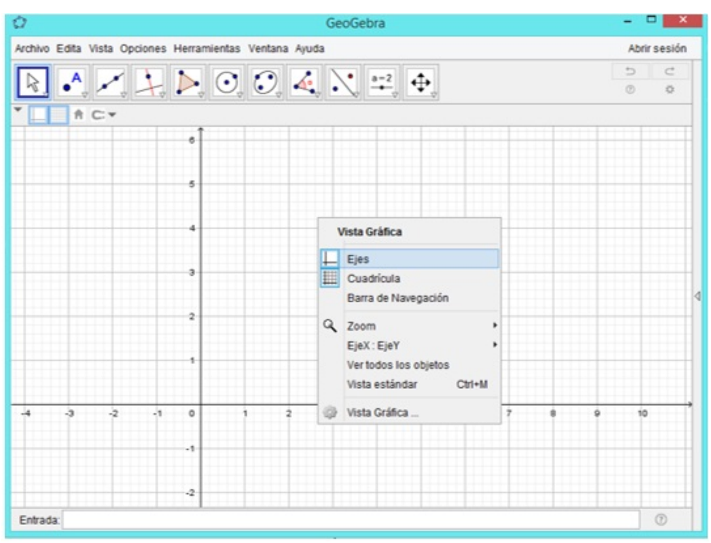
Se forman parábolas que abren hacia arriba si $p > 0$ y hacia abajo si $p < 0$. Cuando $p = 0$, se tiene una recta vertical.

3.1.5. Simulación de la Actividad 1. Construcción geométrica de una elipse

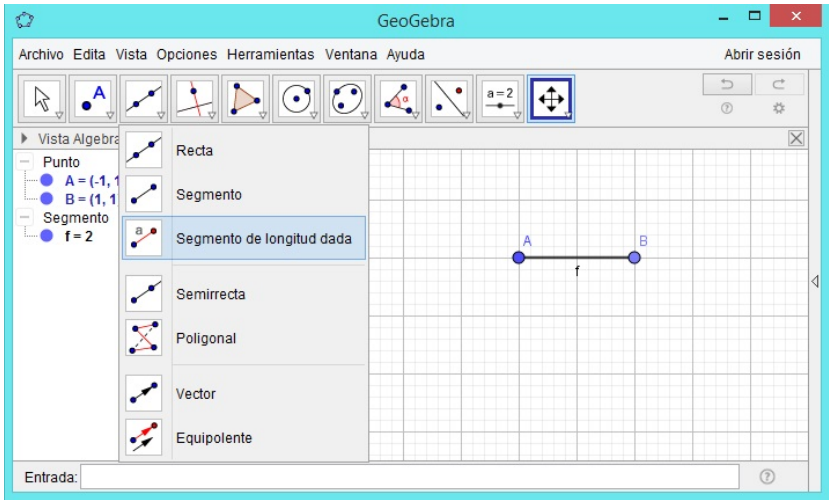
Paso 1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra. Automáticamente se observan las vistas: algebraica y geométrica.



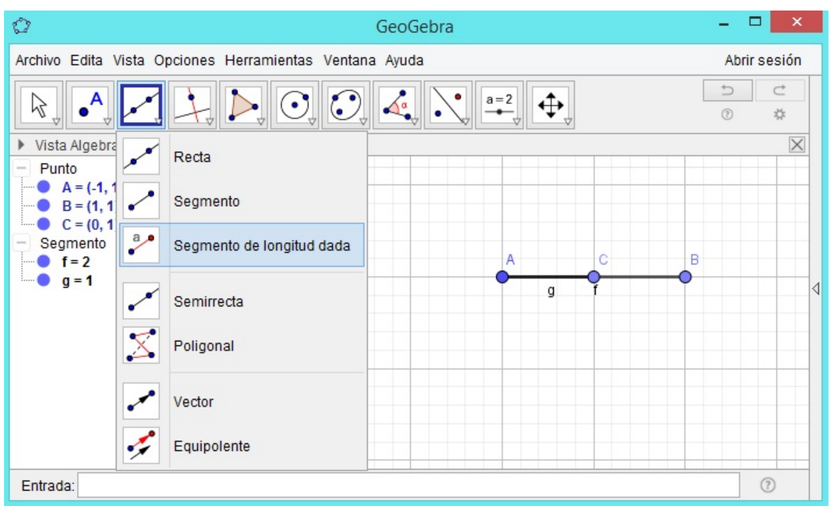
Paso 2. Oculte los ejes coordenados dando clic derecho sobre el área de trabajo y desactivando la herramienta **Ejes**.



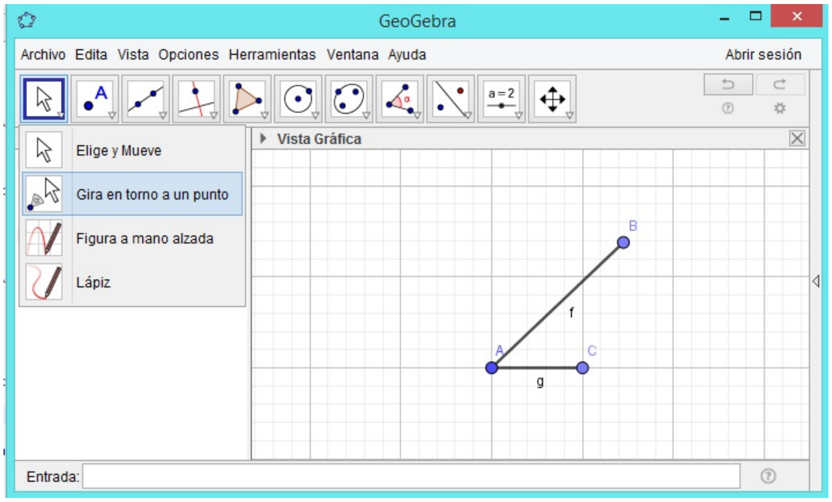
Paso 3. Elija la herramienta **Segmento de longitud dada** y trace un segmento f con extremos A y B. En la vista algebraica aparecerá su longitud.



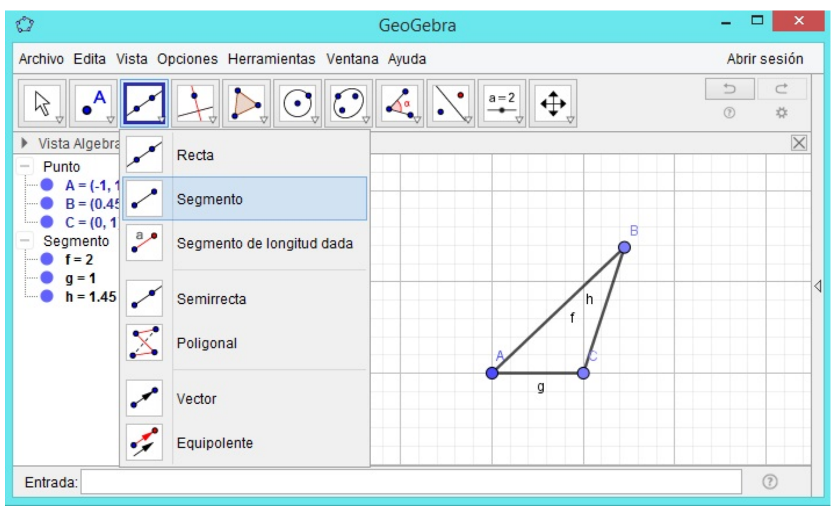
Paso 4. Seleccione la herramienta **Segmento de longitud dada** y trace el segmento g con extremo en A y C cuya longitud sea menor que la del segmento f.



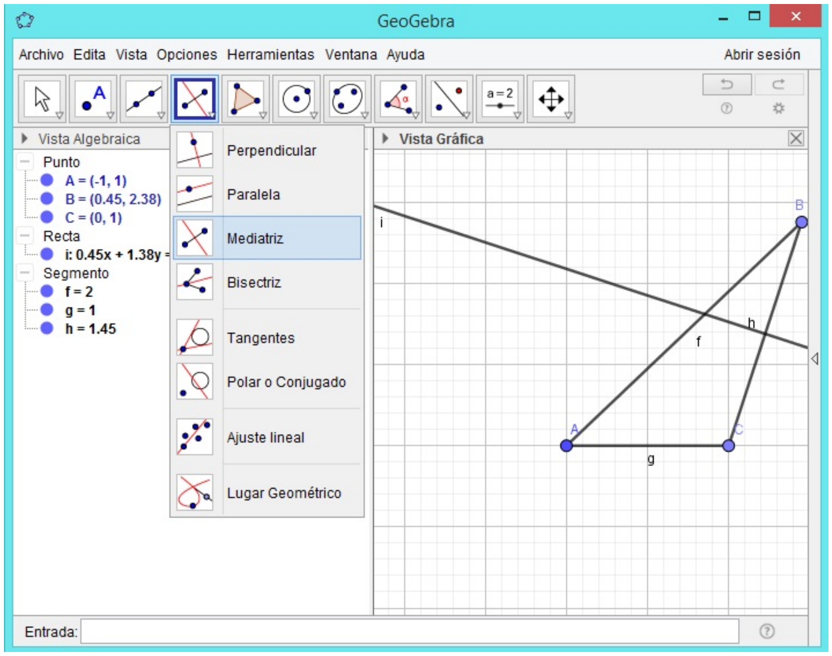
Paso 5. Seleccione la herramienta **Gira en torno a un punto** y dé clic sobre A y luego arrastre el punto B.



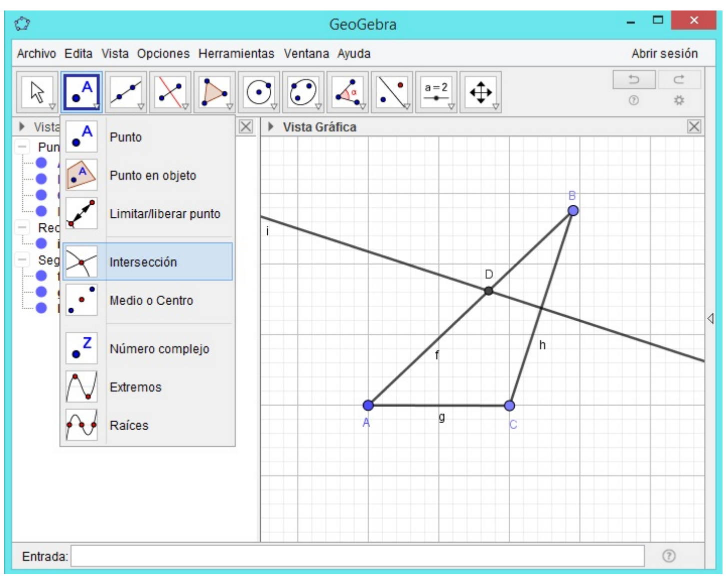
Paso 6. Seleccione la herramienta **Segmento** y trace el segmento h con extremos B y C.



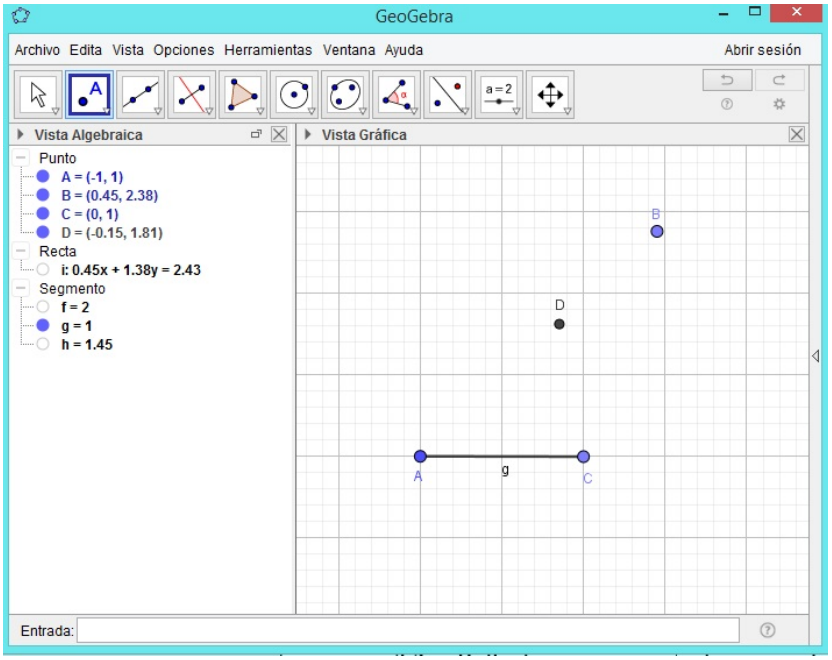
Paso 7. Elija la herramienta **Mediatriz** y trace la mediatriz i del segmento h.



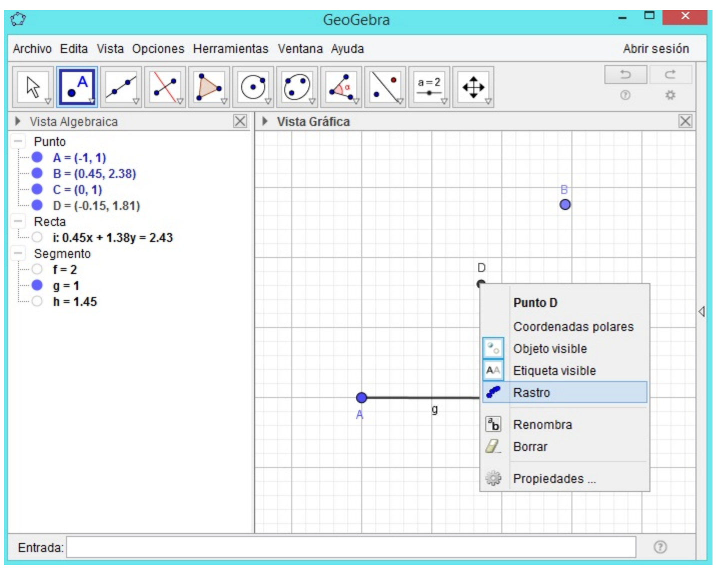
Paso 8. Seleccione la herramienta **Intersección** y determine el punto de intersección D de la recta i y el segmento f.



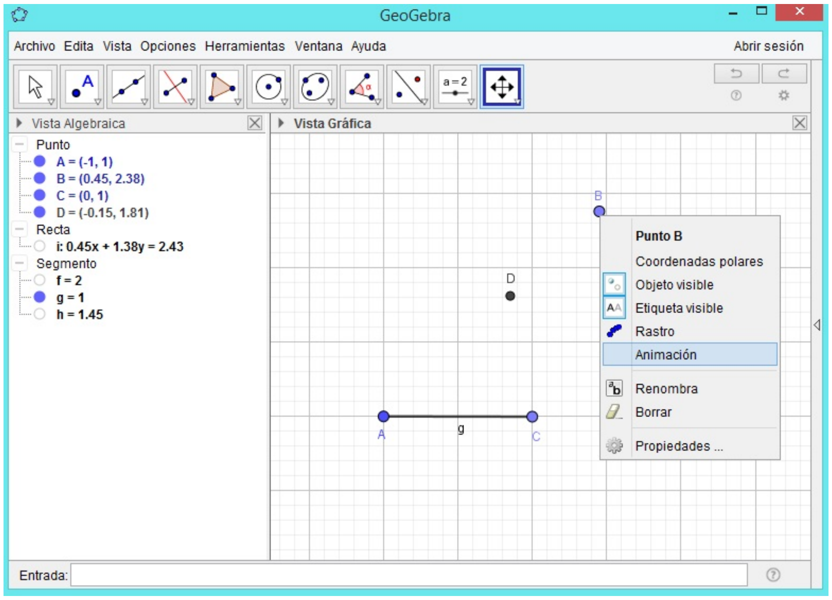
Paso 9. Oculte la rectas i y los segmentos f y h.



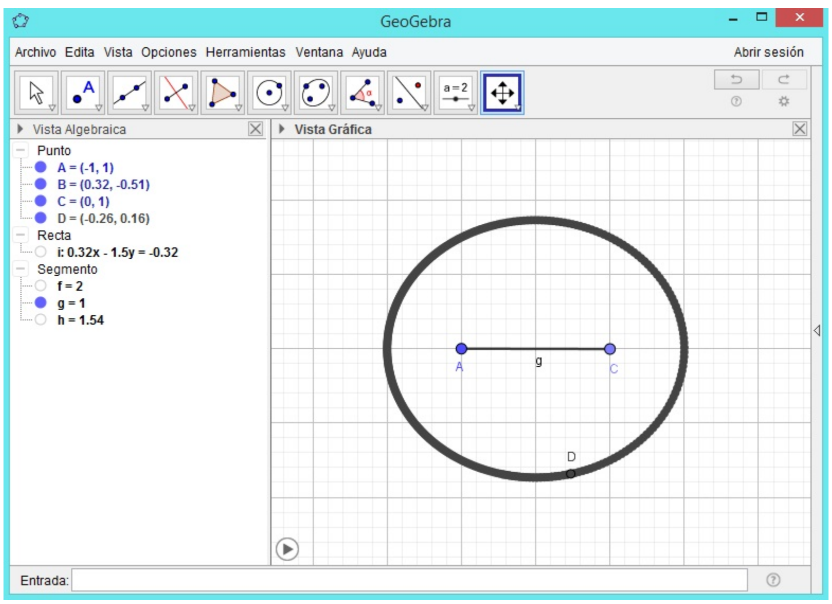
Paso 10. Active el **Rastro** para el punto D.



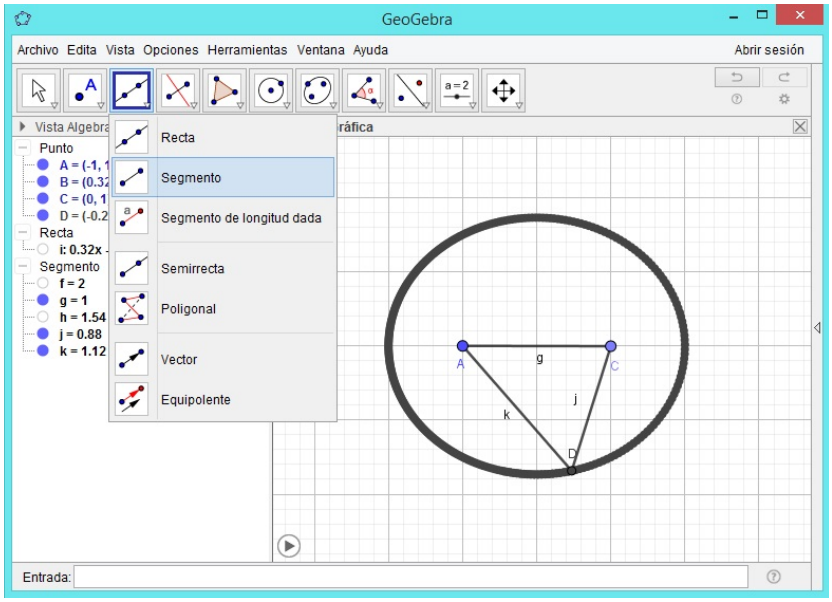
Paso 11. Active la **Animación** para el punto B ¿Conoce el lugar geométrico que se ha trazado?



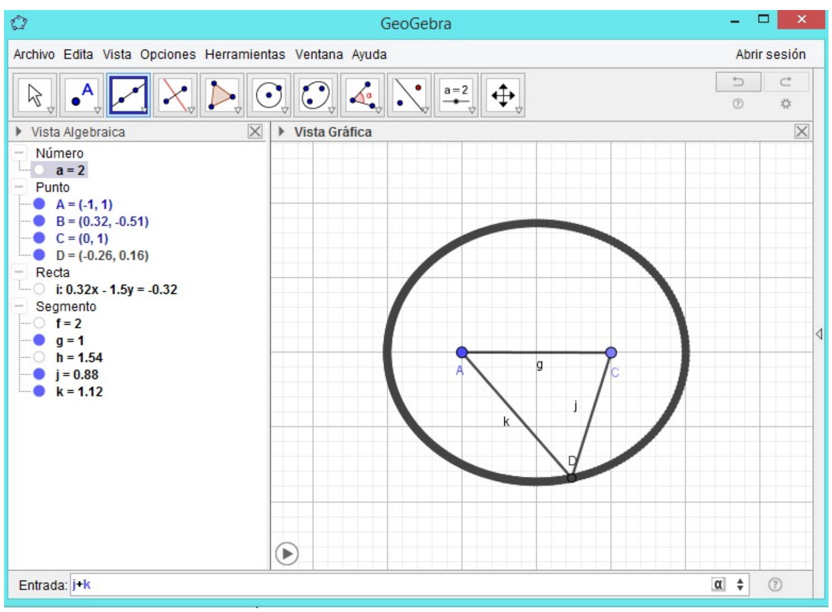
El lugar geométrico que se ha construido con el GeoGebra se llama *Elipse*.



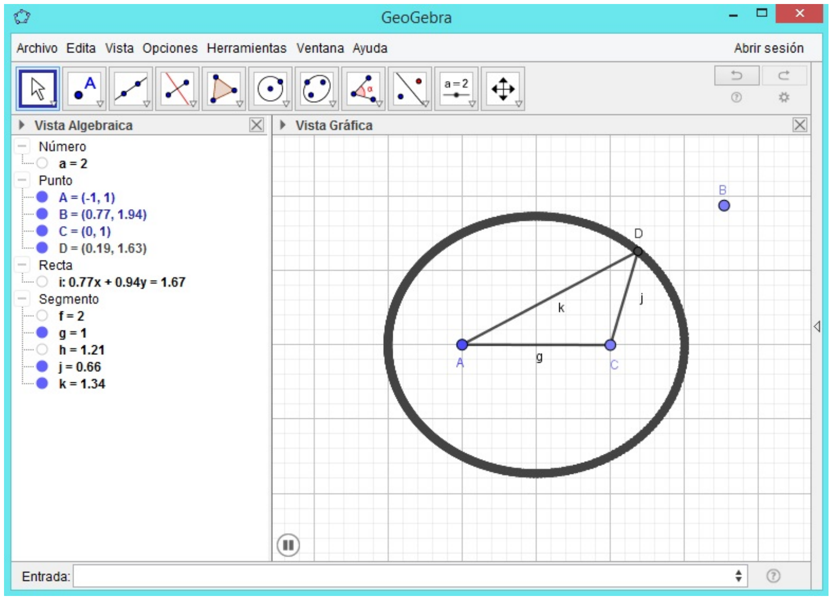
Paso 12. Con la herramienta **Segmento** trace los segmentos j y k determinados por los puntos C y D, A y D, respectivamente.



Paso 13. Desde la **Barra de entrada** introduzca $j + k$ y el software identificará esta suma con el número a.



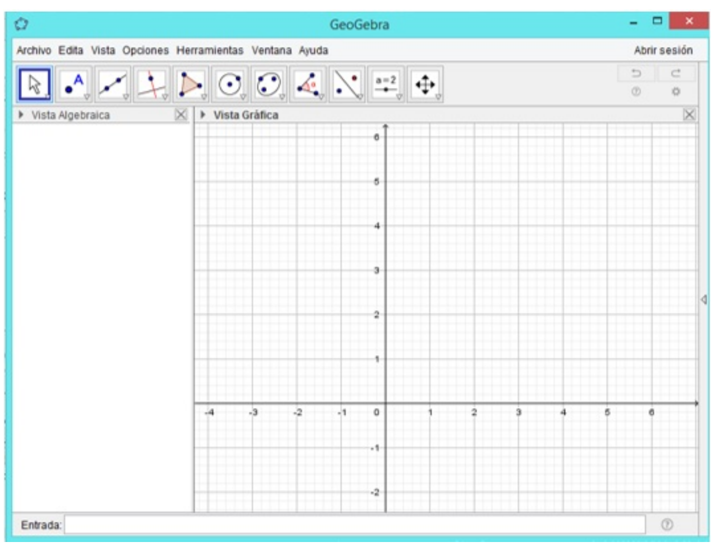
Paso 14. Active la **Animación** para el punto B ¿Qué ocurre con la suma $j+k$, varía?



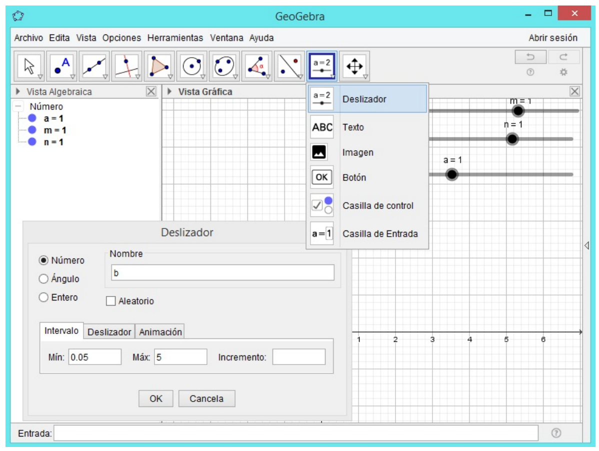
La suma $j+k$, no varía, permanece constante.

3.1.6. Simulación Actividad 4.2 Familia de elipses

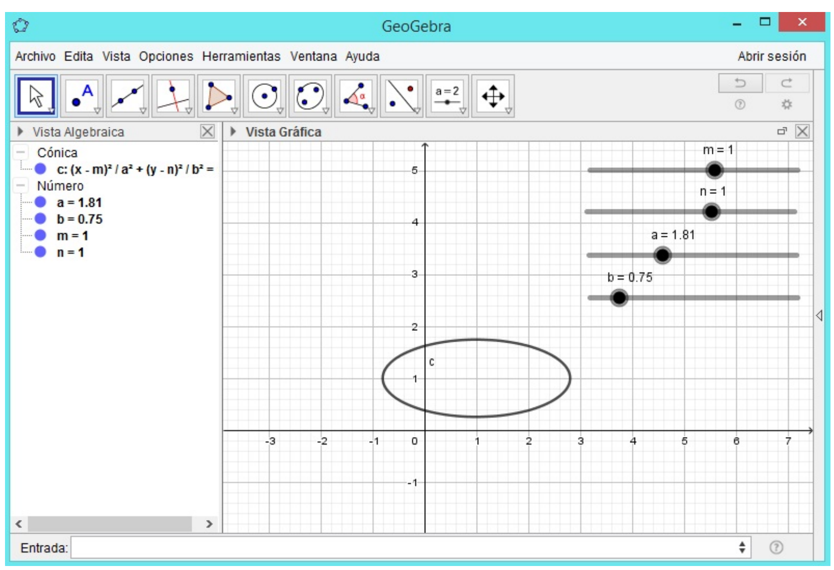
Paso 1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra.



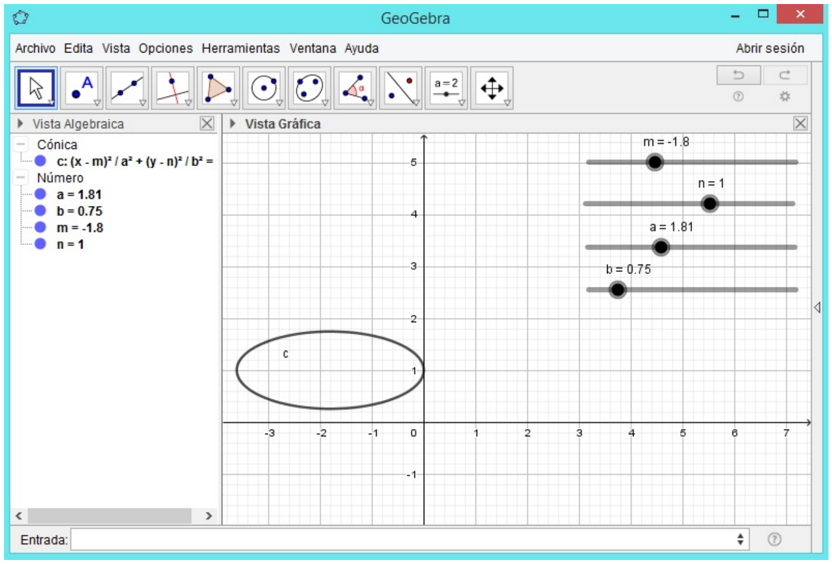
Paso 2. Introduzca cuatro deslizadores del tipo número utilizando la herramienta **Deslizador** y nómbrelos con m, n, a y b, respectivamente. Fije un valor mínimo y un valor máximo para cada uno de los deslizadores, puede dejar los mismos que aparecen por defecto, excepto para a y b porque estos deben ser positivos.



Paso 3. En la **Barra de entrada** escriba la ecuación $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$. Automáticamente aparecerá una elipse que tiene por centro y longitudes de los semiejes mayor y menor, los valores correspondientes a los deslizadores m, n, a y b creados en el paso 2.

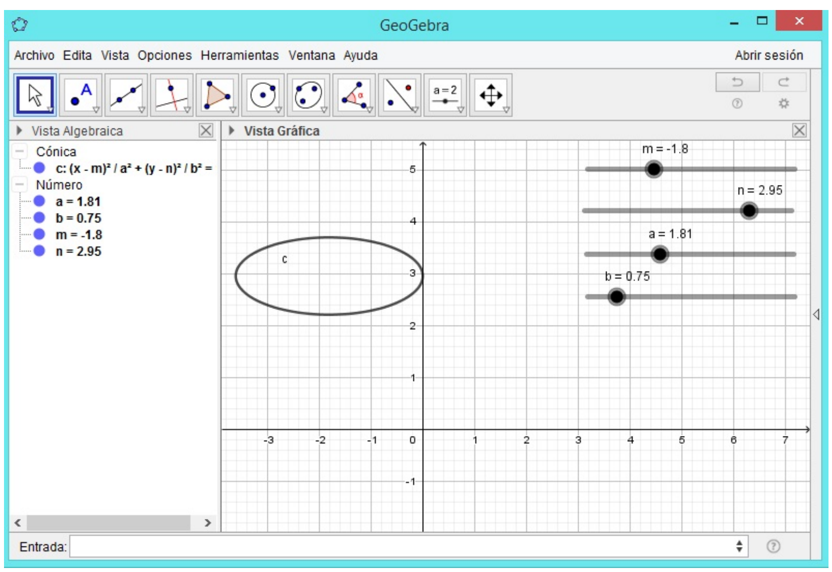


Paso 4. Arrastre cada uno de los deslizadores ¿qué ocurre con la elipse cuando se arrastra m?



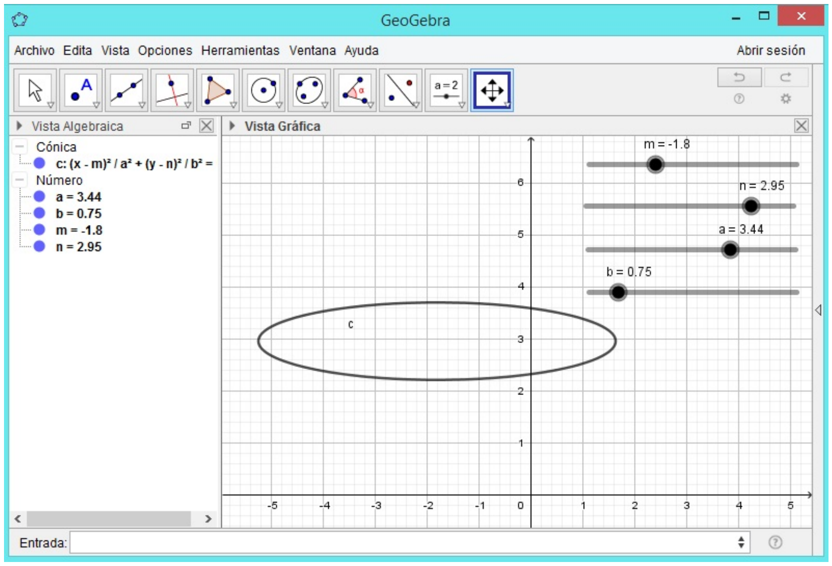
Cuando se arrastra m, la elipse tiene su centro sobre una recta paralela al eje X.

¿Qué ocurre con la elipse cuando se arrastra n?



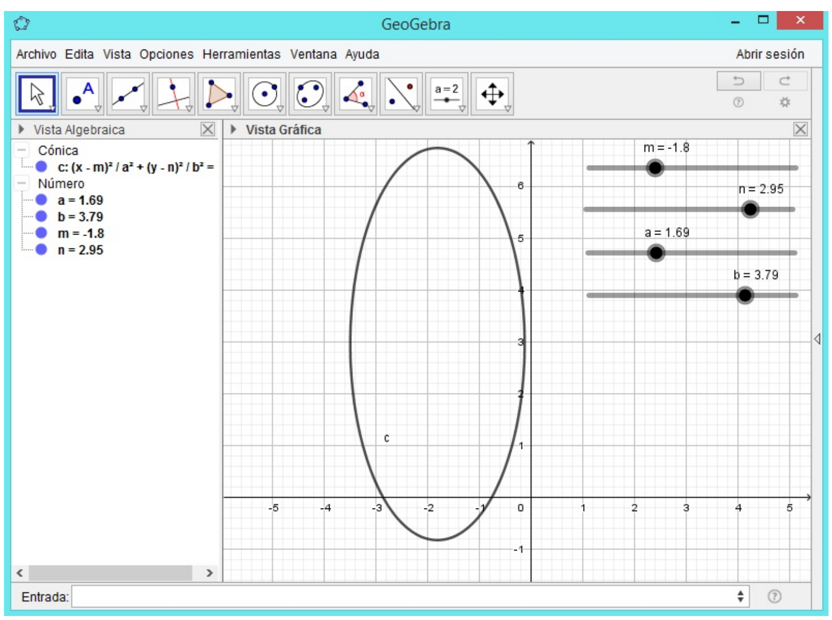
Cuando se arrastra n, la elipse tiene su centro sobre una recta paralela al eje Y.

¿Qué ocurre con la elipse cuando se arrastra a?



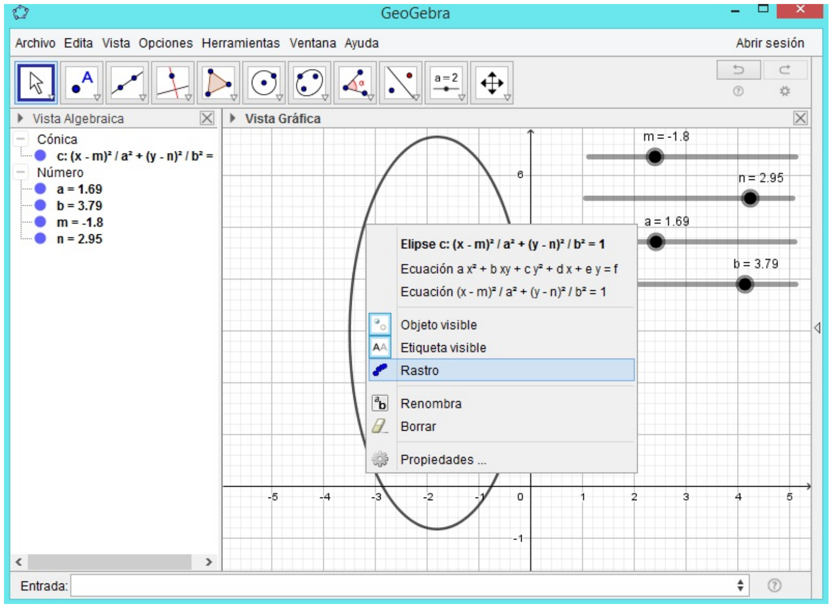
Cuando se arrastra a, la elipse se estira o se comprime horizontalmente.

¿Qué ocurre con la elipse cuando se arrastra b?

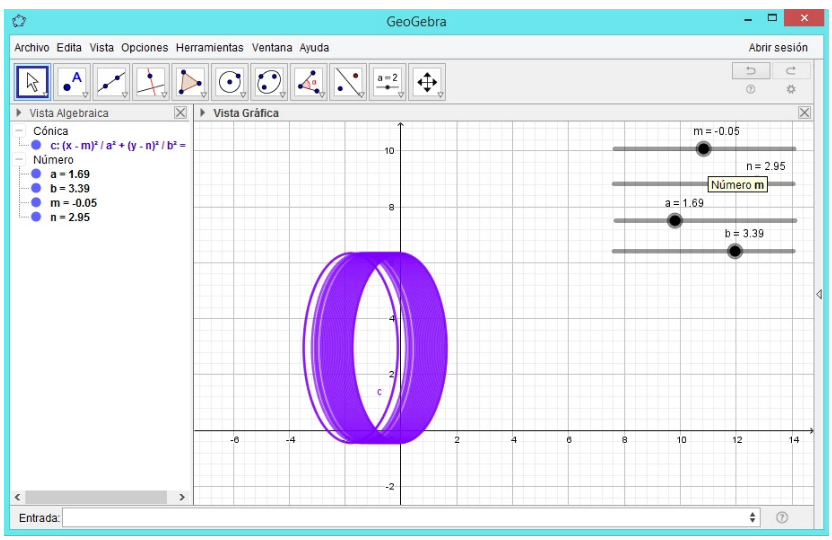


Cuando se arrastra b, la elipse se estira o se comprime verticalmente.

Paso 5. Active la herramienta **Rastro** para la elipse creada.

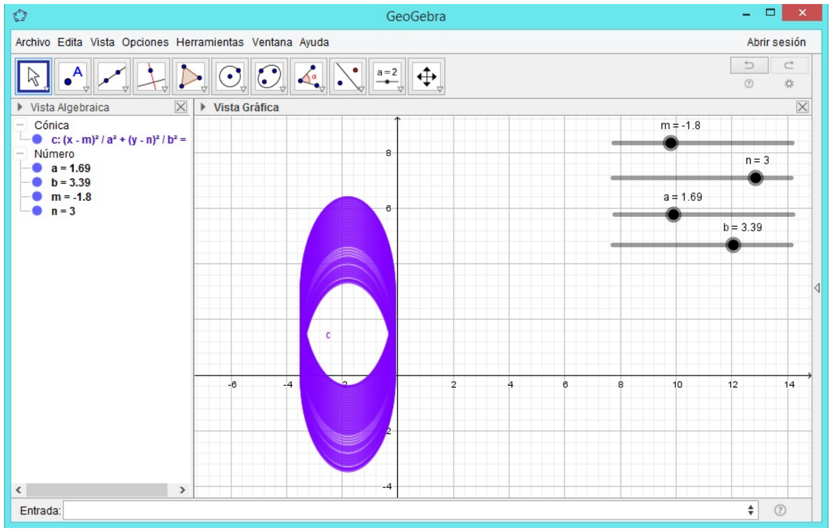


Paso 6. Active la herramienta **Animación** para el deslizador m ¿Qué se forman?



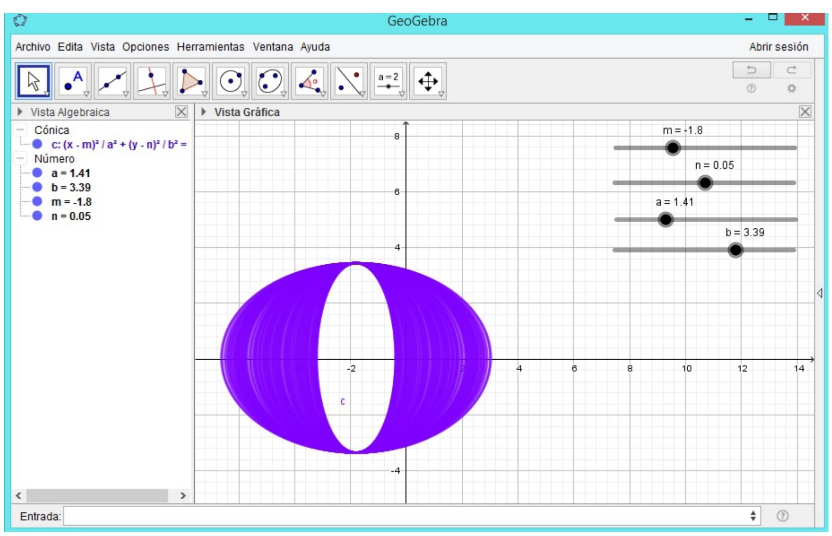
Cuando se anima a m, se forman elipses cuyos centros están sobre una recta paralela al eje X.

Paso 7. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador m y actívela para el deslizador n ¿Qué se forman?



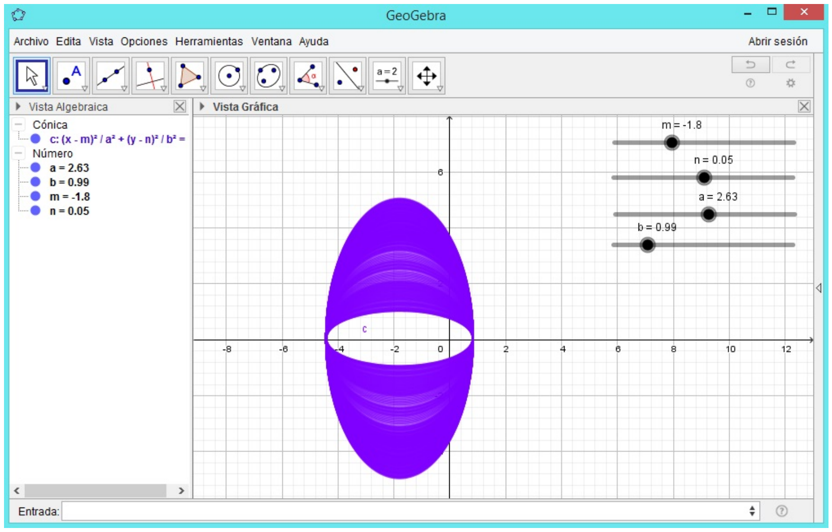
Cuando se anima a n, se forman elipses cuyos centros están sobre una recta paralela al eje Y.

Paso 8. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador n y actívela para el deslizador a ¿Qué se forman?



Se forman elipses que tienden a estirarse o a cerrarse horizontalmente.

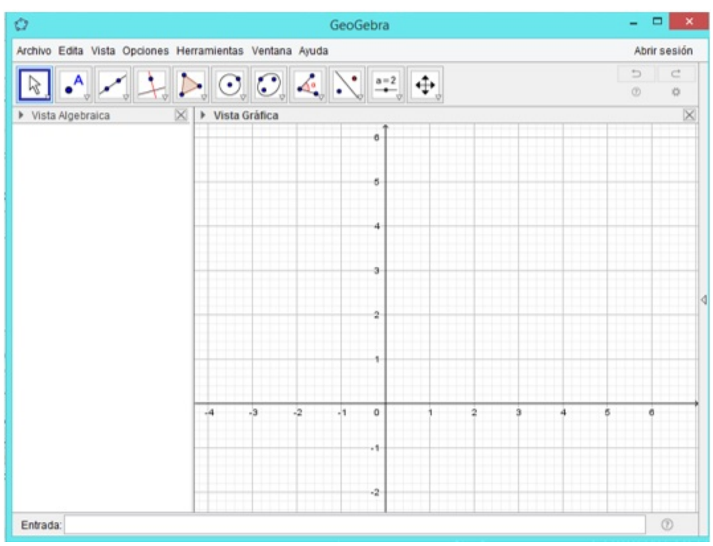
Paso 9. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador a y actívela para el deslizador b ¿Qué se forman?



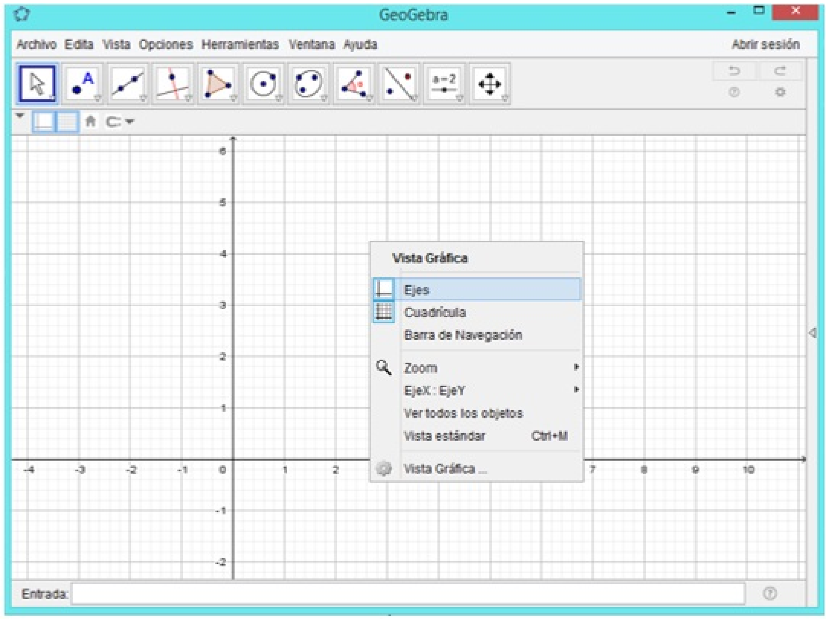
Se forman elipses que tienden a estirarse o a cerrarse verticalmente.

3.1.7. Simulación de la Actividad 1. Construcción geométrica de una hipérbola

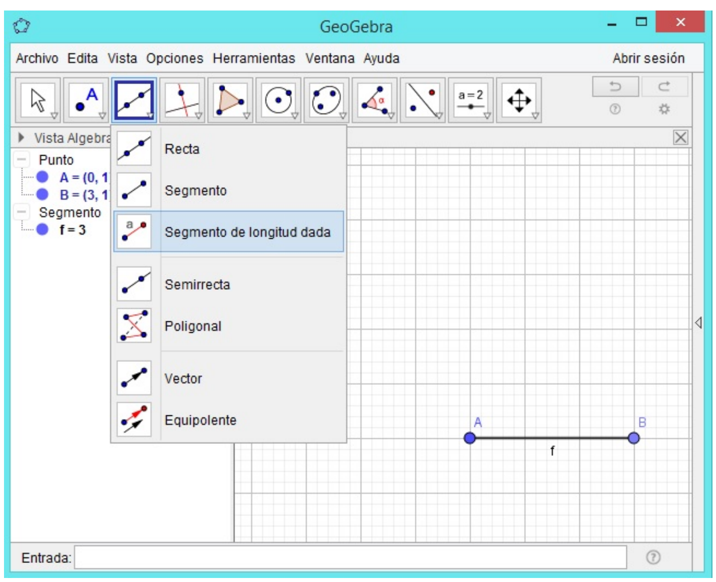
Paso 1. Abra un archivo nuevo en GeoGebra. Automáticamente se observan las vistas: algebraica y geométrica.



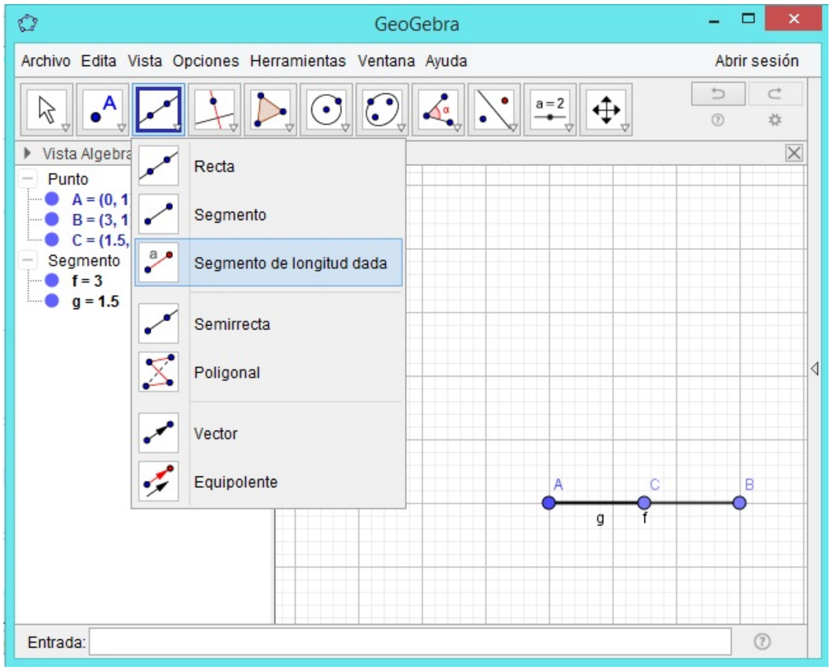
Paso 2. Oculte los ejes coordenados dando clic derecho sobre el área de trabajo y desactivando la herramienta **Ejes**.



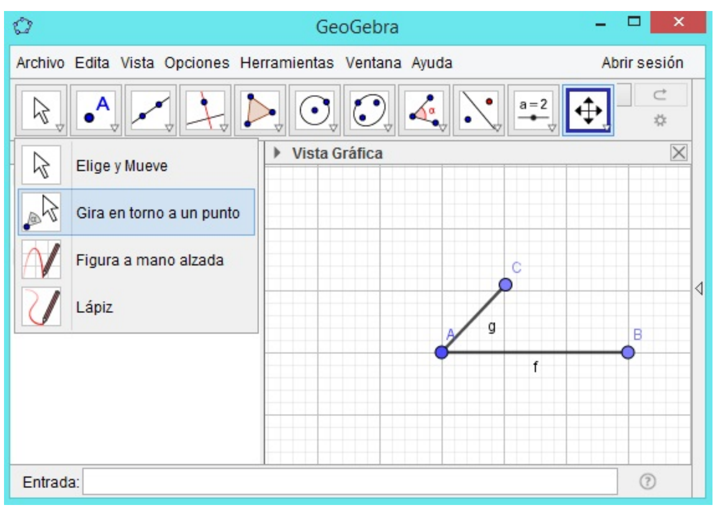
Paso 3. Elija la herramienta **Segmento de longitud dada** y trace un segmento f con extremos A y B. En la vista algebraica aparecerá su longitud.



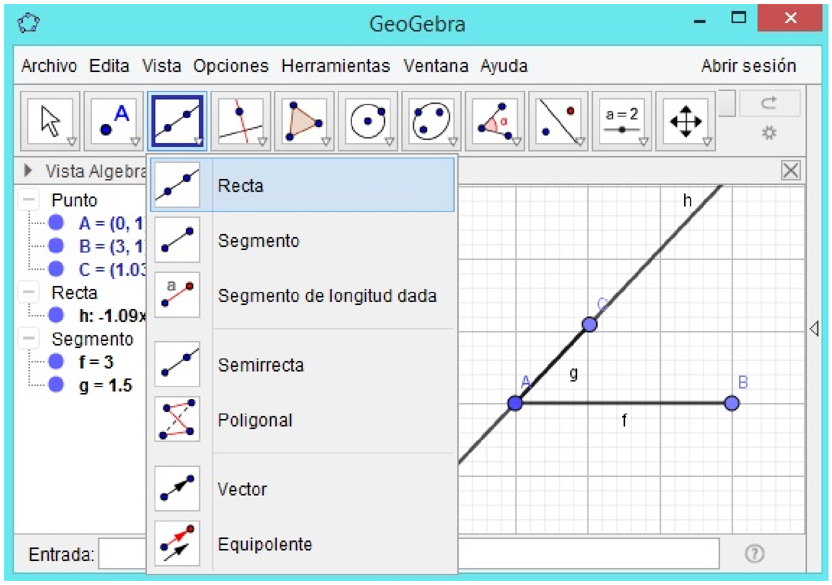
Paso 4. Seleccione la herramienta **Segmento de longitud dada** y trace el segmento g con extremo en A y C cuya longitud sea menor que la del segmento f.



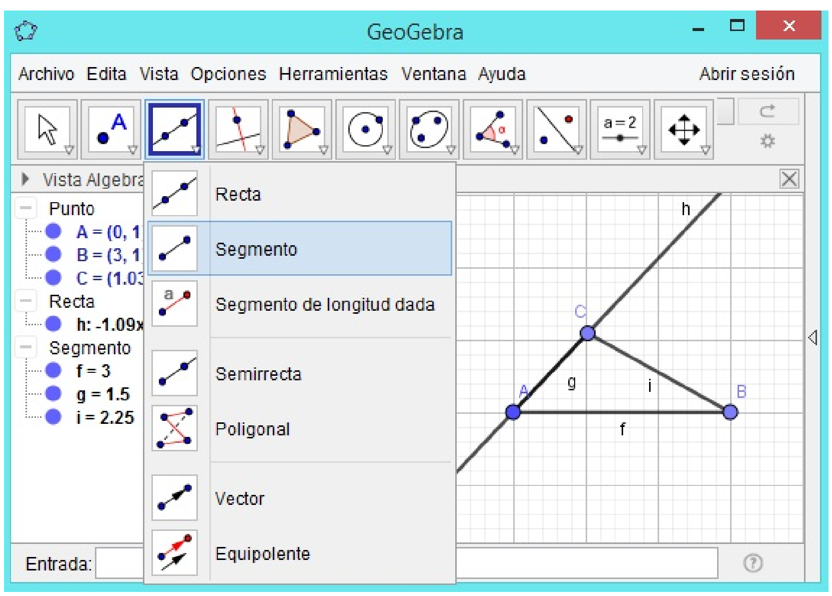
Paso 5. Seleccione la herramienta **Gira en torno a un punto** y dé clic sobre A y luego arrastre el punto C.



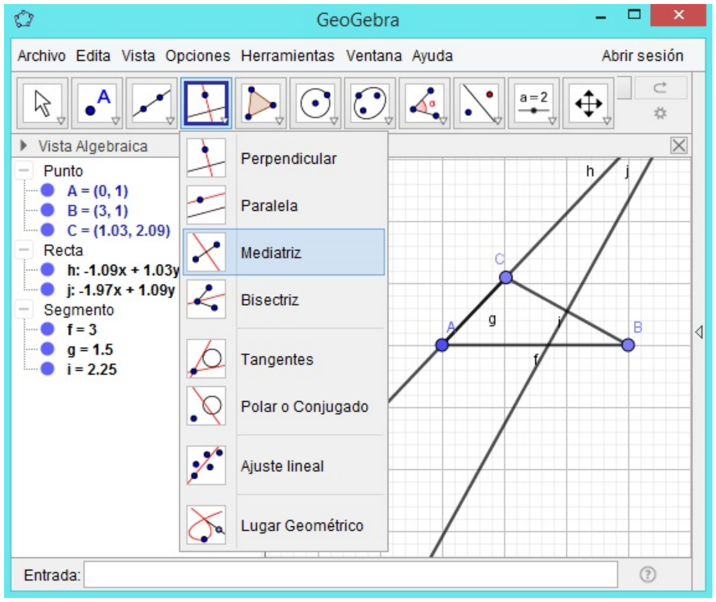
Paso 6. Selecione la herramienta **Recta** y trace la recta h que pasa por los puntos A y C.



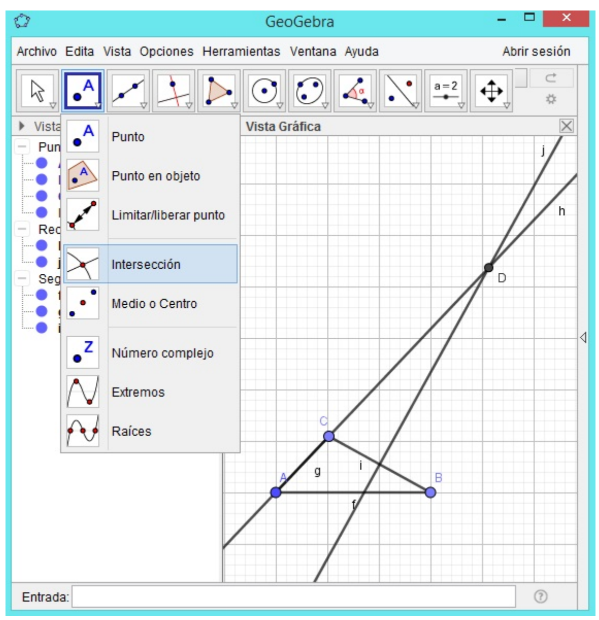
Paso 7. Selecione la herramienta **Segmento** y trace la segmento i que pasa por los puntos B y C.



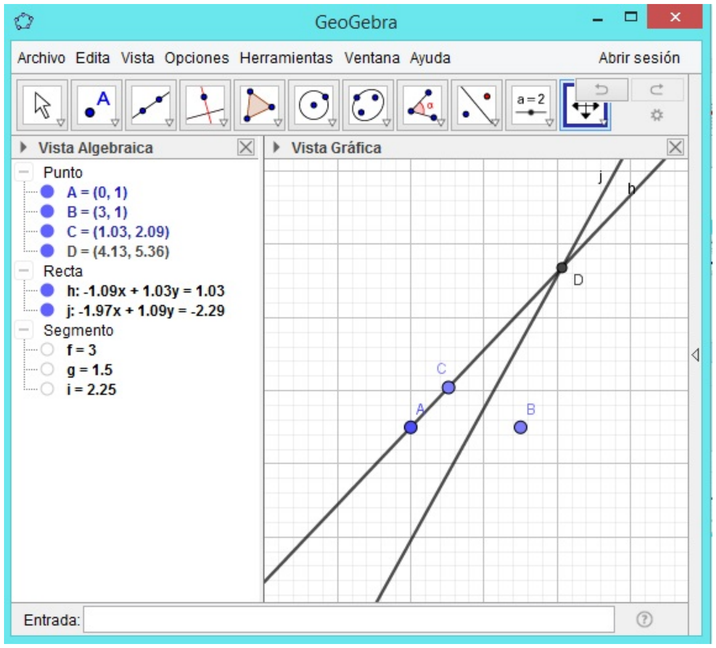
Paso 8. Elija la herramienta **Mediatriz** y trace la mediatriz j del segmento i.



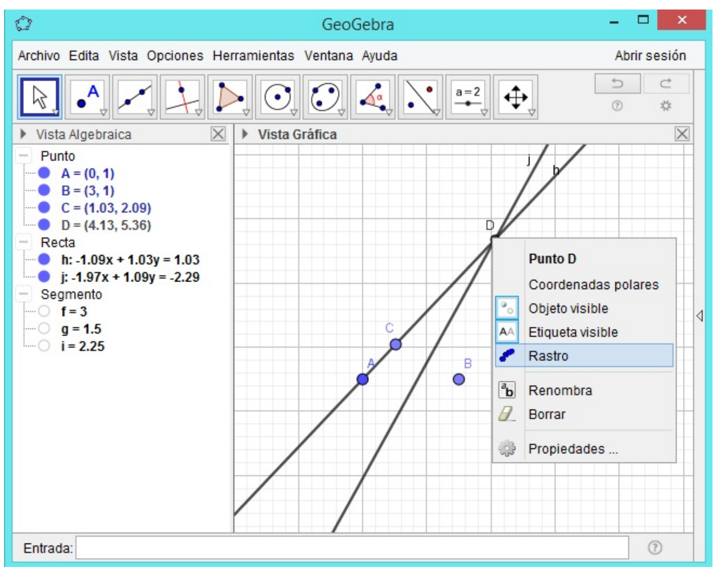
Paso 9. Seleccione la herramienta **Intersección** y determine el punto de intersección D de la recta h y de la mediatriz j.



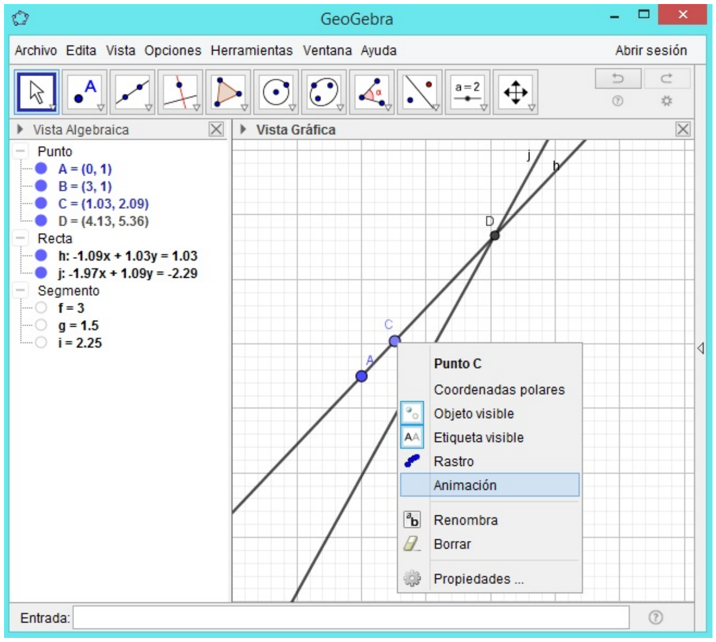
Paso 10. Oculte los segmentos f, g e i.



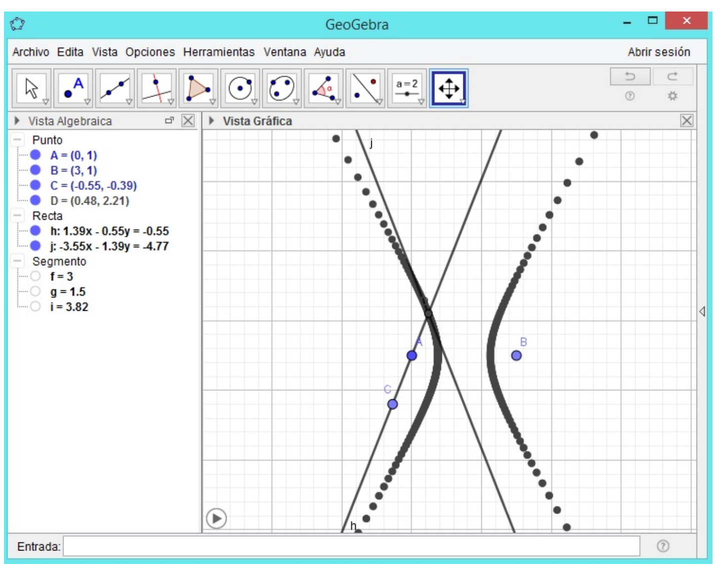
Paso 11. Active el **Rastro** para el punto D.



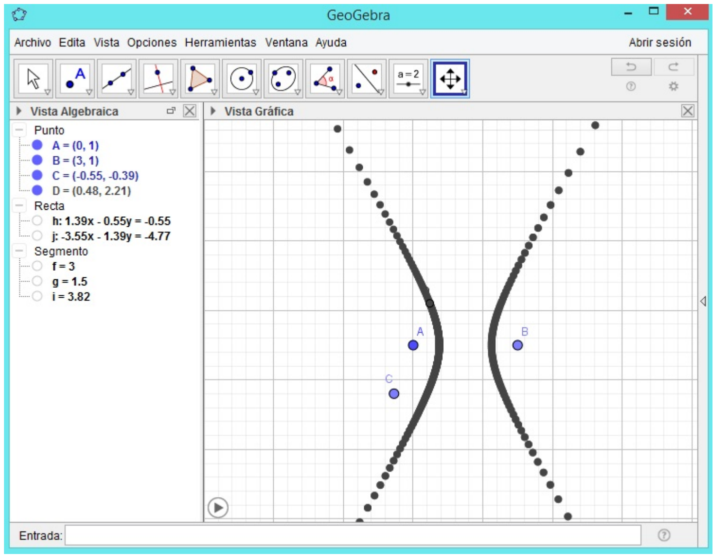
Paso 12. Active la **Animación** para el punto C ¿Conoce el lugar geométrico que se ha trazado?



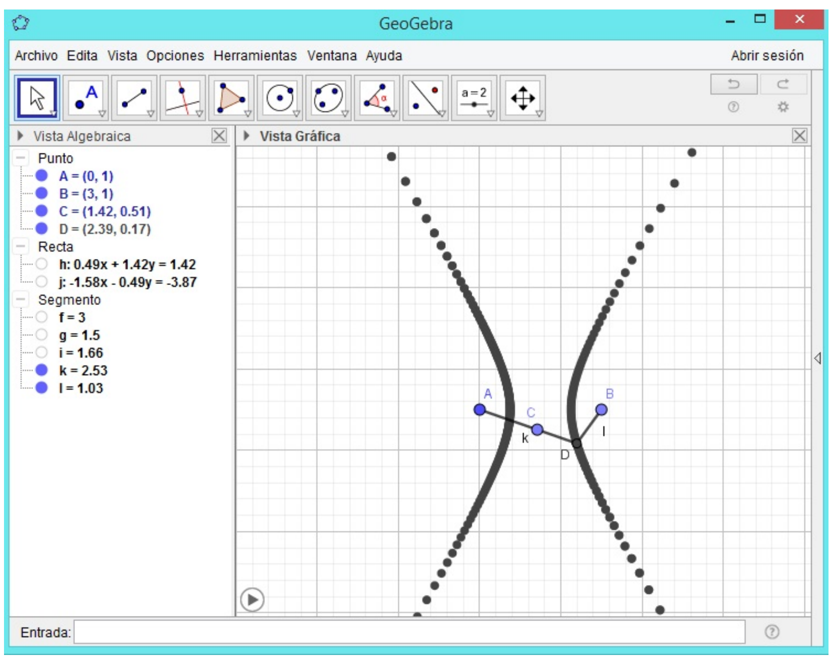
El lugar geométrico que hemos construido auxiliándonos del GeoGebra es una *hipérbola*, a como puede observarse a continuación.



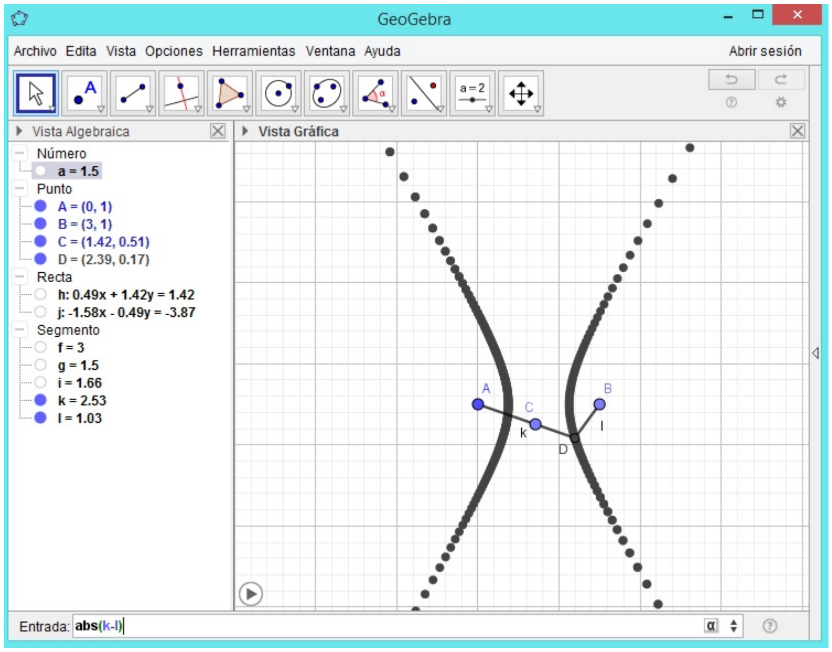
Paso 13. Oculte las rectas h y j.



Paso 14. Con la herramienta **Segmento** trace los segmentos k y l determinados por los puntos A y D, B y D, respectivamente.

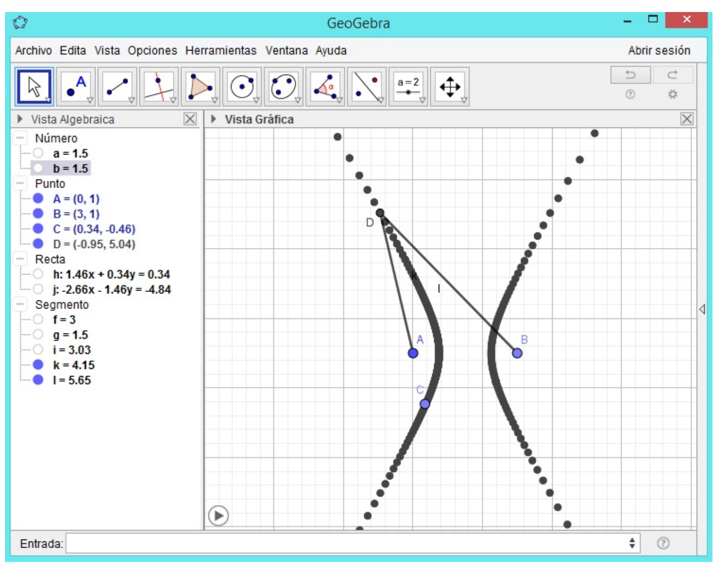


Paso 15. Desde la **Barra de entrada** introduzca $abs(k-l)$, que indica el valor absoluto de la diferencia $k-l$, y el software identificará este valor con el número a.



Paso 16. Active la **Animación** para el punto C.

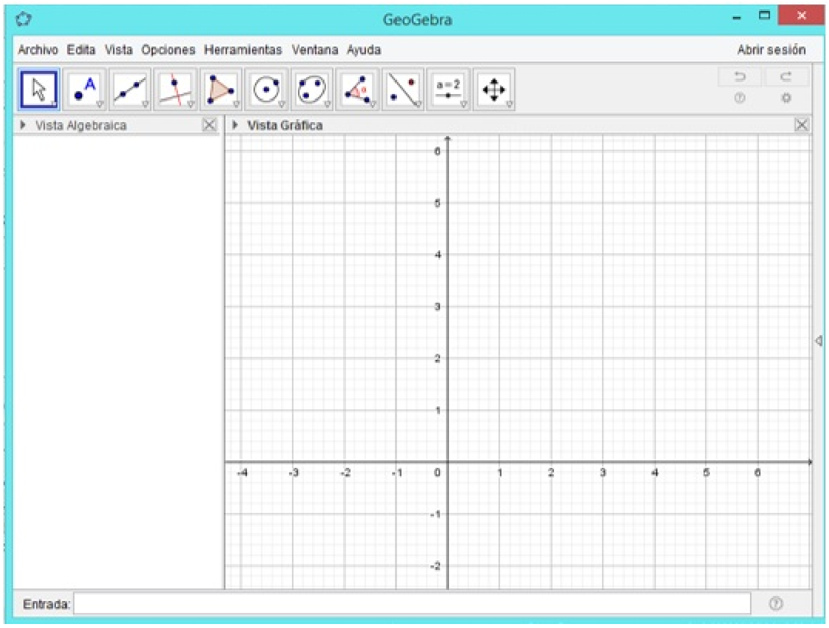
¿Qué ocurre con el número $a : abs(k-l)$, varía?



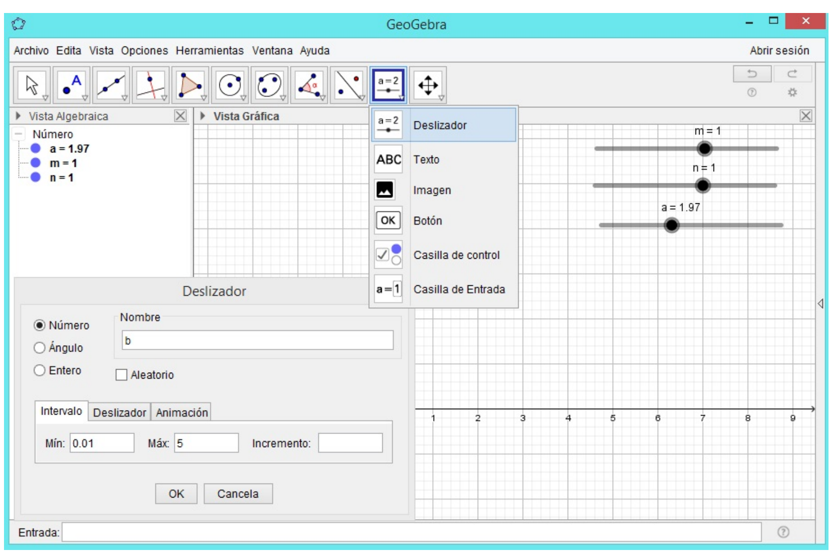
El número a que corresponde al valor absoluto de la diferencia $k-l$ no varía.

3.1.8. Simulación de la Actividad 4.5 Familia de hipérbolas

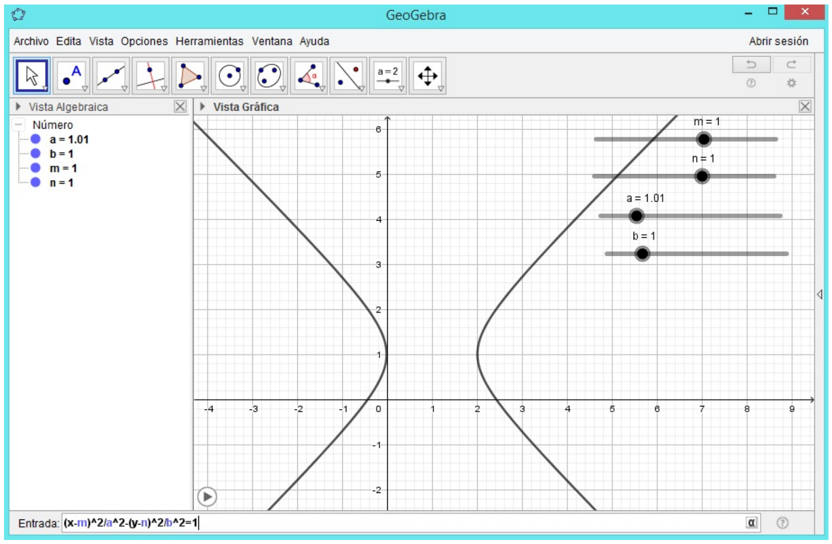
Paso 1. Abra un nuevo archivo en GeoGebra.



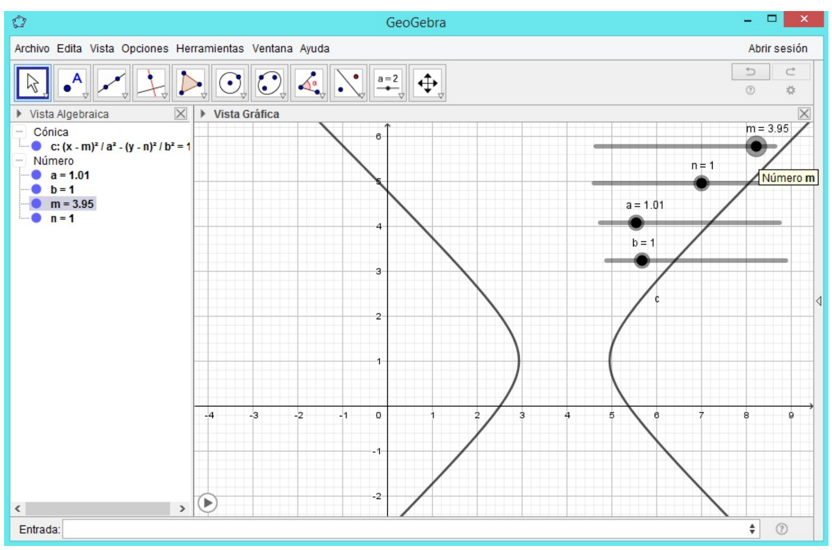
Paso 2. Introduzca cuatro deslizadores del tipo número utilizando la herramienta **Deslizador** y nómbrelos con m, n, a y b, respectivamente. Fije un valor mínimo y un valor máximo para cada uno de los deslizadores, puede dejar los mismos que aparecen por defecto, excepto para a y b porque estos deben ser positivos.



Paso 3. En la **Barra de entrada** escriba la ecuación $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$. Automáticamente aparecerá una hipérbola que tiene por centro y longitudes de los semiejes transverso y conjugado, los valores correspondientes a los deslizadores m, n, a y b creados en el paso 2.

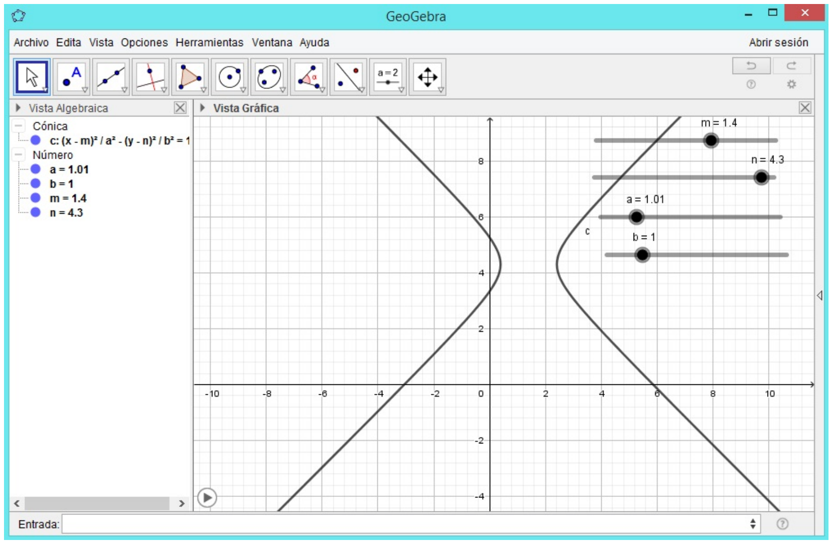


Paso 4. Arrastre cada uno de los deslizadores ¿qué ocurre con la hipérbola cuando se arrastra m?



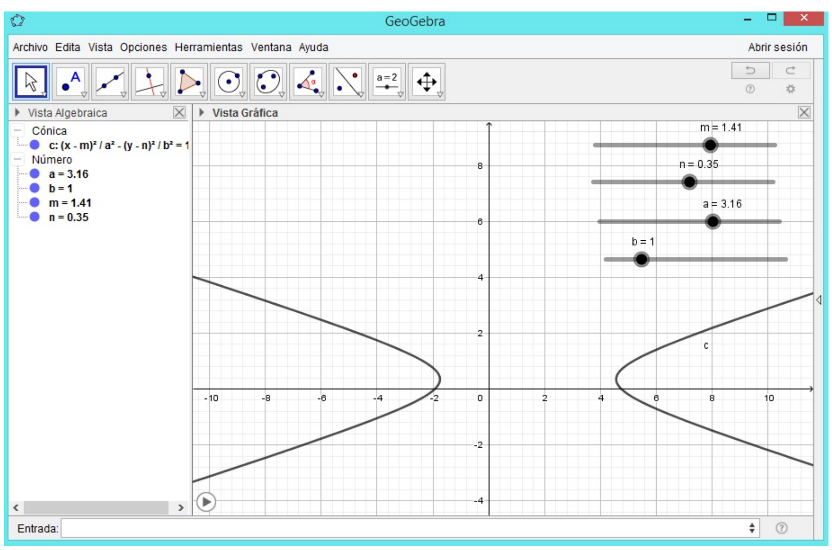
Cuando se arrastra m, el centro de la hipérbola está sobre una recta paralela al eje X.

¿Qué ocurre con la hipérbola cuando se arrastra n?



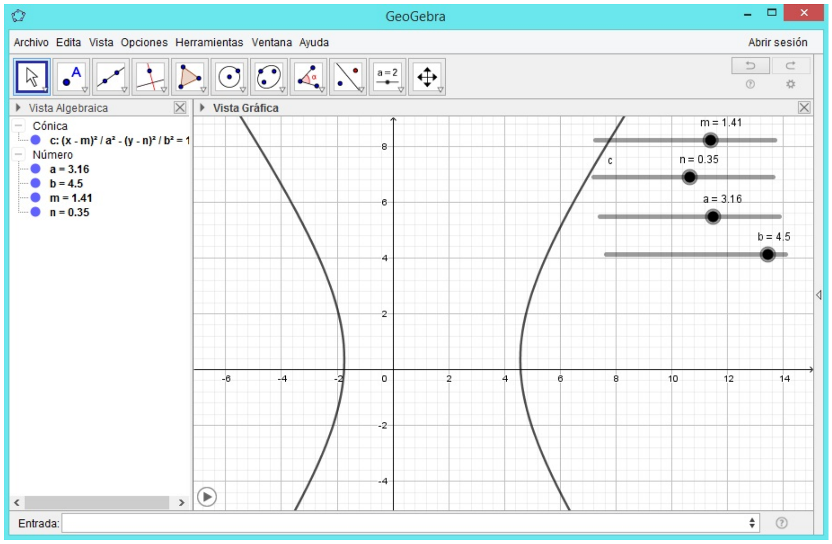
Cuando se arrastra n, el centro de la hipérbola está sobre una recta paralela al eje Y.

¿Qué ocurre con la hipérbola cuando se arrastra a?



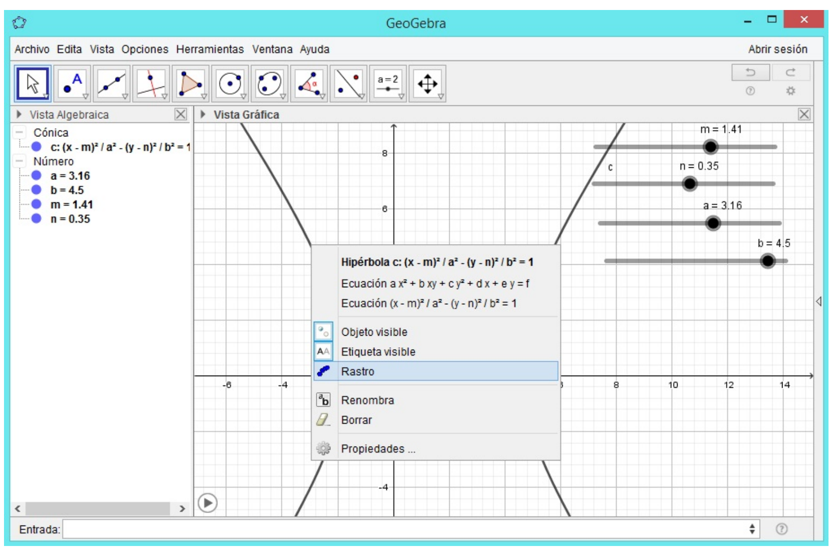
Cuando se arrastra a, la hipérbola tiende a comprimirse o a estirarse horizontal o verticalmente.

¿Qué ocurre con la hipérbola cuando se arrastra b?

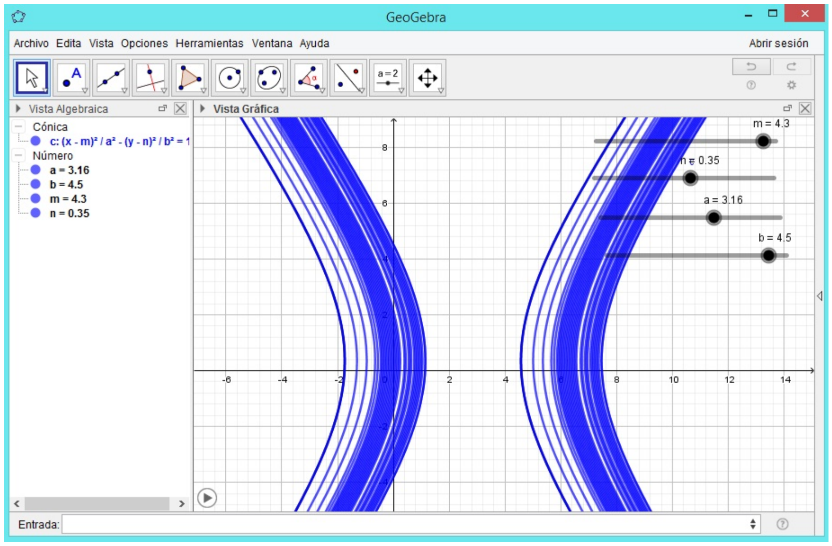


Cuando se arrastra b, la hipérbola tiende a comprimirse o a estirarse horizontal o verticalmente.

Paso 5. Active la herramienta **Rastro** para la hipérbola creada.

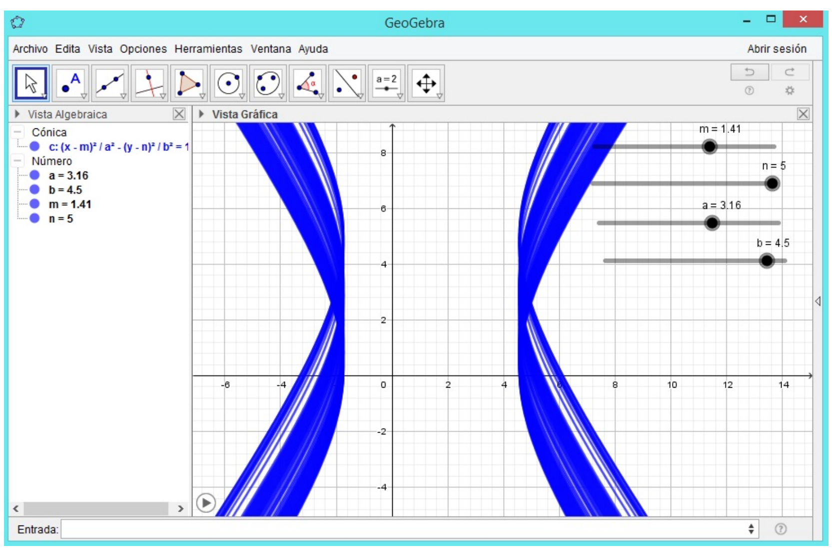


Paso 6. Active la herramienta **Animación** para el deslizador m ¿Qué se forman?



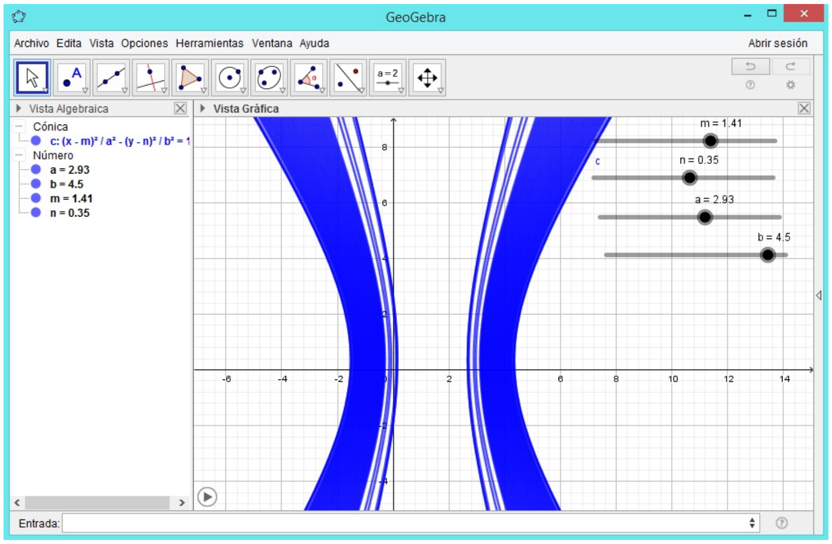
Se forman hipérbolas cuyos centros están sobre una recta paralela al eje X.

Paso 7. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador m y actívela para el deslizador n ¿Qué se forman?



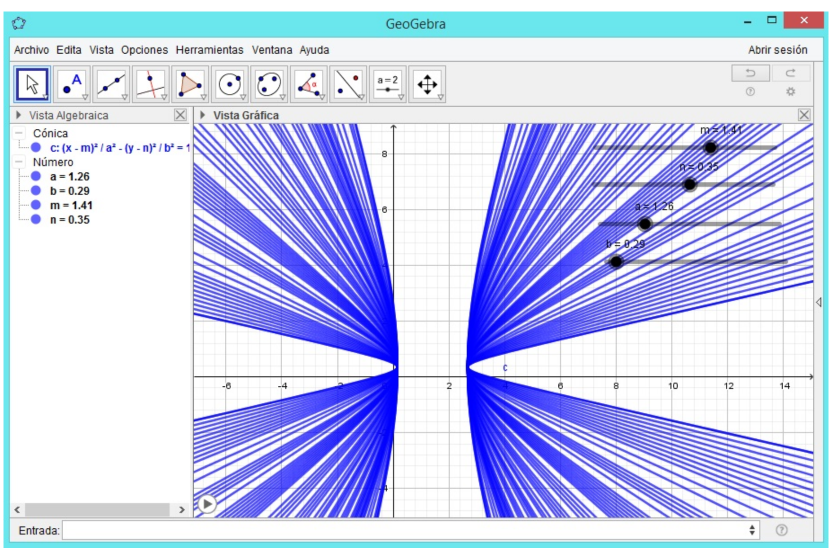
Se forman hipérbolas cuyos centros están sobre una recta paralela al eje Y.

Paso 8. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador n y actívela para el deslizador a ¿Qué se forman?



Se forman hipérbolas que se estiran o se comprimen vertical u horizontalmente.

Paso 9. Desactive la herramienta **Animación** para el deslizador a y actívela para el deslizador b ¿Qué se forman?



Se forman hipérbolas que se estiran o se comprimen vertical u horizontalmente.

3.2. Reflexiones y comentarios generales

Durante la simulación de las actividades se presentaron ciertos fenómenos que deben ser considerados al desarrollar las demás actividades de esta propuesta u otras que sean para ejecutarse dentro de un ambiente de geometría dinámica. A continuación se destacan los más importantes.

A. **Identificación visual del lugar geométrico a partir de su forma**. Los estudiantes reconocerán, satisfactoriamente, los lugares geométricos, circunferencia y parábola, pues son los más estudiados, de acuerdo con los programas de estudio, en primaria o bachillerato, pero desde otro enfoque. La circunferencia es vista como una curva cerrada y la parábola como la representación gráfica de una función cuadrática.

B. **Uso del arrastre**. Esta acción se pidió realizar para que el lector mismo experimente que un punto dado sobre el lugar geométrico siempre estará sobre el, aunque trate de moverlo para donde él quiera, valiéndose únicamente del mouse o ratón. El arrastre es utilizado aquí como un medio de validación.

C. **Uso de comandos propios del GeoGebra**. Al momento de diseñar las actividades se debe tener presente los comandos con los que el software GeoGebra reconoce ciertas funciones específicas. Por ejemplo, en la Actividad 1. Construcción geométrica de una hipérbola, el software reconoce la función valor absoluto de x con el comando $abs(x)$. De no escribirse de esta manera, esto puede causar incertidumbre para quienes traten de desarrollar las actividades por no saber cómo hacerlo, y para otros, seguridad de escribirlo tal cual en la barra de entrada.

D. **Uso de la Animación y Rastro**. A como se había comentado, es debido a la primera herramienta que a los software como GeoGebra se les califica de dinámicos, pues su uso trasciende más allá del sentido común. Objetos como puntos, segmentos, rectas se mueven y dejan huellas (rastros), se pierden de la vista y regresan como si nada.

E. **El discurso dinámico**. A como señala Gónzalez N. "las herramientas para Matemáticas Dinámicas son mediadores semióticos y por tanto afectan a la percepción que de las representaciones tienen los sujetos... Al haber esta mediación semiótica, el lenguaje se modifica ... (p.106). Esta modificación del lenguaje es muy evidente tanto en el diseño de las actividades como en la simulación y más en cuestiones de notación. Por ejemplo, rectas y segmentos son objetos denotados por letras minúsculas del alfabeto, los segmentos se identifican con sus longitudes, etc.

F. **El efecto del uso de los deslizadores como complemento del Rastro y Animación**. Esto fue más evidente al momento de formar familias de cónicas, pues las actividades fueron diseñadas primero para manipular el arrastre y visualizar qué pasa con la cónica que se formó inicialmente, y luego, con la herramienta animación para visualizar que realmente se tienen familias de cónicas.

Es válido señalar que estos comentarios se verán enriquecidos al simularse o implementarse las demás actividades, pues será más evidente:

- El tipo de justificación con el que argumenta el estudiante al desarrollar las demás actividades, pues el cuestionamiento es mayor.

- La intuición en la deducción de propiedades geométricas y algebraicas de las secciones cónicas.

CONCLUSIONES

Luego de haber fudamentado, diseñado y simulado parcialmente la propuesta, se ha llegado a establecer las siguientes conclusiones:

- La actividades que se diseñaron fundamentadas en el modelo de Van Hiele usando el software de geometría dinámica GeoGebra, pretenden facilitar aprendizajes significativos en temas referidos a las secciones cónicas, ofreciendo alternativas donde los estudiantes exploren, manipulen y conjeturen resultados matemáticos.

- Con la combinación de la tecnología y el conocimiento matemático puesto en cada una de las actividades el papel del profesor cambia radicalmente, sus intervenciones deben estar enfocadas a que los alumnos reflexionen, manipulen y formulen resultados por sí mismos. Desde el inicio de cada actividad, su propósito debe ser involucrar a sus estudiantes en el desarrollo de las actividades siguiendo cada una de las fases de enseñanza del modelo de Van Hiele, motivarlos para que pongan en juego sus presaberes matemáticos y establezcan correctamente los nuevos saberes a partir de sus propias experiencias, derivadas de la manipulación, exploración y retroalimentación que les provee el software GeoGebra.

- Las actividades propuestas colocan al estudiante en una posición de trabajo activo y permanente, fomentando un aprendizaje dinámico. Estas permiten que este sienta la satisfacción y el placer de manipular, explorar, descubrir y establecer, por si mismos, definiciones, propiedades y teoremas matemáticos.

- Los comentarios y reflexiones dadas sobre el diseño y estructuración de las actividades proporcionan ciertas consideraciones que se deben tener presente al desarrollar las demás actividades propuestas, entre las que están:

  - Identificación visual del lugar geométrico a partir de su forma.
  - Uso del arrastre.
  - El discurso dinámico.
  - Efecto del uso de los deslizadores.

- La simulación realizada brinda la confianza de que las actividades propuestas funcionarán en un aula de clases desarrollando cada uno de los pasos dados para alcanzar el objetivo que se persigue en cada actividad. Además, esta propuesta ha sido sustentada en diferentes investigaciones que reflejan resultados positivos al implementar el modelo de Van Hiele y el uso de software de geometría dinámica en temas propios de la Geometría.

PERSPECTIVAS DE FUTURO

Todo estudio realizado sobre cualquier tema genera nuevas interrogantes a las que un lector curioso tratará de dar soluciones. De la experiencia adquirida en este trabajo, a continuación se presentan las siguientes perspectivas:

- Diseñar actividades de aprendizaje como las propuestas en otras áreas de la matemática.

- Aprovechar las actividades propuestas para desarrollar los contenidos de las secciones cónicas en cursos de Geometría.

- Realizar talleres sobre el uso de software de geometría dinámica con estudiantes y docentes de la universidad.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Araya, R. G. (2007). *Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas.* Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 2(3), 11-44.

[2] Araya, R. G y Alfaro, E. B. (2010). *La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes.* Revista electrónica educare, 14(2), 125-142.

[3] Báez, R y Iglesias, M. (2007). *Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro".* Enseñanza de la Matemática, 12, 67-87.

[4] Berdard, J. y Ecke Tavares, R. A. (s.a) Resolución de problemas gráficos utilizando la geometria dinâmica.

[5] Blancas Bartolo M. I. (2012). *Integración de tecnología informática en tópicos selectos de geometría analítica.* (Doctoral dissertation, Tesis de Maestría en Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México).

[6] Cabrera, C. R y Campistrous, L. A. (2007). *Geometría dinámica en la escuela,¿ mito o realidad?.* Uno: Revista de didáctica de las matematicas, (45), 61-79.

[7] Faura i Homedes, Ricard. (1998). *La cultura local en el ciberespacio. El papel de las Freenets.* http://www.naya.org.ar/congreso/ponencia1-21.htm

[8] Finzer, W y Jackiw, N. (1998). *Dynamic manipulation of mathematical objects.* En NCTM Standards 2000 Electronic Format Group.

[9] Fouz, F. y De Donosti, B. (2005). *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. Un paseo por la geometría.* Recuperado de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/04-05/PG-04-05-fouz.pdf

[10] González, J. (2014). *La utilización de Software de Geometría Dinámica en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Sintética Plana.* Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Santa Clara. Cuba.

[11] González-López, M. J. (2001). *La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica.* Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Universidad de Granada, 277-290.

[12] González, N. G y Osorio, V. L. (2012). *Justificaciones en la geometría dinámica de secundaria: El proceso de construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica.* Editorial Académica Española.

[13] Goldenberg, E. P., y Cuoco, A. A. (1998). *What is dynamic geometry. Designing learning environments for developing understanding of geometry and space,* 351-368.

[14] González Castro, V. (1986). *Teoría y práctica de los medios de enseñanza.* Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

[15] Hölzl, R. (1996). How does 'dragging'affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1(2), 169-187.*

[16] Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento.* (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, España.

[17] Klingberg, L. (1978). *Introducción a la didáctica general.* Pueblo y Educación. La Habana.

[18] Kindle, J. H. (1991). *Geometria analitica: plana y del espacio.* McGraw-Hill.

[19] Klingberg y Et al. (1970). *Didáctica General.* Pueblo y Educación. Separata 2 Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

[20] Labarrere Reyes, G., Pairol, G. V. (1988). *Pedagogía.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 166.

[21] Laborde, C y Capponi, B. (1994). *Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique.* Recherches en didactique des mathématiques, 14(1.2), 165-210.

[22] Larios O, V. (2016). *La internalización del software dinámico para el estudio de las matemáticas.* En V. Larios, T. Guzmán y M.T. García (edits.), Escenarios y desafíos de la tecnología educativa (págs. 67-88). México, México: Fontamara y UAQ. (ISBN: 978-607-736-309-5.)

[23] Larios Osorio, V. (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica.* México. México: Cinvestav-DME. (Tesis de Doctorado no publicada)

[24] Larios, V y González, N. G. (2010). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(4-I), 147-160.*

[25] Lehmann, C. H. (1993). *Geometría Analitica (1a. ed., 1a. reimp.) México: Limusa/Noriega Editores.*

[26] León, T. (2007). *Concepción Didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría con un enfoque dinámico en la Educación Primaria.* Tesis en opción al grado científico de Doctora en Ciencias Pedagógicas. La Habana. Cuba.

[27] Lévy, P. (2001). *Cyberculture (Vol. 4).* U of Minnesota Press.

[28] Manterola, C y Otzen, T. (2013). *Porqué investigar y como conducir una investigación.* International Journal of Morphology, 31(4), 1498-1504.

[29] Maracci, M. (2001). Drawing in the problem solving process. *European Research in Mathematics Education II, 478.*

[30] Mariotti, M. A., y Maracci, M. (1999). Conjecturing and Proving in Problem-Solving situations. *In Proceedings of the Conference of the International Group for* (Vol. 100, p. 1062).

[31] McFarlane, A. (2001). *El aprendizaje y las tecnologías de la información.* Madrid: Santillana.

[32] Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment.* UK: University of Bristol.

[33] Paredes, Z., Iglesias, M y Ortiz, J. (2016). Los docentes y su formación inicial hacia el aula de matemática. Una propuesta con modelización y nuevas tecnologías. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 7(1).*

[34] Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational studies in mathematics, 19(1), 79-92.*

[35] Rosa Rojas, A. y Et al. (1999). *La Tecnología Educativa. El Uso de las NTIC en la Educación.* Universidad de la Habana.

[36] Ruiz López, N. (2012). Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de Primaria.

[37] Silvestre, M y Zilberstein, J. (2000). *Enseñanza y aprendizaje desarrollador.* Ediciones CEIDE, México.

[38] Soberanes, E. (2013). *Geometría dinámica como herramienta de apoyo para el docente en algunos temas de geometría del bachillerato de la UAQ.* (Doctoral dissertation, Tesis de Maestría en Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México).

[39] Scher, D. P. (2002). *Students' conceptions of geometry in a dynamic geometry software environment.* (pp. 1-147).

[40] Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua (2013). *Documento Curricular de la carrera de Matemática.* Managua.

[41] Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua (2013). *Documento Curricular de la carrera de Física-Matemática.* Managua.

[42] Vargas Vargas, G., de Puriscal Puriscal, C. T. P., Rica, C., y Gamboa Araya, R (2013). *The Van Hiele model and the teaching of the geometry.*

Anexo I: Diagnóstico

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

UNAN – MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDICIPLINARIA DE CHONTALES

Diagnóstico

Instrucciones. Estimados estudiantes, el objetivo de este diagnóstico es conocer el nivel de conocimientos referidos a los contenidos de Geometría Analítica Plana. Para poder responder deben leer detenidamente cada una de las actividades propuestas. De antemano se agradece su colaboración.

1. **Defina.**
   - Lugar geométrico
   - Excentricidad de una cónica
   - Circunferencia
   - Hipérbola
2. **Resuelva los siguientes ejercicios.**
   - Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, de los cuales su distancia a la recta $x + 1 = 0$ es igual a su distancia al punto $(-7, 2)$.
   - Traza el lugar geométrico descrito en el inciso anterior.

Anexo II: Protocolo de la Entrevista

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA

UNAN – MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDICIPLINARIA DE CHONTALES

Entrevista

Personas a Entrevistar: Estudiantes de la carrera de Física – Matemática que llevan el curso de Geometría I, algunos de los cuales son docentes de bachillerato.

Objetivo de la Entrevista: Conocer las experiencias vividas en la enseñanza – aprendizaje de los contenidos de geometría analítica, los documentos oficiales con los cuales desarrollan sus clases, perspectivas para mejorar dicho proceso y además, el nivel de conocimiento de SGD y sus implicaciones en el aula de clases.

Temas de discusión:

- Experiencias vividas en la enseñanza – aprendizaje de contenidos de la geometría analítica.
- Documentos oficiales que apoyan dicho proceso.
- Uso de SGD en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática.

Referencia Técnica y Contextual del Instrumento Metodológico

Método: Entrevista

Técnica: Entrevista estructurada

Fecha:

Duración: 20 a 30 min.

Lugar: xxxxx

Contexto: Tratamiento de los contenidos de la geometría analítica.

¿Quien lo va a entrevistar?: Investigador

Tipo de Muestreo: No Probabilístico.

Buenos días/tardes estimados estudiantes. Mi nombre es Primtivo Herrera Herrera, estudiante del Doctorado en Matemática Aplicada y estoy diseñando un material que contemple actividades de aprendizaje para las secciones cónicas, adaptando los niveles de razonamiento y las fases de enseñanza del modelo de Van Hiele al entorno dinámico GeoGebra. La finalidad de esta entrevista es conocer cómo se abordan los contenidos de geometría analítica en el bachillerato y en la universidad, los documentos oficiales con los cuales se desarrollan estas clases, perspectivas para mejorar dicho proceso y además, el nivel de conocimiento de SGD y sus implicaciones en el aula de clases, en este sentido siéntase en libertad de expresar sus opiniones sinceras respecto a los temas a tratar.

Cuestionario que guiará el proceso de la entrevista:

1. ¿Cómo abordan los contenidos de la geometría analítica? ¿Cuáles son sus experiencias?

2. Este semestre el MINED orientó una semana de capacitación al inicio del año escolar, ¿recibieron dentro de esta, aspectos relacionados al tratamiento didáctico metodológico de los contenidos matemáticos?

3. ¿Han recibido capacitaciones para desarrollar en el aula de clases los contenidos de geometría analítica, particularmente las secciones cónicas, con un tratamiento didáctico-metodológico? ¿De qué forma se realizan?

4. ¿Consideran ustedes que en su formación reciben las herramientas necesarias para

el buen desempeño en la enseñanza de los contenidos de geometría analítica? ¿Qué hace falta?

5. ¿Con qué materiales didácticos cuentan para la enseñanza de los contenidos de geometría analítica?

6. ¿Qué estrategias didácticas utilizan en el abordaje de los contenidos de las secciones cónicas?

7. ¿Consideran importante la incorporación de las TIC en el aula?, ¿por qué?

8. ¿Conocen el GeoGebra?, ¿lo han utilizado?, ¿para qué?

9. ¿Cuáles son sus perspectivas para mejorar el proceso de enseñanza - aprendizaje de los contenidos de geometría analítica?

Muchas Gracias