

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA**

**RECINTO UNIVERSITARIO “RUBÉN DARÍO”**

**FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA**

**Informe Final de Investigación para optar al título de Licenciatura en  
Matemática.**



**Aplicación de la Transformada Corta de Fourier a un problema de  
Señales de trastornos de ritmos registradas en un Electrocardiograma.**

Autoras:

Bra. Acosta Reyes Daniela Izayana

Bra. Roa López Jeimy del Carmen

Tutor:

MSc. Juan Wilfredo Calderón Carmona

Asesora Metodológica:


MSc. Pilar Angelina Marín Ruiz

Managua, Nicaragua, Octubre 2017



## Índice

i. Resumen.....	4
ii. Dedicatoria.....	5
Dedicamos esta tesis .....	5
iii. Agradecimiento.....	6
Agradecemos.....	6
I.INTRODUCCIÓN .....	7
II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	9
III. OBJETIVOS .....	11
Objetivo General: .....	11
Objetivos Específicos:.....	11
IV: FUNDAMENTO TEÓRICO .....	12
Capítulo I.....	12
Anatomía del Corazón.....	12
Capítulo II .....	15
Componentes del Electrocardiograma.....	15
Capítulo III.....	24
Transformada de Fourier Discreta.....	24
3.1. Propiedades de la Transformada de Fourier Discreta.....	25
Capítulo IV .....	35
Transformada Corta de Fourier .....	35
Capítulo V .....	36
Señales Electrocardiográficas.....	36
Capítulo VI.....	39
Introducción al análisis tiempo-frecuencia.....	39
Capítulo VII .....	41
Ventaneado.....	41
Capítulo VIII.....	45
La Transformada Corta de Fourier a través del software MATLAB .....	45



---

V. DISEÑO METODOLÓGICO .....	48
VI. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS .....	49
VII. CONCLUSIONES.....	88
VIII. RECOMENDACIONES .....	90
IX. BIBLIOGRAFÍA .....	91
X. ANEXO.....	93

## i. Resumen

La Transformada Rápida de Fourier ha venido siendo al pasar de los años de gran importancia en el estudio de las señales electrocardiográficas, mediante ella se ha desarrollado un análisis tiempo- frecuencia a través de un Electrocardiograma.

La Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, FFT) es una herramienta fundamental en el procesamiento digital de señales. Su origen es relativamente reciente puesto que fueron J.W. Cooley y J.W Tukey, quienes hacia 1965 abordaron por primera vez el problema de la programación de un algoritmo para el cálculo de series complejas.

Ante todo, debe quedar claro que la FFT no es una nueva Transformada, sino que se trata de un algoritmo para el cálculo de la Transformada Discreta de Fourier (Discrete Fourier Transform, DFT). Su importancia radica en el hecho que elimina una gran parte de los cálculos repetitivos a lo que está sometida la DFT, por lo tanto, se logra un cálculo más rápido. Además, la FFT generalmente permite una mayor precisión en el cálculo de la DFT disminuyendo los errores de redondeo.

En este trabajo se pueden encontrar las bases fundamentales de lo que es una señal electrocardiográfica a través de su estudio tiempo – frecuencia y un ejemplo de cómo interviene la Transformada Rápida de Fourier en el diagnóstico de un paciente, utilizando la técnica de ventaneo y a su vez apoyándonos del software matemático Matlab (Matrix Laboratory) para encontrar la frecuencia dominante de la señal electrocardiográfica descrita en una hoja de papel milimetrado, diferenciando así, algunas patologías existentes en dicha señal. Es por eso que el estudio de las señales electrocardiográficas a través de la Transformada Rápida de Fourier es muy importante ya que, pueden encontrarse aún muchos más comportamientos en ella que acerquen a un resultado Holter desde un Electrocardiograma realizado de la manera habitual en los hospitales.

## ii. Dedicatoria

### Dedicamos esta tesis

Primeramente, a Dios:

Por darnos la oportunidad de vivir y por estar con nosotras en cada paso que damos, por fortalecer nuestros corazones e iluminar nuestras mentes y por haber puesto en el camino a aquellas personas que han sido un soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

Con todo cariño y amor a nuestros padres:

Por habernos apoyado en todo momento, por instruirnos con valores y principios que nos han permitido ser personas de bien, por motivarnos y darnos la mano cuando sentíamos que el camino se terminaba y así llegar a esta nueva etapa de nuestras vidas.



### iii. Agradecimiento

#### Agradecemos

- Primeramente, a Dios por estar presente en cada segundo de nuestras vidas y mostrar su infinita misericordia en medio de este largo caminar.
- A nuestras familias por todo el apoyo brindado, por sabernos motivar cuando más lo necesitábamos, siendo puentes de amor y fortalezas en nuestras vidas.
- A nuestros maestros por habernos prestado su inspiración, sus esfuerzos compartidos y horas de trabajo.
- Al DR. PABLO HURTADO NUÑEZ, presidente de la Asociación de Cardiología de Nicaragua, por habernos brindado su apoyo en todo el proceso investigativo de nuestra tesis.

## I.INTRODUCCIÓN

El corazón ha despertado la curiosidad y el interés del hombre desde tiempos muy remotos; en muchas culturas del mundo ha sido elemento importante en las costumbres, literaturas, leyendas, música y ha ocupado un lugar destacado en las artes mayores y menores.


La historia de la cardiología se ha desarrollado alrededor de un capítulo clave, sobre el conocimiento de la circulación de la sangre. En 1901, Einthoven publicó su primer artículo científico comunicando sus experiencias con el galvanómetro de cuerda y su utilidad para el registro de los potenciales cardíacos. Cinco años más tarde describía con detalle las aplicaciones clínicas del Electrocardiograma en un artículo titulado: “Le telecardiogramme”.

Este artículo sentó las bases para la extraordinaria avalancha informativa que se ha desarrollado, desde entonces, esta herramienta ha sido imprescindible en el análisis cardiológico.

En el cuerpo humano se producen una gran cantidad de señales eléctricas provocadas por actividades que tienen su ubicación en los músculos y nervios que lo integran; mediante el análisis de las señales electrocardiográficas, se puede visualizar los distintos comportamientos en el eje isoelectrico o línea basal, de tal forma, que podemos observar los distintos comportamientos de las deflexiones del corazón.

El trabajo que se presenta a continuación aborda la importancia de las señales electrocardiográficas, sus componentes y el análisis tiempo-frecuencia por lo cual, se tiene como objetivo Aplicar la Transformada Corta de Fourier a un problema de señales de trastornos de ritmos registradas en un Electrocardiograma.





La memoria central del documento se divide en dos partes fundamentales: la primera parte es un estudio teórico de las señales electrocardiográficas y la Transformada de Fourier, una segunda parte es la Aplicación de la Transformada Corta de Fourier en un Electrocardiograma.

## II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A lo largo del tiempo, las enfermedades cardiovasculares han sido de gran relevancia en los avances médicos; las necesidades por hacer interpretaciones de señales electrocardiográficas han dado espacios a descubrimientos de procesos que pueden ser matemáticamente analizados tal como, lo es la Transformada Corta de Fourier.

La importancia del análisis tiempo-frecuencia en las señales electrocardiográficas hacen que nazca la necesidad de investigar sobre este tema desconocido en ciertos entornos.

Tomando como referencia la gráfica de un Electrocardiograma, se pueden plantear distintas interrogantes, como:

- ¿Qué aporte brinda la Transformada Corta de Fourier en las señales electrocardiográficas?
- ¿Cuáles son los componentes de un Electrocardiograma?
- ¿Qué significa la gráfica de un Electrocardiograma?

Debido a todas estas curiosidades que nacen de los pensamientos más naturales de un ser humano gira la presente investigación.

Visualizar a través de un ejemplo, la Aplicación de la Transformada Corta de Fourier, tomando como referencia la señal descrita en un Electrocardiograma e identificando los distintos aportes que este proceso brinda a la cardiología.

A lo largo de los años ha surgido el interés por hacer interpretaciones de las señales electrocardiográficas mediante procesos matemáticos, uno de los primeros en aparecer fue la Transformada Corta de Fourier, donde podemos destacar en la actualidad el cálculo de los valores de la frecuencia dominante e índice de regularidad de un paciente, siendo estos valores de gran aporte para obtener un estudio más amplio de los problemas cardíacos.

Este trabajo busca hacer un aporte al campo de la matemática aplicada y a su vez servir como una línea de base para otros estudios; de esta manera podremos contribuir a un mayor entendimiento e importancia del análisis de Fourier, de esta forma los estudiantes de la carrera podrán tener una visualización más amplia sobre este tema.



### III. OBJETIVOS

#### Objetivo General:

Aplicar la Transformada Corta de Fourier a un problema de señales de trastornos de ritmos registradas en un Electrocardiograma.

#### Objetivos Específicos:

- Analizar el proceso de la Transformada Corta de Fourier en señales registradas en un Electrocardiograma.
- Explicar los diferentes tipos de señales observadas en un Electrocardiograma.
- Presentar un ejemplo del uso de la Transformada Corta de Fourier a un problema de señales de ritmos registradas en un Electrocardiograma a través del software matemático Matlab.

## IV: FUNDAMENTO TEÓRICO

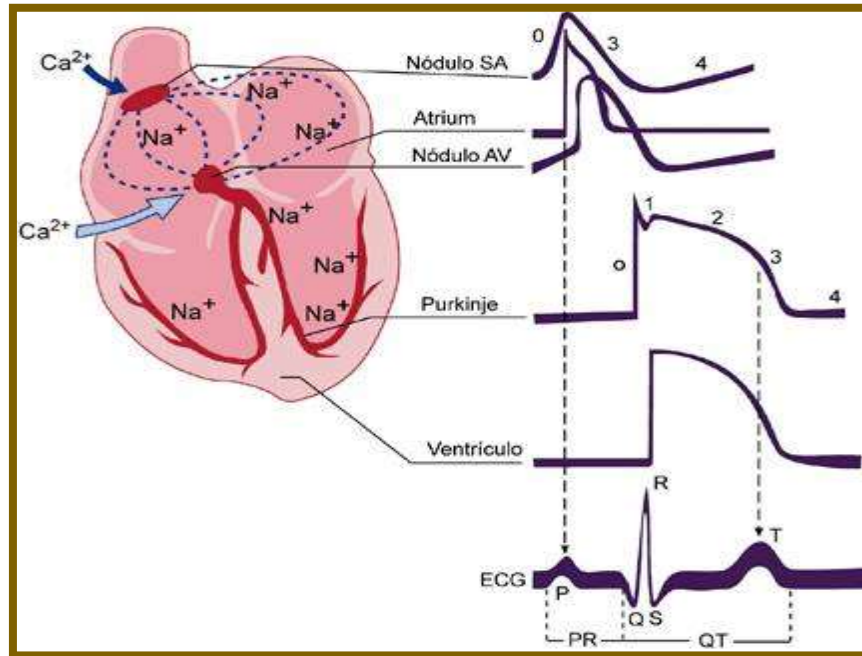
### Capítulo I

#### Anatomía del Corazón

El corazón bombea la sangre a todo el cuerpo y proporciona oxígeno a los órganos, tejidos y células. Existen dos circuitos que aportan la sangre: la circulación menor (pulmonar) y la circulación mayor (sistémica) que ejerce mayor presión sobre los vasos sanguíneos que la circulación pulmonar.

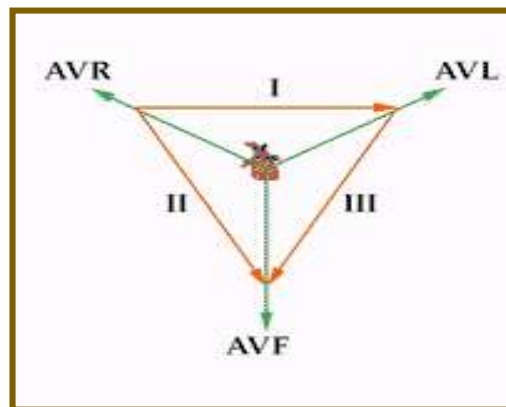
Para que la contracción cíclica del corazón se realice en forma sincrónica y ordenada, existe un sistema de estimulación y conducción eléctrica compuesto por fibras de músculo cardíaco especializadas en la transmisión de impulsos eléctricos. Aunque el corazón tiene inervación por parte del sistema nervioso simpático late aún sin estímulo de éste ya que, el sistema de conducción es auto excitable. Es por esto que el corazón sigue latiendo aun cuando lo extirpamos, para un trasplante de corazón.

Desde el punto de vista funcional el corazón conforma una cámara hueca de paredes musculares, que se encuentra dividida en 4 partes (dos aurículas y dos ventrículos) sus componentes principales en el sistema de conducción cardíaca son el nodo SA, el nodo AV, el haz de His, la ramificación de fascículos y las fibras de Purkinje, esto crea una señal que a su vez emite una corriente eléctrica que puede ser observada en un gráfico llamado Electrocardiograma (Figura 1).




**Figura 1**

El Electrocardiograma sigue patrones de los electrodos periféricos, los cuales forman los ángulos de lo que se conoce como triángulo de Einthoven. A partir de estos tres puntos obtenemos un punto imaginario V que es el baricentro del triángulo, localizado en el centro del pecho por encima del corazón (Figura 2).



**Figura 2**



En un triángulo equilátero de vértice inferior, tres ángulos representan esquemáticamente la posición de los electrodos de las derivaciones periféricas. Este triángulo permite construir un vector común que da la dirección del eje eléctrico del corazón y un vector que da la fuerza electromotriz en el instante considerado. Estas derivaciones, guardan una proporción matemática, reflejada en la Ley de Einthoven:  $D2=D1+D3$ .

Donde:

D1 o I: Vector en dirección a  $0^\circ$

D2 o II: Vector en dirección a  $60^\circ$

D3 o III: Vector en dirección a  $120^\circ$

## Capítulo II

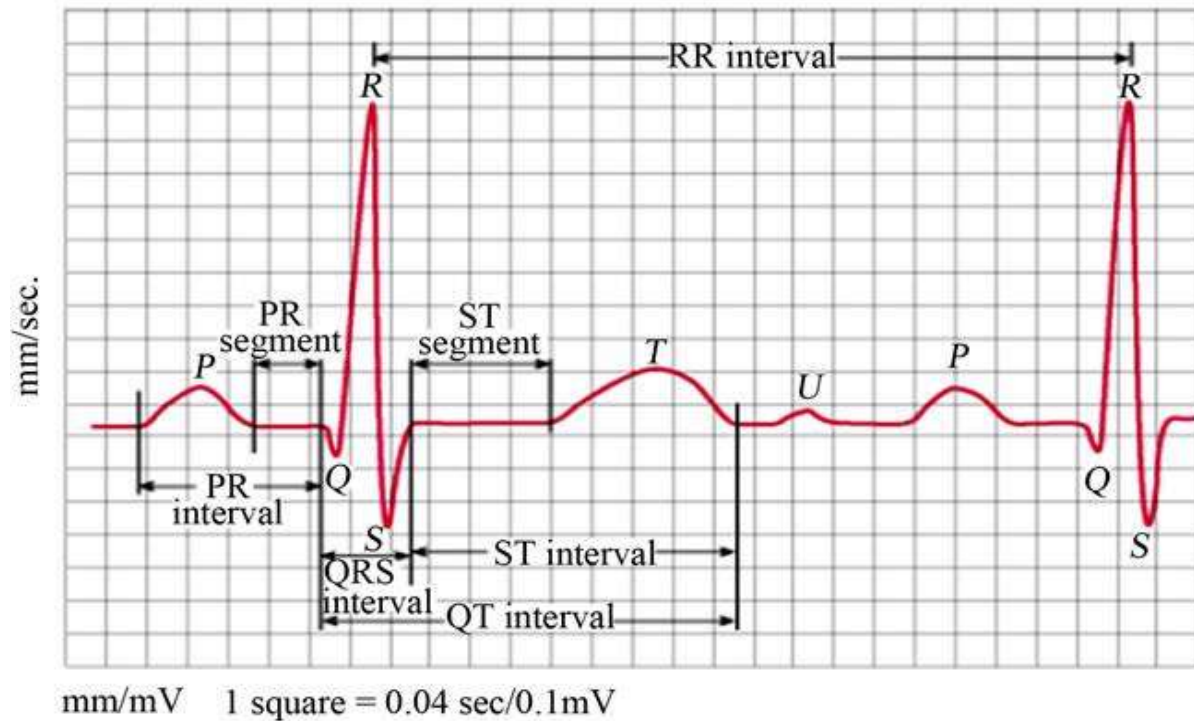
### Componentes del Electrocardiograma

El Electrocardiograma es la gráfica resultante de la actividad bioeléctrica del músculo cardíaco la cual es adquirida a través de un electrocardiógrafo.

En un Electrocardiograma, el trazo normal de un ciclo cardíaco se forma a partir de deflexiones tanto positivas como negativas en relación con la línea isoeleétrica, para así, poder comprender la actividad eléctrica del corazón, cada actividad anatómica del sistema de conducción corresponde a una porción de un registro eléctrico que puede ser en forma de ondas, segmentos e intervalos.

En un Electrocardiograma, el trazo normal de un ciclo cardíaco consta de una onda P, un complejo QRS y una onda T. Además, en más de un 50% de los casos también es posible que sea visible una deflexión positiva llamada onda U. El voltaje de la línea base del ECG, también es conocida como línea isoeleétrica o línea basal. Normalmente, la línea isoeleétrica es la porción de trazo que sigue a la onda T y precede a la siguiente onda P (Figura 3).





**Figura 3**

## 2.1 Tipos de ondas de un Electrocardiograma

### 2.1.1. Onda P

La onda P es la señal eléctrica que corresponde a la despolarización auricular, resulta de la superposición de la despolarización de la aurícula derecha (parte inicial de la onda P) y de la izquierda (final de la onda P). La repolarización de la onda P (llamada onda T auricular) queda eclipsada por la despolarización ventricular (Complejo QRS).



Para que la onda P sea sinusal (que provenga del nodo sinusal), debe reunir ciertas características:

- No debe superar los 0,25 mv (mili voltios). Si lo supera, estamos en presencia de un agrandamiento auricular derecho.
- Su duración no debe superar los 0,11 segundos en el adulto y 0,07-0,09 segundos en los niños. Si está aumentado posee un agrandamiento auricular izquierdo y derecho.
- Tiene que ser redondeada, de rampas suaves, simétricas, de cúspide roma y de forma ovalada.
- Tiene que preceder al complejo ventricular.

### 2.1.2. Complejo QRS

El complejo QRS es la representación gráfica de la despolarización de los ventrículos del corazón, formando una estructura picuda en el Electrocardiograma. Aparece después de la onda P y, por tener los ventrículos más masa que las aurículas cardíacas, el complejo QRS es de mayor tamaño que la onda P.

### 2.1.3. Onda T

La onda T representa la repolarización de los ventrículos. Durante la formación del complejo QRS, generalmente también ocurre la repolarización auricular que no se registra en el ECG normal, ya que es tapado por el complejo QRS. Eléctricamente, las células del músculo cardíaco son como muelles cargados; un pequeño impulso las dispara, despolarizan y se contraen. La recarga del muelle es la repolarización (también llamada potencial de acción).



En la mayoría de las derivaciones, la onda T es positiva. Las ondas T negativas, pueden ser síntomas de enfermedad.

El segmento ST conecta con el complejo QRS y la onda T. Puede estar reducido en la isquemia y elevado en el infarto de miocardio.

Su duración aproximadamente es de 0,20 segundos o menos y mide 0,5 mv


#### 2.1.4. Onda U

Esta onda es normalmente invisible, debido a que su deflexión es de bajo voltaje, usualmente positiva, que aparece después de la onda T o antes de una onda P.

## 2.2 Interpretación de un Electrocardiograma

En el cuerpo humano se generan una amplia variedad de señales eléctricas, provocadas por la actividad química que tiene lugar en los nervios y músculos que lo conforman. El corazón, por ejemplo, produce un patrón característico de variaciones de voltaje. El registro y análisis de estos eventos bioeléctricos son importantes desde el punto de vista de la práctica clínica y de la investigación. Los potenciales se generan a nivel celular, es decir, cada una de las células es un diminuto generador de voltaje.

Para que la contracción cíclica del corazón se realice en forma sincrónica y ordenada, existe un sistema de estimulación y conducción eléctrica, compuesto por fibras de músculo cardíaco especializadas en la transmisión de impulsos eléctricos.

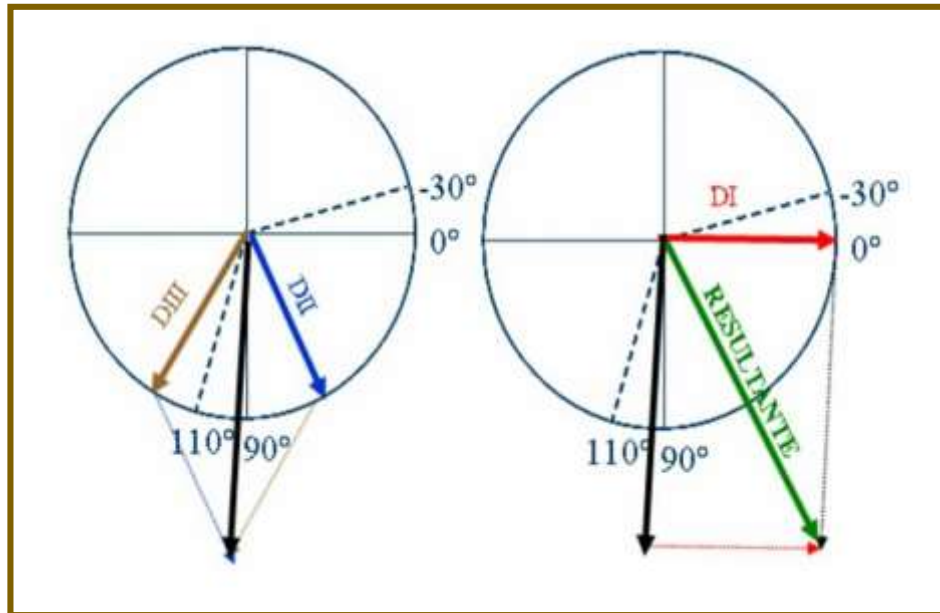


Para una adecuada interpretación de un Electrocardiograma deben revisarse distintos aspectos, ya que las deflexiones obtenidas son interpretadas de acuerdo con su amplitud y duración; tomando como referencia la cuadrícula del papel en el cual se imprime el Electrocardiograma, es importante señalar los siguientes aspectos:

### 2.2.1. El eje eléctrico del corazón

El eje eléctrico es el vector resultante del conjunto de la actividad eléctrica de cada ciclo cardíaco y representa la resultante eléctrica determinada por la despolarización de los ventrículos.

El cálculo del eje eléctrico puede realizarse a partir de las derivaciones DI, DII y DIII, midiendo desde la línea isoeletrica la magnitud para trazar los vectores, teniendo en cuenta el eje de cada derivación y así calcular el vector resultante, el cuál representará el eje eléctrico del corazón (Figura 4).




**Figura 4**

### 2.2.2. La frecuencia cardíaca

La frecuencia cardíaca es el número de contracciones del corazón o pulsaciones por unidad de tiempo. Se mide en condiciones bien determinadas.

En un hecho o suceso cíclico, la frecuencia es el número de veces que se repite el suceso dentro de la unidad de tiempo utilizada:

$$f = \frac{n \text{ veces}}{T}$$



Por lo tanto, como el evento cíclico que se mide aquí para el corazón es el número de latidos y el intervalo de tiempo utilizado para la medición es un minuto, la fórmula queda así:

$$f = \frac{n \text{ latidos}}{\text{minutos}}$$

El tiempo que existe entre dos ondas R sucesivas sirve para calcular la frecuencia cardiaca, parámetro que define la rapidez con la que se expande el impulso eléctrico del corazón. La frecuencia es considerada normal, si está entre 60 y 100 latidos por minuto.

Recordando que un segundo equivale a 5 cuadros de 5mm (cuadros grandes), luego en un minuto habrá 300 cuadros grandes y 1500 cuadros de 1mm (cuadros pequeños).

### 2.2.3. Complejo QRS

El complejo QRS corresponde a la corriente eléctrica que causa la contracción de los ventrículos derecho e izquierdo (despolarización ventricular), la cual es mucho más potente que la de las aurículas y compete a más masa muscular, produciendo de este modo una mayor deflexión en el Electrocardiograma.

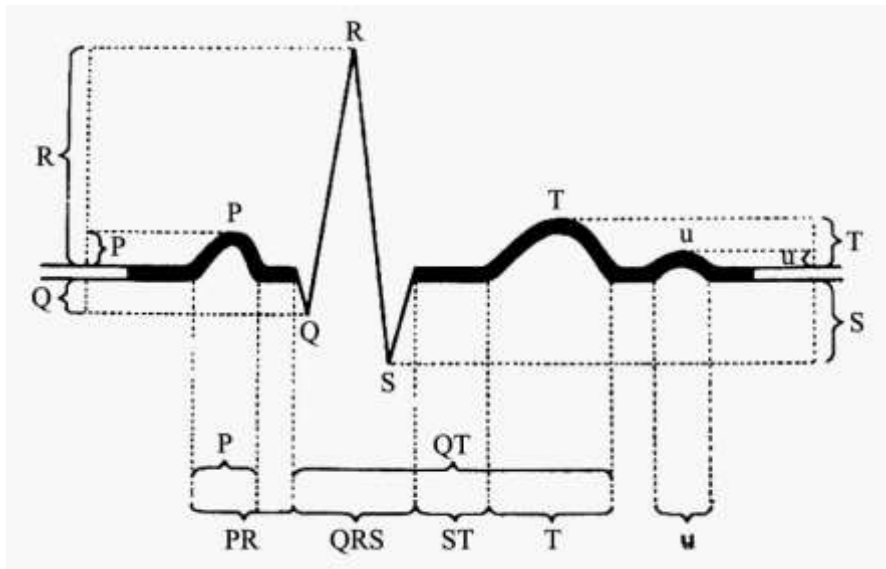
Las ondas Q que son demasiado anchas y profundas indican un infarto miocardio. Las ondas R y S indican contracción del miocardio. Las anomalías en el complejo QRS pueden indicar bloqueo de rama (cuando es ancha), taquicardia de origen ventricular, hipertrofia ventricular u otras anomalías ventriculares. La duración normal es de 60 a 100 milisegundos.

## 2.3 Pasos para interpretar de manera general un Electrocardiograma

Para una adecuada interpretación de la señal electrocardiográfica deben revisarse los siguientes aspectos en el orden que se muestra a continuación:

- Ritmo: se revisa que siga un patrón P, QRS, T.
- Frecuencia cardiaca: debe ser medida por los métodos expuestos.
- Eje eléctrico: el ángulo debe estar entre 0 y +110 grados.
- Onda P: debe considerarse su amplitud, voltaje y morfología.
- Intervalo PR: se mide su duración preferiblemente en DII.

- Complejo QRS: se mide en la derivación que presente el intervalo mayor, se tiene en cuenta su duración y morfología.
- Segmento ST: se establece el punto J, debe ser isoelectrico.
- Onda T: se debe considerar su morfología.
- Onda U: se busca su presencia en derivaciones precordiales.
- Intervalo QT: se calcula su duración.



**Figura 5**



## Capítulo III

### Transformada de Fourier Discreta

La Transformada de Fourier juega un papel importante en muchas ramas de la ciencia, en muchos casos brinda un significado físico tan preciso como el de las funciones de las cuales se deriva. En diversas ramas de la ciencia se conocía la teoría de Fourier no en forma matemática, sino como un conjunto de proposiciones acerca de un fenómeno físico.

Una Transformada de Fourier es una operación matemática que transforma una señal de dominio de tiempo a dominio de frecuencia y viceversa. Estamos acostumbrados a señales con dominio de tiempo en la vida cotidiana. En el dominio de tiempo, la señal se expresa con respecto al tiempo. En el dominio de frecuencia, una señal es expresada con respecto a la frecuencia.

Con el análisis de Fourier es posible descomponer una señal en diferentes sinusoides de diferentes frecuencias; de esta manera se puede obtener información acerca de la forma como está distribuida la energía de una señal a través de sus distintos componentes.

Al tomar la TF de una señal, la función espacio de la señal “rota” del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, se conoce como análisis de Fourier y se representa de la siguiente manera:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Es decir, se supone que cualquier función dada tiene dos modos equivalentes de representación: Uno, con el dominio del tiempo,  $f(t)$ , y el otro, en el dominio de la frecuencia  $F(\omega)$ .

### 3.1. Propiedades de la Transformada de Fourier Discreta

#### 3.1.1. Linealidad

Si  $\mathcal{F}(w) + G(w)$  es respectivamente, la Transformada de Fourier de las funciones  $f(t)$  y  $g(t)$ , entonces la Transformada de Fourier de la función  $\alpha f(t) + \beta g(t)$ ; (donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos constantes arbitrarias), es la función  $\alpha \mathcal{F}(w) + \beta G(w)$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \alpha \mathcal{F}(w) + \beta G(w)\end{aligned}$$

■

#### 3.1.2. Cambio de escala o escalonamiento

La propiedad cambio de escala o de escalonamiento de la Transformada de Fourier, afirma que la contracción en el dominio del tiempo es equivalente a la expansión en el dominio de la frecuencia y viceversa; esto es, si la función  $f(\alpha t)$  representa la función,  $f(t)$  contraída en la escala del tiempo por un factor  $\alpha$  (donde  $\alpha$  es una

constante real), y la función  $\mathcal{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$  representa la función  $f(\omega)$  expandida en la escala de frecuencia por el mismo factor  $\alpha$ , donde  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , se cumple que  $\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ .

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt$$

Haciendo uso del cambio de variable, tenemos:

$$\text{Sea } \alpha t = x$$

Ahora, sustituyendo en la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega\left(\frac{x}{\alpha}\right)} \frac{1}{\alpha} dx$$

Para este caso, tomaremos en cuenta:

1. Si  $\alpha > 0$
2. Si  $\alpha < 0$

Para  $\alpha > 0$

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega\left(\frac{x}{\alpha}\right)} \frac{1}{\alpha} dx$$

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)x} dx$$

Puesto que la variable  $x$  se puede representar por cualquier otro símbolo, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(\alpha t)] &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)t} dt \\ &= \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

■

Para  $\alpha < 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(\alpha t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega\left(\frac{x}{\alpha}\right)} \frac{1}{\alpha} dx \\ \mathcal{F}[f(\alpha t)] &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)x} dx \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_{\infty}^{-\infty} f(t) e^{-j\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)t} dt \\ &= \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

■

### 3.1.3. Transformada de la conjugada

La propiedad de la Transformada conjugada de Fourier de una señal se obtiene mediante la combinación de los conjugados de las oscilaciones, esto es:

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$$

Ahora, por la propiedad de escalonamiento, se tiene:

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Haciendo  $\alpha = -1$

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$$

■

Otra forma de demostrar esta propiedad es,

La Transformada de Fourier de  $f(-t)$  es:

$$\mathcal{F}[f(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-j\omega t} dt$$

Haciendo un cambio de variable

$$-t = x$$

Sustituyendo en la integral:



$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(-t)] &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(-x)} dx \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{j\omega x} dx \\
 &= \int_{\infty}^{-\infty} f(t)e^{j\omega t} dt \\
 &= F(-\omega)
 \end{aligned}$$

■

### 3.1.4. Desplazamiento en el tiempo (o corrimiento del tiempo)

El desplazamiento en el tiempo muestra que un deslazo en el tiempo es equivalente a un deslazo de fase lineal en la frecuencia, ya que el contenido de la frecuencia depende solamente de la forma de la señal el cual es invariable en el deslazo en el tiempo, esto quiere decir que si

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)], \text{ entonces, } \mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

La Transformada de Fourier requerida es:

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt$$

Haciendo un cambio de variable,  $t - t_0 = x$  ;  $t = x + t_0$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x} \cdot e^{-j\omega t_0} dx \\
 &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x} dx \\
 &= e^{-j\omega t_0} F(\omega)
 \end{aligned}$$

■

### 3.1.5. Desplazamiento de la frecuencia (o modulación)

El desplazamiento de la frecuencia es aquel que desplaza una señal a diferentes frecuencias, y esto es lo que permite mayor ventaja en los diferentes espectros de electromagnetismo.

Si  $\omega_0$  es una constante real y  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , entonces,

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

La Transformada de Fourier requerida es

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt$$

$$= F(\omega - \omega_0)$$

■

### 3.1.6. Propiedad de simetría (o dualidad)

La propiedad de dualidad puede emplearse para la deducción de más propiedades de la Transformada de Fourier, ya que si hay características temporales que tienen implicaciones en el dominio de la frecuencia, esas mismas características aplicadas al dominio frecuencia tienen análogas implicaciones en el dominio del tiempo.

Si se comparan las expresiones de la Transformada de Fourier y su operación inversa se ven ciertas similitudes que nos llevan a la propiedad de dualidad, cuyo enunciado es:

Si  $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ , entonces,  $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$

Sabemos por la Transformada de Fourier que:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$



Ahora tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Sea  $t = \omega \rightarrow dt = d\omega$

Sustituyendo en la integral:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{-j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{j(-\omega)t} d\omega \\ &= 2\pi f(-\omega) \end{aligned}$$

Porque

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \rightarrow 2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} dt$$

■

### 3.1.7. Teorema de la Convolución


El teorema de la convolución establece que bajo determinadas circunstancias, la Transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es el producto punto a punto de sus Transformadas. En otras palabras, la convolución la podemos enunciar de la siguiente manera: “Dadas dos funciones  $f(t)$  y  $g(t)$ , que tienen como Transformada Discreta de Fourier a la función  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$  respectivamente, si  $z(t)$  es la función que resulta del producto de convolución de las funciones  $f(t)$  y  $g(t)$ , su Transformada Discreta  $Z(\omega)$  en un dominio, es equivalente al producto punto a punto en el otro dominio.

Sea  $f(t)$  y  $g(t)$  dos funciones cuya convolución se expresa con  $f(t) * g(t)$  y se define como la integral:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Esto establece que la Transformada de Fourier de una convolución, va a ser el producto directo de las Transformadas de las funciones, si tenemos dos funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  cuya convolución se va a expresar como  $z(t)$ , entonces, tendríamos que las Transformadas respectivas  $f(t)$  y  $g(t)$  van a ser  $F(\omega)$  y  $G(\omega)$

$$f(t) * g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)G(\omega)$$



Este teorema es de gran utilidad para el cálculo de la Transformada de Fourier, como, por ejemplo, en el cálculo de la Transformada de Fourier de una señal periódica.

Una manera de obtener una representación en el dominio de la recurrencia de funciones periódicas  $f(t)$  es a través de la serie de Fourier, sin embargo, la Transformada de Fourier nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones no periódicas.

## Capítulo IV

### Transformada Corta de Fourier

La Transformada Corta de Fourier es el método más utilizado para el estudio de señales no estacionarias. La idea es simple, supóngase que se escucha una banda por más de una hora donde al inicio de ésta se escuchan liras, luego redobles y al final de ésta escucha tambores. Si se hace un análisis de Fourier durante toda la hora, el espectro de energía mostrará las frecuencias correspondientes a las liras, redobles y tambores. Esto indicará de cierto modo, que realmente existían las liras, redobles y tambores, pero esto no indica cuando fueron ejecutados.

Si dividimos la hora en segmentos de diez minutos y procedemos a realizar un análisis de Fourier en los intervalos, podremos examinar cada espectro que se repite en el segmento, donde encontraremos en qué intervalo tocan cada instrumento.

La idea básica de la Transformada Corta de Fourier es dividir la señal en pequeños segmentos y realizar un análisis de Fourier por cada uno de éstos y a la vez, encontrar las frecuencias que existen en ellos (La totalidad de cada espectro indica como este varía con el tiempo).

Para estudiar las propiedades de las señales en el período  $t$ , se toma en cuenta la señal en el tiempo en determinado intervalo, luego se suprime la señal en los demás momentos. Esto es logrado por la multiplicación de la señal por una función ventana.

El término de ventaneo viene de la idea que se está buscando mirar solo una pequeña parte de la señal, como si se mirara a través de una ventana hacia el exterior y solo observamos una porción del escenario


## Capítulo V

### Señales Electrocardiográficas

Las señales electrocardiográficas (ECG) es un registro de actividades eléctricas cardiacas provocadas por movimientos que tienen su ubicación en los músculos y nervios que lo integran, este análisis constituye un elemento importante en la realización de diferentes tareas de diagnósticos automatizados.

La naturaleza eléctrica de las señales que maneja el corazón para coordinar sus movimientos permite estudiar su comportamiento midiendo voltajes que pueden registrarse desde distintos puntos de la superficie del cuerpo. Los Electrocardiogramas son registros gráficos de las corrientes que circulan en el corazón. Éstos son útiles, porque proveen información acerca de:

- Orientación anatómica del corazón.
- Tamaño relativo de las cámaras.
- Trastornos del ritmo y de la conducción.
- Existencia y evolución de isquemias.
- Alteración de los electrolitos.



Los pasos del potencial de acción a través de las células cardíacas generan formas de onda, las cuales, sumadas entre sí, generan una gráfica electrocardiográfica; dicha señal puede interpretarse de acuerdo con la derivación con la que es captada, ya que cada una de éstas, representan la lectura de la magnitud y dirección de los vectores del potencial de acción desde distintos lugares de referencia.

## 5.1. Tipos de señales electrocardiográficas

La electrocardiografía representa los cambios en el potencial de acción ocurridos durante el ciclo cardíaco, el cual se da mediante el estudio del ECG, por esto, es importante identificar que las señales producidas por los Electrocardiogramas son de tipo no estacionaria ya que su frecuencia varía en el tiempo.

### 5.1.1. Señal producida por interferencia de línea de potencia:

Ésta consiste en una señal de 60 Hz y sus armónicos, que pueden ser modelados como combinaciones de sinusoides, posee normalmente una amplitud superior al 50% de la amplitud pico a pico del ECG.

### 5.1.2. Señal desconectada:

Está dada por un ruido transitorio, causado por las pérdidas de contacto entre el electrodo y la piel, la cual efectivamente desconecta el sistema de medición del sujeto.

### 5.1.3. Señal transitoria:

Estos son cambios transitorios en la señal del ECG, causados por variaciones en la impedancia electrodo-piel que se dan por artefactos en movimientos, provocando así una reacción en los electrodos.

### 5.1.4. Señal de contracción muscular:

Las señales resultantes de la contracción muscular pueden ser asumidas como quiebres transitorios. Este ruido, se puede apreciar con claridad en el espectro de la señal.

### 5.1.5 Señal electro-quirúrgica:

Ésta destruye completamente el ECG y puede ser representada como una gran cantidad de sinusoides con frecuencias, aproximadamente, entre 100Hz y 900Hz.

## Capítulo VI


### Introducción al análisis tiempo-frecuencia

El análisis electrocardiográfico fue una de las primeras áreas de la medicina donde se introdujo el procesado digital de la señal. Poco tiempo después, se hizo evidente que la interpretación digital dependía en gran medida de la precisión de las mediciones realizadas. Por ello, la precisión en el procesado de las señales cardíacas se ha vuelto imprescindible. Además, los avances teóricos en dicho campo han contribuido en gran manera a una nueva forma de entender la señal del ECG y sobre todo, sus propiedades dinámicas.

Actualmente, ningún sistema ofrece un análisis universal de la señal ECG, sino que cada sistema está diseñado para procesar señales registradas en condiciones particulares. Sin embargo, todos los sistemas tienen en común un conjunto de algoritmos, para: acondicionar la señal respecto a diferentes tipos de ruido, extraer las medidas básicas del ECG de amplitud de onda y duraciones, y comprimir datos para un almacenamiento y transmisión eficiente.

La señal del ECG consta de una cantidad importante de redundancia, causada por la correlación entre muestras adyacentes, la recurrencia de los latidos del corazón con morfología similar y la semejanza relativa entre diferentes derivaciones. Se puede ahorrar mucho, tanto en su almacenamiento como a la hora de transmitir la señal, representando los diferentes tipos de redundancia con menos *bits* que la señal original. Sin embargo, la compresión de datos sólo es aceptable cuando la totalidad de la información de diagnóstico deseada se conserva en la señal reconstruida. Hay dos tipos de técnicas de compresión:



- 
- - Compresión sin pérdidas: En relación con la compresión de señales cardíacas, éste método es ineficaz para conseguir elevadas tasas de compresión, por lo que no es adecuado.
  - Compresión con pérdidas: Es el utilizado normalmente para la compresión de señales cardíacas.

Debido a que la señal del complejo QRS, está interpretada y graficada en el tiempo, la técnica matemática más recomendada es obtener la Transformada Corta de Fourier, para que así el análisis en frecuencia en tiempo continuo y discreto pueda reducir el ruido.

La localización de un complejo QRS es una información básica para todos los tipos de procesados de señales ECG. El diseño de un detector de complejos QRS es de crucial importancia, ya que un rendimiento pobre en la detección de complejos QRS se puede propagar a etapas de procesamiento posteriores y, en consecuencia, limitar el rendimiento global del sistema. Los latidos no detectados, constituyen un error más grave que falsas detecciones; el primer tipo de error puede ser difícil de corregir en una fase posterior de procesamiento, mientras que las falsas detecciones pueden ser eliminadas mediante un algoritmo.

## Capítulo VII

### Ventaneado

Las ventanas son funciones matemáticas usadas con frecuencia en el análisis y el procesamiento de señales para evitar las discontinuidades al principio y al final de los bloques analizados.

En procesamiento de señales, una ventana se utiliza cuando nos interesa una señal de longitud voluntariamente limitada. En efecto, una señal real tiene que ser de tiempo finito; además, un cálculo sólo es posible a partir de un número finito de puntos. Para observar una señal en un tiempo finito, la multiplicamos por una función ventana.

Se divide la señal en fragmentos cortos (short time), delimitados en el tiempo por una función ventana. Una ventana no es nada más que un tipo específico de envolvente que se aplica para un análisis espectral. La duración de la ventana está normalmente comprendida entre 1 ms y 1s, y los segmentos a veces se solapan. A través del análisis espectral individual de cada segmento inventaneando, se obtiene una secuencia de medidas (de espectros) que constituyen el espectro variable a lo largo del tiempo o sonograma.

## 7.1. Operación del enventaneado

El troceado consiste en dividir la señal discreta, ya rectificadas y filtradas, en trozos de longitud  $N$ , siendo  $N$  el número de puntos que se van a utilizar en la FFT posterior.

Con el fin de evitar las fugas espectrales, es decir, que parte de la energía de la DFT se pierda en los lóbulos secundarios en lugar de estar concentrada en la frecuencia de interés, se va a enventanear la señal ya troceada. Para ello, se va a utilizar una ventana Hamming.

Una vez realizado el troceado y enventaneado, la señal cardíaca está preparada para el segundo bloque general, el procesado. Este procesado consiste en un bloque que realiza una Transformación matemática llamada, Transformada Corta de Fourier.

Por ejemplo:

Dado el ancho y definición de la función ventana  $w(t)$ , se requiere inicialmente que el área de la función ventana sea ajustada, así que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) d\tau = 1$$

Es fácil deducir que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) d\tau = 1, \forall t$$

Y

$$x(t) = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} w(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t - \tau) d\tau$$

La Transformada de Fourier continua es:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Sustituyendo  $x(t)$  de arriba:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t - \tau) e^{-j\omega t} d\tau dt \end{aligned}$$

Cambiando el orden de integración:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t - \tau) e^{-j\omega t} dt d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau, \omega) d\tau$$

## 7.2. Tipos de funciones ventanas

Existen distintos tipos de ventana que permiten obtener diferentes resultados en el dominio de las frecuencias. En este documento haremos énfasis en la ventana Hamming que es la que usaremos.

### 7.2.1 Ventana Hamming

La ventana que se estudia a continuación lleva el nombre de Richard Hamming y se le suele denominar también ventana de coseno elevado.

Esta ventana tiene un comportamiento temporal de medio ciclo de una señal cosenoidal y normalizado en amplitud a la unidad. Esta ventana se caracteriza por el argumento  $N$  impar. Su ecuación es la siguiente y genera  $N$  muestras:

$$H(n) = 0.54 + 0.46 \cos \left[ \frac{(2n - N)\pi}{N - 1} \right]$$

Así, al multiplicar una señal  $s(t)$  por esta ventana, se obtienen únicamente los  $T$  primeros segundos de la señal: se observa la señal en un intervalo  $T$ . En vez de estudiar la señal  $s(t)$ , se estudia la señal truncada.

## Capítulo VIII

### La Transformada Corta de Fourier a través del software MATLAB

En Matlab, la Transformada Corta de Fourier viene dada a través de:

$Y = fft(x)$  y la Transformada Inversa  $y = ifft(X)$ , donde

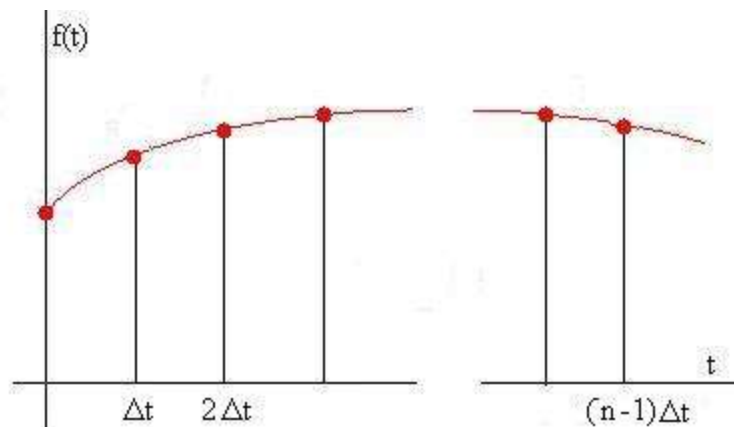
$$X(n) = \sum_{k=1}^N x(k) e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)(n-1)(k-1)}$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(n) e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)(n-1)(k-1)}$$

Si tenemos una señal descrita por un conjunto de  $n$  (potencia de dos) pares de datos  $(t_j, x_j)$  igualmente espaciados en el tiempo, por un intervalo  $\Delta t$ , desde  $t = 0$  hasta  $t_{final} = (n - 1)\Delta t$ . La inversa del intervalo  $\Delta t$ , se denomina frecuencia de muestreo  $f_s$ . De modo que el vector de tiempos es  $t = (0:n - 1)/f_s$ .

La función  $fft$  de MATLAB convierte un vector de valores de la señal  $x$  en función del tiempo  $t$  en un vector  $g$  en función de la frecuencia  $\omega$ .

$$g = fft(x)$$



**Figura 6**

$g$  es un vector cuyos elementos son números complejos porque guarda información acerca de la amplitud y de la fase. Ahora tenemos que asociar cada elemento del vector  $g$  con una frecuencia, del mismo modo que hemos asociado cada elemento del vector  $x$  con un tiempo.

El intervalo de frecuencias es  $\Delta\omega = 2\pi/(n \cdot \Delta t) = 2\pi f_s/n$ , de modo que la mínima frecuencia es 0 y la máxima  $\omega_{max} = 2\pi f_s(n-1)/n$ . La resolución espectral  $\Delta\omega$  es inversamente proporcional al tiempo total  $n \cdot \Delta t$  de recogida de datos en la serie temporal.

Se observará el siguiente ejemplo:

Aplicar la función MATLAB `fft` para determinar la Transformada Discreta de Fourier para una simple senoide:

$$f(t) = 5 + \cos(2\pi(12.5)t) + \sin(2\pi(18.75)t)$$

```
>> clc
>> n=8; dt=0.02; fs=1/dt; T = 0.16;
>> tspan=(0:n-1)/fs;
>> y=5+cos(2*pi*12.5*tspan)+sin(2*pi*31.25*tspan);

>> subplot(3,1,1);
>> plot(tspan,y,'-ok','linewidth',2,'MarkerFaceColor','black');
>> title('(a) f(t) versus time (s)');

>> Y=fft(y)/n;
>> Y'
```

ans =

5.0000
0.0000 - 0.0000i
0.5000
-0.0000 + 0.5000i
0
-0.0000 - 0.5000i
0.5000
0.0000 + 0.0000i



## V. DISEÑO METODOLÓGICO

El presente trabajo tiene como finalidad poder identificar las señales registradas por el ritmo cardíaco y la aplicación de la Transformada Corta de Fourier a un problema de señales electrocardiográficas. En este contexto, haremos un estudio descriptivo y conceptual de este tema.

Aplicando las definiciones, técnicas y procesos de las señales electrocardiográficas mediante la Transformada Corta de Fourier, daremos solución a los objetivos planteados.

Para la fase exploratoria del trabajo se consultó libros, apuntes de la clase de Facultativa y documentos de la web.

Se recopiló la información de tal forma que fuera útil para identificar la importancia del uso de la Transformada de Fourier en las señales producidas por los Electrocardiogramas, y a la vez deducir de forma práctica la información que éstos nos brindan, para darle una solución óptima a nuestros objetivos, abarcando lo práctico y lo conceptual respecto al tema.

Mediante un ejemplo de señal electrocardiográfica, tomando como referencia la señal producida en su hoja de medición:

- a. Identificaremos los componentes de un Electrocardiograma.
- b. Reconoceremos los tipos de señales electrocardiográficas presentes en un Electrocardiograma.
- c. Haremos un análisis tiempo-frecuencia, de la señal producida por un Electrocardiograma, mostrando así, el funcionamiento de la aplicación de la Transformada Corta de Fourier, utilizando la operación del inventaneado y apoyándonos del software matemático Matlab.

## VI. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

A lo largo de la historia el ser humano ha descubierto distintos patrones simétricos, tales como lo es el cuerpo humano. En nuestro mundo a menudo recurren a una poderosa herramienta como lo es la Matemática, esperando descubrir una mayor explicación para las necesidades existentes de la vida cotidiana.

Los problemas cardíacos a lo largo del tiempo han sido de mucha relevancia, debido a la gran cantidad de muertes ocasionadas por ellos. Es por eso que analizaremos los resultados mostrados por la Aplicación de la Transformada Corta de Fourier en el siguiente Electrocardiograma realizado en el Hospital Carlos Roberto Huembés.

HOSPITAL CARLOS ROBERTO HUEMBES

DR. JUSTO LOPEZ

Apellidos : N E M NARCISO ESPINOZA M Sexo: M.  
 Número : NANC 19580208 1  
 Dirección : REPARTO MOHBERAT CASA # 141, CHINANDZGA  
 Nacido el : 05/02/1958 (45a) Altura: 145 Peso: 268  
 Registrado : 23/10/2003 11:00 26.5 ms/seg. 10.0mm/mV Filtro  
 Comentario :

Ritmo cardíaco = 85  
 P\* = 107 msq PQ = 147 msq  
 QRS = 113 msq QT = 408 msq QTc = 476 msq  
 QTd = 63 msq  
 R/DRS/T Ejes = 58°/-11°/-16°

INTERPRETACION AUTOMATICA NO CONFIRMADA:

sinus rhythm  
 left axis deviation  
 slight intraventricular conduction delay  
 slight inferior repolarization disturbance, consider ischemia, LV overload or aspecific change  
 small negative T in aVF  
 with negative T in III

findings of dubious pathological significance

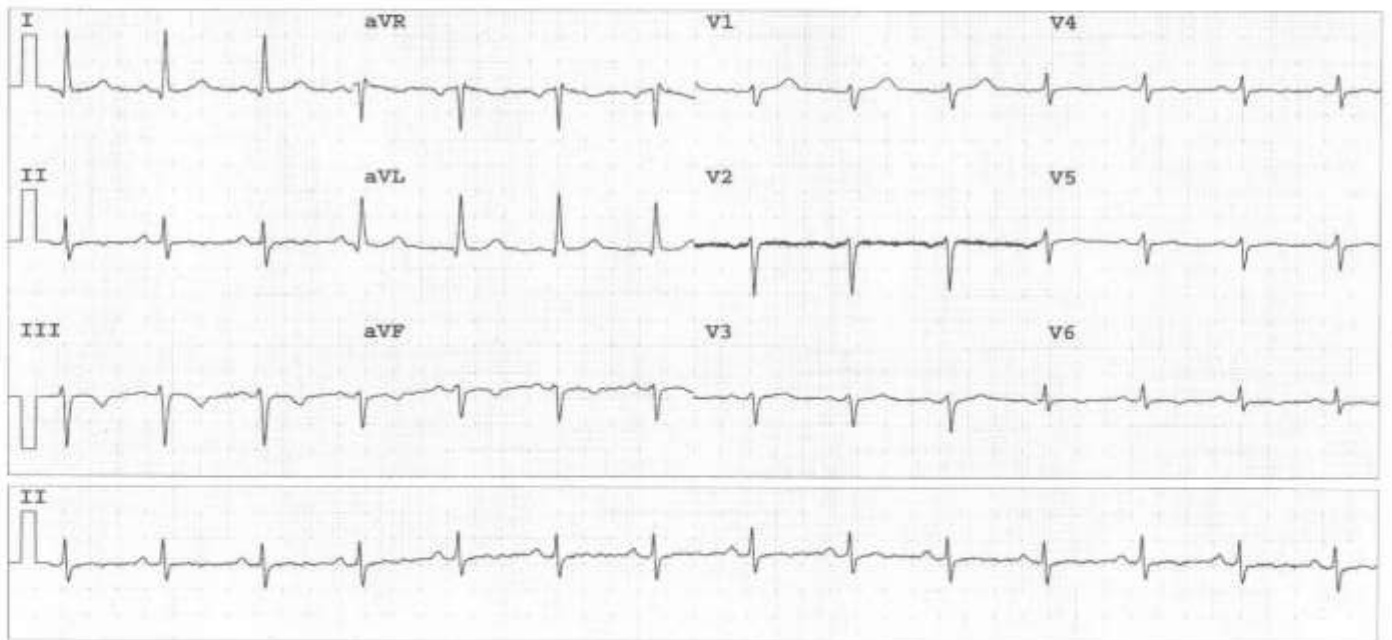



Figura 7



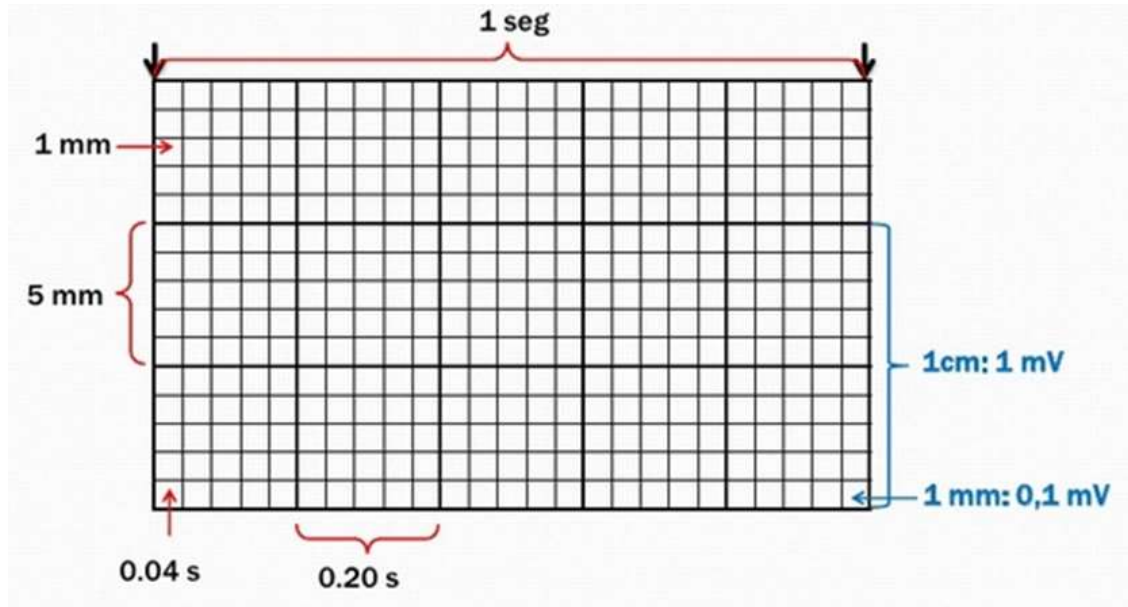
El Electrocardiograma en estudio presenta el registro gráfico de la actividad eléctrica de un corazón, cada actividad anatómica del sistema de conducción de este corazón corresponde a una porción del registro eléctrico que se puede identificar en la señal.

Las distintas ondas, deflexiones positivas y deflexiones negativas presentes en la señal se pueden observar a través de la línea isoelectrica. La frecuencia cardíaca presente en el Electrocardiograma en estudio es de 85 latidos por minutos. Sin embargo, vale destacar que la frecuencia cardíaca no determina el riesgo de muerte de un paciente, es decir, no es un factor que aumente o disminuya la mortalidad. El riesgo de tener enfermedades cardiovasculares depende de la existencia de factores de riesgos cardiovasculares.

Tomando como referencia la señal no estacionaria, identificada en la (Figura 7) se procede a particionar dicha señal.

Las particiones consistirán en dividir la señal, en trozos de longitud  $N$ , siendo  $N$  el número de puntos que se van a utilizar en la Transformada Corta de Fourier posteriormente. Es importante mencionar que, si al trocear la última parte de la señal el número de muestras es insuficiente para construir una ventana de  $N$  puntos, tales muestras se desechan.

Para trocear o dividir la señal en pedazos pequeños es importante tomar en cuenta que en general la hoja de un Electrocardiograma se divide de la siguiente manera:



**Figura 8**

Es decir, cada cuadrado pequeño tiene una longitud de 1 mm y la señal dura 0.04 s en él, a su vez cinco cuadrados pequeños hacen un cuadro grande de 5 mm. Se toma como referencia las muestras establecidas en la hoja del Electrocardiograma (ver Figura 8) cada 1 mm, es decir las pulsaciones establecidas y registradas en cada 0.04 s.

Del Electrocardiograma se contó con 144 muestras de pulsaciones. Tomando en cuenta que la división del troceado en  $N$  pedazos de la señal tiene que ser igual a los  $N$  puntos de la Transformada Rápida de Fourier, se definió como se presenta a continuación:

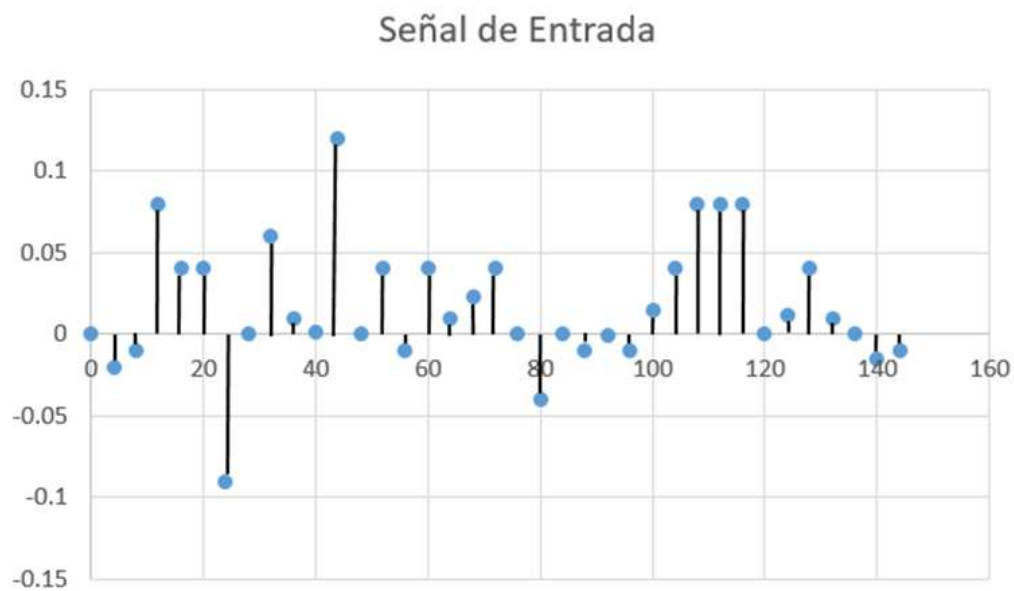


SE: Señal de entrada

$SE_n$ : Señal de entrada de la ventana n

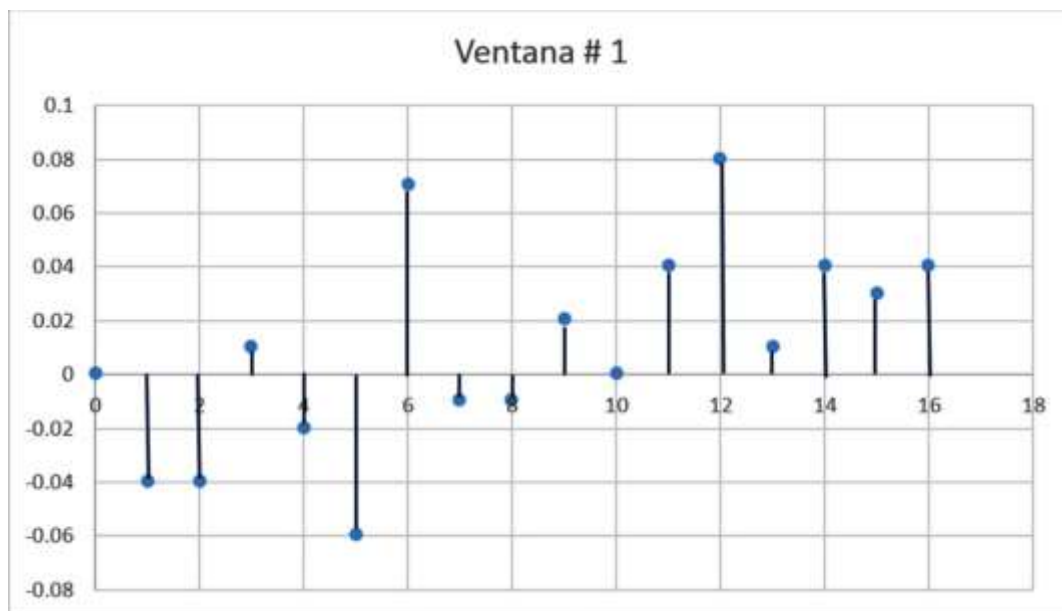
Donde n: 1,2, ... 9; siendo n el número de ventana

Teniendo como referencia el Electrocardiograma en estudio, se observa las señales de entrada total.

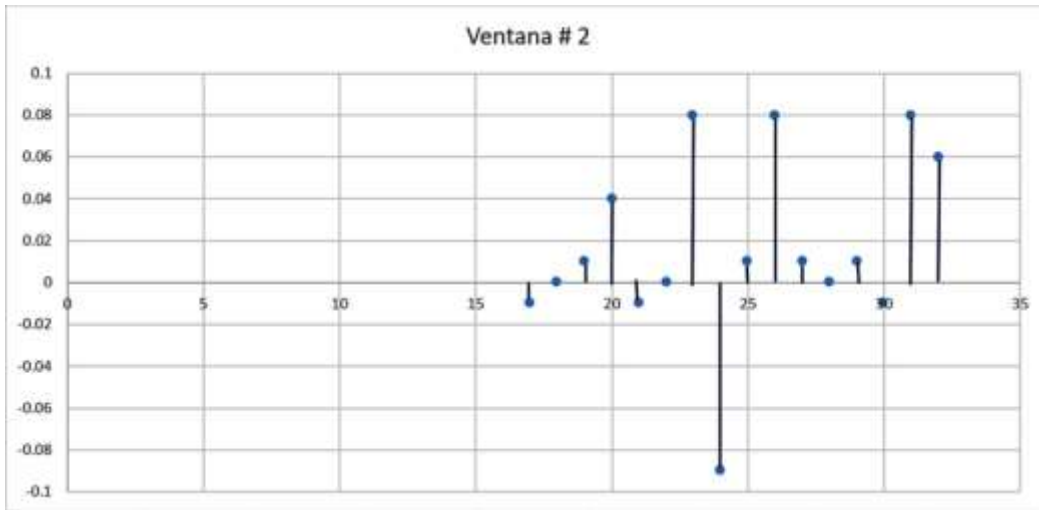


**SE:** En esta gráfica se refleja el comportamiento de la señal electrocardiográfica en estudio, tomando como referencia los QRS del Electrocardiograma.

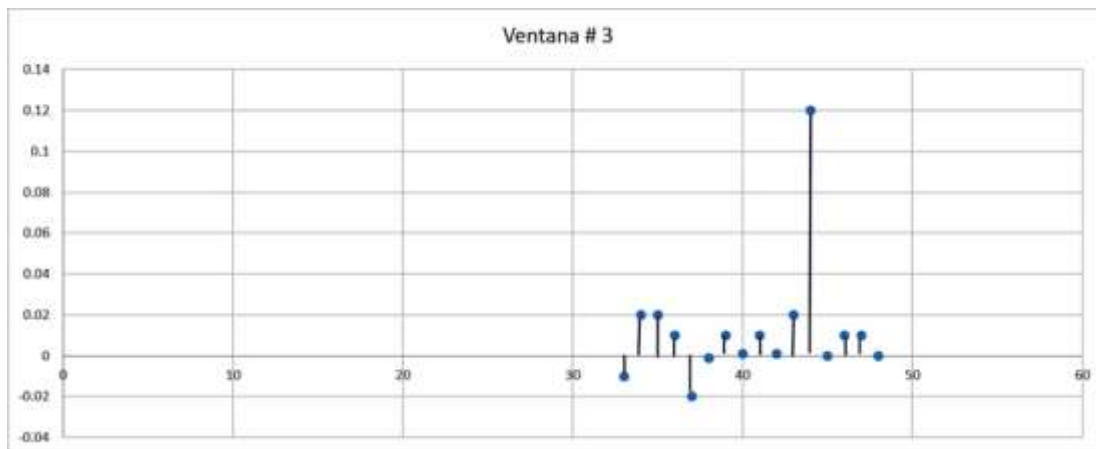
Una vez obtenida la señal de entrada completa, se procede a obtener la señal por ventanas. Las ventanas desde el número uno al número nueve nos refleja la señal de entrada que se registra en los distintos espacios de tiempo, cada una de ellas es distinta y se puede observar la variación de signo de las deflexiones y ondas QRS.



**SE<sub>1</sub>:** En esta señal de entrada de la ventana 1 podemos observar complejos QRS de mayor alcance y en su mayoría deflexiones positivas.

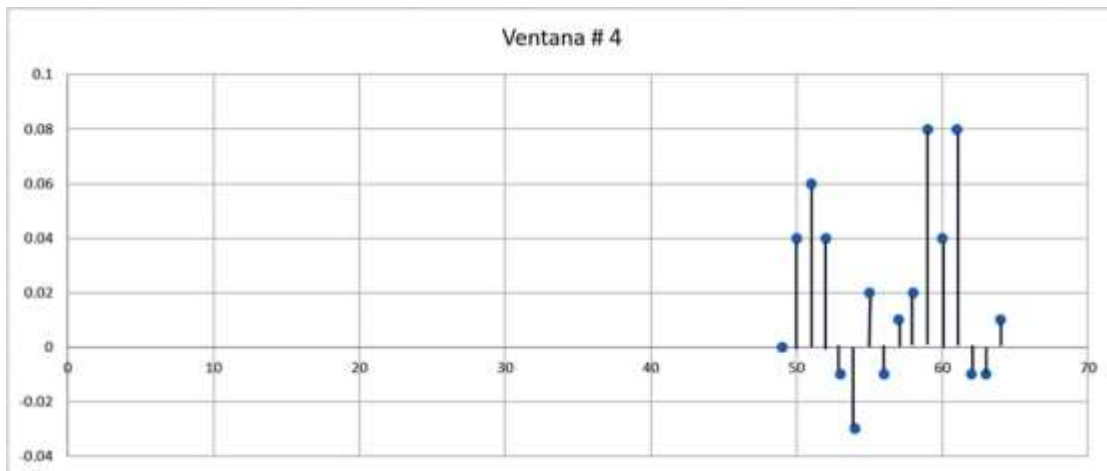


**SE<sub>2</sub>**: Señal de entrada de la ventana 2 con un comportamiento de QRS con alcance alto.

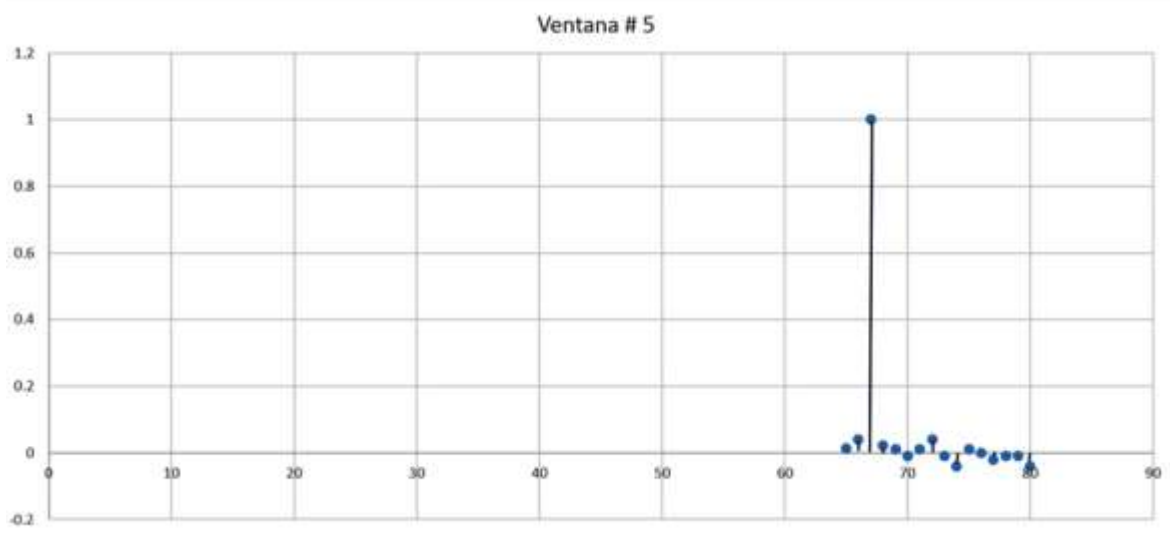


**SE<sub>3</sub>**: Señal de entrada de la ventana 3 con un comportamiento de QRS pequeños en su mayoría.

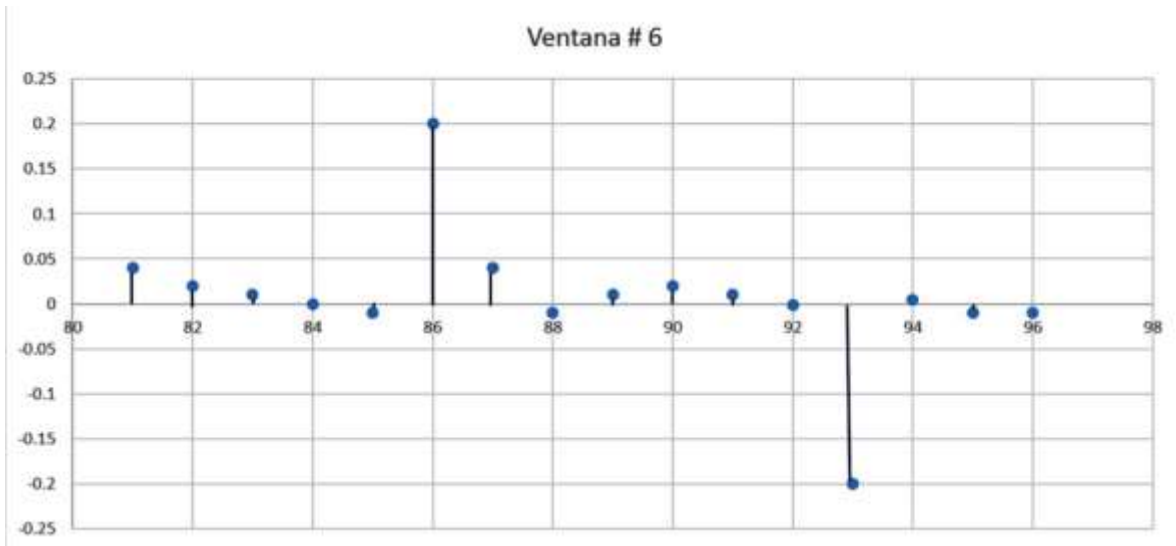




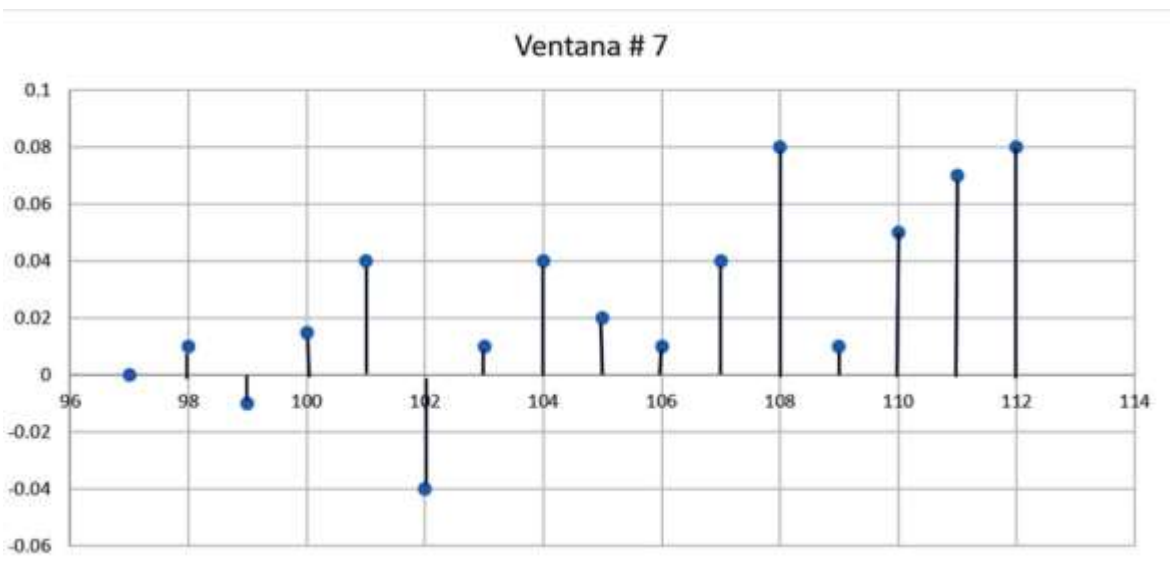
**SE<sub>4</sub>**: Señal de entrada de la ventana 4 con QRS prolongados y deflexiones positivas.



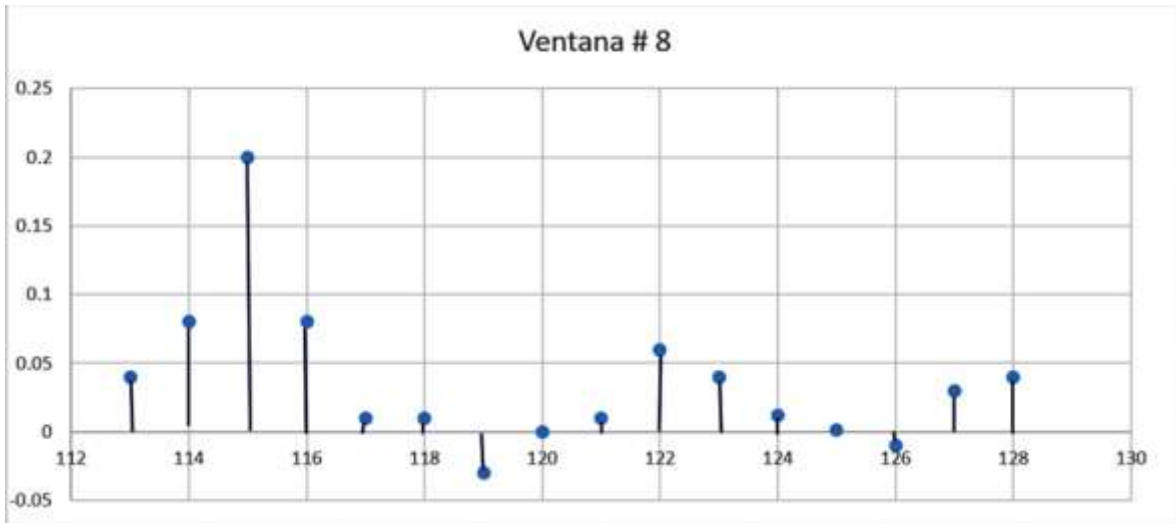
**SE<sub>5</sub>**: Señal de entrada de la ventana 5 con un comportamiento de QRS muy corto.



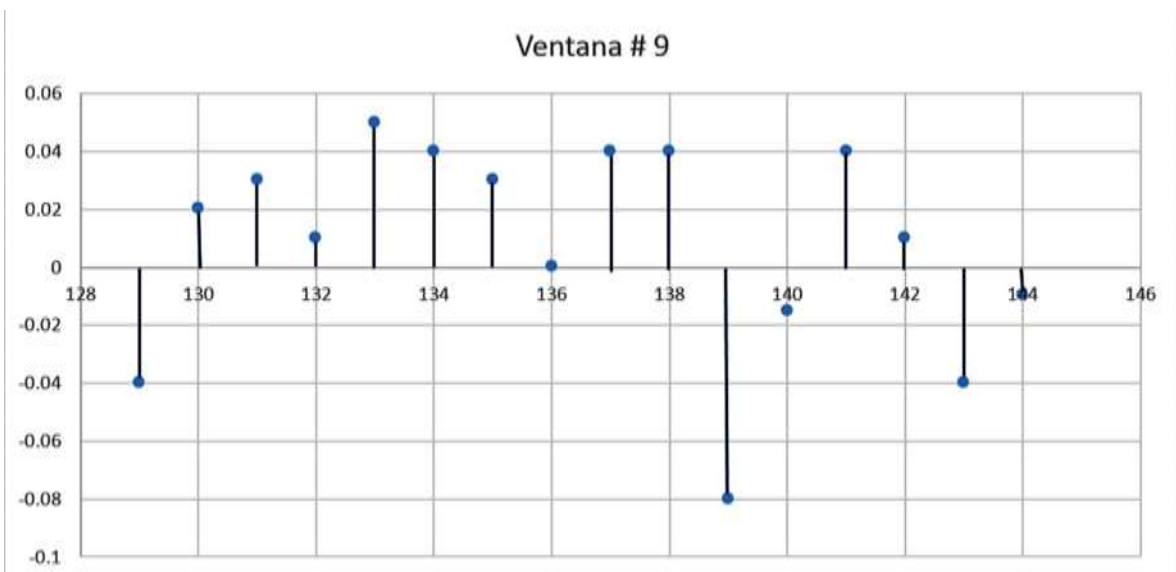
**SE<sub>6</sub>**: Señal de entrada de la ventana 6 con QRS en su mayoría con deflexiones positivas.



**SE<sub>7</sub>**: Señal de entrada de la ventana 7 con un comportamiento de QRS altos.



**SE<sub>8</sub>**: Señal de entrada de la ventana 8 con un comportamiento variante en los QRS.



**SE<sub>9</sub>**: Señal de entrada de la ventana 9 con un comportamiento positivo de los QRS en su mayoría.

Al dividir la señal en  $n = 9$ ; es decir en nueve ventanas, se limitó el muestreo a un intervalo de tiempo finito, por consiguiente, para no alterar su espectro se utilizó la función ventana Hamming y se logró que su espectro se parezca lo más posible a una función impulso unitario (máxima acumulación de energía en un intervalo de frecuencia tan pequeño como sea posible).

Definamos  $H(T)$  como una función ventana Hamming dada por:

$$H(T) = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{(2n - N)\pi}{N - 1}\right)$$

Donde T es el número de ventanas, es decir:

$$H(1) = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{(2n - N)\pi}{N - 1}\right), \text{ para } N = 16 \text{ y } n = 1, 2 \dots 16$$

$$H(2) = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{(2n - N)\pi}{N - 1}\right), \text{ para } N = 16 \text{ y } n = 17, 18 \dots 32$$

$$H(3) = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{(2n - N)\pi}{N - 1}\right), \text{ para } N = 16 \text{ y } n = 33, 34 \dots 48$$

.

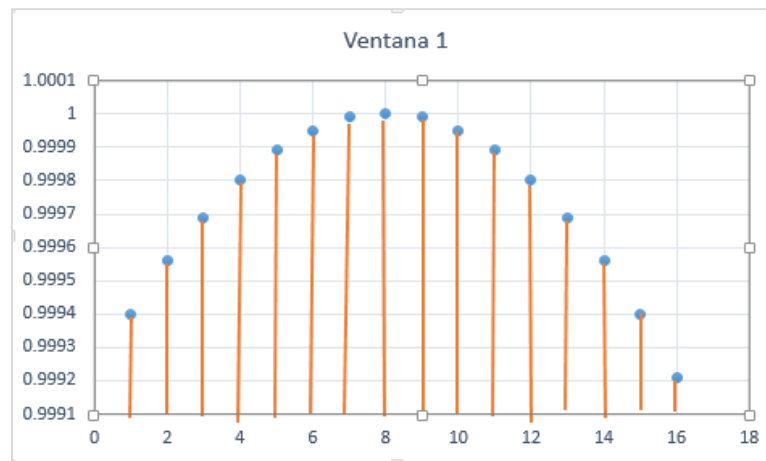
.

.

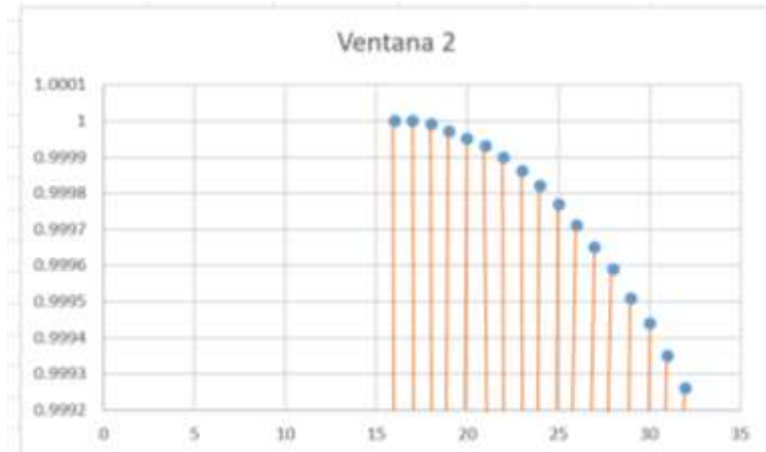
$$H(9) = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{(2n - N)\pi}{N - 1}\right), \text{ para } N = 16 \text{ y } n = 129, 130 \dots 144$$

Las muestras de tiempo que se ponderan mediante la función Hamming, proporcionarán una transición suave a cero en los extremos del registro de tiempo. Aunque la forma de onda en el dominio del tiempo ha cambiado, después de aplicar la función Hamming, su contenido en frecuencia permanece prácticamente inalterado. La línea espectral asociada con la senoide se extenderá a una pequeña cantidad en el dominio de la frecuencia. La ventana Hamming es un compromiso entre la precisión en amplitud y la resolución en frecuencia, y comparada con otras funciones de ventana, proporciona la mejor resolución en frecuencia.

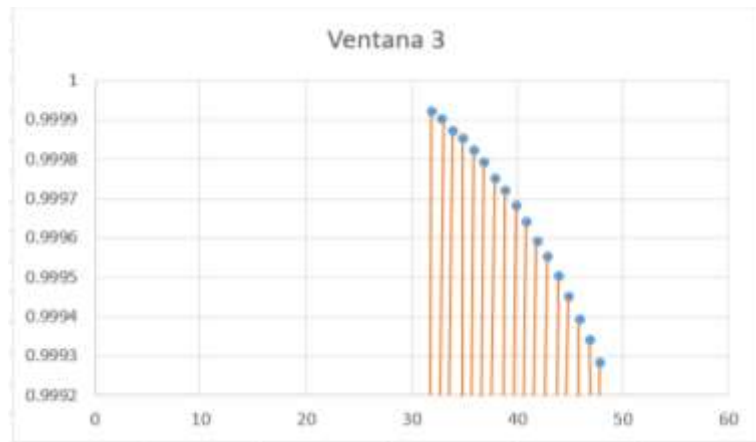
Tomando como referencia la división de las ventanas ya establecidas anteriormente, procederemos a aplicar la función ventana en cada una de ellas.



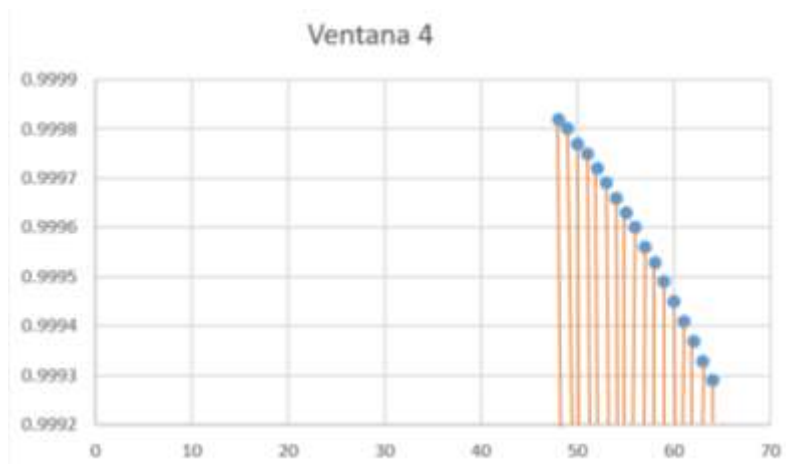
**H (1): ventana Hamming 1**



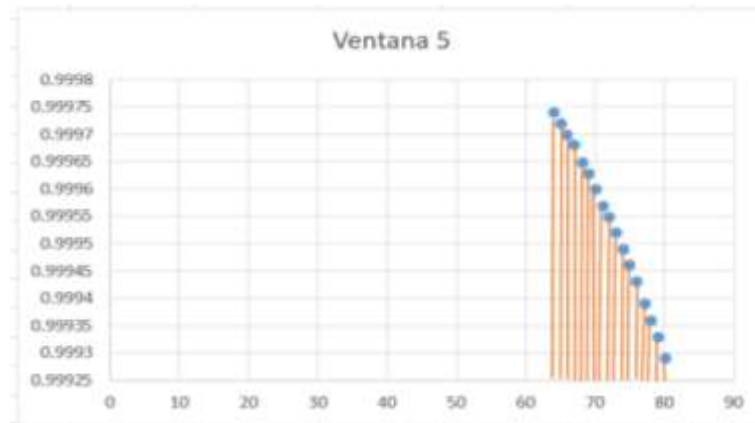
**H (2): ventana Hamming 2**



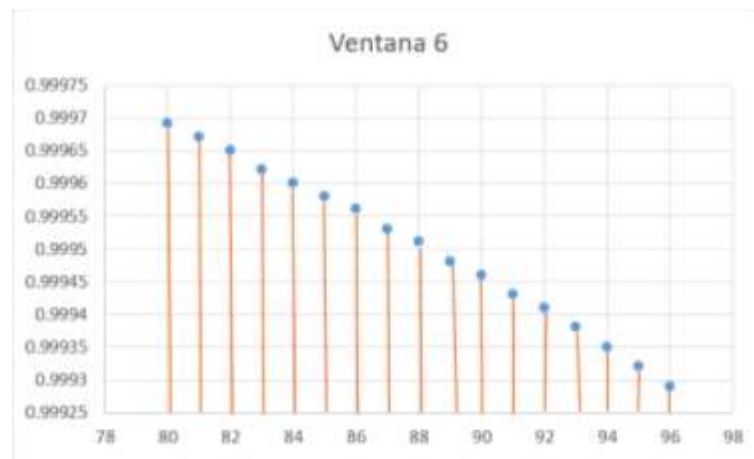
**H (3): ventana Hamming 3**



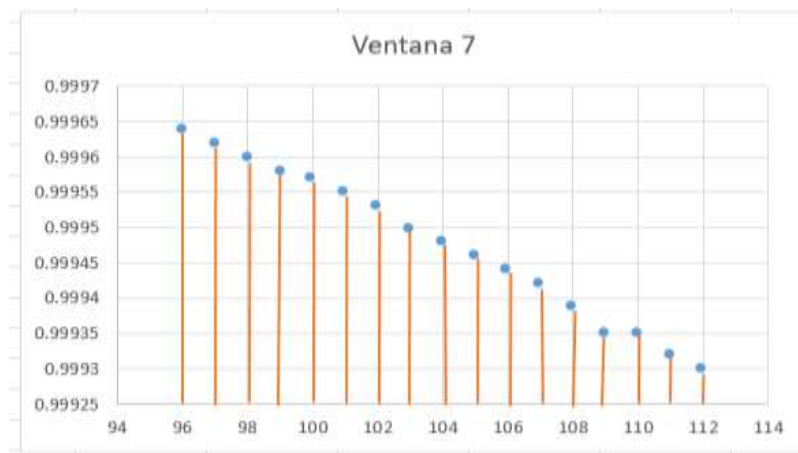
**H (4): ventana Hamming 4**



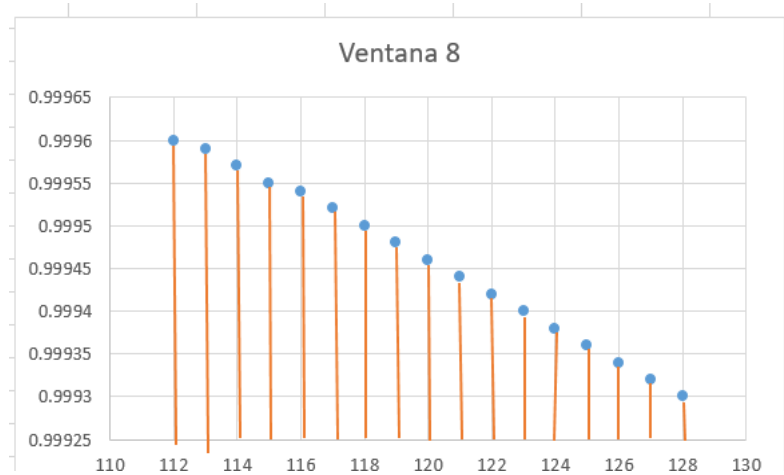
**H (5): ventana Hamming 5**



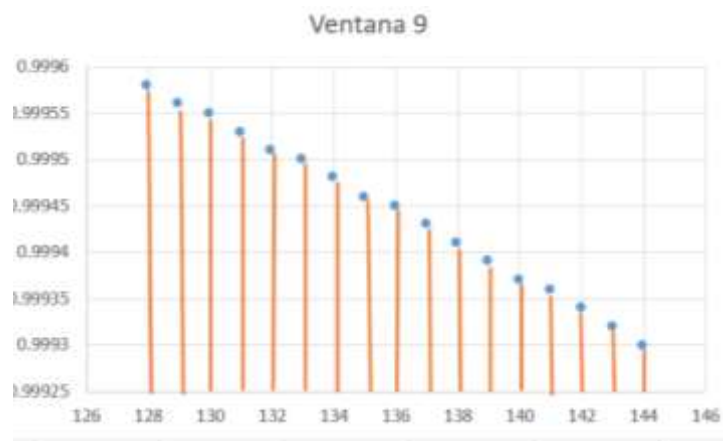
**H (6): ventana Hamming 6**



**H (7): ventana Hamming 7**



**H (8): ventana Hamming 8**



**H (9): ventana Hamming 9**

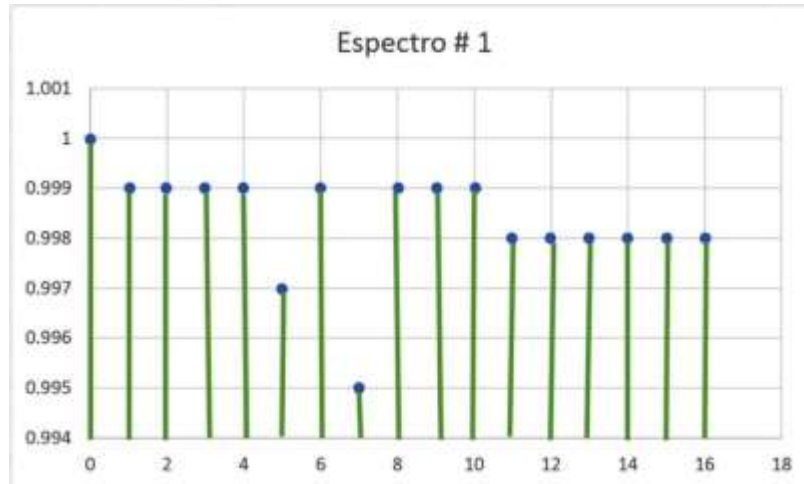
Una vez teniendo las ventanas de cada función Hamming, se procede a ver su espectro para observar su acercamiento a la función impulso unitario y esto nos permitirá poder identificar la máxima acumulación de energía existente en cada una de ellas.

Definimos  $E(H_n)$  al espectro Hamming, dado por:

$$E(H_n) = \cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)$$

Donde N es la longitud de la ventana.

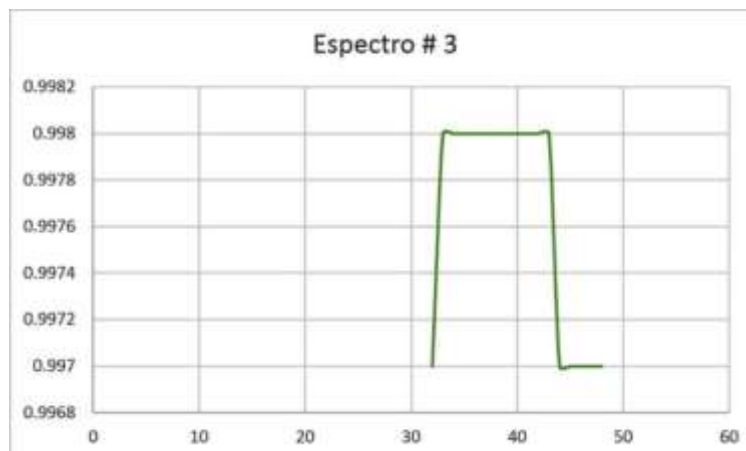




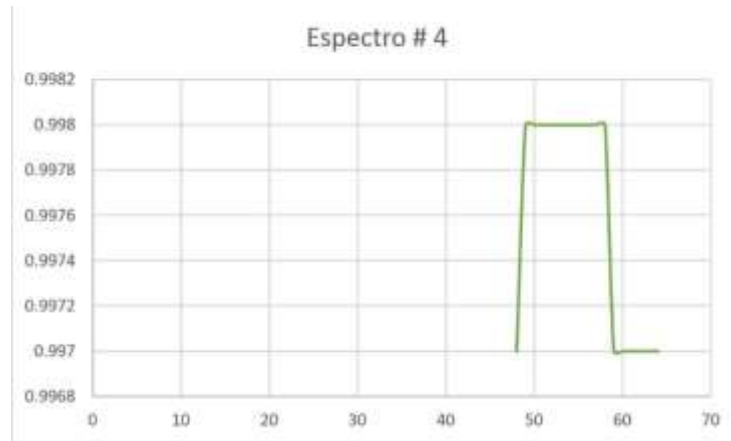
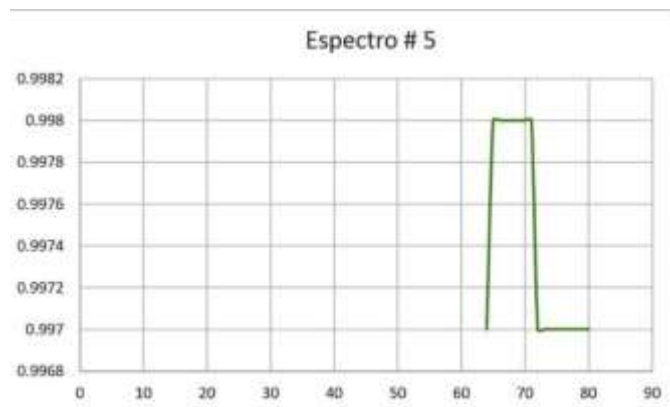
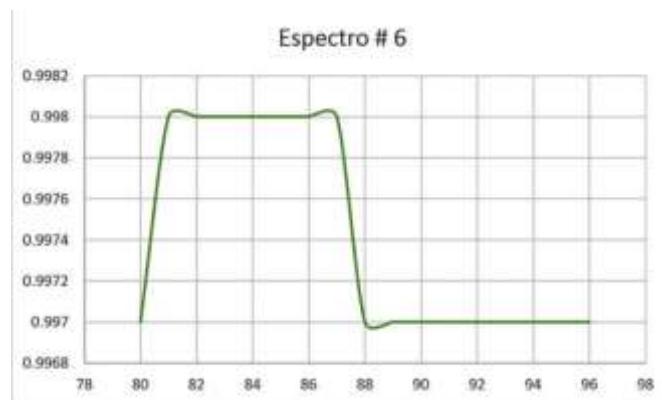
$E(H_1)$ : Espectro de la ventana 1

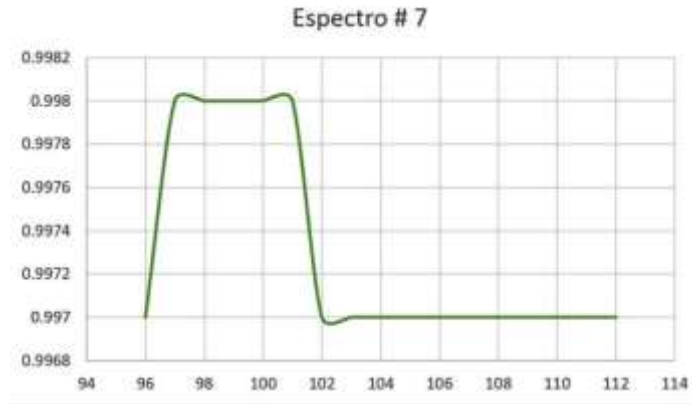


$E(H_2)$ : Espectro de la ventana 2

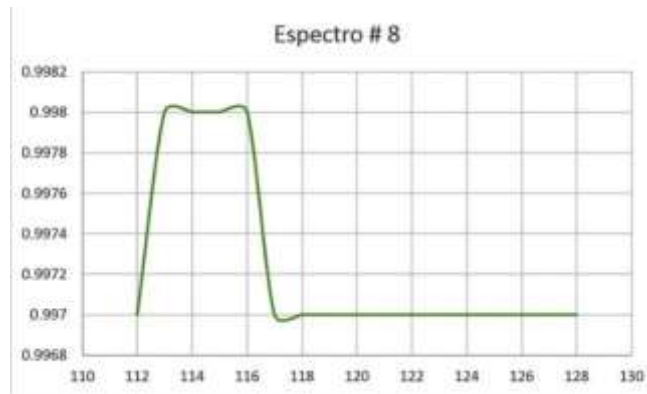


$E(H_3)$ : Espectro de la ventana 3

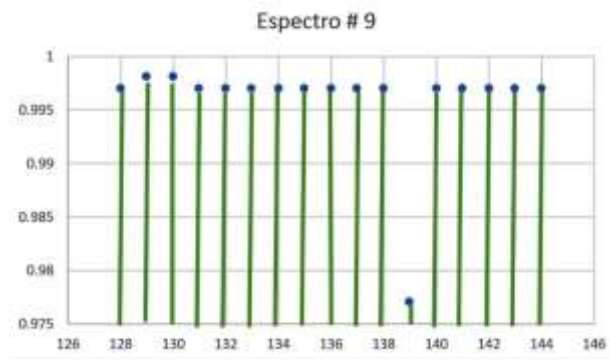
 **$E(H_4)$ : Espectro de la ventana 4** **$E(H_5)$ : Espectro de la ventana 5** **$E(H_6)$ : Espectro de la ventana 6**



**$E(H_7)$ : Espectro de la ventana 7**



**$E(H_8)$ : Espectro de la ventana 8**



**$E(H_9)$ : Espectro de la ventana 9**

Por último, se aplica la Transformada Corta de Fourier a cada una de las ventanas, para ello se parte de la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT)

$$H(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} H(\omega) e^{i\omega k \Delta t}$$

Tomando los valores discretos de la frecuencia:

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{N\Delta t}; n = 0, 1 \dots N - 1$$

$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t}$$

$$H(\omega_n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k\Delta t) e^{-i\omega_n k \Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1} h(k\Delta t) e^{-\frac{i2\pi n k}{N}}$$

$$h(k\Delta t) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} H(\omega_n) e^{i\omega_n k \Delta t} \Delta\omega = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} H(\omega_n) e^{\frac{i2\pi n k \Delta t}{N\Delta t}} \frac{2\pi}{N\Delta t} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(\omega_n) e^{\frac{i2\pi n k}{N}}$$

Tomando en cuenta que la Transformada Discreta de Fourier y la Transformada Inversa de Fourier Discreta se define:

$$H(n\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k\Delta t) e^{-\frac{i2\pi n k}{N}}$$

$$h(k\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n\Delta\omega) e^{\frac{i2\pi n k}{N}}$$

Dado que las formulas de la DFT son generales y se pueden aplicar a cualquier conjunto de datos  $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ , sin que necesariamente provengan del muestreo de una señal continua, entonces, la Transformada de Fourier Discreta y la Transformada de Fourier Inversa se definen mediante:

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{i2\pi nk}{N}} ; n = 0, 1, \dots (N - 1)$$

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{i2\pi nk}{N}} ; K = 0, 1, \dots (N - 1)$$

Ahora tomando en cuenta el algoritmo eficiente para implementar la DFT conocida como Discrete Fourier Transform (Transformada Discreta de Fourier) que nos ofrece Matlab dada por:

$$X_n = \sum_{k=1}^N x_k e^{-i\frac{2\pi}{N}(n-1)(k-1)}$$

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n e^{i\frac{2\pi}{N}(n-1)(k-1)}$$

Teniendo los espectros por ventana, podemos identificar que se aproximan a una función impulso unitario y así minimizamos lo que se conoce como el fenómeno de la dispersión espectral. Una vez teniendo calculados los espectros de cada función ventana procederemos a aplicar la Transformada Corta de Fourier en cada una de ellas, para ello, se utilizará el software matemático Matlab y luego visualizaremos la frecuencia dominante.

Para obtener una mejor visualización usaremos distintas tablas para mostrar los cálculos realizados en Matlab (ver anexo) donde:

$$X(n) = \sum_{k=1}^N x(k) e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)(n-1)(k-1)}$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(n) e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}\right)(n-1)(k-1)}$$

$$t_k = k\Delta t$$

$$W_n = \frac{2\pi}{N\Delta t} n$$

Visualizando de manera general los valores para la primera ventana, tenemos:

*Para  $n = 0$*

$$X_0 = \sum (0.99922) e^{\frac{-2\pi i(1)(0)}{16}} = 0.99922$$

$$X_0 = \sum (0.99923) e^{\frac{-2\pi i(2)(0)}{16}} = 0.99923$$

$$X_0 = \sum (0.99923) e^{\frac{-2\pi i(3)(0)}{16}} = 0.99923$$

$$X_0 = \sum (0.99924) e^{\frac{-2\pi i(4)(0)}{16}} = 0.99924$$

$$X_0 = \sum (0.99925) e^{\frac{-2\pi i(5)(0)}{16}} = 0.99925$$

$$X_0 = \sum (0.99926) e^{\frac{-2\pi i(6)(0)}{16}} = 0.99926$$

$$X_0 = \sum (0.99926)e^{\frac{-2\pi i(7)(0)}{16}} = 0.99926$$

$$X_0 = \sum (0.99927)e^{\frac{-2\pi i(8)(0)}{16}} = 0.99927$$

$$X_0 = \sum (0.99928)e^{\frac{-2\pi i(9)(0)}{16}} = 0.99928$$

$$X_0 = \sum (0.99929)e^{\frac{-2\pi i(10)(0)}{16}} = 0.99929$$

$$X_0 = \sum (0.99929)e^{\frac{-2\pi i(11)(0)}{16}} = 0.99929$$

$$X_0 = \sum (0.99930)e^{\frac{-2\pi i(12)(0)}{16}} = 0.99930$$

$$X_0 = \sum (0.99931)e^{\frac{-2\pi i(13)(0)}{16}} = 0.99931$$

$$X_0 = \sum (0.99932)e^{\frac{-2\pi i(14)(0)}{16}} = 0.99932$$

$$X_0 = \sum (0.99932)e^{\frac{-2\pi i(15)(0)}{16}} = 0.99932$$

$$X_0 = \sum (0.99933)e^{\frac{-2\pi i(16)(0)}{16}} = 0.99933$$

$$X(0) = 15.98840$$

Para  $n = 1$

$$X_1 = \sum (0.99922)e^{\frac{-2\pi i(1)(1)}{16}} = 0.99922e^{\frac{-\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned}
 0.99922e^{\frac{-\pi i}{8}} &= 0.99922 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] \\
 &= 0.99922 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i(0.99922)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \\
 &= 0.92316 - 0.38238i
 \end{aligned}$$

$$X_1 = \sum (0.99923)e^{\frac{-2\pi i(2)(1)}{16}} = 0.99923e^{\frac{-\pi i}{4}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned}
 0.99923e^{\frac{-\pi i}{4}} &= 0.99923 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] \\
 &= 0.99923 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i(0.99923)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= 0.70656 - 0.70656i
 \end{aligned}$$

$$X_1 = \sum (0.99923)e^{\frac{-2\pi i(3)(1)}{16}} = 0.99923e^{\frac{-3\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned}
 0.99923e^{\frac{-3\pi i}{8}} &= 0.99923 \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right) \right] \\
 &= 0.99923 \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - i(0.99923)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\
 &= 0.38239 - 0.92317i
 \end{aligned}$$



$$X_1 = \sum (0.99924) e^{\frac{-2\pi i(4)(1)}{16}} = 0.99924 e^{\frac{-\pi i}{2}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99924 e^{\frac{-\pi i}{2}} = 0.99924 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= 0.99924 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i(0.99924) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -0.99924i$$

$$X_1 = \sum (0.99925) e^{\frac{-2\pi i(5)(1)}{16}} = 0.99925 e^{\frac{-5\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99925 e^{\frac{-5\pi i}{8}} = 0.99925 \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{8}\right) \right]$$

$$= 0.99925 \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) - i(0.99925) \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{8}\right)$$

$$= -0.38240 - 0.92319i$$

$$X_1 = \sum (0.99926) e^{\frac{-2\pi i(6)(1)}{16}} = 0.99926 e^{\frac{-3\pi i}{4}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99926 e^{\frac{-3\pi i}{4}} = 0.99926 \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

$$= 0.99926 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i(0.99926) \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -0.70658 - 0.70658i$$

$$X_1 = \sum (0.99926)e^{\frac{-2\pi i(7)(1)}{16}} = 0.99926e^{\frac{-7\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99926e^{\frac{-7\pi i}{8}} = 0.99926 \left[ \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{8}\right) \right]$$

$$= 0.99926 \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) - i(0.99926)\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$= -0.92320 - 0.38240i$$

$$X_1 = \sum (0.99927)e^{\frac{-2\pi i(8)(1)}{16}} = 0.99927e^{-\pi i}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99927e^{-\pi i} = 0.99927[\cos(\pi) - i\operatorname{sen}(\pi)]$$

$$= 0.99927 \cos(\pi) - i(0.99927)\operatorname{sen}(\pi)$$

$$= -0.99927$$

$$X_1 = \sum (0.99928)e^{\frac{-2\pi i(9)(1)}{16}} = 0.99928e^{\frac{-9\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned}
 0.99928e^{\frac{-9\pi i}{8}} &= 0.99928 \left[ \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{8}\right) \right] \\
 &= 0.99928 \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) - i(0.99928)\operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{8}\right) \\
 &= -0.92321 + 0.38241i
 \end{aligned}$$

$$X_1 = \sum (0.99929)e^{\frac{-2\pi i(10)(1)}{16}} = 0.99929e^{\frac{-5\pi i}{4}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned}
 0.99929e^{\frac{-5\pi i}{4}} &= 0.99929 \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right] \\
 &= 0.99929 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - i(0.99929)\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\
 &= -0.70660 + 0.70660i
 \end{aligned}$$

$$X_1 = \sum (0.99929)e^{\frac{-2\pi i(11)(1)}{16}} = 0.99929e^{\frac{-11\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned}
 0.99929e^{\frac{-11\pi i}{8}} &= 0.99929 \left[ \cos\left(\frac{11\pi}{8}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{8}\right) \right] \\
 &= 0.99929 \cos\left(\frac{11\pi}{8}\right) - i(0.99929)\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{8}\right) \\
 &= -0.38241 + 0.92322i
 \end{aligned}$$

$$X_1 = \sum (0.99930)e^{\frac{-2\pi i(12)(1)}{16}} = 0.99930e^{\frac{-3\pi i}{2}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99930e^{\frac{-3\pi i}{2}} = 0.99930 \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right]$$

$$= 0.99930 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - i(0.99930)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= 0.99930i$$

$$X_1 = \sum (0.99931)e^{\frac{-2\pi i(13)(1)}{16}} = 0.99931e^{\frac{-13\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99931e^{\frac{-13\pi i}{8}} = 0.99931 \left[ \cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{8}\right) \right]$$

$$= 0.99931 \cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) - i(0.99931)\operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{8}\right)$$

$$= 0.38242 + 0.92324i$$

$$X_1 = \sum (0.99932)e^{\frac{-2\pi i(14)(1)}{16}} = 0.99932e^{\frac{-7\pi i}{4}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99932e^{\frac{-7\pi i}{4}} = 0.99932 \left[ \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right]$$

$$= 0.99932 \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) - i(0.99932)\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$= 0.70663 + 0.70663i$$

$$X_1 = \sum (0.99932) e^{\frac{-2\pi i(15)(1)}{16}} = 0.99932 e^{\frac{-15\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99932 e^{\frac{-15\pi i}{8}} = 0.99932 \left[ \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{8}\right) \right]$$

$$= 0.99932 \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) - i(0.99932) \operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{8}\right)$$

$$= 0.92325 + 0.38242i$$

$$X_1 = \sum (0.99933) e^{\frac{-2\pi i(16)(1)}{16}} = 0.99933 e^{-2\pi i}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99933 e^{-2\pi i} = 0.99933 [\cos(2\pi) - i \operatorname{sen}(2\pi)]$$

$$= 0.99933 \cos(2\pi) - i(0.99933) \operatorname{sen}(2\pi)$$

$$= 0.99933$$

$$X(1) = 0.00007 + 0.0003i$$

.

.

.

Para  $n = 15$

$$X_{15} = \sum (0.99922)e^{\frac{-2\pi i(1)(15)}{16}} = 0.99922e^{\frac{-15\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned} 0.99922e^{\frac{-15\pi i}{8}} &= 0.99922 \left[ \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{8}\right) \right] \\ &= 0.99922 \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) - i(0.99922)\operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{8}\right) \\ &= 0.92316 + 0.38238i \end{aligned}$$

$$X_{15} = \sum (0.99923)e^{\frac{-2\pi i(2)(15)}{16}} = 0.99923e^{\frac{-15\pi i}{4}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned} 0.99923e^{\frac{-15\pi i}{4}} &= 0.99923 \left[ \cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{4}\right) \right] \\ &= 0.99923 \cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) - i(0.99923)\operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{4}\right) \\ &= 0.70656 + 0.70656i \end{aligned}$$

$$X_{15} = \sum (0.99923)e^{\frac{-2\pi i(3)(15)}{16}} = 0.99923e^{\frac{-45\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99923e^{\frac{-45\pi i}{8}} = 0.99923 \left[ \cos\left(\frac{45\pi}{8}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{45\pi}{8}\right) \right]$$

$$= 0.99923 \cos\left(\frac{45\pi}{8}\right) - i(0.99923)\text{sen}\left(\frac{45\pi}{8}\right)$$

$$= 0.38239 + 0.92317i$$

$$X_{15} = \sum (0.99924)e^{\frac{-2\pi i(4)(15)}{16}} = 0.99924e^{\frac{-15\pi i}{2}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99924e^{\frac{-15\pi i}{2}} = 0.99924 \left[ \cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) - i\text{sen}\left(\frac{15\pi}{2}\right) \right]$$

$$= 0.99924 \cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) - i(0.99924)\text{sen}\left(\frac{15\pi}{2}\right)$$

$$= 0.99924i$$

$$X_{15} = \sum (0.99925)e^{\frac{-2\pi i(5)(15)}{16}} = 0.99925e^{\frac{-75\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99925e^{\frac{-75\pi i}{8}} = 0.99925 \left[ \cos\left(\frac{75\pi}{8}\right) - i\text{sen}\left(\frac{75\pi}{8}\right) \right]$$

$$= 0.99925 \cos\left(\frac{75\pi}{8}\right) - i(0.99925)\text{sen}\left(\frac{75\pi}{8}\right)$$

$$= -0.38240 + 0.92319i$$

$$X_{15} = \sum (0.99926)e^{\frac{-2\pi i(6)(15)}{16}} = 0.99926e^{\frac{-45\pi i}{4}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned}
 0.99926e^{\frac{-45\pi i}{4}} &= 0.99926 \left[ \cos\left(\frac{45\pi}{4}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{45\pi}{4}\right) \right] \\
 &= 0.99926 \cos\left(\frac{45\pi}{4}\right) - i(0.99926)\operatorname{sen}\left(\frac{45\pi}{4}\right) \\
 &= -0.70658 + 0.70658i
 \end{aligned}$$

$$X_{15} = \sum (0.99926)e^{\frac{-2\pi i(7)(15)}{16}} = 0.99926e^{\frac{-105\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned}
 0.99926e^{\frac{-105\pi i}{8}} &= 0.99926 \left[ \cos\left(\frac{105\pi}{8}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{105\pi}{8}\right) \right] \\
 &= 0.99926 \cos\left(\frac{105\pi}{8}\right) - i(0.99926)\operatorname{sen}\left(\frac{105\pi}{8}\right) \\
 &= -0.92320 + 0.38240i
 \end{aligned}$$

$$X_{15} = \sum (0.99927)e^{\frac{-2\pi i(8)(15)}{16}} = 0.99927e^{-15\pi i}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned}
 0.99927e^{-15\pi i} &= 0.99927[\cos(15\pi) - i\operatorname{sen}(15\pi)] \\
 &= 0.99927 \cos(15\pi) - i(0.99927)\operatorname{sen}(15\pi) \\
 &= -0.99927
 \end{aligned}$$

$$X_{15} = \sum (0.99928)e^{\frac{-2\pi i(9)(15)}{16}} = 0.99928e^{\frac{-135\pi i}{8}}$$



Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned}
 0.99928e^{\frac{-135\pi i}{8}} &= 0.99928 \left[ \cos\left(\frac{135\pi}{8}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{135\pi}{8}\right) \right] \\
 &= 0.99928 \cos\left(\frac{135\pi}{8}\right) - i(0.99928)\operatorname{sen}\left(\frac{135\pi}{8}\right) \\
 &= -0.92321 - 0.38241i
 \end{aligned}$$

$$X_{15} = \sum (0.99929)e^{\frac{-2\pi i(10)(15)}{16}} = 0.99929e^{\frac{-75\pi i}{4}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned}
 0.99929e^{\frac{-75\pi i}{4}} &= 0.99929 \left[ \cos\left(\frac{75\pi}{4}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{75\pi}{4}\right) \right] \\
 &= 0.99929 \cos\left(\frac{75\pi}{4}\right) - i(0.99929)\operatorname{sen}\left(\frac{75\pi}{4}\right) \\
 &= -0.70660 - 0.70660i
 \end{aligned}$$

$$X_{15} = \sum (0.99929)e^{\frac{-2\pi i(11)(15)}{16}} = 0.99929e^{\frac{-165\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$\begin{aligned}
 0.99929e^{\frac{-165\pi i}{8}} &= 0.99929 \left[ \cos\left(\frac{165\pi}{8}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{165\pi}{8}\right) \right] \\
 &= 0.99929 \cos\left(\frac{165\pi}{8}\right) - i(0.99929)\operatorname{sen}\left(\frac{165\pi}{8}\right) \\
 &= -0.38241 - 0.92322i
 \end{aligned}$$

$$X_{15} = \sum (0.99930)e^{\frac{-2\pi i(12)(15)}{16}} = 0.99930e^{\frac{-45\pi i}{2}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99930e^{\frac{-45\pi i}{2}} = 0.99930 \left[ \cos\left(\frac{45\pi}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{45\pi}{2}\right) \right]$$

$$= 0.99930 \cos\left(\frac{45\pi}{2}\right) - i(0.99930)\operatorname{sen}\left(\frac{45\pi}{2}\right)$$

$$= -0.99930i$$

$$X_{15} = \sum (0.99931)e^{\frac{-2\pi i(13)(15)}{16}} = 0.99931e^{\frac{-195\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99931e^{\frac{-195\pi i}{8}} = 0.99931 \left[ \cos\left(\frac{195\pi}{8}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{195\pi}{8}\right) \right]$$

$$= 0.99931 \cos\left(\frac{195\pi}{8}\right) - i(0.99931)\operatorname{sen}\left(\frac{195\pi}{8}\right)$$

$$= 0.38242 - 0.92324i$$

$$X_{15} = \sum (0.99932)e^{\frac{-2\pi i(14)(15)}{16}} = 0.99932e^{\frac{-105\pi i}{4}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99932e^{\frac{-105\pi i}{4}} = 0.99932 \left[ \cos\left(\frac{105\pi}{4}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{105\pi}{4}\right) \right]$$

$$= 0.99932 \cos\left(\frac{105\pi}{4}\right) - i(0.99932)\operatorname{sen}\left(\frac{105\pi}{4}\right)$$

$$= 0.70663 - 0.70663i$$

$$X_{15} = \sum (0.99932) e^{\frac{-2\pi i(15)(15)}{16}} = 0.99932 e^{\frac{-225\pi i}{8}}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99932 e^{\frac{-225\pi i}{8}} = 0.99932 \left[ \cos\left(\frac{225\pi}{8}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{225\pi}{8}\right) \right]$$

$$= 0.99932 \cos\left(\frac{225\pi}{8}\right) - i(0.99932) \operatorname{sen}\left(\frac{225\pi}{8}\right)$$

$$= 0.92325 - 0.38242i$$

$$X_{15} = \sum (0.99933) e^{\frac{-2\pi i(16)(15)}{16}} = 0.99933 e^{-30\pi i}$$

Utilizando la definición de Euler:

$$0.99933 e^{-30\pi i} = 0.99933 [\cos(30\pi) - i \operatorname{sen}(30\pi)]$$

$$= 0.99933 \cos(30\pi) - i(0.99933) \operatorname{sen}(30\pi)$$

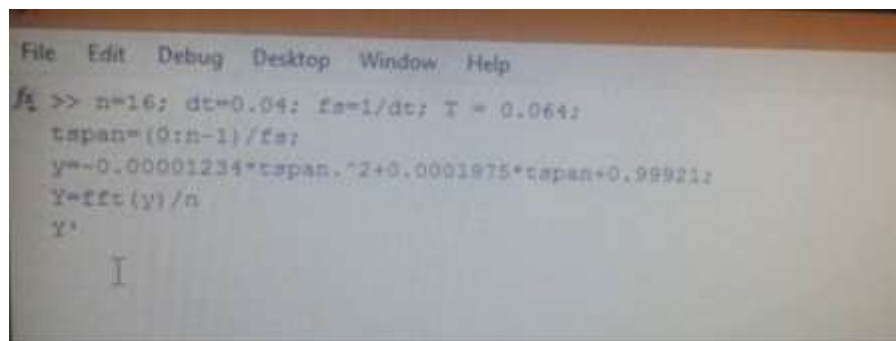
$$= 0.99933$$

$$X(15) = 0.00007 - 0.0003i$$

Esto es:

$K$	$t_k$	$X_K$	$n$	$W_n$	$X_n$
1	0.04	0.99922	0	0.61	15.9884
2	0.08	0.99923	1	1.22	-0.00006+0.0003i
3	0.12	0.99923	2	1.84	-0.00006+0.00015i
4	0.16	0.99924	3	2.45	-0.00006+0.00009i
5	0.2	0.99925	4	3.06	-0.00006+0.00006i
6	0.24	0.99926	5	3.68	-0.00006+0.00004i
7	0.28	0.99926	6	4.295	-0.00006+0.00003i
8	0.32	0.99927	7	$\frac{25\pi}{16}$	-0.00006+0.00001i
9	0.36	0.99928	8	5.52	-0.00006
10	0.4	0.99929	9	6.135	-0.00006-0.00001i
11	0.44	0.99929	10	6.749	-0.00006-0.00003i
12	0.48	0.9993	11	7.36	-0.00006-0.00004i
13	0.52	0.99931	12	7.976	-0.00006-0.00006i
14	0.56	0.99932	13	8.59	-0.00006-0.00009i
15	0.6	0.99932	14	9.2	-0.00006-0.00015i
16	0.64	0.99933	15	$\frac{25\pi}{8}$	-0.00006-0.0003i

Debido a la suma de cálculos tan extensos por ventana que se tienen que realizar, utilizamos el software matemático Matlab. Para así poder obtener de una forma más rápida el pico de la frecuencia más alta.

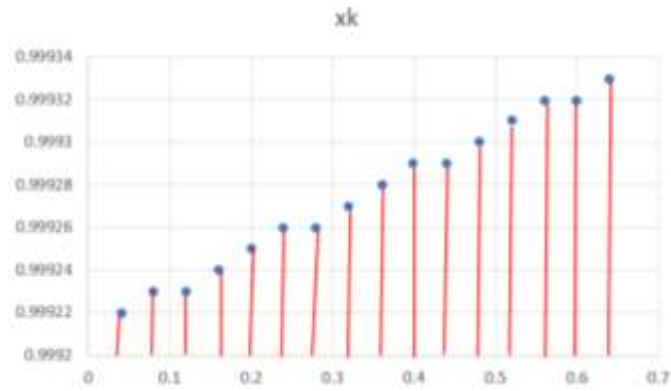


```

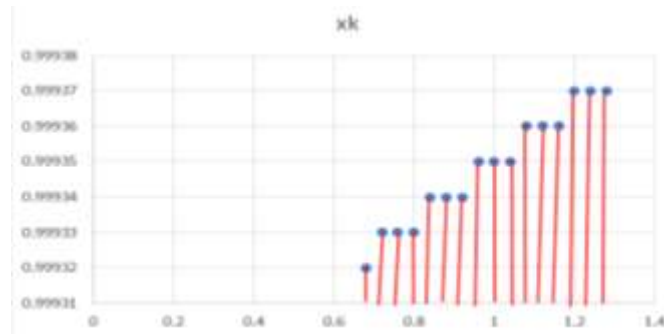
File Edit Debug Desktop Window Help
>> n=16; dt=0.04; fs=1/dt; T = 0.064;
tspan=(0:n-1)/fs;
y=-0.00001234*tspan.^2+0.0001975*tspan+0.99921;
Y=fft(y)/n
Y*
I

```

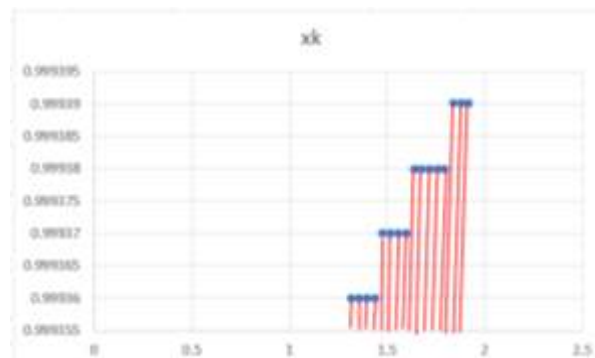
Es decir, gráficamente podemos observar por ventana nuestro procesado de la siguiente manera:



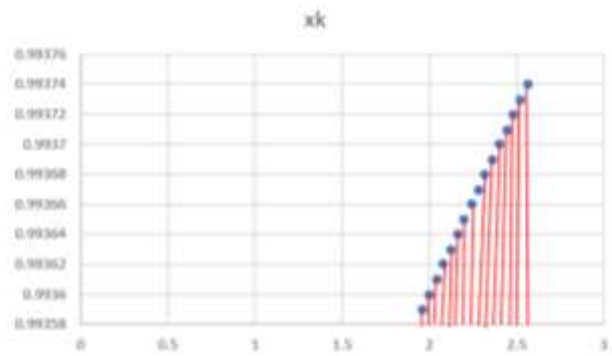
**Ventana 1**



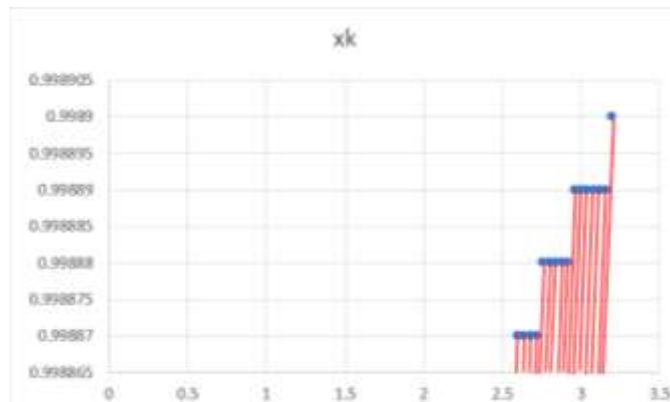
**Ventana 2**



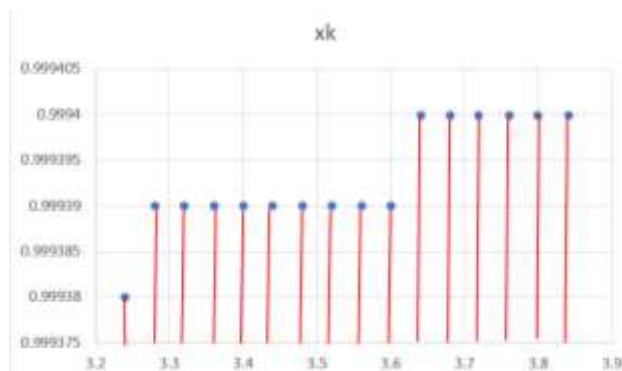
**Ventana 3**



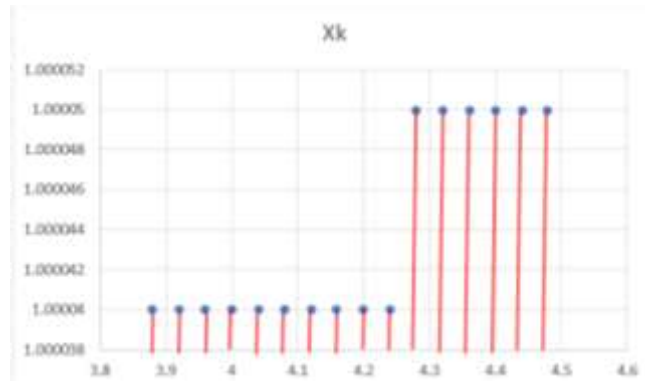
Ventana 4



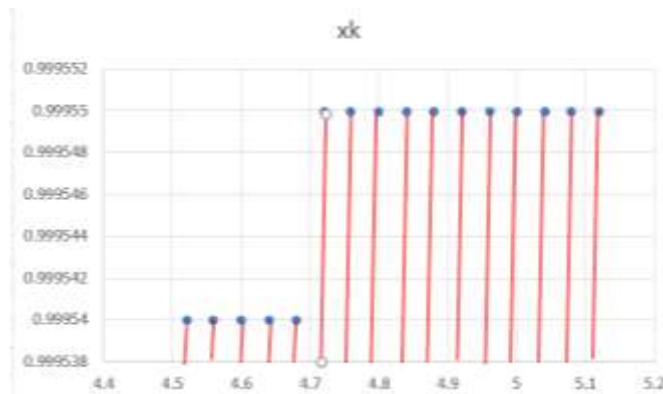
Ventana 5



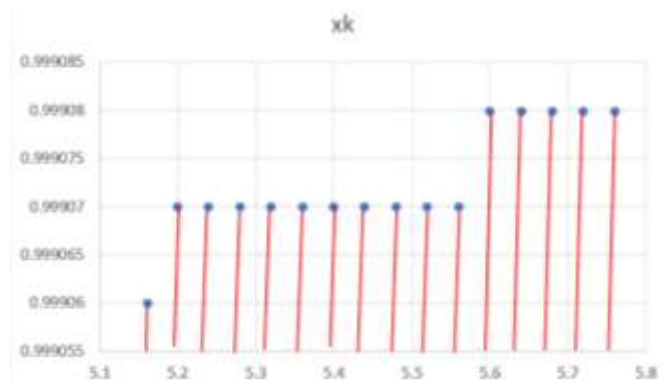
Ventana 6



Ventana 7



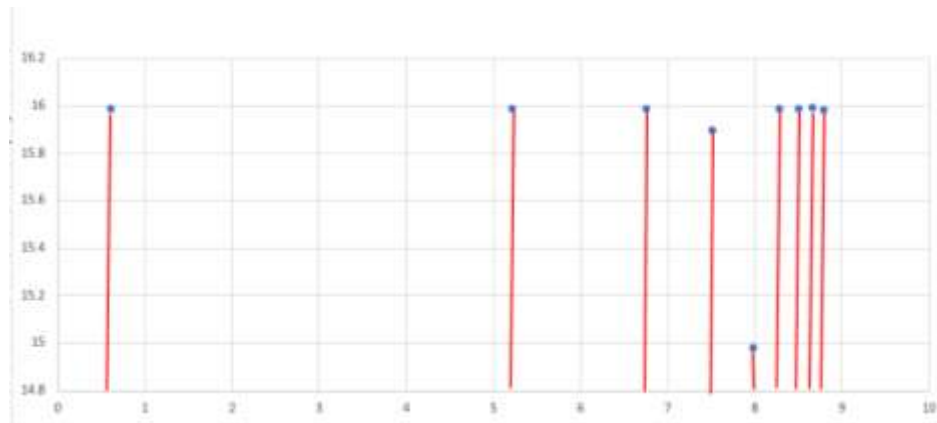
Ventana 8



Ventana 9

Una vez terminado nuestro procesamiento por cada una de las nueve ventanas realizadas, podemos observar de una manera gráfica cómo la señal electrocardiográfica varía en referencia a su frecuencia al pasar el tiempo.

Gráfica general



### Frecuencias

La frecuencia dominante, es la frecuencia del pico con la máxima amplitud. Tomando en cuenta que el índice de regularidad mide la relación que existe entre la frecuencia dominante de la señal y la potencia de la señal fisiológicamente relevante, podemos decir que:

Nuestra señal electrocardiográfica en estudio tiene una frecuencia dominante de 15.99275 y sus rangos frecuenciales varían, ya sea en caso de ritmo sinusal o un caso con fibrilación.



## VII. CONCLUSIONES

- Una vez observados los resultados del trabajo, se puede comprender la gran importancia del uso de la Transformada de Fourier en las señales electrocardiográficas.
- Al realizar un estudio de frecuencia, puede una persona darse cuenta de cuánto late el corazón en un intervalo de tiempo, si está normal o existe alguna patología.
- La esencia del trabajo radica en la información que permite tener la Transformada de Fourier al ser aplicada a una señal electrocardiográfica descrita en un papel milimetrado, es por eso que tomando como referencia este caso presentado, se puede observar en la gráfica de frecuencia un pico más alto entre todos, que es el indicador de que existe una frecuencia que domina entre todas las muestras, esto puede rápidamente decir que esta persona cuenta con alguna patología en su corazón.
- Con éste estudio se puede ver las arritmias y cambios ST desde un Electrocardiograma normal, información que muchas veces solo se sabe a través de un Holter.
- A medida que avanza el tiempo son más las personas que padecen de problemas cardíacos y el desarrollo del estudio de esta herramienta matemática viene a aportar un mejor diagnóstico médico, ya que existen pacientes los cuales tienen un comportamiento muy inusual al que establece los estándares de normalidad.

- La Transformada Corta de Fourier es de importancia fundamental en el análisis matemático y ha sido objeto de numerosos estudios.
- La aparición de un algoritmo eficaz para esta operación fue la piedra angular en la historia de la informática.
- Las aplicaciones de la Transformada Corta de Fourier son múltiples, siendo así la base de muchas operaciones fundamentales en el procesamiento de señales donde tiene amplia utilización. Además, proporciona un medio oportuno para mejorar el rendimiento de los algoritmos para un conjunto de problemas aritméticos comunes.

## VIII. RECOMENDACIONES

A los docentes:

- Fomentar en los estudiantes las distintas aplicaciones de la Transformada de Fourier, para una mayor comprensión del tema en las distintas ramas de la ciencia.
- Promover un espíritu de innovación en los estudiantes, para que logren identificar en la vida diaria las distintas aplicaciones de la Matemática.

A los estudiantes:

- Indagar sobre las distintas aplicaciones de la Transformada de Fourier, utilizando la presente investigación como base para estudios futuros acerca de este tema.
- Profundizar en el estudio de Señales Electrocardiográficas, aplicando la Transformada de Fourier.
- Investigar las distintas aplicaciones de la Transformada de Fourier en el estudio de las Señales.

## IX. BIBLIOGRAFÍA

- Dr. Aguirre Téllez Manuel Antonio. *Análisis de Fourier y Aplicaciones*.
- M.L. Krasnov, A.I. Kiseliiov & G.I. Makárenko. *Matemática Superior, Cálculo Operacional y Teoría de la Estabilidad*.
- Dr. Dubin Dale, MD COVER Publishing Co., 12290 Treeline Avenue, Fort Myers, FL 33913. *Interpretación de ECG.* USA.
- Primer semestre de V año 2015. *Apuntes de la clase de Facultativa I*.
- Segundo semestre de V año 2015. *Apuntes de la clase de Facultativa II*.
- Escuela Técnica superior de Ing. Telecomunicación. *Teoría de la señal y comunicaciones*. Universidad de VIGO.
- Hernández Eugenio. *Matemáticas de las señales*. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid.



## Web grafía

- Andrade Mora Sandra Marcela&Navarrete Mejía Miguel Gonzalo. (2006). *Análisis y Tratamiento de la Señal Electrocardiográfica para la Detección de Parámetros de Normalidad Bajo la Plataforma Labview*.  
[http://cienciagora.com.co/imgs2012/imagenes/Tesis\\_Miguel\\_Ingenieria\\_Electronica\\_UPB.pdf](http://cienciagora.com.co/imgs2012/imagenes/Tesis_Miguel_Ingenieria_Electronica_UPB.pdf)
- Romero José Lorenzo. (2015). *Análisis de Señales Electrocardiográficas Usando Técnicas de Procesamiento Digital*.  
<http://openaccess.uoc.edu/webapps/o2/bitstream/10609/40186/6/jlorenzoroTFC0115memoria.pdf>
- Pinzón DuqueMaría Cristina. (2011). *Análisis de Señal del Impulso Cardíaco para el Mejoramiento del Diagnóstico de Patologías del Corazón*.  
<http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/11059/1873/1/6161207547P661.pdf>

## X. ANEXO

Tablas con los valores de las frecuencias y Transformada de la ventana número 2 a la ventana número 9

Ventana número 2

<b>K</b>	<b>tk</b>	<b>Xk</b>	<b>n</b>	<b>Wn</b>	<b>Xn</b>
17	0.68	0.99932	0	5.215	15.98957
18	0.72	0.99933	1	5.522	-0.00003+0.00014i
19	0.76	0.99933	2	5.829	-0.00003+0.00007i
20	0.8	0.99933	3	6.135	-0.00003+0.00004i
21	0.84	0.99934	4	6.442	-0.00003+0.00003i
22	0.88	0.99934	5	6.749	-0.00003+0.00002i
23	0.92	0.99934	6	7.056	-0.00003+0.00001i
24	0.96	0.99935	7	7.363	-0.00003+0.000005i
25	1	0.99935	8	7.669	-0.00003
26	1.04	0.99935	9	7.976	-0.00003-0.000005i
27	1.08	0.99936	10	8.283	-0.00003-0.00001i
28	1.12	0.99936	11	8.59	-0.00003-0.00002i
29	1.16	0.99936	12	8.897	-0.00003-0.00003i
30	1.2	0.99937	13	9.203	-0.00003-0.00004i
31	1.24	0.99937	14	9.51	-0.00003-0.00007i
32	1.28	0.99937	15	$\frac{25\pi}{8}$	-0.00003-0.00014i

## Ventana número 3

<b>K</b>	<b>tk</b>	<b>Xk</b>	<b>n</b>	<b>Wn</b>	<b>Xn</b>
33	1.32	0.99936	0	6.749	15.98998
34	1.36	0.99936	1	6.954	-0.00002+0.00009i
35	1.4	0.99936	2	7.158	-0.00002+0.00004i
36	1.44	0.99936	3	7.363	-0.00002+0.00003i
37	1.48	0.99937	4	7.567	-0.00002+0.00002i
38	1.52	0.99937	5	7.772	-0.00002+0.00001i
39	1.56	0.99937	6	7.976	-0.00002+0.000007i
40	1.6	0.99937	7	$\frac{125\pi}{48}$	-0.00002+0.000004i
41	1.64	0.99938	8	8.385	-0.00002
42	1.68	0.99938	9	8.59	-0.00002-0.000004i
43	1.72	0.99938	10	8.794	-0.00002-0.000007i
44	1.76	0.99938	11	8.999	-0.00002-0.00001i
45	1.8	0.99938	12	9.203	-0.00002-0.00002i
46	1.84	0.99939	13	9.408	-0.00002-0.00003i
47	1.88	0.99939	14	9.612	-0.00002-0.00004i
48	1.92	0.99939	15	$\frac{25\pi}{8}$	-0.00002-0.00009i

## Ventana número 4

<b>K</b>	<b>tk</b>	<b>Xk</b>	<b>n</b>	<b>Wn</b>	<b>Xn</b>
49	1.96	0.99359	0	7.516	15.8986
50	2	0.9936	1	7.669	-0.00008+0.00040i
51	2.04	0.99361	2	7.823	-0.00008+0.00019i
52	2.08	0.99362	3	7.976	-0.00008+0.00012i
53	2.12	0.99363	4	8.13	-0.00008+0.00008i
54	2.16	0.99364	5	8.283	-0.00008+0.00005i
55	2.2	0.99365	6	8.436	-0.00008+0.00003i
56	2.24	0.99366	7	8.59	-0.00008+0.00002i
57	2.28	0.99367	8	8.743	-0.00008
58	2.32	0.99368	9	8.897	-0.00008-0.00002i
59	2.36	0.99369	10	9.05	-0.00008-0.00003i
60	2.4	0.9937	11	9.203	-0.00008-0.00005i
61	2.44	0.99371	12	9.353	-0.00008-0.00008i
62	2.48	0.99372	13	9.51	-0.00008-0.00012i
63	2.52	0.99373	14	9.664	-0.00008-0.00019i
64	2.56	0.99374	15	$\frac{25\pi}{8}$	-0.00008-0.00040i



## Ventana número 5

<b>K</b>	<b>tk</b>	<b>Xk</b>	<b>n</b>	<b>Wn</b>	<b>Xn</b>
65	2.6	0.99887	0	7.976	14.98212
66	2.64	0.99887	1	8.099	-0.00002+0.00008i
67	2.68	0.99887	2	8.222	-0.00002+0.00004i
68	2.72	0.99887	3	8.344	-0.00002+0.00002i
69	2.76	0.99888	4	8.467	-0.00002+0.00002i
70	2.8	0.99888	5	8.59	-0.00002+0.00001i
71	2.84	0.99888	6	8.713	-0.00002+0.000006i
72	2.88	0.99888	7	$\frac{45\pi}{16}$	-0.00002+0.000003i
73	2.92	0.99888	8	8.958	-0.00002
74	2.96	0.99889	9	9.081	-0.00002-0.000003i
75	3	0.99889	10	9.203	-0.00002-0.000006i
76	3.04	0.99889	11	9.326	-0.00002-0.00001i
77	3.08	0.99889	12	9.449	-0.00002-0.00002i
78	3.12	0.99889	13	9.572	-0.00002-0.00002i
79	3.16	0.99889	14	9.694	-0.00002-0.00004i
80	3.2	0.9989	15	$\frac{25\pi}{8}$	-0.00002-0.00008i

Ventana número 6

<b>K</b>	<b>tk</b>	<b>Xk</b>	<b>n</b>	<b>Wn</b>	<b>Xn</b>
81	3.24	0.99938	0	8.283	15.99028
82	3.28	0.99939	1	8.385	-0.000009+0.00004i
83	3.32	0.99939	2	8.488	-0.000009+0.00002i
84	3.36	0.99939	3	8.59	-0.000009+0.00001i
85	3.4	0.99939	4	8.692	-0.000009+0.000009i
86	3.44	0.99939	5	8.794	-0.000009+0.000006i
87	3.48	0.99939	6	8.897	-0.000009+0.000004i
88	3.52	0.99939	7	8.999	-0.000009+0.000002i
89	3.56	0.99939	8	9.101	-0.000009
90	3.6	0.99939	9	9.2	-0.000009-0.000002i
91	3.64	0.9994	10	9.306	-0.000009-0.000004i
92	3.68	0.9994	11	9.408	-0.000009-0.000006i
93	3.72	0.9994	12	9.51	-0.000009-0.000009i
94	3.76	0.9994	13	9.6129	-0.000009-0.00001i
95	3.8	0.9994	14	9.7152	-0.000009-0.00002i
96	3.84	0.9994	15	$\frac{25\pi}{8}$	-0.000009-0.00004i

## Ventana número 7

<b>K</b>	<b>tk</b>	<b>Xk</b>	<b>n</b>	<b>Wn</b>	<b>Xn</b>
97	3.88	1.00004	0	8.502	15.99028
98	3.92	1.00004	1	8.59	-0.000009+0.00004i
99	3.96	1.00004	2	8.677	-0.000009+0.00002i
100	4	1.00004	3	8.765	-0.000009+0.00001i
101	4.04	1.00004	4	8.853	-0.000009+0.000009i
102	4.08	1.00004	5	8.94	-0.000009+0.000006i
103	4.12	1.00004	6	9.028	-0.000009+0.000004i
104	4.16	1.00004	7	$\frac{325\pi}{112}$	-0.000009+0.000002i
105	4.2	1.00004	8	9.203	-0.000009
106	4.24	1.00004	9	9.2915	-0.000009-0.000002i
107	4.28	1.00005	10	9.379	-0.000009-0.000004i
108	4.32	1.00005	11	9.466	-0.000009-0.000006i
109	4.36	1.00005	12	9.554	-0.000009-0.000009i
110	4.4	1.00005	13	9.642	-0.000009-0.00001i
111	4.44	1.00005	14	9.729	-0.000009-0.00002i
112	4.48	1.00005	15	$\frac{25\pi}{8}$	-0.000009-0.00004i

## Ventana número 8

<b>K</b>	<b>tk</b>	<b>Xk</b>	<b>n</b>	<b>Wn</b>	<b>Xn</b>
113	4.52	0.99954	0	8.66	15.99275
114	4.56	0.99954	1	8.743	-0.000006+0.00003i
115	4.6	0.99954	2	8.82	-0.000006+0.00001i
116	4.64	0.99954	3	8.897	-0.000006+0.000008i
117	4.68	0.99954	4	8.973	-0.000006+0.000006i
118	4.72	0.99955	5	9.05	-0.000006+0.000004i
119	4.76	0.99955	6	9.127	-0.000006+0.000002i
120	4.8	0.99955	7	9.203	-0.000006+0.000001i
121	4.84	0.99955	8	9.28	-0.000006
122	4.88	0.99955	9	9.357	-0.000006-0.000001i
123	4.92	0.99955	10	9.433	-0.000006-0.000002i
124	4.96	0.99955	11	9.5106	-0.000006-0.000004i
125	5	0.99955	12	9.587	-0.000006-0.000006i
126	5.04	0.99955	13	9.664	-0.000006-0.000008i
127	5.08	0.99955	14	9.741	-0.000006-0.00001i
128	5.12	0.99955	15	$\frac{25\pi}{8}$	-0.000006-0.00003i

## Ventana número 9

<b>K</b>	<b>tk</b>	<b>Xk</b>	<b>n</b>	<b>Wn</b>	<b>Xn</b>
129	5.16	0.99906	0	8.794	15.98515
130	5.2	0.99907	1	8.863	-0.000008+0.00004i
131	5.24	0.99907	2	8.931	-0.000007+0.00002i
132	5.28	0.99907	3	8.999	-0.000007+0.00001i
133	5.32	0.99907	4	9.0675	-0.000007+0.000007i
134	5.36	0.99907	5	9.135	-0.000007+0.000005i
135	5.4	0.99907	6	9.203	-0.000007+0.000003i
136	5.44	0.99907	7	$\frac{425\pi}{144}$	-0.000007+0.000001i
137	5.48	0.99907	8	9.3402	-0.000007
138	5.52	0.99907	9	9.408	-0.000007-0.000001i
139	5.56	0.99907	10	9.476	-0.000007-0.000003i
140	5.6	0.99908	11	9.544	-0.000007-0.000005i
141	5.64	0.99908	12	9.612	-0.000007-0.000007i
142	5.68	0.99908	13	9.68	-0.000007-0.00001i
143	5.72	0.99908	14	9.74	-0.000007-0.00002i
144	5.76	0.99908	15	$\frac{25\pi}{8}$	-0.000008-0.00004i

